

วิธีทำ

$$\begin{aligned}e_k &= e_k / f_{k-1} \\f_k &= f_k - e_k \cdot g_{k-1} \\e_2 &= -1/2.04 = -0.49 \\f_2 &= 2.04 - (-0.49)(-1) = 1.550 \\e_3 &= -1/1.550 = -0.645 \\f_3 &= 2.04 - (-0.645)(-1) = 1.395 \\e_4 &= -1/1.395 = -0.717 \\f_4 &= 2.04 - (-0.717)(-1) = 1.323\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} 2.04 & -1 & & \\ -0.49 & 1.550 & -1 & \\ & -0.645 & 1.395 & -1 \\ & & -0.717 & 1.323 \end{bmatrix}$$

อาศัย LU ดีคอมโพสิชัน จะได้

$$[A] = [L][U] = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -0.49 & 1 & & \\ & -0.645 & 1 & \\ & & -0.717 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.04 & -1 & & \\ & 1.550 & -1 & \\ & & 1.395 & -1 \\ & & & 1.323 \end{bmatrix}$$

อาศัยการแทนค่า

$$r_k = r_k - e_k r_{k-1}$$

จะได้

$$\begin{aligned}r_2 &= 0.8 - (-0.49)40.8 = 20.8 \\r_3 &= 0.8 - (-0.645)20.8 = 14.221 \\r_4 &= 200.8 - (-0.717)14.221 = 210.996\end{aligned}$$

ดังนั้น เวกเตอร์ทางด้านขวาเปลี่ยนเป็น

$$\begin{pmatrix} 40.8 \\ 20.8 \\ 14.221 \\ 210.996 \end{pmatrix}$$

อาศัยการแทนค่ากลับและเมทริกซ์ $[U]$

$$x_k = (r_k - g_k \cdot x_{k+1}) / f_k$$

จะได้

$$T_4 = 210.996 / 1.323 = 159.480$$

$$T_3 = [14.221 - (-1)159.48] / 1.395 = 124.538$$

$$T_2 = [20.800 - (-1)124.538] / 1.550 = 93.778$$

$$T_1 = [40.800 - (-1)93.778] / 2.040 = 65.970$$

6.2 โคลเลสกีดีคอมโพสิชัน(Cholesky Decomposition)

ใช้แก้มเมทริกซ์สมมาตร ซึ่ง $a_{ij} = a_{ji}$

หรือ

$$[A] = [A]^T$$

$$l_{ki} = \frac{a_{ij} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} l_{kj}}{l_{ii}} \quad \text{เมื่อ } i = 1, 2, \dots, k-1$$

และ

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}$$

ตัวอย่างที่ 6.2 อาศัยโพลแลสกีดีคอมโพสิชันกับเมทริกซ์สมมาตรต่อไปนี้

$$[A] = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ สำหรับแถวแรก $k=1$ ไม่ต้องคำนวณ ข้ามไปคำนวณสมการอื่น

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{6} = 2.4495$$

สำหรับแถวที่สอง ($k=2$)

สำหรับ $j=1$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{55}{2.4495} = 22.454$$

และสำหรับ $j=2$

$$\begin{aligned} l_{32} &= \frac{a_{32} - l_{21}l_{31}}{l_{22}} = \frac{225 - 6.1237(22.454)}{4.1833} \\ &= 20.916 \end{aligned}$$

และจาก

$$\begin{aligned} l_{33} &= \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} \\ &= \sqrt{979 - (22.454)^2 - (20.916)^2} \\ &= 6.1106 \end{aligned}$$

ดังนั้น หลังจากอาศัยโซลเลสกีดีคอมโพซิชัน จะได้

$$[L] = \begin{bmatrix} 2.4495 & & \\ 6.1237 & 4.1833 & \\ 22.454 & 20.916 & 6.1103 \end{bmatrix}$$

6.3 เกาส์ – ซีเดล

อาศัยวิธีการทำซ้ำเหมือนกับการหารากของสมการที่ได้เรียนไปแล้ว เริ่มต้นจากการพยากรณ์คำตอบของสมการก่อนว่าควรจะมีค่าเท่าไร ให้ใช้ค่านี้เป็นค่าเริ่มต้น แล้วจึงทำซ้ำหลาย ๆ ครั้งเพื่อหาคำตอบ

