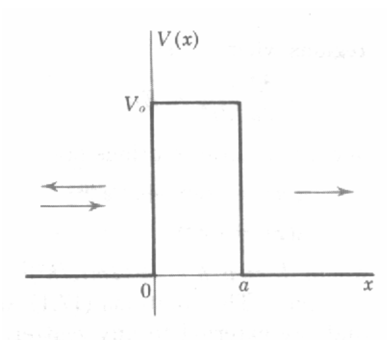
บทที่ 11
ค่าไอเกนที่ต่อเนื่อง ; ทฤษฏีการชนกัน

ค่าไอเกนของพลังงานที่เกี่ยวข้องจะมีค่าต่อเนื่องกรณีการชนกันของอนุภาคภายใต้สนามของแรง ค่าไอเกนของพลังงานที่เกี่ยวข้องจะมีค่าต่อเนื่องวิธีการแก้ปัญหาจะแตกต่างจากบทก่อนหน้านี้ ซึ่งจะใช้เงื่อนไขขอบเขตที่ระยะไกล ๆในการหาพลังงานขออนุภาคมีค่าไม่ต่อเนื่อง สำหรับปัญหาการชนเรารู้พลังงานก่อนฟังก์ชันคลื่นที่ระยะไกลในเทอมของพลังงานนี้



ภาพที่ 11.1 แสดง กำแพงศักย์ ที่มีความสูง V_o และความหนา a

11.1 กำแพงศักย์รูปสี่เหลี่ยมใน 1 มิติ

ศึกษาการชนกันของอนุภาคใน 1 มิติกับกำแพงศักย์ ดังแสดงในรูปที่ 11.1 อนุภาคที่เคลื่อนที่จากบริเวณ -x เกิดการสะท้อนและการทะลุผ่าน ถ้าเป็นกลศาสตร์แบบเก่าอนุภาคจะสะท้อนถ้าพลังงานน้อยกว่าความสูงของกำแพงและอนุภาคจะเคลื่อนที่ผ่านถ้าพลังงานมากกว่าความสูงของกำแพง แต่ในทางกลศาสตร์ควอนตัมจะมีทั้งการสะท้อนและการทะลุผ่าน

การประพฤติตัวระยะไกล (Asymptotic behavior)

ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่มาจากทางซ้ายด้วยพลังงาน $E > 0$ อนุภาคอาจจะสะท้อนกลับหรือทะลุผ่านไป $u(x) \propto e^{ipx/\hbar}$ ถ้าอนุภาคโมเมนตัม p เคลื่อนที่ไปทางขวา และ

$u(x) \propto e^{-ipx/\eta}$

$$-\frac{\eta^2}{2m}\frac{d^2u}{du^2} = Eu$$

ผลเฉลยคือ

$$u(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \qquad x \le 0$$

$$u(x) = Ce^{ikx} \qquad x \ge a$$

เมื่อ $k = p/\eta = +\left(2mE/\eta^2\right)^{1/2}$

การนอร์แมลไลซ์

ความหนาแน่นกระแสความน่าจะเป็น คือ

$$S(x) = v\left(|A|^2 - |B|^2\right) \qquad x < 0$$

$$S(x) = v|C|^2 \qquad x > a$$

เมื่อ $v = \eta k/m$ เป็นความเร็วของอนุภาคที่มีจำนวนการแผ่ (propagation number k)
A, B และ C เป็นแอมปลิจูดของฟังก์ชันคลื่นของคลื่นตกกระทบ คลื่นสะท้อนและคลื่นทะลุผ่าน เพื่อความสะดวกใช้ $\mathrm{A} = \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}}$

สัมประสิทธ์การกระเจิง (Scattering coefficients)

ลักษณะของผลเฉลยภายในบริเวณกำแพงศักย์จะขึ้นอยู่กับว่า พลังงานรวมของอนุภาคจะมีค่ามากกว่าหรือน้อยกว่าพลังงานศักย์ V_0 สมมติว่า

$$E > V_0$$

เราจะกำหนดให้ $\alpha = \left[2m\left(E - V_0\right)/\eta^2\right]^{1/2}$ ผลเฉลยภายในกำแพงศักย์จะเป็น

$$u(x) = Fe^{i\alpha x} + Ge^{-i\alpha x} \qquad 0 \le x \le a$$

อาศัยความต่อเนื่องของ u และ $\frac{du}{dx}$ ที่ x = 0 และ x = a แล้วทำให้ F และ G หมดไป จะได้

$$\frac{B}{A} = \frac{(k^2 - \alpha^2)(1 - e^{2i\alpha a})}{(k + \alpha)^2 - (k - \alpha)^2 e^{2i\alpha a}}$$

$$\frac{C}{A} = \frac{4k\alpha e^{i(\alpha - k)a}}{(k + \alpha)^2 - (k - \alpha)^2 e^{2i\alpha a}}$$

สัมประสิทธ์ของการทะลุผ่าน คือ

$$\left|\frac{B}{A}\right|^2 = \left[1 + \frac{4k^2\alpha^2}{\left(k^2 - \alpha^2\right)^2 \sin^2 \alpha a}\right]^{-1} = \left[1 + \frac{4E(E - V_0)}{V_0^2 \sin^2 \alpha a}\right]^{-1}$$

$$\left|\frac{C}{A}\right|^2 = \left[1 + \frac{(k^2 - \alpha^2)^2 \sin^2 \alpha a}{4k^2\alpha^2}\right]^{-1} = \left[1 + \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha a}{4E(E - V_0)}\right]^{-1}$$

จะเห็นได้ว่าผลบวกของ ทั้งสองสมการมีค่าเท่ากับ 1 ตามที่เราคาดหวัง แสดงว่า ถ้าพลังงานรวมมีค่าเข้าใกล้ความสูงของกำแพงศักย์ $(E \rightarrow V_0)$ สัมประสิทธิ์ของการสะท้อนจะมีค่าเข้าใกล้ $\left(1 + \frac{mV_0 a^2}{2\eta^2}\right)^{-1}$ เมื่อ E เพิ่มขึ้น E >V_0 สัมประสิทธิ์ของการทะลุผ่านจะมีค่าขึ้นลงเท่ากับ 1 ดังแสดงในรูป 11.2 โดยจะเกิดการทะลุผ่านหมด เมื่อ $\alpha a = \pi, 2\pi, ...$

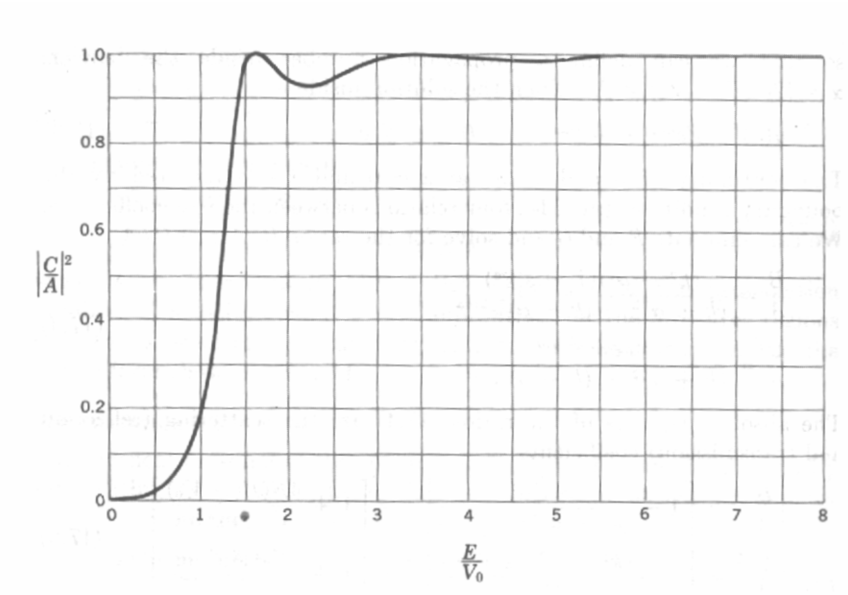
สัมประสิทธิ์ของการสะท้อนและสัมประสิทธิ์ของการทะลุผ่านสำหรับกรณี $0 < E < V_0$ หาได้โดยการแทน α ด้วย $i\beta$ ซึ่ง $\beta = \left[\dfrac{2m(V_0 - E)}{\eta^2} \right]^{1/2}$

