บทที่ 6
การเคลื่อนที่ของกลุ่มคลื่นอิสระใน 1 มิติ

ในบทนี้จะศึกษาการเคลื่อนที่ของอนุภาคอิสระ (ไม่มีแรงภายนอกมากระทำ) ใน 1 มิติ เราจะศึกษาโดยประยุกต์ใช้เทคนิคการกระจายมาใช้อธิบายค่าที่น้อยที่สุดของความไม่แน่นอน และรูปแบบที่เป็นไปได้ของกลุ่มคลื่นใน 1 มิติ ที่สอดคล้องกับหลักความไม่แน่นอน

6.1 ผลคูณความไม่แน่นอนที่น้อยที่สุด

ในการหาค่าน้อยที่สุดของความไม่แน่นอนสำหรับผลคูณของ $\Delta x \cdot \Delta p$ เราต้องนิยามความหมายของปริมาณทั้งสองก่อนโดย

$$(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle) \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle 2x \langle x \rangle \rangle + \langle \langle x \rangle^2 \rangle$$

$$\langle \Delta p \rangle^2 = \langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$$

ถ้าเราให้ $\alpha \equiv x - \langle x \rangle$

$$\beta \equiv p - \langle p \rangle = -i\hbar\left(\frac{d}{dx} - \left\langle \frac{d}{dx} \right\rangle\right)$$

จะได้ว่า

$$(\Delta x^2) \cdot (\Delta p^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \alpha^2 \psi dx \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \beta^2 \psi dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha^* \psi^*)(\alpha\psi) dx \int_{-\infty}^{\infty} (\beta^* \psi^*)(\beta\psi) dx \quad \text{……………(6.1)}$$

จากเอกลักษณ์

$$\int \left| f - g\frac{\int fg^{*}dx}{\int |g|^{2}\,dx} \right|^{2} dx \geq 0$$ ถ้า $f = \gamma g$ เมื่อ γ เป็นค่าคงที่ จะได้ว่า

$$\int | f |^{2} dx \int | g |^{2} dx \geq \left| \int f^{*} g dx \right|^{2}$$

ถ้าเราแทน $f = \alpha\psi$ และแทน $g = \beta\psi$ สมการที่ (6.1) จะกลายเป็น

$$\left(\Delta x^{2}\right)\cdot\left(\Delta p^{2}\right) \geq \left| \int (\alpha^{*}\psi^{*})(\beta\psi)dx \right|^{2} = \left| \int \psi^{*}\alpha\beta\psi dx \right|^{2}$$

เทอมสุดท้ายสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$\left| \int \psi^{*} \left[\frac{1}{2}(\alpha\beta - \beta\alpha) + \frac{1}{2}(\alpha\beta + \beta\alpha) \right] \psi dx \right|^{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left| \int \psi^{*}(\alpha\beta - \beta\alpha)\psi dx \right|^{2} + \frac{1}{4}\left| \int \psi^{*}(\alpha\beta + \beta\alpha)\psi dx \right|^{2}$$

ผลคูณด้านขวาของสมการเป็นศูนย์

เมื่อเราใช้ความสัมพันธ์

$$\left(\int \psi^{*}\alpha\beta\psi dx \right)^{*} = \int \psi\alpha^{*}\beta^{*}\psi^{*}dx = \int (\beta^{*}\psi^{*})(\alpha\psi)dx = \int \psi^{*}\beta\alpha\psi dx$$

$$(\alpha\beta - \beta\alpha)\psi = -i\eta \left[x\frac{d\psi}{dx} - \frac{d}{dx}(x\psi) \right] = i\eta\psi$$

จะได้ $\left(\Delta x^{2}\right)\cdot\left(\Delta p^{2}\right) \geq \frac{1}{4}\eta^{2}$ หรือ $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{1}{2}\eta^{2}$

ซึ่งเป็นการยืนยันความถูกต้องของหลักความไม่แน่นอนของไฮเซนแบร์ก

6.2 รูปแบบของกลุ่มคลื่นที่มีค่าน้อยที่สุด

ความไม่แน่นอนของผลคูณจะมีค่าน้อยที่สุดเมื่อ เงื่อนไขทั้งสองข้อเป็นจริง

$$\alpha\psi = \gamma\beta\psi$$

$$\int \psi^{*}(\alpha\beta + \beta\alpha)\psi dx = 0$$

จาก $\alpha \equiv x - \langle x \rangle$ และ $\beta \equiv p - \langle p \rangle = -i\eta\left(\frac{d}{dx} - \left\langle \frac{d}{dx} \right\rangle\right)$ จะได้ว่า

$$\frac{d\psi}{dx} = \left[\frac{i}{\gamma\eta}(x - \langle x \rangle) + \frac{i\langle p \rangle}{\eta}\right]\psi$$

$$\psi(x) = N \exp\left[\frac{i}{\gamma\eta}(x - \langle x \rangle)^2 + \frac{i\langle p \rangle x}{\eta}\right]$$ เมื่อ N คือค่าคงที่

$$\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^{*}}\right)\int \psi^{*}\alpha^2\psi dx = 0$$ เมื่อ γ เป็นจำนวนจินตภาพ

