บทที่ 10
อนุพันธ์และสมการดิฟเฟอเรนเชียล

วิธีการหาอนุพันธ์แบบง่ายก็คือ การหาความชันของฟังก์ชัน เราอาจจะใช้การประมาณโดยวิธี forward, backward หรือ centered difference ก็ได้ วิธีนี้ความคลาดเคลื่อนจะมีค่าแปรตามกำลังสองของช่วงขั้น O(h^2)

10.1 วิธี finite difference

จากอนุกรมเทย์เลอร์

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 + ...$$

จะได้

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1})h - 3f(x_i)}{2h} + 0(h^2)$$

ซึ่งจะสามารถคำนวณอนุพันธ์ได้ 3 วิธี ดังนี้

วิธีที่ 1 Forward finite – divided – difference

First Derivative **error**

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} \qquad 0(h)$$

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1})h - 3f(x_i)}{2h} \qquad 0(h^2)$$

Second Derivative

$$f''(x_i)=\frac{f(x_{i+2})-2f(x_{i+1})+f(x_i)}{h^2} \qquad 0(h)$$

$$f''(x_i)=\frac{-f(x_{i+3})+4f(x_{i+2})-5f(x_{i+1})+2f(x_i)}{h^2} \qquad 0(h^2)$$

Third Derivative

$$f'''(x_i)=\frac{f(x_{i+3})-3f(x_{i+2})+3f(x_{i+1})+f(x_i)}{h^3} \qquad 0(h)$$

$$f'''(x_i)=\frac{-3f(x_{i+4})+14f(x_{i+3})-24f(x_{i+2})+18f(x_{i+1})+5f(x_i)}{2h^3} \qquad 0(h^2)$$

Fourth Derivative

$$f''''(x_i)=\frac{f(x_{i+4})-4f(x_{i+3})+6f(x_{i+2})-4f(x_{i+1})+f(x_i)}{h^4} \qquad 0(h)$$

$$f''''(x_i)=\frac{-2f(x_{i+5})+11f(x_{i+4})-24f(x_{i+3})+26f(x_{i+2})-14f(x_{i+1})+3f(x_i)}{h^4}$$

$$0(h^2)$$

วิธีที่ 2 Backward finite – divided – difference

First Derivative **error**

$$f'(x_i)=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{h} \qquad 0(h)$$

$$f'(x_i)=\frac{3f(x_i)+4f(x_{i-1})h+f(x_{i-2})}{2h} \qquad 0(h^2)$$

Second Derivative

$$f''(x_i)=\frac{f(x_i)-2f(x_{i-1})+f(x_{i-2})}{h^2} \qquad 0(h\ )$$

$$f''(x_i)=\frac{2f(x_i)-5f(x_{i-1})+4f(x_{i-2})-f(x_{i-3})}{h^2} \qquad 0(h^2)$$

Third Derivative

$$f'''(x_i)=\frac{f(x_i)-3f(x_{i-1})+3f(x_{i-1})-f(x_{i-3})}{h^3} \qquad 0(h\ )$$

$$f'''(x_i)=\frac{5f(x_i)-18f(x_{i-1})+24f(x_{i-2})+14f(x_{i-3})+3f(x_{i-4})}{2h^3} \qquad 0(h^2)$$

Fourth Derivative

$$f''''(x_i)=\frac{f(x_{i+4})-4f(x_{i-1})+6f(x_{i-2})-4f(x_{i-3})+f(x_{i-4})}{h^4} \qquad 0(h\ )$$

$$f''''(x_i)=\frac{3f(x_i)-14f(x_{i-1})+26f(x_{i-2})-24f(x_{i-3})+11f(x_{i-4})-2f(x_{i-5})}{h^4}$$

$$0(h^2)$$

วิธีที่ 3 Center finite – divided – difference

First Derivative **error**

$$f'(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-f(x_{i-1})}{2h} \qquad 0(h^2)$$

$$f'(x_i)=\frac{-f(x_{i+2})+8f(x_{i+1})-8f(x_{i-1})+f(x_{i-2})}{12h} \qquad 0(h^4)$$