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}}$$
$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}}$$
$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}$$

เริ่มต้นโดยการสมมุติค่า x_1, x_2, x_3

ตัวอย่างที่ 6.3 อาศัยวิธีเกาส์ – ซีเดลหาผลเฉลยของระบบสมการในตัวอย่างที่ 6.1

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85$$
$$0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3$$
$$0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 = 71.4$$

คำตอบที่แท้จริงคือ $x_1 = 3, x_2 = -2.5$ และ $x_3 = 7$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{7.85 + 0.1x_2 + 0.2x_3}{3} \\x_2 &= \frac{-19.3 - 0.1x_1 + 0.3x_3}{7} \\x_3 &= \frac{71.4 - 0.3x_1 + 0.2x_2}{10}\end{aligned}$$

สมมติว่า x_2 และ x_3 เท่ากับศูนย์

$$\therefore x_1 = \frac{7.85 + 0 + 0}{3} = 2.616667$$

ใช้ค่า x_1 นี้ และ $x_3 = 0$ แทนลงไปหาค่า x_2

$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1(2.616667) + 0}{7} = -2.794524$$

แทนค่า x_1 และ x_2 หาค่า x_3

$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3(2.616667) + 0.2(-2.794524)}{10} = 7.005610$$

สำหรับการ iterate ครั้งที่สองจะได้

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{7.85 + 0.1(-2.794524) + 0.2(7.005610)}{3} = 2.990557 \\x_2 &= \frac{-19.3 - 0.1(2.990557) + 0.3(7.005610)}{7} = -2.499625 \\x_3 &= \frac{71.4 - 0.3(2.990557) + 0.2(-2.499625)}{10} = 7.00291\end{aligned}$$


```

DO 20 J=1,N
  A(I,J)=A(I,J)/DUMMY
20  CONTINUE
  B(I)=B(I)/DUMMY
10  CONTINUE
DO 30 I=1,N
  SUM=B(I)
  DO 40 J=1,N
    IF (I.NE.J)THEN
      SUM=SUM-A(I,J)*X(J)
    ENDIF
40  CONTINUE
  X(I)=SUM
30  CONTINUE
DO 50 ITER=1,IMAX
  SENTINEL=1.
  DO 60 I=1,N
    OLD=X(I)
    SUM=B(I)
    DO 70 J=1,N
      IF (I.NE.J)THEN
        SUM=SUM-A(I,J)*X(J)
      ENDIF
70  CONTINUE
    X(I)=LAMDA*SUM+(1.-LAMDA)*OLD
    IF (SENTINEL.EQ.1.) THEN
      IF (X(I).NE.0.) THEN
        EA=ABS((X(I)-OLD)/X(I))*100.
      ENDIF

```



```

ENDIF
IF (EA.GT.ES) THEN
    SENTINEL=0.
ENDIF
60    CONTINUE
WRITE(6,200) ITER,X(1),X(2),X(3),EA
200  FORMAT(5X,I3,3X,4F12.6)
    IF (SENTINEL.EQ.1.) THEN
        GOTO 300
    ENDIF
50    CONTINUE
300  RETURN
END

```

=====

เอาต์พุตจากโปรแกรม คือ

```

ENTER IMAX,ES,LAMBDA
30
.000001
1

```

ITER	X1	X2	X3	EA
1	78.500000	52.500000	32.250000	21.019108
2	88.250000	62.250000	37.125000	11.048159
3	93.125000	67.125000	39.562500	5.234900
4	95.562500	69.562500	40.781250	2.550687
5	96.781250	70.781250	41.390625	1.259283
6	97.390625	71.390625	41.695313	0.625702
7	97.695313	71.695313	41.847656	0.311875
8	97.847656	71.847656	41.923828	0.155695
9	97.923828	71.923828	41.961914	0.077787
10	97.961914	71.961914	41.980957	0.038878
11	97.980957	71.980957	41.990479	0.019435
12	97.990479	71.990479	41.995239	0.009717
13	97.995239	71.995239	41.997620	0.004858
14	97.997620	71.997620	41.998810	0.002429
15	97.998810	71.998810	41.999405	0.001214
16	97.999405	71.999405	41.999702	0.000607
17	97.999702	71.999702	41.999851	0.000304
18	97.999847	71.999847	41.999924	0.000148
19	97.999924	71.999924	41.999962	0.000078
20	97.999962	71.999962	41.999981	0.000039
21	97.999985	71.999985	41.999992	0.000023
22	97.999992	71.999992	41.999996	0.000008
23	98.000000	72.000000	42.000000	0.000000
24	98.000000	72.000000	42.000000	0.000000