สัมประสิทธิ์ของการทะลุผ่านคือ

$$\left| \frac{C}{A} \right|^2 = \left[1 + \frac{V_0^2 \sinh^2 \beta a}{4E(V_0 - E)} \right]^{-1}$$

เมื่อ $\beta a >> 1$ สัมประสิทธิ์การทะลุผ่าน จะมีค่าน้อยและมีค่าประมาณ

$$\frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-2\alpha\beta}$$



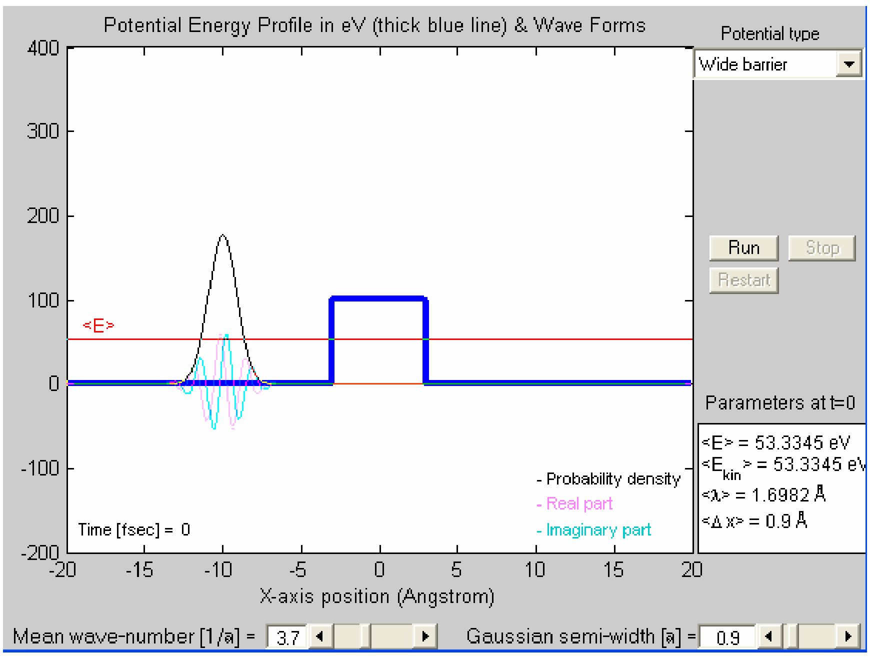
ภาพที่ 11.2 แสดงสัมประสิทธิ์การทะลุผ่านของกำแพงศักย์สี่เหลี่ยมเมื่อพลังงานของอนุภาคมีค่า $mV_0a^2/\text{h}^2 = 8$

11.2 การกระเจิงของกลุ่มคลื่น (scattering of a wave packet)

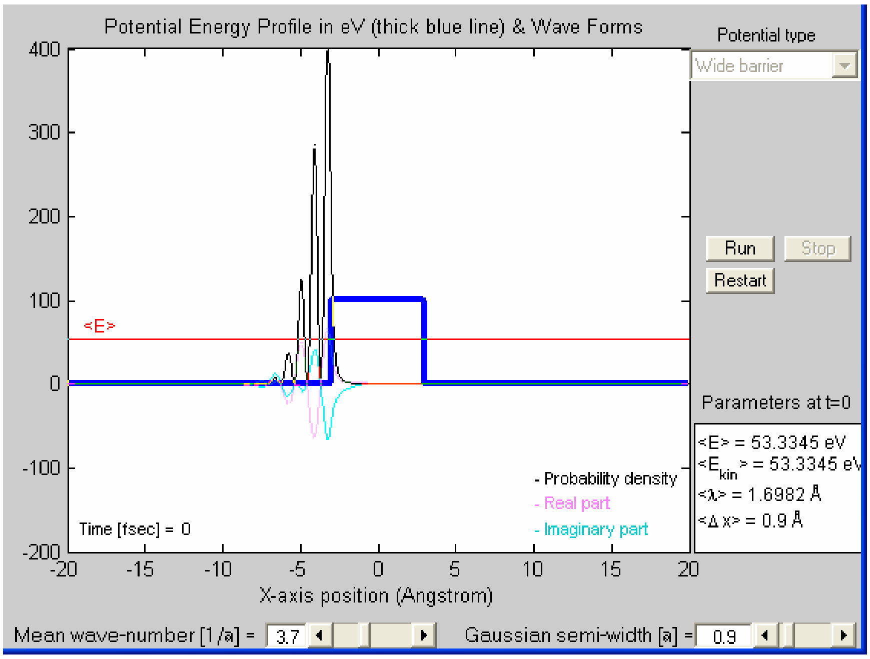
การศึกษาการกระเจิง อาศัยผลเฉลยคงที่ของสมการคลื่นที่ไม่ขึ้นกับเวลา โดยมีโมเมนตัมตกกระทบค่าหนึ่ง การศึกษานี้อาจจะใช้สมการที่ขึ้นกับเวลาได้ ถึงแม้ว่าจะมีความยากลำบากในการแก้ปัญหามากกว่ามาก เพราะว่าสมการอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับตัวแปร 2 ตัว คือ x และ t อย่างไรก็ตาม ข้อดีก็คือ เราสามารถศึกษาการเคลื่อนที่ของกลุ่มคลื่นในรูปแบบที่เราได้ศึกษามา และจะทำให้เราเข้าใจการสะท้อนและการทะลุผ่านของกลุ่มคลื่นเมื่อตกกระทบกำแพงศักย์ได้ การศึกษาทำได้ 2 วิธี คือ การคำนวณโดยตรงในลักษณะคล้ายการเคลื่อนที่ของอนุภาคอิสระและใช้การวิเคราะห์เชิงตัวเลขโดยอาศัยคอมพิวเตอร์ช่วยในการคำนวณ

การกระเจิงของกลุ่มคลื่นจากกำแพงศักย์รูปสี่เหลี่ยม

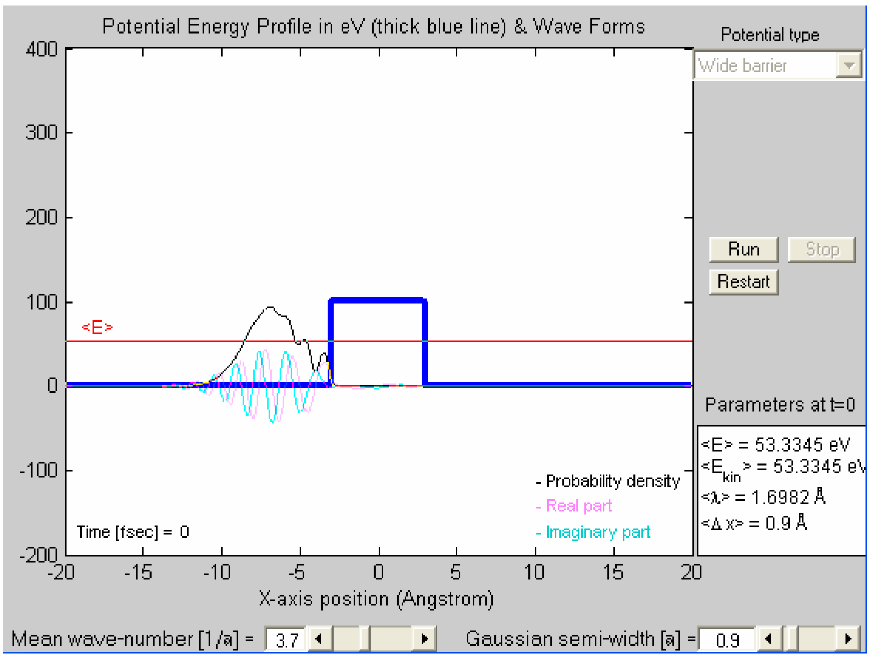
กรณีที่ 1 เมื่อพลังงานเฉลี่ยของกลุ่มคลื่น เท่ากับครึ่งหนึ่งของความสูงของกำแพงศักย์