N หาได้จากการนอร์มอลไลซ์ $\int |\psi|^2 dx = 1$

ส่วน γ หาได้เมื่อกำหนด $\int (x - \langle x \rangle)^2 |\psi|^2 dx = (\Delta x)^2$

เมื่อได้ค่าของอินทิเกรตข้างบนจำนำไปสู่กลุ่มคลื่นที่มีค่าน้อยที่สุด

$$\psi(x) = \left[2\pi(\Delta x)^2\right]^{-1/2} \exp\left[-\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{4(\Delta x)^2} + \frac{i\langle p \rangle x}{\eta}\right]$$

6.3 สัมประสิทธิ์การกระจายฟังก์ชัน (Momentum expansion coefficients)

จากฟังก์ชันไอเกนของโมเมนตัมใน 1 มิติ

$u_k(x) = L^{-1/2} e^{ikx}$ สำหรับกล่องยาว L

$u_k(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{ikx}$ สำหรับฟังก์ชันเดลตา

ฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคอิสระหาได้จาก

$$i\eta \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\eta^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

สมการคลื่นเขียนได้ในรูป

$$\psi(x,t) = (\sum_k or \int dx) A_k e^{-iE_k/\eta} u_k(x)$$

เมื่อ A_k ไม่ขึ้นกับ x และ t โดยเวลาทั้งหมดจะอยู่ในองค์ประกอบของเอกซ์โพเนนเชียล โดยมีเงื่อนไขว่า

$$E_k = \frac{\eta^2 k^2}{2m}$$

ปัญหาของการเคลื่อนที่ของกลุ่มคลื่นก็คือ การหาการกระจายของสัมประสิทธ์ของ A_k ที่เวลาเฉพาะใดๆ ถ้าให้ t= 0 จะได้ว่า

$$A_k = \int u_k^*(x) \psi(x,0) dx$$

ขอบเขตของการอินทิเกรตคือ $x = \pm \frac{1}{2} L$ หรือ $x = \pm\infty$ ขึ้นอยู่กับว่าเราจะใช้ฟังก์ชันคลื่นในกล่องหรือฟังก์ชันเดลตา

6.4 การเปลี่ยนแปลงของกลุ่มคลื่นตามเวลา

ถ้าเราเลือก $\psi(x,0)$ ซึ่ง $\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0$ กลุ่มคลื่นจะมีจุดเริ่มต้นที่ตำแหน่ง x = 0 และมีค่าเฉลี่ยโมเมนตัมเป็นศูนย์ จากนั้นใช้เงื่อนไขการนอร์มอลไลซ์ของกล่อง จะได้ว่า

$$A_k = \left[2\pi L^2(\Delta x)^2\right]^{1/2} \int_{-L/2}^{L/2} \exp\left[\frac{x^2}{4(\Delta x^2)} - ikx\right] dx$$

$$= \left[\frac{8\pi(\Delta x)^2}{L^2}\right]^{1/4} e^{-k^2(\Delta x)^2}$$

L มีขนาดใหญ่มาก ทำให้อินทิเกรตเมื่อ $|x| > \dfrac{L}{2}$ เป็นศูนย์ จะได้ฟังก์ชันคลื่นในกรณีทั่วไปว่า

$$\psi(x,t) = \sum_k A_k e^{-i\eta k^2 t/2m} u_k(x) \qquad \text{เมื่อ } k = \frac{2\pi n}{L}$$

n เป็นได้ทั้งจำนวนเต็มบวก เต็มลบและศูนย์ ถ้าเลือก L ที่ใหญ่พอและ n ที่มีค่าต่อเนื่องเราสามารถแทนผลรวมด้วยอินทิเกรต ดังนั้น

$$\psi(x,t) = \left[\frac{(\Delta x)^2}{2\pi^3}\right]^{1/4} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-k^2(\Delta x)^2 - \frac{i\eta k^2 t}{2m} + ikx\right] dx$$

$$= (2\pi)^{-1/4}(\Delta x + \frac{i\eta t}{2m\Delta x})^{-1/2} \exp(-\frac{x^2}{4(\Delta x)^2 + 2i\eta t/m})$$

ความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของตำแหน่ง

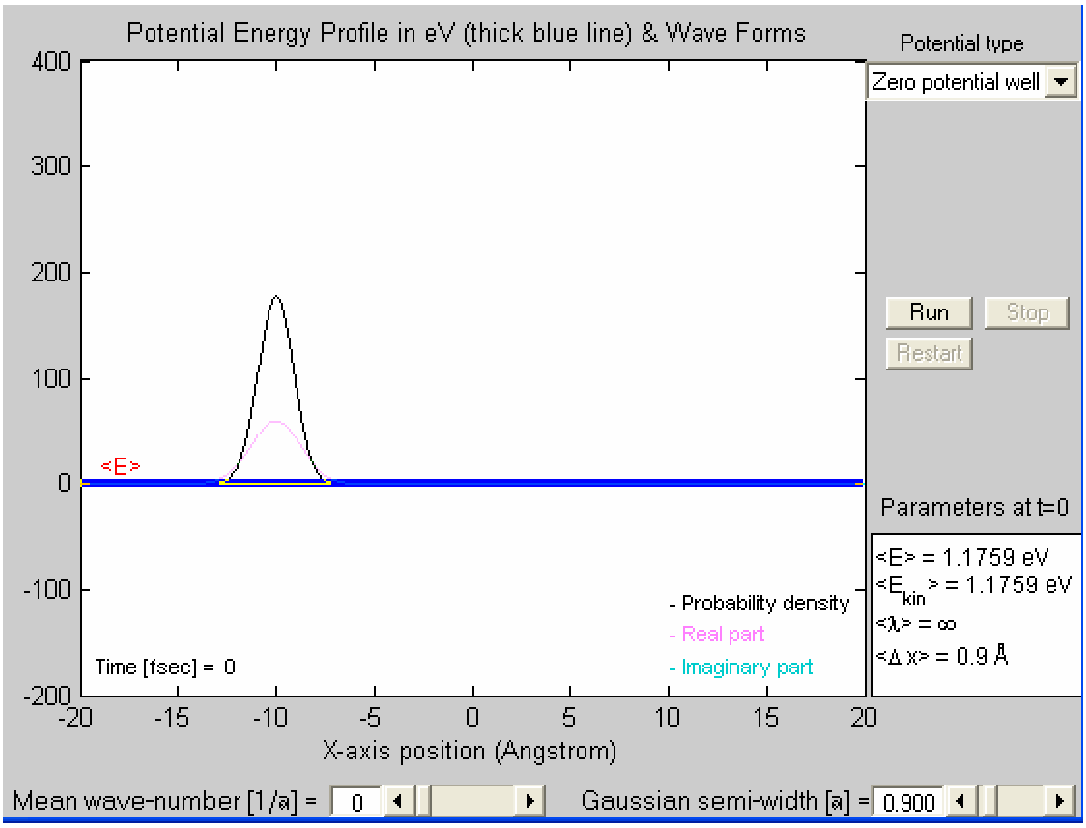
$$|\psi(x,t)|^2 = \left\{2\pi\left[(\Delta x)^2 + \frac{\eta^2 t^2}{4m^2(\Delta x)^2}\right]\right\} \exp\left(-\frac{x^2}{2\left[(\Delta x)^2 + \eta^2 t^2/4m^2(\Delta x)^2\right]}\right)$$

สมการนี้มีรูปเหมือน $|\psi(x,0)|^2$ ยกเว้น $(\Delta x)^2$ แทนด้วย

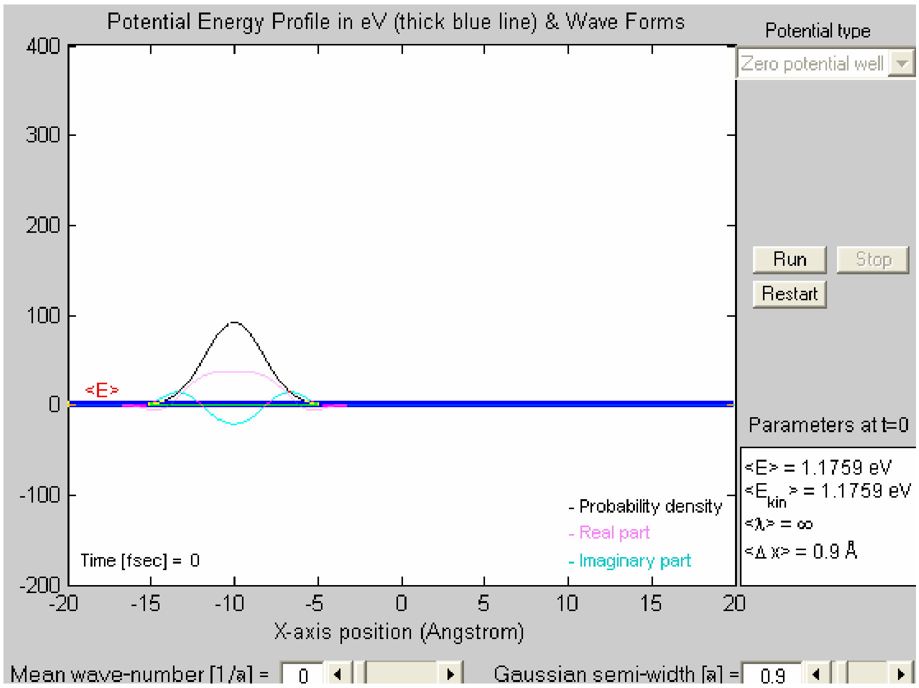
$(\Delta x)^2 + (\eta^2 t^2 / 4m^2(\Delta x)^2)$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $(\Delta x)^2 + (\Delta p)^2 t^2 / m^2$ ดังนั้นจุดศูนย์กลางของคลื่นยังอยู่ที่ x = 0 ในขณะที่ความกว้างของกลุ่มคลื่นมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ t ห่างออกจากศูนย์ทั้งสองข้าง

โปรแกรมที่ใช้แสดงการเคลื่อนที่ของกลุ่มคลื่นอยู่ในภาคผนวก 1 โดยมีเอาท์พุทจากโปรแกรมดังนี้