Second Derivative

$$f''(x_i)=\frac{f(x_{i+1})+2f(x_i)+f(x_{i-1})}{h^2} \qquad 0(h^2)$$

$$f''(x_i)=\frac{-f(x_{i+2})+16f(x_{i+1})-30f(x_i)+16f(x_{i-1})-f(x_{i-2})}{12h^2} \qquad 0(h^4)$$

Third Derivative

$$f'''(x_i)=\frac{f(x_{i+2})-2f(x_{i+1})+2f(x_{i-1})-f(x_{i-2})}{2h^3} \qquad 0(h^2)$$

$$f'''(x_i)=\frac{-f(x_{i+3})+8f(x_{i+2})-13f(x_{i+1})+13f(x_{i-1})-8f(x_{i-2})+f(x_{i-3})}{8h^3}$$

$$0(h^4)$$

Fourth Derivative

$$f''''(x_i)=\frac{f(x_{i+2})-4f(x_{i+1})+6f(x_i)-4f(x_{i-1})+f(x_{i-2})}{h^4} \qquad 0(h^2)$$

$$f''''(x_i)=\frac{-f(x_{i+3})+12f(x_{i+2})+39f(x_{i+1})+56f(x_i)-39f(x_{i-1})+12f(x_{i-2})+f(x_{i-3})}{6h^4}$$

$$0(h^4)$$

ตัวอย่างที่ 10.1 จงหาอนุพันธ์ของสมการ $f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$ ที่จุด $x = 0.5$ โดยวิธี finite divided difference ใช้ $h = 0.25$

วิธีทำ ข้อมูลที่ต้องการในการคำนวณ คือ

$X_{i-2} = 0$	$f(x_{i-2}) = 1.2$
$X_{i-1} = 0.25$	$f(x_{i-1}) = 1.103516$
$X_i = 0.5$	$f(x_i) = 0.925$
$X_{i+1} = 0.75$	$f(x_{i+1}) = 0.6363281$
$X_{i+2} = 1$	$f(x_{i+2}) = 0.2$

สำหรับ forward difference

$$f'(0.5) = \frac{-0.2+4(0.6363281)-3(0.925)}{2(0.5)}$$

$$= -0.859375$$

สำหรับ backward difference

$$f'(0.5) = \frac{3(0.925)-4(1.035156)+1.2}{2(0.25)}$$

$$= -0.878125$$

สำหรับ centered difference

$$f'(0.5) = \frac{-0.2+8(0.6363281)-8(1.035156)}{12(0.25)}$$

$$= -0.9125$$

วิธี centered difference จะให้ค่าถูกต้องที่สุด โดยมีความคลาดเคลื่อน ε_t = 0%

10.2 การหาอนุพันธ์โดยวิธีริชาร์ดสัน

จากการหาค่าอินทีเกรทโดย Ricchardson extrapolation

$$I \cong I(h_2) + \frac{1}{(h_1/h_2)-1}\left[I(h_2)-I(h_1)\right]$$

เมื่อ $I(h_1)$ และ $I(h_2)$ เป็นการอินทีเกรทโดยใช้ step size h_1 และ h_2 ตามลำดับ

สำหรับการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์ เพื่อความสะดวกจะใช้ h_2 = $h_1/2$ ดังนั้น