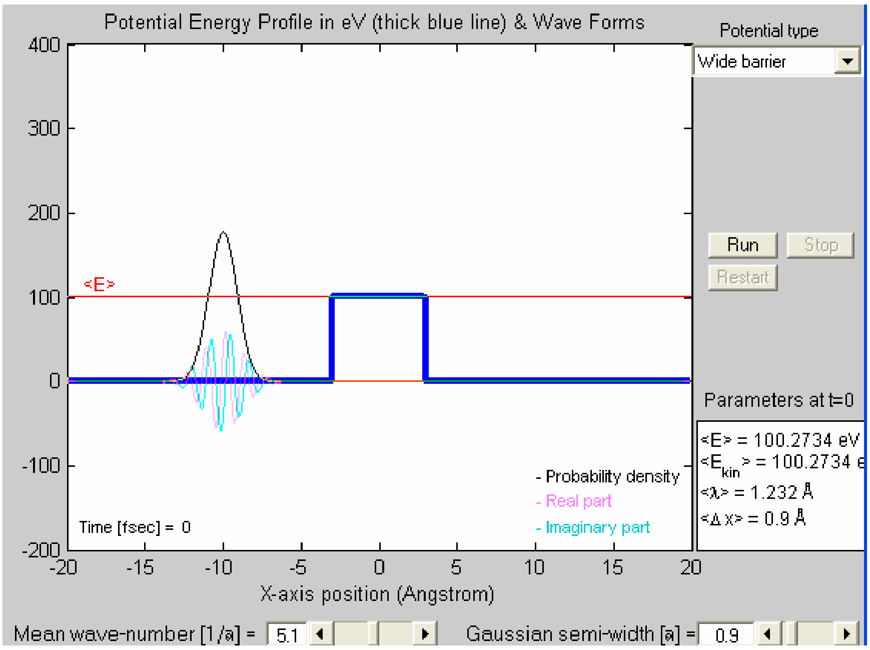
เมื่อเวลาผ่านไป 0.1 t วินาที



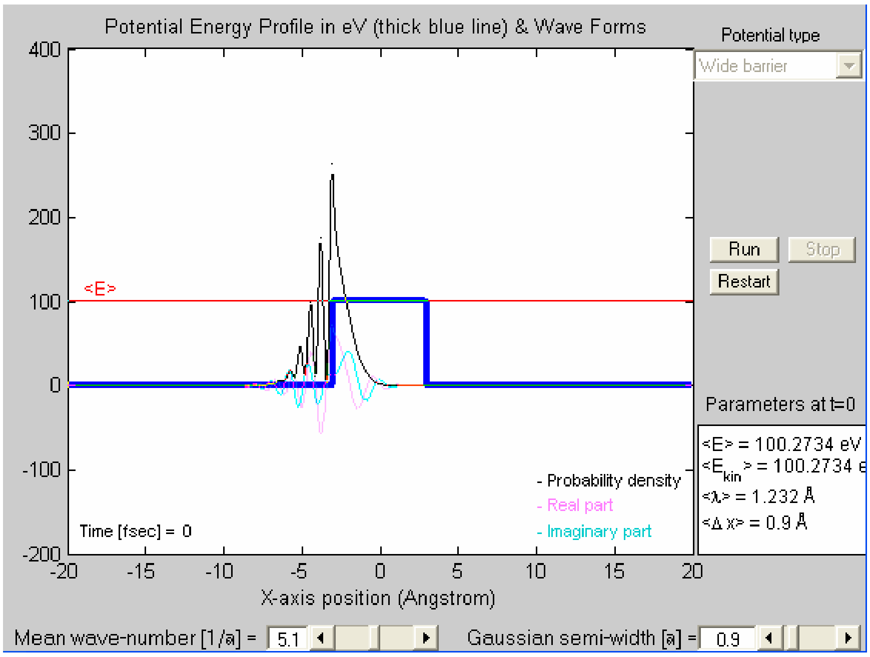
เมื่อเวลาผ่านไป 0.2 t วินาที



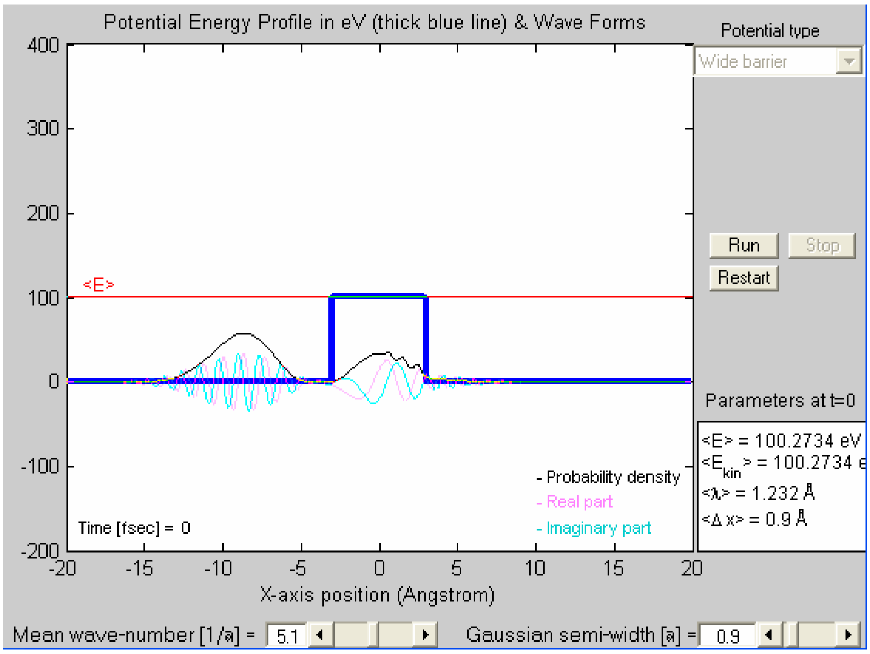
กรณีที่ 2 เมื่อพลังงานเฉลี่ยของกลุ่มคลื่น เท่ากับความสูงของกำแพงศักย์