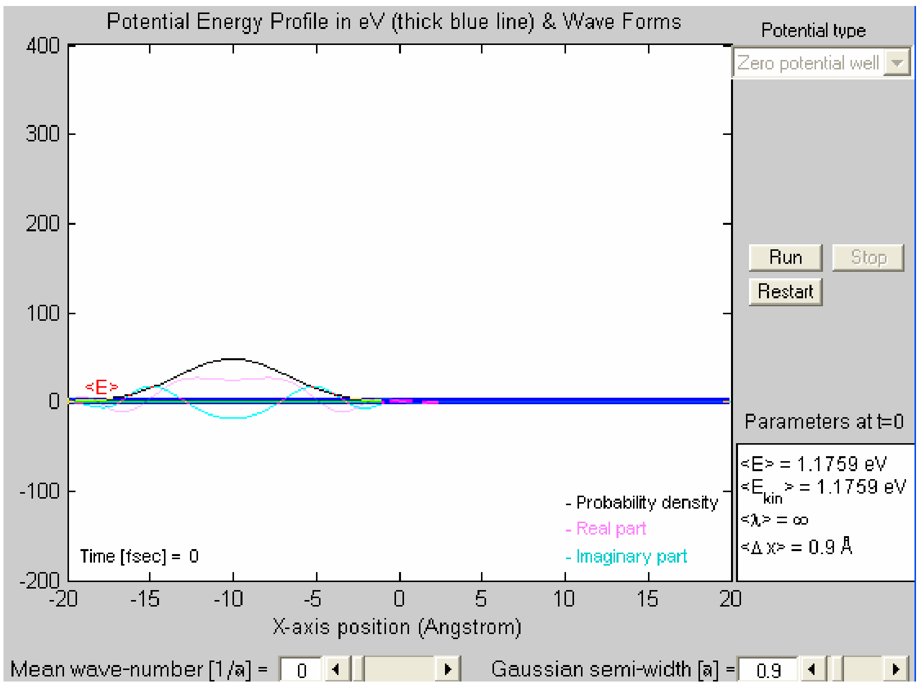
1. ศักย์บ่อศูนย์ ที่เวลา t = 0



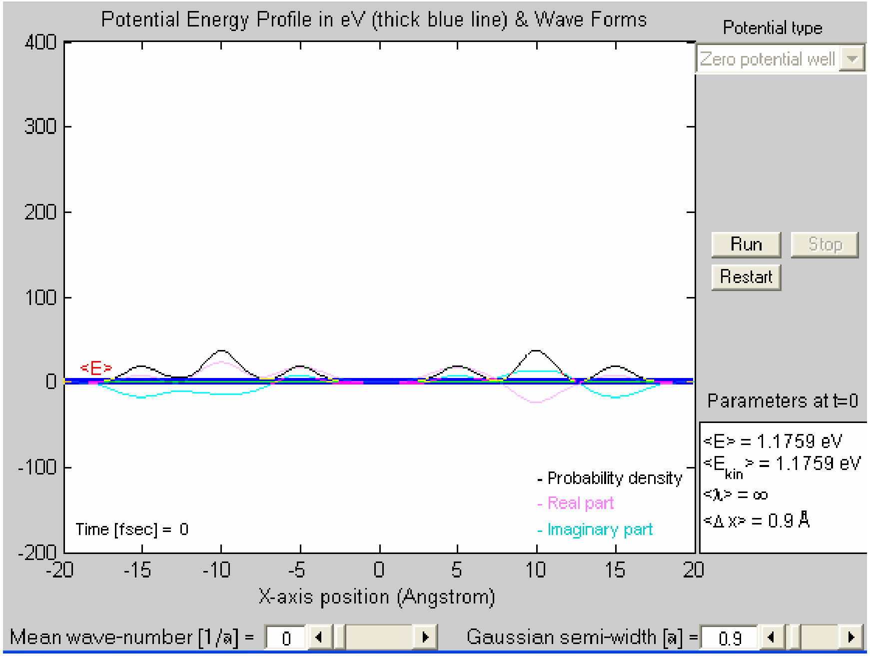
ที่เวลา t = 0.1 t วินาที กลุ่มคลื่นจะแผ่กระจายไปทางด้านข้าง โดยมีความสูงของคลื่นลดลง



