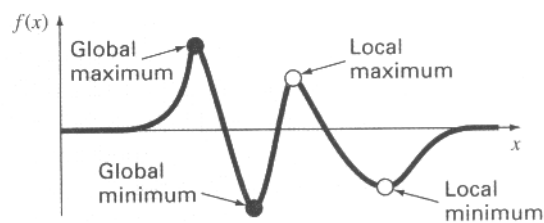


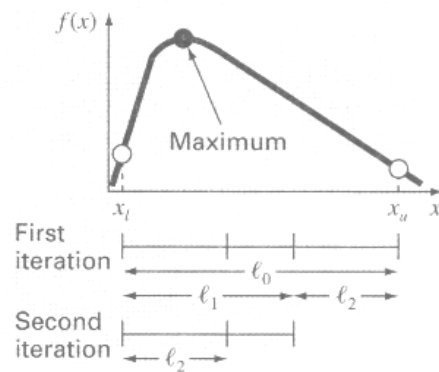
บทที่ 7

การหาค่ามากที่สุด

ในบทนี้จะกล่าวถึงวิธีการหาค่ามากที่สุดของฟังก์ชัน $f(x)$ โดยวิธีต่าง ๆ กัน 3 วิธี



7.1 การหาโดยวิธีโกลเดน-เซกชัน (golden – section)



พิจารณา

$$l_0 = l_1 + l_2$$

และ

$$\frac{l_1}{l_0} = \frac{l_2}{l_1}$$

จะได้

$$\frac{l_1}{l_1 + l_2} = \frac{l_2}{l_1}$$

กำหนดให้ $R = \frac{l_2}{l_1}$ จะได้

$$1 + R = \frac{1}{R} \quad \text{หรือ} \quad R^2 + R - 1 = 0$$

$$R = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4(-1)}}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \\ = 0.61803$$

ค่า R นี้มีชื่อเรียกว่าโกลเดนเรโซ (Golden ratio) เพราะช่วยในการหาค่าต่ำสุดหรือสูงสุดได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ตัวอย่างที่ 7.1 จงใช้วิธีโกลเดน-เซกชัน หาค่าสูงสุดของ

$$f(x) = 2 \sin x - \frac{x^2}{10} \quad \text{ภายในช่วง } X_l = 0 \text{ และ } X_u = 4$$

โดยใช้เครื่องคิดเลข และใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์

วิธีทำ อาศัยโกลเดนเรโซ

$$d = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}(4 - 0) = 2.472$$

หาค่า $X_1 = 0 + 2.472 = 2.472$

และ $X_2 = 4 - 2.472 = 1.528$

หาค่าฟังก์ชัน

$$f(x_2) = f(1.528) = \frac{1.528^2}{10} - 2 \sin(1.528) = 1.765$$

$$f(x_1) = f(2.472) = \frac{2.472^2}{10} - 2 \sin(2.472) = 0.63$$

เนื่องจาก $f(x_2) > f(x_1)$ ดังนั้น $X_l = 0$ และ $X_u = 2.472$

x_2 เปลี่ยนเป็น x_1 ใหม่ซึ่ง $f(1.528) = 1.765$

$$d = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(2.472-0) = 1.528$$

$$X_2 = 2.472 - 1.528 = 0.994$$

$f(0.994) = 1.531$ ซึ่งน้อยกว่า $f(x_1)$ ดังนั้นค่าสูงสุดจะอยู่ระหว่าง x_2, x_1 และ x_3