เมื่อเวลาผ่านไป 0.1 t วินาที

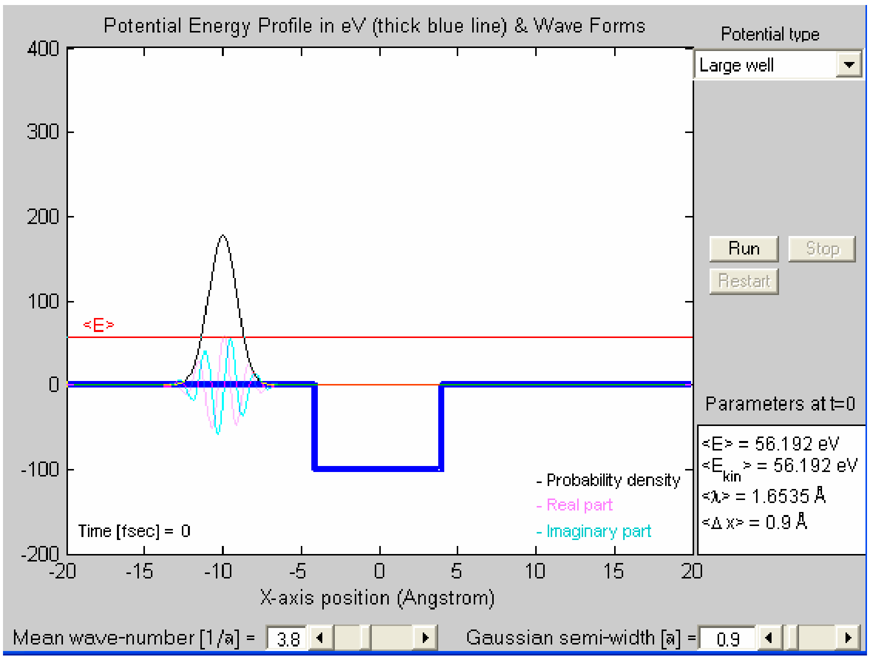


เมื่อเวลาผ่านไป 0.2 t วินาที

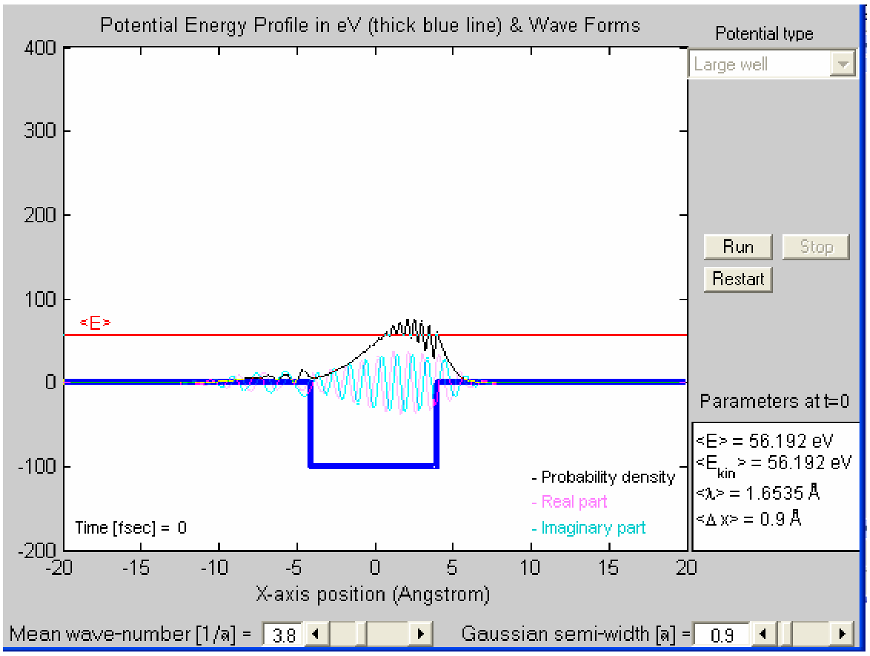


การกระเจิงของกลุ่มคลื่นจากบ่อศักย์รูปสี่เหลี่ยม

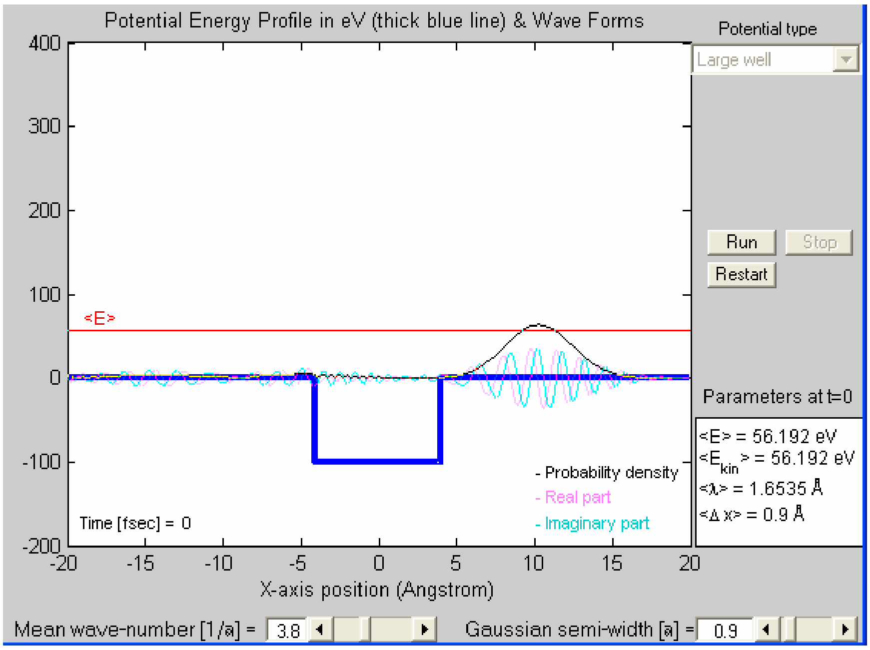
กรณีที่ 1 เมื่อพลังงานเฉลี่ยของกลุ่มคลื่น เท่ากับครึ่งหนึ่งของความลึกของบ่อ



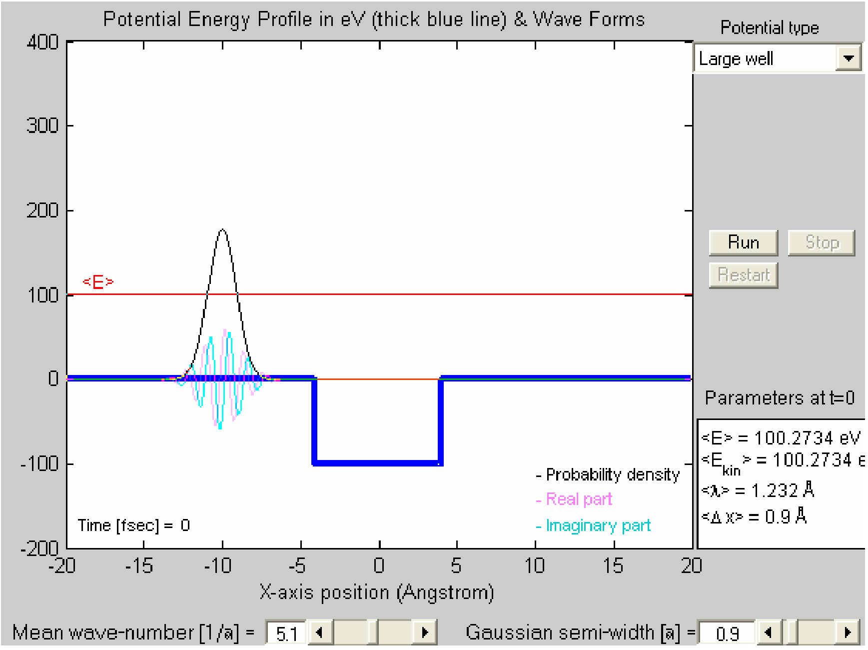
เมื่อเวลาผ่านไป 0.1 t วินาที



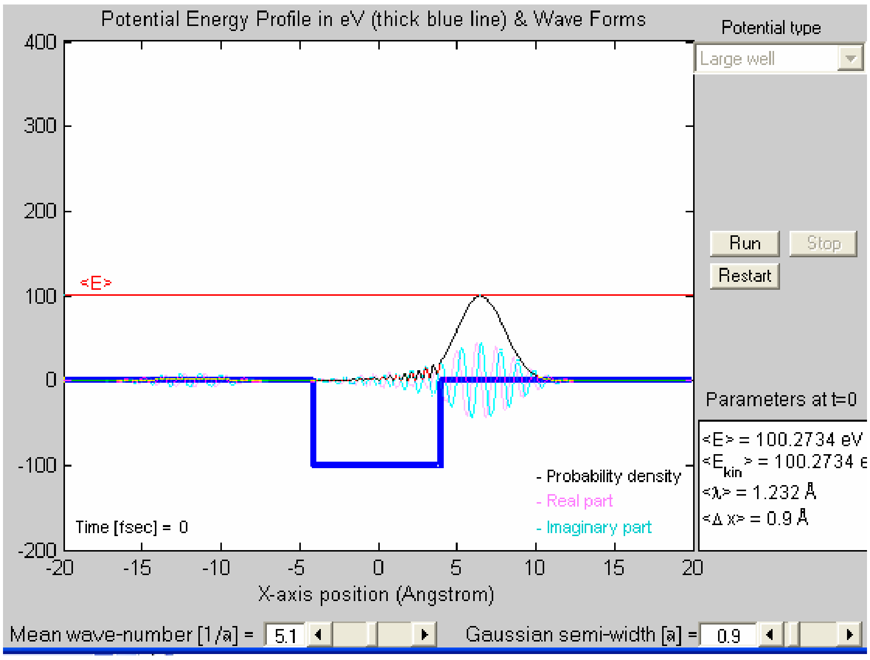
เมื่อเวลาผ่านไป 0.2 t วินาที



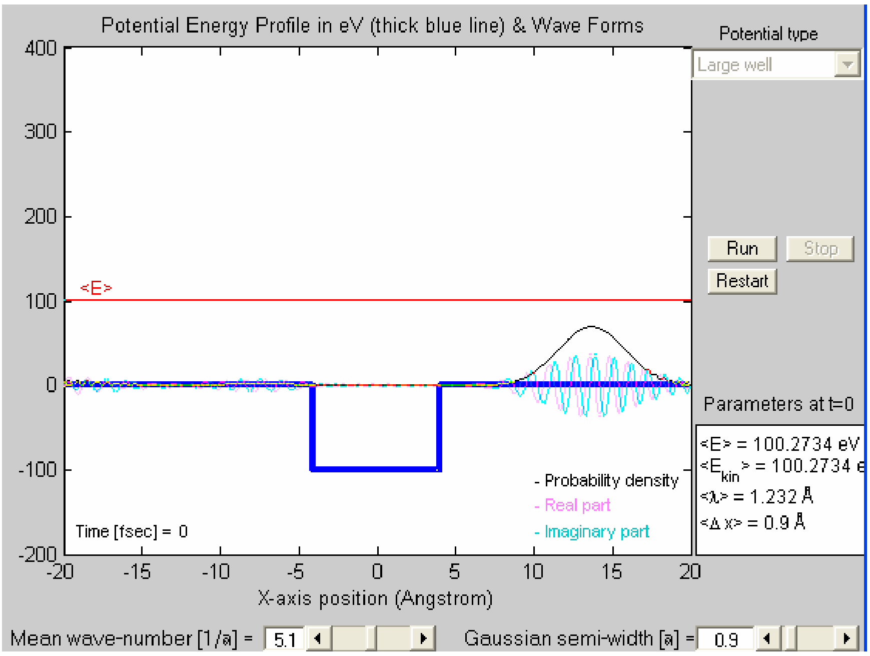
กรณีที่ 2 เมื่อพลังงานเฉลี่ยของกลุ่มคลื่น เท่ากับความลึกของบ่อ