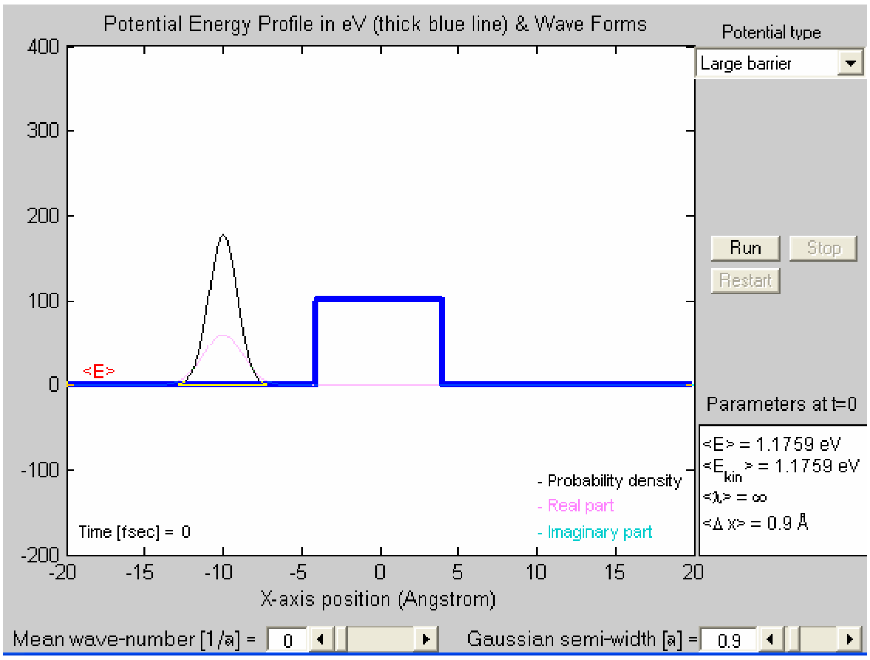
ที่เวลา t = 0.3 t วินาที ความสูงของคลื่นลดลง การกระจายของคลื่นก็จะมากยิ่งขึ้น



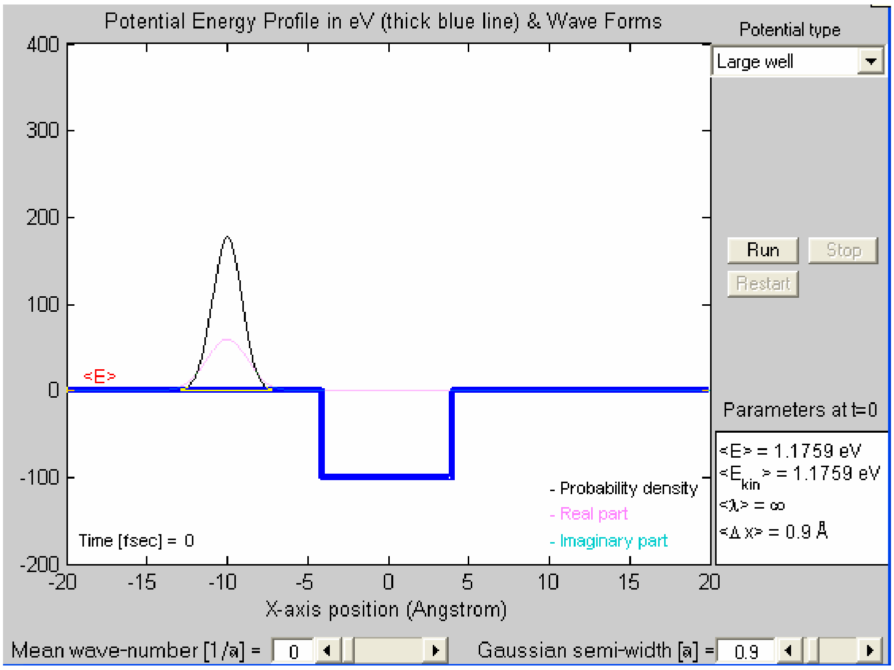
ที่เวลา t = 1.1 t วินาที คลื่นจะกระจายมากยิ่งขึ้น โดยมีการเพิ่มของพีกใหม่ที่มีขนาดเล็