$$I \cong \frac{4}{3}I(h_2) - \frac{1}{3}I(h_1)$$

เช่นเดียวกัน จะสามารถหาอนุพันธ์ได้จาก

$$D \cong \frac{4}{3}D\left(h_2\right)-\frac{1}{3}D\left(h_1\right)$$

ตัวอย่างที่ 10.2 จงหาอนุพันธ์ในตัวอย่าง 10.1 โดยวิธีริชาร์ดสัน

วิธีทำ $D(0.5) = \dfrac{0.2-1.2}{1} = -1.0$

$D(0.25) = \dfrac{0.6363251-1.103516}{0.5} = -0.934375$

ดังนั้น

$D = \dfrac{4}{3}(-0.934375)-\dfrac{1}{3}(-1) = -0.9125$

ซึ่งตรงกับค่าที่แท้จริง $\varepsilon_t = 0$ %

10.3 การแก้สมการดิฟเฟอเรนเชียลโดยวิธีออยเลอร์

จากสมการดิฟเฟอเรนเชียล $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$

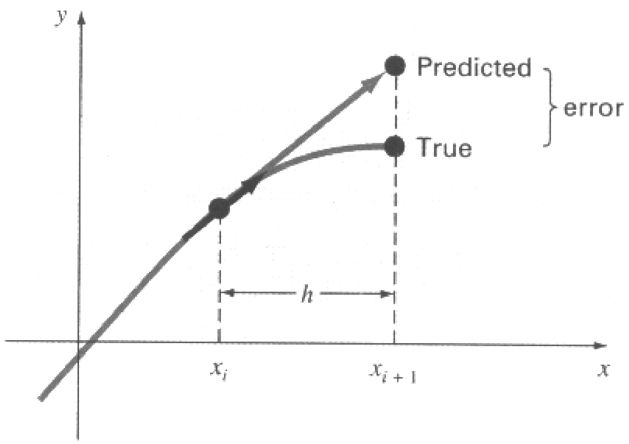
อนุพันธ์อันดับแรก จะเป็นค่าความชันที่ x_i

$$\phi = f\left(x_i, y_i\right)$$

เมื่อ $f\left(x_i, y_i\right)$ เป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียลที่ x_i และ y_i

ดังนั้น $$y_{i+1} = y_i + f\left(x_i, y_i\right)h$$

เป็นสูตรที่ใช้โดยวิธีออยเลอร์



รูปที่ 10.1 วิธีออยเลอร์

ตัวอย่างที่ 10.3 จงใช้วิธีออยเลอร์อินทีเกรทสมการ

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

จาก x = 0 ถึง x = 4 โดยใช้ step size = 0.5 ภาวะเริ่มต้นเมื่อ x = 0 จะได้ y = 1 ผลเฉลยจริงคือ

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$$

วิธีทำ จากสูตรของวิธีออยเลอร์

$$y(0.5) = y(0) + f(0,1)0.5$$

เมื่อ y(0) = 1 และหาความชันที่ x = 0 คือ

$$f(0,1) = -2(0)^3 + 12(0)^2 - 20(0) + 8.5 = 8.5$$

ดังนั้น

$$y(0.5) = 1.0 + 8.5(0.5) = 5.25$$

ผลเฉลยจริงที่ $x = 0.5$ คือ

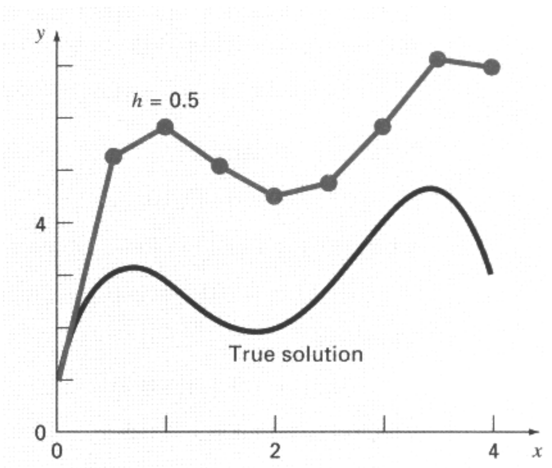
$$y = -0.5(0.5)^4 + 4(0.5)^3 - 10(0.5)^2 + 8.5(0.5) + 1$$
$$= 3.21875$$

ซึ่งมีความคลาดเคลื่อนมาก $\varepsilon_t = 63.1\ \%$

สำหรับการคำนวณขั้นที่สอง

$$y(1) = y(0.5) + f(0.5, 5.25)0.5$$
$$= 5.25 + [-2(0.5)^3 + 12(0.5)^2 - 20(0.5) + 8.5]0.5$$
$$= 5.875$$