ทำซ้ำเช่นนี้อีกหลาย ๆ ครั้ง จนได้ค่ามากที่สุด คือ $x_2 = 1.4427$

โปรแกรม GOLD คำนวณค่าสูงสุดมีดังนี้

```
PROGRAM GOLD
REAL R,XLOW,XHIGH,XOPT
WRITE(*,*) ' PLEASE ENTER XLOW,XHIGH,IMAX,ES '
READ(*,*) XLOW,XHIGH,IMAX,ES
WRITE(*,20)
20  FORMAT(/,14X,'I',11X,'X',14X,'F(X)',/)
CALL GOLD(XLOW,XHIGH,IMAX,ES,FX)
STOP
END

*-----
SUBROUTINE GOLD(XLOW,XHIGH,IMAX,ES,FX)
REAL R,XLOW,XHIGH,XOPT
R=((5.**0.5)-1.)/2.
```

```

XL=XLOW
XU=XHIGH
D=R*(XU-XL)
X1=XL+D
X2=XU-D
F1=F(X1)
F2=F(X2)
IF(F1.GT.F2) THEN
  XOPT=X1
  FX=F1
ELSE
  XOPT=X2
  FX=F2
ENDIF
DO 10 I=1,IMAX
  D=R*D
  IF(F1.GT.F2) THEN
    XL=X2
    X2=X1
    X1=XL+D
    F2=F1
    F1=F(X1)
  ELSE
    XU=X1
    X1=X2
    X2=XU-D
    F1=F2
    F2=F(X2)
  ENDIF

```

```

        IF(F1.GT.F2) THEN
            XOPT=X1
            FX=F1
        ELSE
            XOPT=X2
            FX=F2
        ENDIF
        IF(XOPT.NE.0.) THEN
            EA=(1.-R)*ABS((XU-XL)/XOPT)*100.
        ENDIF
        WRITE(*,100) I,XOPT,FX
100     FORMAT(10X,I5,2F16.6)
        IF(EA.LE.E5) THEN
            GOTO 20
        ENDIF
10     CONTINUE
20     RETURN
    END

*-----
    FUNCTION F(X)
        F=2*SIN(X)-((X**2.)/10.)
    RETURN
    END

*-----

```

เอาท์พุทจากโปรแกรม คือ

```

PLEASE ENTER XLOW,XHIGH,IMAX,ES
0
4
20
.000001

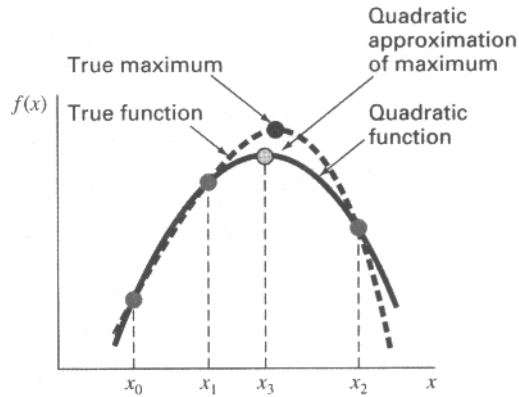
      I          X          F(X)
      1      1.527864      1.764720
      2      1.527864      1.764720
      3      1.527864      1.764720
      4      1.527864      1.764720
      5      1.442719      1.775475
      6      1.442719      1.775475
      7      1.442719      1.775475
      8      1.422619      1.775699
      9      1.422619      1.775699
     10      1.430297      1.775717
     11      1.430297      1.775717
     12      1.427364      1.775726
     13      1.427364      1.775726
     14      1.427364      1.775726
     15      1.427364      1.775726
     16      1.427364      1.775726
     17      1.427364      1.775726
     18      1.427364      1.775726
     19      1.427263      1.775726
     20      1.427263      1.775726

```

ซึ่งจะได้ค่าฟังก์ชันมากที่สุด คือ 1.776

7.2 การประมาณค่าโดยอาศัย Quadratic function

การประมาณค่าโดยอาศัย Quadratic function อาศัยหลักการที่ว่า second – order polynomial เป็นการประมาณค่าที่ใกล้เคียงกับรูปทรงของฟังก์ชันใกล้จุดสูงสุดหรือต่ำสุด ดังรูป



รูปที่ 7.1 การประมาณค่าโดยอาศัย Quadratic function

สามารถใช้คณิตศาสตร์ในการพิสูจน์ได้ว่า จุดสูงสุดจะมีค่าประมาณดังนี้

$$x_3 = \frac{f(x_0)(x_1^2 - x_2^2) + f(x_1)(x_2^2 - x_0^2) + f(x_2)(x_0^2 - x_1^2)}{2f(x_0)(x_1 - x_2) + 2f(x_1)(x_2 - x_0) + 2f(x_2)(x_0 - x_1)}$$