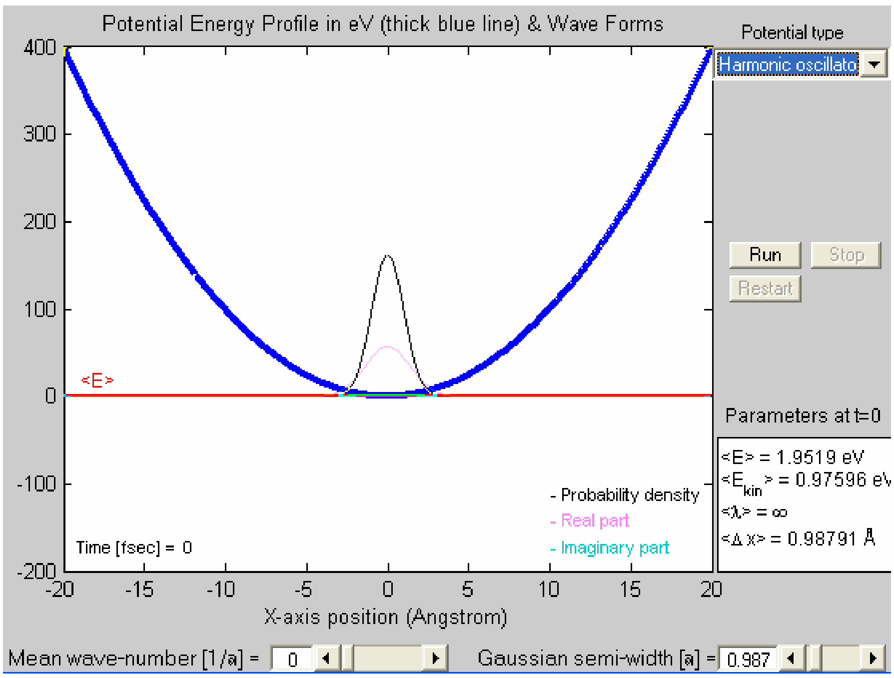
2. กำแพงศักย์ขนาดใหญ่ ที่ t = 0



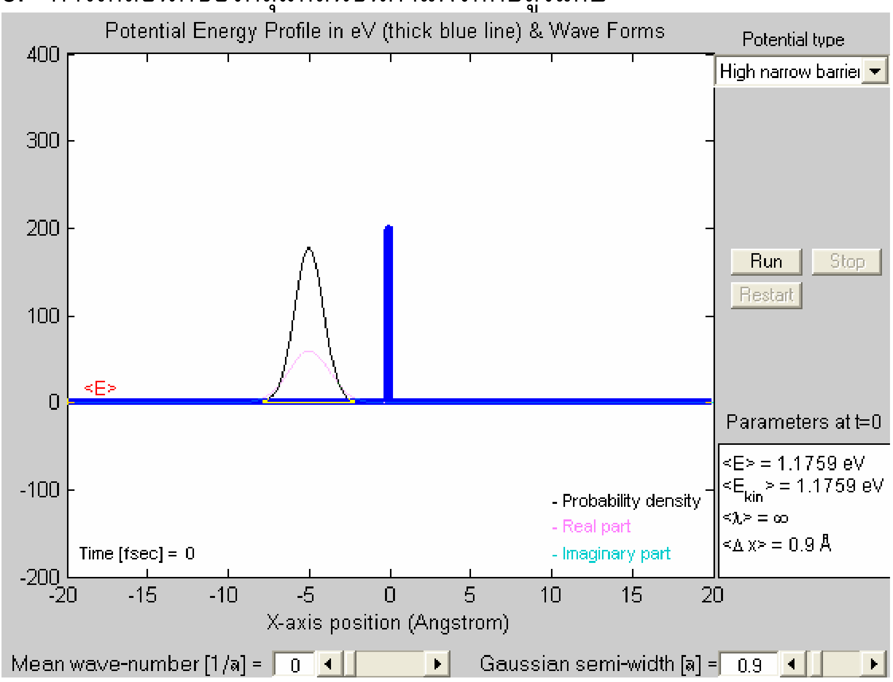
3. บ่อศักย์ขนาดใหญ่ ที่ t = 0



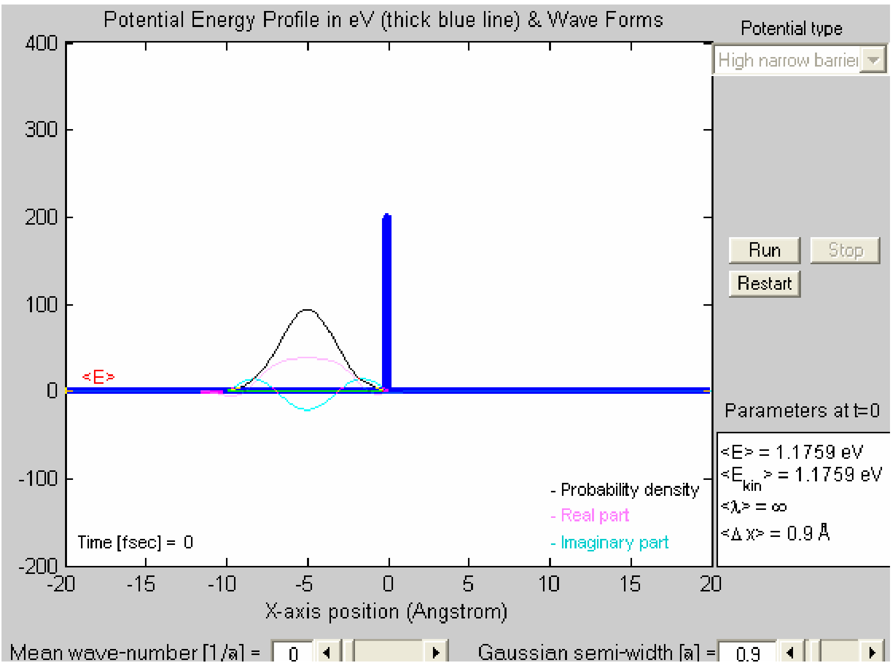
4. บ่อการกวัดแกว่งฮาร์มอนิกที่ t = 0



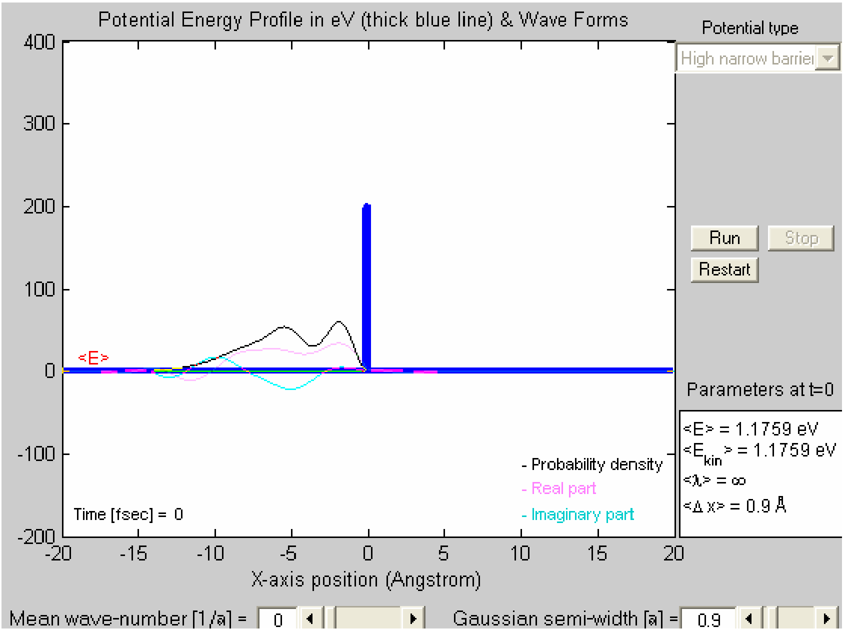
5. การเคลื่อนที่ของกลุ่มคลื่นชนกำแพงศักย์สูงแคบ