คำนวณเช่นนี้หลาย ๆ ครั้ง จะได้ผลเฉลย แต่ก็ยังมีความคลาดเคลื่อนค่อนข้างมาก



รูปที่ 10.1 เปรียบเทียบค่าจริงกับค่าจากวิธีเชิงตัวเลข

สำหรับการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์ใช้โปรแกรมต่อไปนี้

```
      PROGRAM EULER
      WRITE(*,50)
50    FORMAT(' PLEASE ENTER X,Y,N,H')
      READ(*,*) X,Y,N,H
      WRITE(*,100) H
100   FORMAT(' SOLUTION WITH STEP SIZE =',F10.4,
   +        ' IS:',/,10X,'X',15X,'Y')
      WRITE(*,200) X,Y
200   FORMAT(3F16.6)
      DO 10 I=1,N
        F1=FUNC1(X,Y)
        Y=Y+F1*H
        X=X+H
        WRITE(6,200) X,Y
10    CONTINUE
      STOP
      END
*-----------------------------------------------
      FUNCTION FUNC1(X,Y)
      FUNC1=-2.*(X**3.)+12.*(X**2.)-20.*X+8.5
      RETURN
      END
*-----------------------------------------------
```

เอาท์พุทจากโปรแกรม คือ

```
 PLEASE ENTER X,Y,N,H
0
1
8
0.5
 SOLUTION WITH STEP SIZE =     0.5000 IS:
          X                   Y
        0.000000         1.000000
        0.500000         5.250000
        1.000000         5.875000
        1.500000         5.125000
        2.000000         4.500000
        2.500000         4.750000
        3.000000         5.875000
        3.500000         7.125000
        4.000000         7.000000
```

จะได้ y(0.5) = 5.25

y(1) = 5.875

y(4) = 7 เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 10.4 จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น (initial – value problem) ต่อไปนี้ภายในช่วง x = 0 ถึง 2

$$\frac{dy}{dx} = yx^2 - 1.2y$$

เมื่อ y(0) = 1

วิธีทำ ส่วนหนึ่งของโปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณ คือ

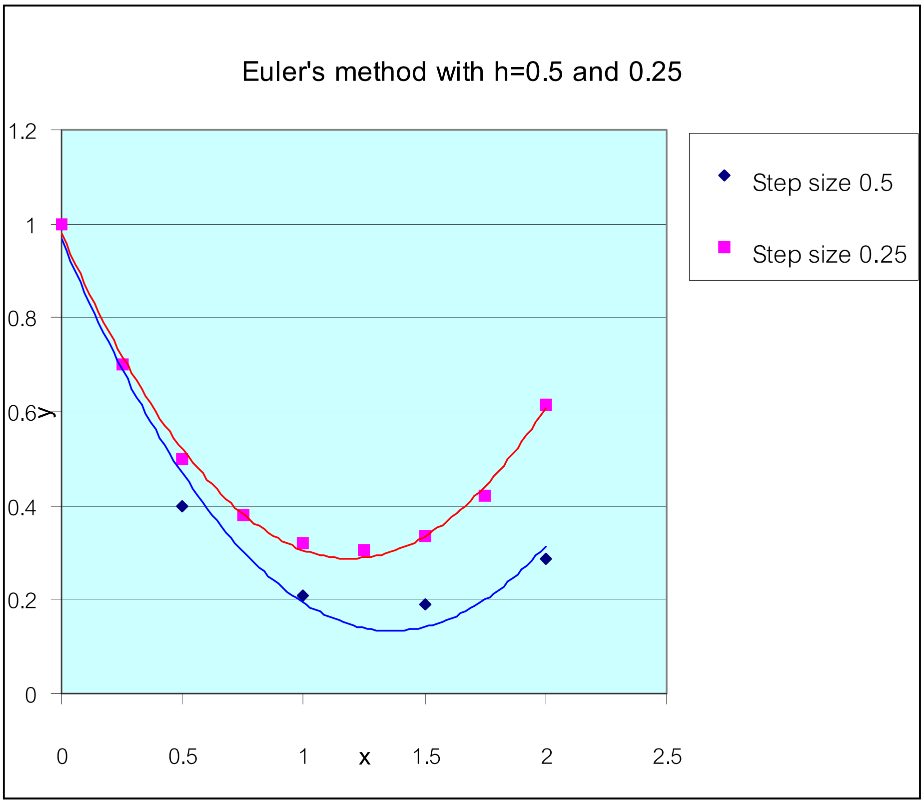
```
*-----------------------------------------------
      FUNCTION FUNC1(X,Y)
      FUNC1=Y*(X**2.)-1.2*Y
      RETURN
      END
*-----------------------------------------------
```