ตัวอย่างที่ 7.3 จงใช้วิธี Quadratic Interpolation หาค่า maximum ของ

$$f(x) = 2 \sin x - \frac{x^2}{10}$$

โดยใช้ค่าเริ่มต้น $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 4$ และจงเขียนโปรแกรมเพื่อช่วยในการคำนวณ

วิธีทำ

$$x_0 = 0, f(x_0) = 0$$

$$x_1 = 1, f(x_1) = 1.5829$$

$$x_2 = 4, f(x_2) = -3.1136$$

$$x_3 = \frac{0(1^2 - 4^2) + 1.5829(4^2 - 0^2) + (-3.1136)(0^2 - 1^2)}{2(0)(1 - 4) + 2(1.5829)(4 - 0) + 2(-3.1136)(0 - 1)} = 1.5055$$

ซึ่ง $f(1.5055) = 1.7691$

ห้ x_0 เก่า Iteration ต่อไปคือ

$$x_0 = 1, f(x_0) = 1.5829$$

$$x_1 = 1.5055, f(x_1) = 1.7691$$

$$x_2 = 4, f(x_2) = -3.1136$$

$$x_3 = \frac{1.5829(1.5055^2 - 4^2) + 1.769(4^2 - 1^2) + (-3.1136)(1^2 - 1.5055^2)}{2(1.5829)(1.5055 - 4) + 2(1.769)(4 - 1) + 2(-3.1136)(1 - 1.5055)} = 1.4903$$

$$f(1.4903) = 1.7714$$

โปรแกรมคำนวณค่าสูงสุด โดยวิธี Quadratic Interpolation คือ

```
PROGRAM QUAD
REAL X0,X1,X2,XMAX
WRITE(*,*) ' PLEASE ENTER X0,X1,X2,IMAX '
READ(*,*) X0,X1,X2,IMAX
WRITE(*,20)
20  FORMAT(/,14X,'I',11X,'X',14X,'F(X)',/)
CALL QUAD(X0,X1,X2,IMAX,XMAX)
STOP
END
```

```
*-----
SUBROUTINE QUAD(X0,X1,X2,IMAX,XMAX)
REAL X0,X1,X2,XMAX,FX
DO 10 I=1,IMAX
  F0 = F(X0)*((X1**2)-(X2**2))
  F1 = F(X1)*((X2**2)-(X0**2))
```



```

F2 = F(X2)*((X0**2)-(X1**2))
FD0= 2*F(X0)*(X1-X2)
FD1= 2*F(X1)*(X2-X0)
FD2= 2*F(X2)*(X0-X1)
XMAX=(F0+F1+F2)/(FD0+FD1+FD2)
XMID=X1
IF (XMAX.GT.XMID)THEN
  X0=XMID
  X1=XMAX
  X2=X2
ELSE
  X0=X0
  X1=XMAX
  X2=XMID
ENDIF
FX=F(XMAX)
*-----
      WRITE(*,100) I,XMAX,FX
100   FORMAT(10X,I5,2F16.6)
*-----
10    CONTINUE
      RETURN
      END
*-----
      FUNCTION F(X)
      F=2*SIN(X)-((X**2.)/10.)
      RETURN
      END
*-----

```

เอาที่พุดจากโปรแกรม คือ

```
PLEASE ENTER X0,X1,X2,IMAX
0
1
4
20
```

I	X	F(X)
1	1.505535	1.769079
2	1.490253	1.771431
3	1.425645	1.775722
4	1.426604	1.775725
5	1.426467	1.775724
6	1.666667	1.713038
7	1.430315	1.775717
8	1.427593	1.775726
9	1.456140	1.774834
10	1.427234	1.775725
11	1.417616	1.775618
12	1.449111	1.775219
13	1.427392	1.775726
14	1.428425	1.775725
15	1.430748	1.775715
16	1.426912	1.775725
17	1.375000	1.772724
18	1.429373	1.775722
19	1.426288	1.775724
20	1.427028	1.775725

จะได้ค่ามากที่สุดที่ $f(x) = 1.7757$

ตัวอย่างที่ 7.4 กำหนดให้ $f(x) = -1.5x^6 - 2x^4 + 12x$ จงหาค่ามากที่สุดของฟังก์ชัน
โดยวิธี Quadratic Interpolation โดยใช้ $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ และ $x_2 = 2$