จะเห็นได้ว่า เมื่อทำการ iterate หลาย ๆ ครั้งโปรแกรมไม่มีการลู่อเข้า จึงไม่ได้คำตอบของสมการ

เมื่อทำการสลับสมการใหม่ เป็น

$$4x_1 - x_2 - x_3 = -2$$

$$6x_1 + 8x_2 = 45$$

$$-5x_1 + 12x_3 = 80$$

ส่วนหนึ่งของโปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณ จะเปลี่ยนเป็น

```
*=====
*          ***** SWAP ROW 1 TO 3 *****
*          ***** SWAP ROW 2 TO 1 *****
*          ***** SWAP ROW 3 TO 2 *****
*=====

PROGRAM GS2
PARAMETER (N=3)
REAL A(N,N),B(N),X(3)
REAL LAMDA,ES
DATA ((A(I,J),J=1,N),I=1,N)/4.,-1.,-1.,
+          6.,8.,0.,
+          -5.,0.,12./
DATA (B(I),I=1,N)/-2.,45.,80./
```

จะได้เอาที่พุด คือ

```
ENTER IMAX,ES,LAMBDA
20
.0001
1
```

ITER	X1	X2	X3	EA
1	2.614583	3.664063	7.756076	119.123505
2	2.355035	3.858724	7.647931	11.021002
3	2.376664	3.842502	7.656943	0.910051
4	2.374861	3.843854	7.656192	0.075897
5	2.375011	3.843741	7.656255	0.006324
6	2.374999	3.843751	7.656250	0.000522
7	2.375000	3.843750	7.656250	0.000006

ซึ่งเกิดการลู่เข้า ค่าตอบของสมการ คือ

$$x_1 = 2.375000, x_2 = 3.843750, x_3 = 7.656250$$

6.4 การประยุกต์ทางด้านฟิสิกส์

การแก้ระบบของสมการด้วยวิธีวิเคราะห์เชิงตัวเลขมีความสำคัญต่อการแก้ปัญหาทางด้านฟิสิกส์มาก เพราะในทางปฏิบัติการคำนวณโดยการกดเครื่องคิดเลขด้วยมือ เพื่อแก้ระบบสมการอาจจะเกิดความผิดพลาดได้ง่าย และสิ้นเปลืองเวลามาก ปัญหาทางฟิสิกส์ที่สามารถนำวิธีวิเคราะห์เชิงตัวเลขมาประยุกต์ใช้งาน เช่น ปัญหาเรื่องมวลสมดุลภายในเครื่องปฏิกรณ์ปรมาณู การคำนวณกระแสและศักย์ภายในวงจรไฟฟ้า และระบบมวลที่สนับสนุนสปริงเป็นต้น

ตัวอย่างที่ 6.6 จงหาความเข้มข้น (หน่วย กรัม/ม.³) ภายในเครื่องปฏิกรณ์ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของมวลที่อินพุตเข้าไปในแต่ละวัน (กรัม/วัน)

$$\begin{aligned} 17C_1 - 2C_2 - 3C_3 &= 500 \\ -5C_1 + 21C_2 - 2C_3 &= 200 \\ -5C_1 - 5C_2 + 22C_3 &= 30 \end{aligned}$$

วิธีทำ ส่วนหนึ่งของโปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณ คือ

```
PROGRAM GAUSSSIDEL
PARAMETER (N=3)
REAL A(N,N),B(N),X(3)
REAL LAMDA,ES
DATA ((A(I,J),J=1,N),I=1,N)/17.,-2.,-3.,
+           -5.,21.,-2.,
+           -5.,-5.,22./
DATA (B(I),I=1,N)/500.,200.,30./
```