เอาท์พุทจากการคำนวณ คือ

```
 PLEASE ENTER X,Y,N,H
0
1
10
.2
 SOLUTION WITH STEP SIZE =     0.2000 IS:
                  X                Y
        0.000000         1.000000
        0.200000         0.760000
        0.400000         0.583680
        0.600000         0.462275
        0.800000         0.384612
        1.000000         0.341536
        1.200000         0.327874
        1.400000         0.343612
        1.600000         0.395841
        1.800000         0.503510
        2.000000         0.708943
```

ตัวอย่างที่ 10.5 จงเขียนกราฟเพื่อเปรียบเทียบผลเฉลยจากตัวอย่าง 10.4 เมื่อใช้ h = 0.5 และ 0.25

วิธีทำ



10.4 การแก้สมการดิฟเฟอเรนเชียลโดยวิธีรุงกุตตา (Runge – Kutta Methods)

แก้สมการ Ordinary differential equations

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h$$

โดยที่ $\phi(x_i,y_i,h)$ เป็น inerement function ในรูป

$$\phi = a_1k_1 + a_2k_2 + ... + a_nk_n$$

เมื่อ a เป็นค่าคงที่ และ k มีค่าดังนี้

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h) \\
k_3 &= f(x_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h) \\
&. \\
&. \\
&. \\
k_n &= f(x_i + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1,1}k_1h + q_{n-1,2}k_2h + ... + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h)
\end{aligned}$$

วิธีรุงกุตตามีอยู่หลายแบบด้วยกัน ขึ้นกับจำนวนเทอมใน inerement function ที่นำมาใช้ เช่น n = 2 สำหรับลำดับสอง, n = 3 สำหรับลำดับ,... เป็นต้น

สำหรับวิธีรุงกุตตาลำดับสอง

$$
\begin{aligned}
&y_{i+1} = y_i + \phi\left(a_1 k_1 + a_2 k_2\right) h \\
&k_1 = f\left(x_i, y_i\right) \\
&k_2 = f\left(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h\right) \\
&a_1 + a_2 = 1 \\
&a_2 p_1 = \frac{1}{2} \\
&a_2 q_{11} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

สำหรับวิธีรุงกุตตาลำดับสาม

$$
\begin{aligned}
&y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 4k_2 + k_3\right) h \\
&\quad k_1 = f\left(x_i, y_i\right) \\
&\quad k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2} h, y_i + \frac{1}{2} k_1 h\right) \\
&\quad k_3 = f\left(x_i + h, y_i - k_1 h + 2k_2 h\right)
\end{aligned}
$$

สำหรับวิธีรุงกุตตาลำดับสี่

$$
\begin{aligned}
&y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) h \\
&\quad k_1 = f\left(x_i, y_i\right) \\
&\quad k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2} h, y_i + \frac{1}{2} k_1 h\right) \\
&\quad k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2} h, y_i + \frac{1}{2} k_2 h\right) \\
&\quad k_4 = f\left(x_i + h, y_i + k_3 h\right)
\end{aligned}
$$

สำหรับวิธีรุงกุตตาลำดับห้า

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{90}\left(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6\right)h$$
$$k_1 = f\left(x_i, y_i\right)$$
$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{4}k_1h\right)$$
$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{8}k_1h + \frac{1}{8}k_2h\right)$$
$$k_4 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h + k_3h\right)$$
$$k_5 = f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{16}k_1h + \frac{9}{16}k_4h\right)$$
$$k_6 = f\left(x_i + h, y_i - \frac{3}{7}k_1h + \frac{2}{7}k_2h + \frac{12}{7}k_3h - \frac{12}{7}k_4h + \frac{8}{7}k_5h\right)$$

ตัวอย่างที่ 10.6 จงใช้วิธีรุงกุตตาลำดับสี่อินทีเกรทสมการ

$$f(x,y) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

โดยใช้ $h = 0.5$ และภาวะเริ่มต้น $y = 1$ ที่ $x = 0$

วิธีทำ $k_1 = 8.5$, $k_2 = 4.21875$, $k_3 = 4.21875$ และ $k_3 = 1.25$

จะได้

$$y(0.5) = 1 + \left\{\frac{1}{6}\left[8.5 + 2(4.21875)\right] + 2(4.21875) + 1.25\right\}^{0.5}$$
$$= 3.21875$$