วิธีทำ ส่วนหนึ่งของโปรแกรมที่ใช้คำนวณ คือ

```
FUNCTION F(X)
  F=(-1.5*X**6)-(2*X**4)+12*X
RETURN
END
```

*-----

เอาที่พุดจากโปรแกรม คือ

```
PLEASE ENTER X0,X1,X2,IMAX
0
1
2
10
```

I	X	F(X)
1	0.570248	6.579909
2	1.101066	7.600401
3	0.873822	8.652029
4	0.880206	8.664372
5	0.909560	8.696535
6	0.912627	8.697454
7	0.915776	8.697896
8	0.916417	8.697924
9	0.916811	8.697929
10	0.916688	8.697928

ซึ่งจะได้ค่ามากที่สุด = 8.69792 ตรงกับวิธี Golden – Section Search

7.3 วิธีนิวตัน(Newton' Method)

จากวิธี Newton-Raphson

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

ใช้วิธีเดียวกัน โดยให้ $g(x) = f'(x)$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)}$$

$$f'(x) = g(x) = 0$$

ตัวอย่างที่ 7.5 จงใช้วิธีนิวตัน หาค่ามากที่สุด ของ

$$f(x) = 2 \sin x - \frac{x^2}{10}$$

โดยใช้ค่าเริ่มต้น $x_0 = 2.5$ และจงเขียนโปรแกรมเพื่อคำนวณค่าสูงสุดนี้

วิธีทำ

$$f'(x) = 2 \cos x - \frac{x}{5}$$

$$f''(x) = -2 \sin x - \frac{1}{5}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{2 \cos x_i - \frac{x_i}{5}}{-2 \sin x_i - \frac{1}{5}}$$

แทนค่า $x_0 = 2.5$ เริ่มต้น

$$x_1 = 2.5 - \frac{2 \cos 2.5 - \frac{2.5}{5}}{-2 \sin 2.5 - \frac{1}{5}} = 0.99508$$

$$f(0.99508) = 1.57829$$

การ Iteration ครั้งที่ 2

$$x_1 = 0.995 - \frac{2 \cos 0.995 - \frac{0.995}{5}}{-2 \sin 0.995 - \frac{1}{5}} = 1.46901$$

$$f(1.46901) = 1.77385$$

โปรแกรมต่อไปนี้ คำนวณค่ามากที่สุดโดยวิธีนิวตัน

```
PROGRAM NEWTON
WRITE(*,*)'ENTER X0,IMAX'
READ (*,*) X0,IMAX
WRITE(*,30)
30  FORMAT(/,5X,'I',9X,'XROLD',11X,'F(X)',11X,'DF(X)'
+      ,10X,'DD(F(X))',/)
XR = X0
DO 100 ITER= 1,IMAX
XROLD=XR
HX=H(XROLD)
GX=G(XROLD)
XM=XROLD-(GX/HX)
XR=XM
WRITE(*,40) ITER,XROLD ,F(XROLD),GX,HX
40  FORMAT(1X,I5,4F16.6)
100 CONTINUE
STOP
END
*-----
FUNCTION F(X)
F=2*SIN(X)-(X**2)/10
RETURN
END
*-----
* DIFFERENTIAL
FUNCTION G(X)
```

G=(2*COS(X))-(X/5)

RETURN

END

*-----

* DOUBLE DIFFERENTIAL

FUNCTION H(X)

H=(-2*SIN(X))-(0.2)

RETURN

END

*-----

เอาที่พหุจากโปรแกรม คือ

```
ENTER X0,IMAX
2.5
10
```

I	XOLD	F(X)	DF(X)	DD(F(X))
1	2.500000	0.571944	-2.102287	-1.396944
2	0.995081	1.578588	0.889853	-1.877607
3	1.469011	1.773849	-0.090582	-2.189649
4	1.427642	1.775726	-0.000197	-2.179542
5	1.427552	1.775726	0.000000	-2.179516
6	1.427552	1.775726	0.000000	-2.179516
7	1.427552	1.775726	0.000000	-2.179516
8	1.427552	1.775726	0.000000	-2.179516
9	1.427552	1.775726	0.000000	-2.179516
10	1.427552	1.775726	0.000000	-2.179516