เมื่อเวลาผ่านไป 0.1 t วินาที

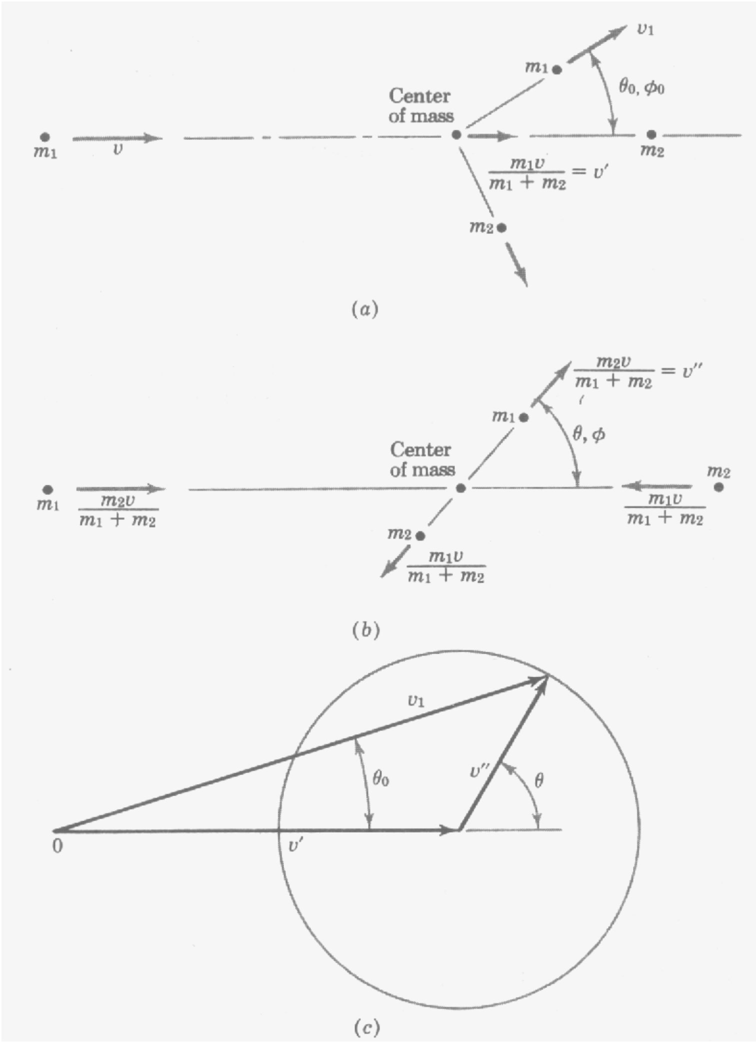


เมื่อเวลาผ่านไป 0.2 t วินาที



11.3 การชนกันใน 3 มิติ(collisions in three dimensions)

ในหัวข้อนี้จะศึกษาการชนกันใน 3 มิติ โดยอนุภาคชนกับสนามของแรง หรืออนุภาคสองตัวชนกัน การแก้ปัญหาอาจพิจารณาในรูประบบพิกัดของศูนย์กลางมวลหรือระบบพิกัดของห้องทดลอง



รูปที่ 11.7 แสดงการชน (a) ระบบพิกัดห้องทอลอง (b) ระบบพิกัดศูนย์กลางมวล (c) เวกเตอร์ของความเร็ว

ภาคตัดขวางการกระเจิง (Scattering cross section)

จำนวนอนุภาคที่ทะลุผ่านต่อหนึ่งหน่วยเวลาในมุมตัน (solid angel) $\Delta\omega_0$ คือ

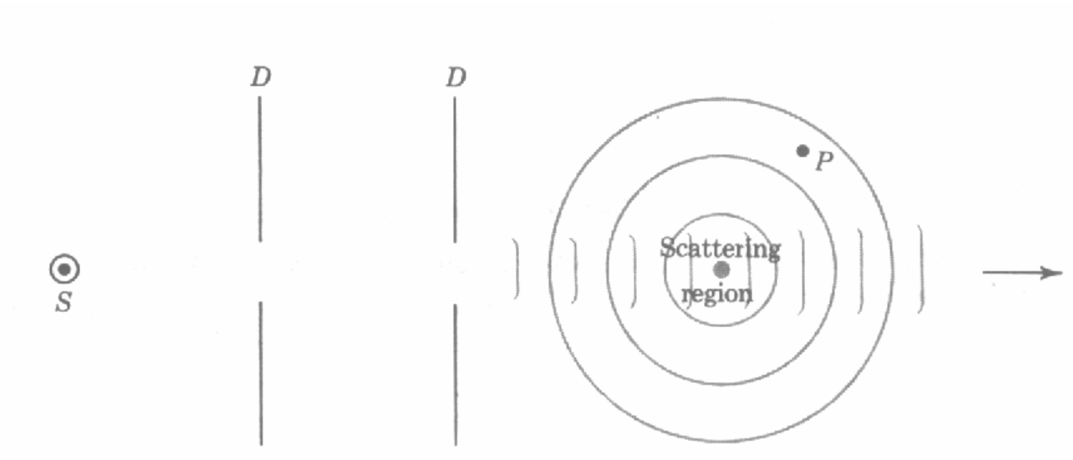
$$nN\sigma_0(\theta_0, \phi_0)\Delta\omega_0$$

เมื่อ $\sigma_0(\theta_0, \phi_0)$ เป็นภาคตัดขวางการกระเจิงดิฟเฟอเรนเชียล (differential scattering cross section)

ภาคตัดขวางรวม (total scattering cross section) คือ

$$\sigma_0 = \int \sigma_0(\theta_0, \phi_0)d\omega_0$$

สำหรับการชนของอนุภาคกับจุดศูนย์กลางของการกระเจิง จะมีค่าเท่ากันทั้งระบบพิกัดศูนย์กลางมวลและพิกัดห้องทดลองเนื่องจากจุดศูนย์กลางมวลตรึงอยู่กับที่ อย่างไรก็ตาม สำหรับการชนกันของอนุภาค 2 อนุภาคที่มีมวลจำกัด จะใช้ได้เฉพาะระบบพิกัดห้องทดลองเท่านั้น



รูปที่ 11.8 การชนกันของอนุภาค

ตัวอย่าง ที่ 11.1 ศักย์ขั้น (Step potential)

$$V(X) = \begin{cases} V_0, X > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

สมมุติว่าอนุภาคพลังงาน E > V_0 เคลื่อนที่จาก x = -∞ ไปทางขวา

ก) จงเขียนผลเฉลยคงที่ในแต่ละบริเวณ

ข) จงอธิบายว่าไม่มีกระแสเคลื่อนที่กลับ จาก x = -∞ มาทางซ้าย

ค) จงเขียนแอมพลิจูดของการสะท้อน และการส่งผ่าน ในเทอมของแอมพลิจูดตกกระทบ

วิธีทำ ก) $k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\eta^2}}$, $k_2 = \sqrt{\frac{2m(E-V)}{\eta^2}}$

ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$\Phi_1(x) = A_1 e^{ik_1 x} + A_1' e^{-ik_1 x}$$
$$\Phi_2(x) = A_2 e^{ik_2 x} + A_2' e^{-ik_2 x}$$