ซึ่งตรงกับค่าแท้จริง

โปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณ คือ

```
      PROGRAM RK4
      WRITE(*,50)
50    FORMAT(' PLEASE ENTER X,Y,N,H')
      READ(*,*) X,Y,N,H
      WRITE(*,100) H
100   FORMAT(' SOLUTION WITH STEP SIZE =',F10.6,
   +        ' IS:',/,10X,'X',15X,'Y')
      WRITE(*,200) X,Y
200   FORMAT(2F16.6)
      DO 300 I=1,N
        AK1=FUNC(X,Y)
        XX=X+H/2.
        YY=Y+H*AK1/2.
        AK2=FUNC(XX,YY)
        YY=Y+H*AK2/2.
        AK3=FUNC(XX,YY)
        XX=X+H
        YY=Y+H*AK3
        AK4=FUNC(XX,YY)
        Y=Y+(AK1+2.*AK2+2.*AK3+AK4)*H/6.
        X=X+H
        WRITE(*,200) X,Y
300   CONTINUE
      STOP
      END
*-----------------------------------------------------
```

```
      FUNCTION FUNC(X,Y)
      FUNC=-2.*(X**3.)+12.*(X**2.)-(20.*X)+8.5
      RETURN
      END
*-----------------------------------------------------
```

เอาท์พุท คือ

```
 PLEASE ENTER X,Y,N,H
0
1
15
.5
 SOLUTION WITH STEP SIZE =   0.500000 IS:
         X                 Y
       0.000000        1.000000
       0.500000        3.218750
       1.000000        3.000000
       1.500000        2.218750
       2.000000        2.000000
       2.500000        2.718750
       3.000000        4.000000
       3.500000        4.718750
       4.000000        3.000000
       4.500000       -3.781250
       5.000000      -19.000000
       5.500000      -46.781250
       6.000000      -92.000000
       6.500000     -160.281250
       7.000000     -258.000000
       7.500000     -392.281250
```

จะได้ y(0.5) = 3.218750 ตรงกับค่าแท้จริง

ตัวอย่างที่ 10.7 จงใช้วิธีรุงกุตตาลำดับสี่อินทีเกรทสมการ

$$f(x,y) = 4e^{0.8x} - 0.5y$$

โดยใช้ h = 0.5 และ y(0) = 2 จาก x = 0 ถึง 0.5 และจงเขียนโปรแกรมเพื่ออินทีเกรทสมการนี้

วิธีทำ $k_1 = f(0.2) = 4e^{0.8(1)} - 0.5(2) = 3$

ใช้ค่านี้คำนวณ y และความชันที่จุดกึ่งกลาง

$$y(0.25) = 2 + 3(0.25) = 2.75$$

$$k_2 = f(0.25, 2.75) = 4e^{0.8(0.25)} - 0.5(2.75) = 3.510611$$

ใช้ค่านี้คำนวณ y และความชันที่จุดกึ่งกลาง

$$y(0.25) = 2 + 3.510611(0.25) = 2.877653$$

$$k_3 = f(0.25, 2.877653) = 4e^{0.8(0.25)} - 0.5(2.877653) = 3.510611$$

ต่อไปใช้ค่าความชันนี้คำนวณ y และความชันที่จุดปลายของช่วง

$$y(0.5) = 2 + 3.071785(0.5) = 3.723392$$

$$k_4 = f(0.5, 3.723392) = 4e^{0.8(0.5)} - 0.5(3.723392) = 4.105603$$

สุดท้าย นำค่าความชันทั้งสี่มาหาค่าเฉลี่ย ซึ่งจะนำค่าเฉลี่ยนี้ไปพยากรณ์ค่าที่จุดปลายของช่วง

$$\phi = \frac{1}{6}\left[3 + 2(3.510611) + 2(3.446785) + 4.105603\right] = 3.503399$$

$$y(0.5) = 2 + 3.503399(0.5) = 3.751669$$

ซึ่งมีค่าใกล้เคียงกับค่าที่แท้จริง คือ 3.751521 มาก

ส่วนหนึ่งของโปรแกรมโดยวิธีรุงกุตตาที่ใช้ในการคำนวณ คือ

```
*-----------------------------------------------------
        FUNCTION FUNC(X,Y)
        FUNC=(4.*EXP(0.8*X))-0.5*Y
        RETURN
        END
*-----------------------------------------------------
```