จะได้ค่ามากที่สุดของฟังก์ชัน คือ 1.775726 ซึ่งตรงกับวิธีการก่อนหน้า แต่ผู้เข้าหาคำตอบได้เร็วกว่ามาก (ใช้เพียง 4 iteration เท่านั้น)

ตัวอย่างที่ 7.6 จงหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันโดยวิธีนิวตัน $f(x) = -1.5x^6 - 2x^4 + 12x$
โดยใช้ $x_0 = 2$

วิธีทำ ส่วนหนึ่งของโปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณ คือ

```
FUNCTION F(X)
  F=(-1.5*X**6)-(2*X**4)+12*X
  RETURN
END
*-----
*   DIFFERENTIAL
  FUNCTION G(X)
    G=(-9*X**5)-(8*X**3)+12
  RETURN
  END
*-----
*   DOUBLE DIFFERENTIAL
  FUNCTION H(X)
    H=(-45*X**4)-(24*X**2)
  RETURN
  END
*-----
```

เอาที่พหุจากโปรแกรม คือ

```

ENTER X0, IMAX
2
10

```

I	X(OLD)	F(X)	D(F(X))	DD(F(X))
1	2.000000	-104.000000	-340.000000	-816.000000
2	1.583333	-17.202900	-109.312622	-342.981354
3	1.264620	3.924618	-33.289768	-153.476456
4	1.047716	8.178617	-8.562807	-80.568306
5	0.941435	8.681846	-1.330883	-56.620022
6	0.917930	8.697903	-0.052848	-52.170803
7	0.916917	8.697929	-0.000094	-51.985401
8	0.916915	8.697929	-0.000001	-51.985077
9	0.916915	8.697929	-0.000001	-51.985077
10	0.916915	8.697929	-0.000001	-51.985077

ซึ่งจะได้ค่ามากที่สุดของฟังก์ชัน คือ 8.697929 ตรงกันทั้งสามวิธี แต่วิธีนี้จะเข้าถึงคำตอบได้เร็วที่สุด (7 iterations เท่านั้น)

แบบฝึกหัดที่ 7

- จากฟังก์ชันต่อไปนี้ $f(x) = x^2 - 8x + 12$
 - จงหาค่ามากที่สุดของฟังก์ชัน โดยวิธีการดิฟเฟอเรนเชียลของฟังก์ชัน
 - คำนวณโดยใช้วิธี Quadratic interpolation โดยใช้ $x_0 = 0, x_1 = 2$ และ $x_2 = 6$
- กำหนดให้ $f(x) = -1.5x^6 - 2x^4 + 12x$
 - จงเขียนกราฟของฟังก์ชันนี้
 - จงหาค่ามากที่สุดของฟังก์ชัน โดยวิธีการดิฟเฟอเรนเชียล
 - จงหาค่ามากที่สุดของฟังก์ชัน โดยวิธี golden – section โดยใช้ $x_l = 0, x_u = 2$ แล้วทำซ้ำ 3 ครั้ง
 - จงหาค่ามากที่สุด โดยใช้วิธี quadratic interpolation โดยใช้ $x_0 = 0, x_1 = 1$ และ $x_2 = 2$ ทำการคำนวณซ้ำ 3 ครั้ง
 - จงหาค่ามากที่สุด โดยใช้วิธี Newton ใช้ค่าเริ่มต้น $x_0 = 2$ และทำการคำนวณซ้ำ 3 ครั้ง
- ใช้โปรแกรมในข้อ 2. โดยใช้วิธีการทั้งสามวิธี
- จงเปรียบเทียบวิธีการหาค่ามากที่สุดทั้งสามวิธี
- จงหาค่ามากที่สุดของฟังก์ชัน $f(x) = 2x - 1.75x^2 + 1.1x^3 - 0.25x^4$ โดยวิธี
 - Golden – section ($x_l = -2, x_u = 4, \epsilon_s = 1\%$)
 - Quadratic interpolation ($x_0 = 1.75, x_1 = 2, x_2 = 2.25, \text{iteration} = 5$)
 - Newton ($x_0 = 2.5, \epsilon_s = 1\%$)