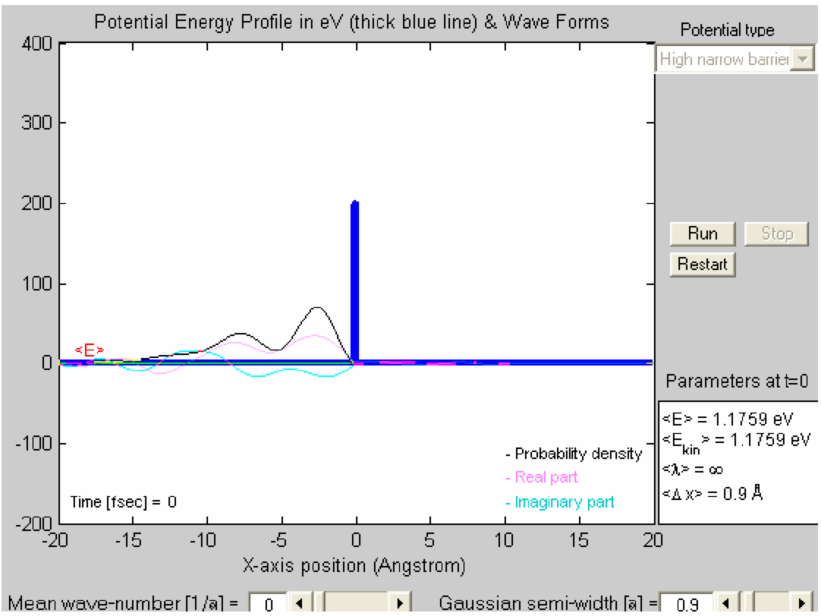
เมื่อเวลาผ่านไป 0.2 t วินาที



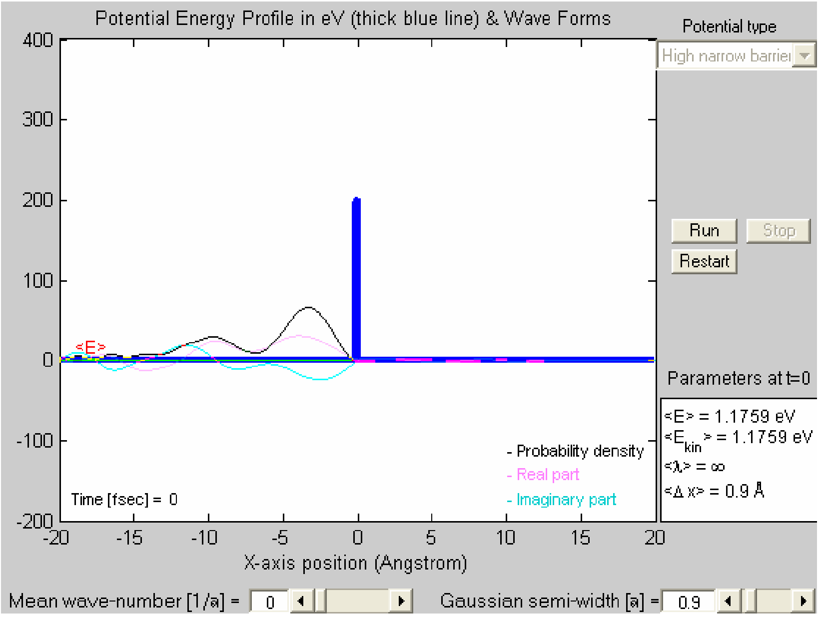
เมื่อเวลาผ่านไป 0.4 t วินาที



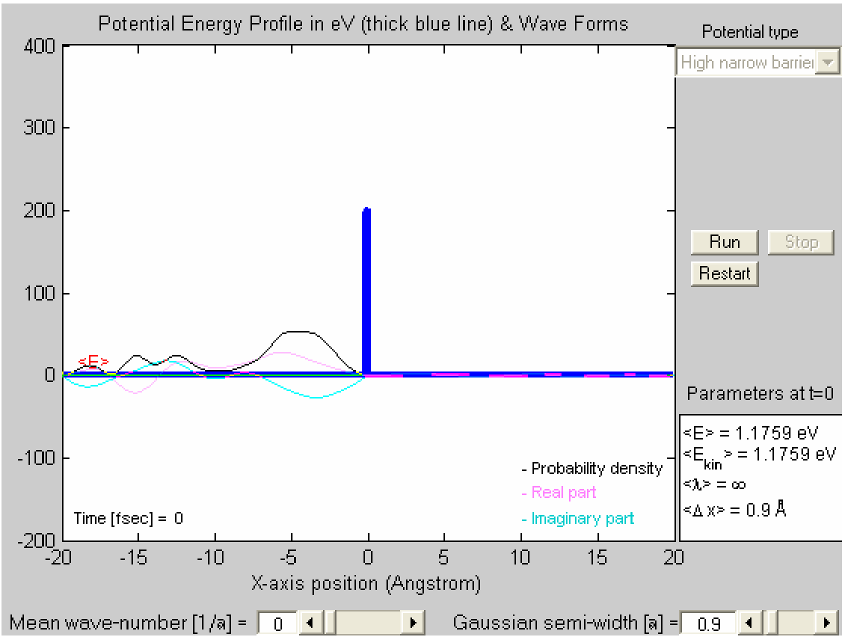
เมื่อเวลาผ่านไป 0.7 t วินาที



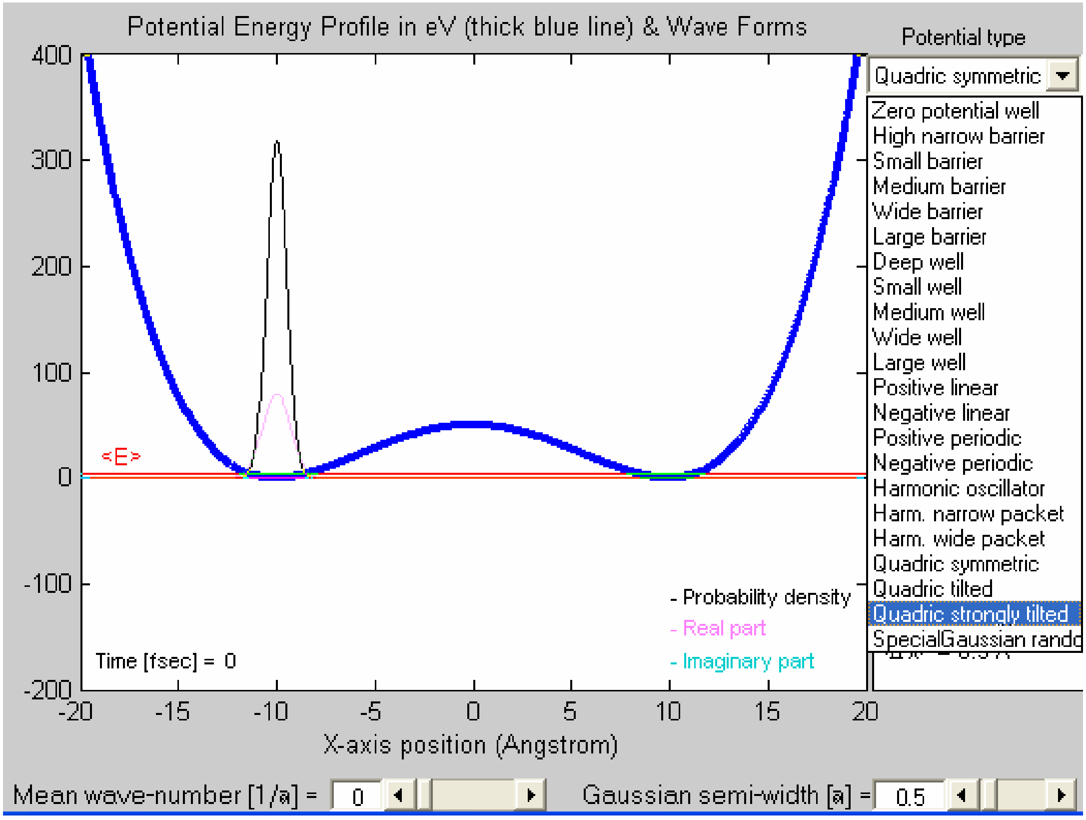
เมื่อเวลาผ่านไป 0.9 t วินาที



เมื่อเวลาผ่านไป 1.2 t วินาที



นอกจากนี้ยังมีศักย์ชนิดอื่นอีกหลายชนิดที่นักศึกษาสามารถศึกษาได้



แบบฝึกหัดบทที่ 6

1. พิจารณาอนุภาคอิสระมวล m ซึ่งมีฟังก์ชันคลื่นที่ t = คือ

$$\psi(x,t) = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{\frac{3}{4}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2(k-k_0)/4} e^{-ikx} dx$$

จงหาการเปลี่ยนแปลงตามเวลาของกลุ่มคลื่น $\psi(x,t)$ และความหนาแน่นความน่าจะเป็น $|\psi(x,t)|^2$ และจง วาดรูปความหนาแน่นความน่าจะเป็น

2. อนุภาคเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงสามารถแทนด้วยกลุ่มคลื่น

$$\psi(x) = (1+ix)/(1+ix^2)$$

   ก) จงนอร์แมลไลซ์กลุ่มคลื่น
   ข) จงหาจุดที่ความน่าจะเป็นมากที่สุด