เอาท์พุทจากโปรแกรม คือ

```
 PLEASE ENTER X,Y,N,H
0
2
10
.5
 SOLUTION WITH STEP SIZE =  0.500000 IS:
          X                Y
       0.000000        2.000000
       0.500000        3.751699
       1.000000        6.195042
       1.500000        9.707772
       2.000000       14.845106
       2.500000       22.428858
       3.000000       33.679985
       3.500000       50.416019
       4.000000       75.345337
       4.500000      112.505989
       5.000000      167.920166
```

จะได้ $y(0.5) = 3.751699$ ตรงกับการใช้เครื่องคิดเลขด้วยมือ

ตัวอย่างที่ 10.8 จงใช้วิธีรุงกุตตาลำดับสี่อินทีเกรทสมการ

$$\frac{dy}{dx} = yx^2 - 1.2y$$

เมื่อ y(0) = 1

วิธีทำ ใช้โปรแกรมในตัวอย่าง 10.6 โดยเปลี่ยนค่าฟังก์ชัน

เอาท์พุทจากโปรแกรม คือ

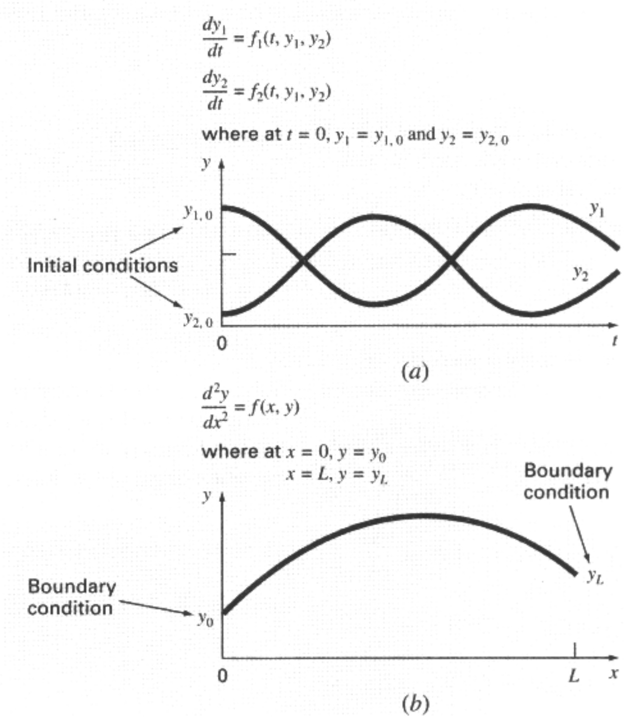
```
 PLEASE ENTER X,Y,N,H
0
1
8
0.5
 SOLUTION WITH STEP SIZE =  0.500000 IS:
          X                 Y
       0.000000        1.000000
       0.500000        0.572344
       1.000000        0.420375
       1.500000        0.509104
       2.000000        1.298550
       2.500000        8.565154
       3.000000      161.505341
       3.500000     8654.091797
       4.000000  1239253.125000
```

ซึ่งจะได้ค่า y เมื่อ x = 0, 0.5, … , 4

การคำนวณโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ จะให้ผลที่ถูกต้องแม่นยำและรวดเร็ว อย่างไรก้ตามนักศึกษาจะต้องเข้าใจขั้นตอนการแก้ปัญหาก่อน โดยวิธีกดเครื่องคิดเลขด้วยมือ แล้วจึงนำผลลัพธ์ที่ได้มาเปรียบเทียบกัน

10.5 ปัญหาค่าที่ขอบเขตและค่าไอเกน

การแก้สมการดิฟเฟอเรนเชียล จะขึ้นกับค่าเริ่มต้นแต่บางครั้ง บางปัญหาไม่ได้ขึ้นกับค่าเริ่มต้นค่าเดียว แต่จะมีค่าต่าง ๆ ตามค่าตัวแปรที่จุดเหล่านั้น ค่าเหล่านี้มักจะเป็นค่าเฉพาะที่จุดขอบเขตของระบบ จึงมีชื่อเรียกว่า ปัญหาที่ขอบเขต