ข) ฟังก์ชันคลื่น e^{ikx} แทนอนุภาคเคลื่อนที่จาก x = -∞ ไปทางขวา

ฟังก์ชั่นคลื่น e^{-ikx} แทนอนุภาคเคลื่อนที่จาก x = +∞ ไปทางซ้าย

ในบริเวณ ที่ 2 $A'_2 = 0$ $\Phi_2(x) = A_2 e^{ik_2 x}$

ค) ที่ x = 0 $\Phi_1(0) = \Phi_2(0)$

$$A_1 + A_1' = A_2$$

ที่ x = 0 $\Phi'_1(0) = \Phi'_2(0)$

$$\frac{\partial \Phi_1(x)}{\partial x} = ik_1 A_1 e^{ik_1 x} - ik_1 A'_1 e^{-ik_1 x}$$
$$\frac{\partial \Phi_{21}(x)}{\partial x} = ik_2 A_2 e^{ik_2 x}$$

ดังนั้น $$ik_1(A_1 - A'_1) = ik_2A_2$$

แทนค่า A_2 จะได้ว่า

$$A_1 + A'_1 = (A_1 - A'_1)\frac{k_1}{k_2}$$

$$\frac{A'_1}{A_1} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$$

เนื่องจาก $$A_2 = A_1\left(1 + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)$$

ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$$

ตัวอย่างที่ 11.2 จากตัวอย่างที่ผ่านมา ก) จงหากระแสความน่าจะเป็น ในบริเวณที่ I และบริเวณที่ II และอธิบายความหมายของแต่ละเทอม

ข) จงหา สัมประสิทธิ์การสะท้อน และ สัมประสิทธิ์การทะลุผ่าน

วิธีทำ ก) สำหรับ stationary state Φ(x)

$$J(x) = \frac{\eta}{2mi}\left[\Phi^*(x)\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x} - \Phi(x)\frac{\partial\Phi^*(x)}{\partial x}\right]$$

ในบริเวณ ที่ I

$$\begin{aligned} J_1(x) = \frac{\eta}{2mi}[&\left(A_1^* e^{-ik_1x} + A'_1 e^{ik_1x}\right)\left(ik_1A_1e^{ik_1x} - ik_1A'_1 e^{-ik_1x}\right) - \left(A_1e^{ik_1x} + A'_1 e^{-ik_1x}\right) \\ &- \left(A_1e^{ik_1x} + A'_1 e^{-ik_1x}\right)\left(-ik_1A_1^*e^{-ik_1x} + ik_1A'^*_1 e^{ik_1x}\right) \\ = \frac{\eta k_1}{m}&\left(|A_1|^2 - |A'_1|^2\right) \end{aligned}$$

สมการนี้จะประกอบด้วยคลื่นตกกระทบและคลื่นสะท้อน

$$J_2(x) = \frac{\eta}{2mi}[A_{21}^* e^{-ik_2x}(ik_2)e^{ik_1x} - A_2 e^{ik_2x}(-ik_2 e^{-ik_2x})] = \frac{\eta k_2}{m}\left|A_2^{\,2}\right|$$

เป็นสมการคลื่นทะลุผ่าน

ข)

$$R = \frac{|A'_1|^2 \eta k_1/m}{|A_1|^2 \eta k_1/m} = \left|\frac{A'_1}{A_1}\right|^2 = \left(\frac{K_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 = 1 - \frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2}$$

$$T = \frac{|A_2|^2 \eta k_2/m}{|A_1|^2 \eta k_1/m} = \frac{k}{k}\left|\frac{A}{A}\right| = \frac{k}{k}\left(\frac{2k_1}{k_1+k_2}\right)^2 = \frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2}$$

ตัวอย่างที่ 11.3 พิจารณาอนุภาคอิสระมวล m ซึ่งแทนด้วยฟังก์ชันคลื่น ที่ t = 0

$$\Psi(x,0) = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{\frac{3}{4}}}\int e^{-\frac{a^2(k-k_0)^2}{4}} e^{ikx}dx$$

จงคำนวณการเปลี่ยนแปลงตามเวลาของกลุ่มคลื่น $\Psi(x,t)$ และความหนาแน่นความน่าจะเป็น $|\Psi(x,t)|^2$ จงวาดภาพ ของความหนาแน่นความน่าจะเป็น เมื่อ t < 0 , t = 0 และ t > 0 อาศัยคุณสมบัติของจำนวนเชิงซ้อน α และ β ซึ่ง $-\frac{\pi}{4} < \arg(\alpha) < \frac{\pi}{4}$

$$\int e^{-\alpha^2(y+\beta)^2}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$$

วิธีทำ กลุ่มคลื่นที่ t = 0 ได้จากการซ้อนทับของคลื่นระนาบ e^{ikx} โดยมีสัมประสิทธิ์

$$\frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{\frac{3}{4}}} e^{-\frac{a^2(k-k_0)}{4}}$$ เป็นกราฟรูปเกาส์เซียน ที่ $k = k_0$

การเปลี่ยนแปลงตามเวลาของคลื่นระนาบ e^{ikx} จะอยู่ในรูปของ

$$e^{ikx} e^{-\frac{iE(k)t}{\eta}} = e^{ikx} e^{-\frac{i\eta k^2 t}{2m}}$$

เราทำการกำหนดให้ $w(k) = \frac{\eta k^2}{2m}$ อาศัยการซ้อนทับ

$$\Psi(x,t) = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{\frac{3}{4}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a^2(k-k_0)^2}{4}} e^{i[kx - w(k)t]} dk$$

จัดเทอมเสียใหม่เราจะได้ว่า

$$-\frac{a^2}{4}(k-k_0)^2 + i[kx - w(k)t] = -(\frac{a^2}{2}k_0 + ix)k - \frac{a^2}{4}k_0^2$$

$$= -\left(\frac{a^2}{4} + \frac{i\eta t}{2m}\right)\left[k - \frac{\frac{a^2}{2}k_0 + ix}{2\left(\frac{a^2}{4} + \frac{i\eta t}{2m}\right)}\right]^2 + \frac{\left(\frac{a^2}{2}k_0 + ix\right)^2}{4\left(\frac{a^2}{4} + \frac{i\eta t}{2m}\right)} - \frac{a^2}{4}k_0^2$$

ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$\Psi(x,t) = \frac{\sqrt{a}}{2^{\frac{3}{4}}\pi^{\frac{1}{4}}} \frac{e^{\left(-\frac{a^2k_0^2}{4}\right)}}{\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{i\eta t}{2m}}} e^{\left[\frac{\left(\frac{a^2}{2}k_0 + ix\right)^2}{a^2 + \frac{2i\eta t}{m}}\right]}$$

$$\Psi^*(x,t) = \frac{\sqrt{a}}{2^{\frac{3}{4}}\pi^{\frac{1}{4}}} \frac{e^{\left(-\frac{a^2k_0^2}{4}\right)}}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{i\eta t}{2m}}} e^{\left[\frac{\left(\frac{a^2k_0}{2} - ix\right)^2}{a^2 - \frac{2i\eta t}{m}}\right]}$$

ดังนั้น

$$\left|\Psi(x,t)\right|^2 = \frac{a}{2^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}} \frac{e^{\left(-\frac{a^2k_0^2}{2}\right)}}{\sqrt{\left(\frac{a^4}{4} + \frac{i\eta t}{2m}\right)\left(\frac{a^2}{4} - \frac{i\eta t}{2m}\right)}}$$

$$\times e^{\left[\frac{\left(\frac{a^2k_0}{2}\right)^2 - x^2 + ia^2k_0x}{a^2 + \frac{2i\eta t}{m}} + \frac{\left(\frac{a^2k_0}{2}\right)^2 - x^2 - ia^2k_0x}{a^2 - \frac{2i\eta t}{m}}\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi a^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\eta^2t^2}{m^2a^4}}} e^{\left[-\frac{\frac{a^2k_0^2}{2}\left(a^4 + \frac{4\eta^2t^2}{m^2}\right) + 2a^2\left(\frac{a^4k_0^2}{2} - x^2\right) + \frac{4\eta k\ a^2}{m}}{a^4 + \frac{4\eta^2t^2}{m^2}}\right]t}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi a^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\eta^2 t^2}{m^2 a^4}}} e^{\left[-\frac{2a^2 (x - \frac{\eta k_0 t}{m})^2}{a^4 + \frac{4\eta^2 t^2}{m^2}} \right]}$$

ความหนาแน่นความน่าจะเป็น เป็นกราฟรูปเกาส์เซียน กลุ่มคลื่นเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $v_0 = \frac{\eta k_0}{m}$ ค่าของ $\left|\Psi(x,t)\right|^2$ มีค่ามากที่สุดเมื่อ t = 0 ลดลง เข้าสู่ศูนย์เมื่อ $t \longrightarrow \infty$