รูปที่ 10.2 ปัญหาค่าที่ขอบเขต

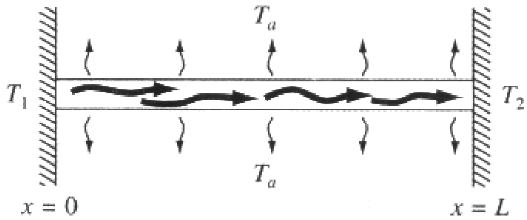
ตัวอย่างปัญหาค่าที่ขอบเขตเช่น ปัญหาความร้อนเคลื่อนที่ภายในแท่งเหล็กยาว ถ้าไม่มีฉนวนหุ้มแท่งเหล็ก จะมีความร้อนถ่ายเทออกมาจากแท่งเหล็ก ถ้าที่ x = 0 อุณหภูมิ = T_1 และที่ x = L อุณหภูมิ = T_2 จะเขียนเป็นภาวะขอบเขตได้เป็น

$$T(0) = T_1$$
$$T(L) = T_2$$

โดยมีสมการอนุพันธ์แทนอุณหภูมิที่ตำแหน่งต่าง ๆ

$$\frac{d^2T}{dx^2} + h'(T_a - T) = 0$$

เมื่อ h' = สัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อน ซึ่งจะสามารถใช้สมการเชิงตัวเลข เพื่อแก้สมการหาอุณหภูมิที่ตำแหน่งต่าง ๆ ได้



รูปที่ 10.3 การถ่ายเทความร้อนในแท่งเหล็ก

ค่าไอเกน (eigen value) เป็นปัญหาหนึ่งของปัญหาค่าขอบเขตที่เกี่ยวข้องกับระบบทางฟิสิกส์ เช่น ระบบการเคลื่อนที่ของมวลบนสปริง ระบบอนุภาคภายใต้ศักย์ของกลศาสตร์ควันตัม เป็นต้น

10.6 เลขสุ่ม (Random number)

การแก้สมการอนุพันธ์บางระบบที่มีลักษณะเฉพาะ อาจจะไม่ต้องกระทำโดยใช้วิธีการที่ได้กล่าวมาแล้ว เช่น การแผ่รังสีของสารกัมมันตรังสี จะเป็นไปอย่าง random อัตราการสลายตัวของสารกัมมันตรังสี จะขึ้นกับจำนวนอะตอมที่มีอยู่

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

สามารถใช้เลขสุ่มแทนโมเดลการแผ่รังสี ซึ่งทำให้ไม่จำเป็นที่จะต้องแก้สมการอนุพันธ์โดยตรงฟังก์ชันที่ใช้ในการสร้างเลขสุ่ม คือ

```
FUNCTION RAN(K)
PARAMETER (M = 243000, IA = 4561, IC = 51349)
K = MOD(K*IA+IC,M)
RAN = K/(1.*M)
RETURN
END
```

แบบฝึกหัดบทที่ 10

1. จงใช้วิธี finite difference หาอนุพันธ์ของ $y = e^x$ ที่ $x = 1$ ใช้ $h = 0.1$

2. จงใช้วิธีของริชาร์ดสันหาอนุพันธ์ของ $y = \sin x$ ที่ $x = \pi/4$ ใช้ $h_1 = \pi/3$ และ $h_2 = \pi/6$

3. จรวดลำหนึ่งเคลื่อนที่ได้ระยะทางดังนี้

t	0	1	2	3	4	5
y	0	2	8	18	32	50

จงหาความเร็วและความเร่งของจรวดที่เวลา t

4. จงใช้วิธีออยเลอร์แก้สมการ

$$\frac{d^2y}{dt^2} = (1+x)\sqrt{y}$$

เมื่อ $y(0) = 1$ แก้สมการจาก $x = 0$ ถึง 1

5. จงแก้สมการจาก $t = 0$ ถึง 3

$$\frac{dy}{dt} = -y + t$$

เมื่อ $y(0) = 1$ โดยวิธีรุงกุตตาลำดับสาม โดยใช้ $h = 0.5$