ความกว้างของกลุ่มคลื่นน้อยที่สุดเมื่อ t = 0 และจะมีค่าเพิ่มขึ้นถึง ∞ เมื่อ $t \longrightarrow \infty$

ตัวอย่างที่ 11.4

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ V_0 & 0 < x < l \\ 0, & l < x \end{cases}$$

ก) สมมุติว่า อนุภาคที่ตกกระทบมีพลังงาน E > v_0 และเคลื่อนที่มาจาก x = -∞ จงหา สเตทคงที่ ใช้ภาวะขอบเขตที่ x = 0 และ x = l

ข) จงหา สัมประสิทธิ์ของการสะท้อนและสัมประสิทธิ์ของการทะลุผ่าน จากไดอะแกรมแสดง สัมประสิทธิ์การทะลุผ่าน เป็นฟังก์ชันของความกว้างของกำแพง l และอธิบายผลที่ได้

วิธีทำ ก) ให้ $k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\eta^2}}$, $k_2 = \sqrt{\frac{2m(E - v_0)}{\eta^2}}$

สำหรับ ผลเฉลยคงที่ทั้งสามบริเวณ คือ

$$\Phi_1(x) = A_1 e^{ik_1x} + A'_1 e^{-ik_1x}$$

$$\Phi_2(x) = A_2 e^{ik_2x} + A'_2 e^{-ik_2x}$$

$$\Phi_3(x) = A_3 e^{ik_1x} + A'_3 e^{-ik_1x}$$

เราจะพิจารณาอนุภาคเคลื่อนที่จาก $-\infty$ ดังนั้น ถึงไม่มีอนุภาคเคลื่อนที่จาก $+\infty$ ไปทางซ้าย $\longrightarrow$ $A_3' = 0$

$$\Phi_2(l) = \Phi_3(l)$$

$$A_2 e^{ik_2l} + A'_2 e^{-ik_2l} = A_3 e^{ik_1l}$$

$$\Phi_2'(l) = \Phi_3'(l)$$

$$ik_2A_2e^{ik_2l} - ik_2A_2'e^{-ik_2l} = ik_1A_3e^{ik_1l}$$

$$A_2 = \left[\frac{k_1 + k_2}{2k_2} e^{i(k_1 - k_2)l}\right] A_3$$

$$A_2' = \left[\frac{k_2 - k_1}{2k_2} e^{i(k_1 + k_2)l}\right] A_3$$

ที่ x = 0 เราจะได้ว่า

$$\Phi_1(0) = \Phi_2(0) \qquad \Rightarrow \qquad A_1 + A_1' = A_2 + A_2'$$

$$\Phi_1'(0) = \Phi_2'(0) \qquad \Rightarrow \qquad ik_1A_1 - ik_1A_1' = ik_2A_2 - ik_2A_2'$$

$$A_1 = \frac{k_1 + k_2}{2k_1}A_2 + \frac{k_1 - k_2}{2k_1}A_2'$$

เขียน A_1 ในเทอมของ A_3

$$A_1 = \left[\frac{(k_1 + k_2)^2}{4k_1k_2}e^{i(k_1 - k_2)l} - \frac{(k_1 - k_2)^2}{4k_1k_2}e^{i(k_1 + k_2)l}\right]A_3$$

$$= \left[\frac{(k_1 + k_2)^2 - (k_1 - k_2)^2}{4k_1k_2}\cos(k_2l) - i\,\frac{(k_1 + k_2)^2 + (k_1 - k_2)^2}{4k_1k_2}\sin(k_2l)\right]e^{ik_1l}A_3$$

$$\left[\cos(k_2l) - i\,\frac{k_1^2 + k_2^2}{2k_1k_2}\sin(k_2l)\right]e^{ik_1l}A_3$$

เช่นเดียวกัน เขียน A_1' ในเทอมของ A_3

$$A_1' = \frac{k_1 - k_2}{2k_1}A_2 + \frac{k_1 + k_2}{2k_1}A_2'$$

$$= \left[\frac{(k_1 + k_2)(k_1 - k_2)}{4k_1k_2}e^{i(k_1 - k_2)l} + \frac{(k_1 + k_2)(k_2 - k_1)}{4k_2}e^{i(k_1 + k_2)l}\right]A_3$$

$$= \left[\frac{(k_1^2 - k_2^2)^2 + (k_2^2 - k_1^2)}{4k_1k_2}\cos(k_2l) + i\,\frac{(k_2^2 - k_1^2) - (k_1^2 - k_2^2)}{4k_1k_2}\sin(k_2l)\right]A_3$$

$$= i\,\frac{k_2^2 - k_1^2}{2k_1k_2}\sin(k_2l)e^{ik_1l}A_3$$

ข) สัมประสิทธิ์ของการสะท้อน

$$R = \left|\frac{A_1'}{A_1}\right|^2$$

$$R = \frac{\left[\frac{k_2^2 - k_1^2}{2k_1k_2}\sin(k_2 l)\right]^2}{\cos^2(k_2 l) + \left[\frac{k_1^2 + k_2^2}{2k_1k_2}\sin(k_2 l)\right]^2} = \frac{(k_2^2 - k_1^2)\sin^2(k_2 l)}{4k_1^2k_2^2 + (k_1^2 - k_2^2)^2\sin^2(k_2 l)}$$

$$T = \left|\frac{A_3}{A_1}\right|^2 = \frac{1}{\cos^2(k_2 l) + \left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{2k_1k_2}\right)\sin^2(k_2 l)} = \frac{4k_1^2k_2^2}{4k_1^2k_2^2 + (k_1^2 - k_2^2)^2\sin^2(k_2 l)}$$

T จะมีค่าระหว่าง 1 ค่าสูงสุด (max) ซึ่ง $\left[1 + \frac{v_0^2}{4E(E - v_0)}\right]^{-1}$ ซึ่งเป็นค่าต่ำสุด

เมือ l เป็นจำนวนเท่าของ $\frac{\pi}{k_2}$ จะไม่มีการสะท้อน เรียกว่า การกระเจิงกำทอน

(resonance scattering)

l

ตัวอย่าง ที่ 11.5 จากตัวอย่างที่ผ่านมา จงหาสเตทคงที่ของอนุภาคพลังงาน E < v_0 และจงคำนวณ สัมประสิทธิ์ของการทะลุผ่าน พร้อมกับให้ความหมายทางฟิสิกส์

วิธีทำ $k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\eta^2}}$, $\rho = \sqrt{\frac{2m(v_0 - E)}{\eta^2}}$

ผลเฉลยคงที่ทั้งสามบริเวณ คือ

$$\phi_1(x) = A_1 e^{ik_1x} + A_1' e^{-ik_1x}$$

$$\phi_2(x) = A_2 e^{i\rho x} + A_2' e^{-\rho x}$$

$$\phi_3(x) = A3e^{ik1x} + A_3' e^{-ik_1 x}$$

$$\phi_2(l) = \phi_3(l) \Rightarrow A_2 e^{\rho l} + A_2' e^{-\rho l} = A_3 e^{ik_1 x}$$

$$\phi_2'(l) = \phi_3'(l) \Rightarrow A_2 \rho e^{\rho l} - A_2' e^{-\rho l} = ik_1 A_3 e^{ik_1 l}$$

$$A_2 = \left[\frac{\rho + ik_1}{2\rho} e^{(ik_1+\rho)l}\right] A_3$$

$$A_2' = \left[\frac{\rho - ik_1}{2\rho} e^{(ik_1+\rho)l}\right] A_3$$

ที่ x = 0

$$\phi_1(0) = \phi_2(0) \Rightarrow A_1 + A_1' = A_2 + A_2'$$

$$\phi_1'(0) = \phi_2(0) \Rightarrow ik_1 A_1 - ik_1 A_1' = \rho A_2 - \rho A_2'$$

$$A_1 = \frac{ik_1 + \rho}{2ik_1} A_2 + \frac{ik_1 - \rho}{2ik_1} A_2'$$

$$A_1 = \left[\frac{(ik_1 + \rho)^2}{4ik_1\rho} e^{(ik_1-\rho)l} - \frac{(ik_1 - \rho)^2}{4ik_1\rho} e^{(ik_1+\rho)l}\right] A_3$$

$$A_2 = \left[-i\,\frac{k_1^2 - \rho^2 \sinh(\rho l)}{2k_1\rho} + \cosh(\rho l)\right] e^{ik_1 l} A_3$$

สัมประสิทธิ์ของการทะลุผ่าน $T = \left|\frac{A_3}{A_1}^2\right|$

$$T = \frac{1}{coh^2(\rho l) + (\frac{k_1^2 - \rho^2}{2k_1\rho})^2 \sinh^2(\rho l)}$$

$$T = \frac{1}{1 + (\frac{k_1^2 + \rho^2}{2k_1\rho})^2 \sinh^2(\rho l)}$$

เนื่องจาก $\cosh^2\alpha - \sinh^2\alpha = 1$ ดังนั้นเราจะได้ว่าค่า T

$$T = \frac{4E(v_0 - E)}{4E(v_0 - E) + v_0^2 \sinh\left[\frac{\sqrt{2mv_0 - E}}{\eta} l\right]}$$

อนุภาคที่มีพลังงาน E < v_0 สามารถข้ามกำแพงศักย์ได้ ได้ แตกต่างจาก ฟิสิกส์ดั้งเดิมปรากฏการณ์นี้เรียกว่าปรากฏการณ์ลอดอุโมงค์ (tunnel effect)

ความสัมพันธ์ของมุมในระบบห้องทดลองและระบบศูนย์กลางมวล

อนุภาคมวล m_1 และมีความเร็วต้น v วิ่งชนอนุภาคที่มีมวล m_2 ซึ่งอยู่นิ่ง หลังจากนั้นจุดศูนย์กลางมวลเคลื่อนที่ไปทางขวาด้วยความเร็ว $v' = m_1 v/(m_1 + m_2)$ ดังนั้น ในระบบจุดศูนย์กลางมวลอนุภาคมวล m_1และ m_2 จะเคลื่อนที่เข้าหาจุดศูนย์กลางมวลด้วยอัตราเร็ว $v'' = v - v' = \frac{m_2 v}{m_1 + m_2}$ และ v' ตามลำดับ

จากตรีโกณมิติ

$$v''\cos\theta + v' = v_1 \cos\theta_0$$

$$v''\sin\theta = v_1 \sin\theta_0$$

$$\phi = \phi_0$$

ทำให้ v_1 หมดไปจะได้

$$\tan\theta_0 = \frac{\sin\theta}{\gamma + \cos\theta} \qquad\qquad \gamma = \frac{v'}{v''} = \frac{m_1}{m_2}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างภาคตัดขวาง (Relation between cross section)

จำนวนอนุภาคที่สะท้อนเข้าไปในมุมตันดิฟเฟอเรนเชียล $d\omega_0$ จะเท่ากับที่สะท้อนเข้าไปใน $d\omega$

$$\sigma_0(\theta_0,\phi_0)\sin\theta_0 d\theta_0 d\phi_0 = \sigma(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi$$

จะได้

$$\sigma_0(\theta_0,\phi_0) = \frac{\left(1+\gamma^2+2\gamma\cos\theta\right)^{3/2}}{\left|1+\gamma\cos\theta\right|}\sigma(\theta,\phi)$$

ขึ้นอยู่กับ r ดังนี้

เมื่อ $r < 1$, θ_0 เพิ่มขึ้นจาก 0 ถึง π

เมื่อ $r = 1$, $\theta_0 = \frac{1}{2}\theta$ และเปลี่ยนจาก 0 ถึง $\frac{1}{2}\pi$

เมื่อ $r > 1$, θ_0 เพิ่มจาก 0 ถึงค่ามากที่สุด $\sin^{-1}\left(1/r\right)$ แล้วลดลงเป็นศูนย์

การประพฤติตัวระยะไกล

สมการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ คือ

$$-\frac{\eta^2}{2\mu}\nabla^2\mu + V\mu = E\mu$$

สามารถเขียนฟังก์ชันคลื่นเป็นฟังก์ชันของมุม θ, ϕ พลังงาน E ของการเคลื่อนที่สัมพัทธ์

คือ
$$E = \frac{m_2}{m_1 + m_2} E_0$$

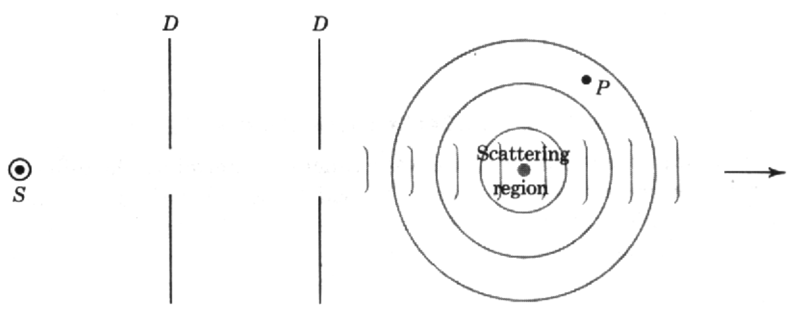
เมื่อ E_0 คือพลังงานเริ่มต้นของอนุภาคที่วิ่งชน ฟังก์ชันคลื่นที่ระยะไกลจะประกอบด้วยคลื่นตกกระทบและคลื่นสะท้อน

$$u(r, \theta, \phi) \xrightarrow[r \to \infty]{} A\left[e^{ikz} + r^{-1} f(\theta, \phi) e^{ikr}\right] \qquad k = \frac{\mu v}{\eta}$$

เทอมแรกของสมการแทนอนุภาคที่เคลื่อนที่ไปทางบวก z เป็นคลื่นระนาบในรูปฟังก์ชันไอเกนของโมเมนตัม เทอมที่สองแทนอนุภาคที่เคลื่อนที่ตามแนวรัศมีซึ่งแอมปลิจูดขึ้นอยู่กับมุมและส่วนกลับของรัศมี

เมื่อภาคตัดขวางรวมมีค่า

$$\sigma(\theta, \Phi) = \left| f(\theta, \Phi) \right|^2$$



รูปที่ 11. ฟังก์ชันคลื่นที่ระยะไกล

การกระเจิงโดยศักย์สมมาตรทรงกลม

พลังงานศักย์เป็นสมมาตรทรงกลม v เป็นฟังก์ชันของอย่างเดียวของ r ใช้วิธีการคลื่นบางส่วน (partial wave)

ผลเฉลยของสมการ....สามารถเขียนได้เป็น

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)2^{-l}R_l p_l(\cos\theta)$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)2^{-l}r^1 x_l(r)\,p_l(\cos\theta)$$

x_l เป็นผลเฉลยของสมการ

$$\frac{d^2x_l}{dr^2}+\left[k^2-u(r)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]x_l=0$$

$$k=\left(\frac{2\mu E}{\mathrm{h}^2}\right)^{\frac{1}{2}},u(r)=\frac{2\mu V(r)}{\mathrm{h}^2}\xrightarrow[r\to\infty]{}0$$

ในการพิจารณา Asymptotic behavior คิดว่า r มีค่ามากจนสามารถละเทอม u และ l ได้ ดังนั้นผลเฉลยจะอยู่ในรูป $e^{\pm ikr}$

$$x_l(r)=A\exp\left[\int_a^r f(r')dr'\right]e^{\pm ikr}$$

เมื่อ A และ a เป็นค่าคงที่

ถ้า $r \to \infty$ $f(r)$ จะเข้าใกล้ศูนย์เร็วกว่า r^{-1}

จะได้

$$f' + f^2 \pm 2ikf = u(r) + \frac{l(l+1)}{r^2} \equiv \omega(r)$$

Asymptotic form ของ $x_l(r)$ คือ

$$x_l(r) = A_l' \sin\left(kr + \delta_l'\right)$$

แบบฝึกหัดบทที่ 11

1. อนุภาคมวล μ และโมเมนตัม $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ กระเจิงโดยศักย์ $V(r) = \left(e^{-r/a}/r\right)V_0 a$ เมื่อ V_0 และ $a > 0$ เป็นค่าคงที่

ก) จงคำนวณภาคตัดขวางดิฟเฟอเรนเชียลโดยใช้วิธีการประมาณค่าของบอร์น

ข) จงหาค่าภาคตัดขวางรวม

2.สมมุติว่ามีสมมาตรชนิดอซิมุท(azimuthal symmetry)จงหาความสัมพันธ์ระหว่างแอมพลิจูดการกระเจิงและภาคตัดขวางดิฟเฟอเรนเชียล