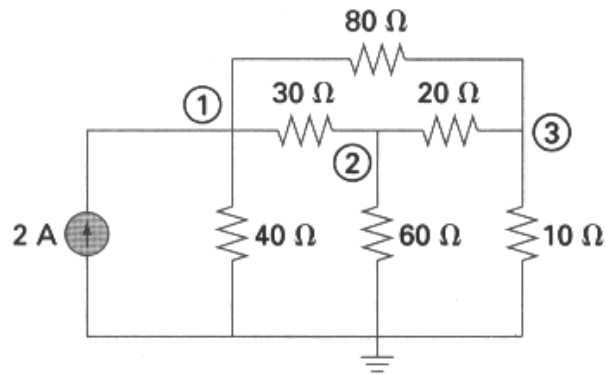
เอาท์พุท คือ

ITER	C1	C2	C3	ES
1	33.439163	18.609722	13.192929	12.043959
2	33.929306	18.858685	13.360908	1.444600
3	33.988239	18.888714	13.381126	0.173393
4	33.995342	18.892332	13.383562	0.020894
5	33.996197	18.892767	13.383856	0.002513
6	33.996300	18.892818	13.383891	0.000303
7	33.996311	18.892826	13.383895	0.000034
8	33.996311	18.892826	13.383895	0.000000

จะได้ความเข้มข้น ดังนี้

$$C_1 = 34, C_2 = 18.89, C_3 = 13.38 \text{ กรัม/วัน}$$

ตัวอย่างที่ 6.7 จงหา V_1 , V_2 และ V_3 ของวงจรไฟฟ้าต่อไปนี้



วิธีทำ จากกฎของเคอร์ชอฟ จะได้

$$17V_1 - 8V_2 - 3V_3 = 480$$

$$-2V_1 + 6V_2 - 3V_3 = 0$$

$$-V_1 - 4V_2 + 13V_3 = 0$$

ส่วนหนึ่งของโปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณ

```

PROGRAM GS
PARAMETER (N=3)
REAL A(N,N),B(N),X(3)
REAL LAMDA,ES
DATA ((A(I,J),J=1,N),I=1,N)/17.,-8.,-3.,
+
-2.,6.,-3.,
+
-1.,-4.,13./
DATA (B(I),I=1,N)/480.,0.,0./
    
```

เอาท์พุท คือ

```

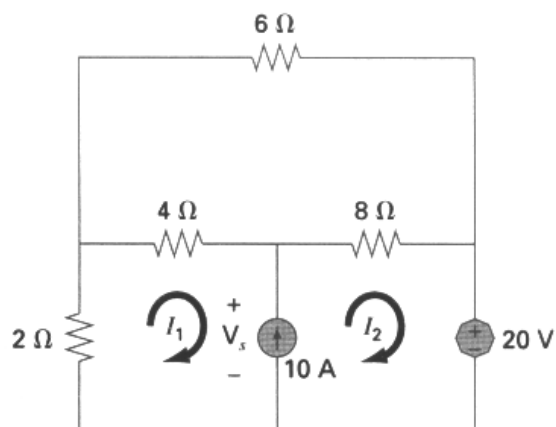
ENTER I MAX , ES , LAMBDA
20
.0001
1

```

ITER	U1	U2	U3	EA
1	33.558689	13.720166	6.803028	15.862940
2	35.892380	15.365641	7.488842	6.501911
3	36.787743	16.007002	7.755058	2.433862
4	37.136539	16.256376	7.858619	0.939228
5	37.272167	16.353365	7.898895	0.363885
6	37.324917	16.391087	7.914559	0.141326
7	37.345432	16.405758	7.920651	0.054934
8	37.353413	16.411463	7.923021	0.021364
9	37.356518	16.413683	7.923943	0.008312
10	37.357723	16.414547	7.924301	0.003227
11	37.358192	16.414883	7.924440	0.001256
12	37.358376	16.415012	7.924495	0.000490
13	37.358448	16.415064	7.924516	0.000194
14	37.358475	16.415083	7.924524	0.000116
15	37.358486	16.415091	7.924527	0.000042

ดังนั้น $V_1 = 37.4$ โวลต์, $V_2 = 16.4$ โวลต์, $V_3 = 7.9$ โวลต์

ตัวอย่างที่ 6.8 จากวงจรต่อไปนี้ จงหาค่ากระแสและแรงดันของแหล่งจ่ายไฟในวงจร



วิธีทำ จากกฎของเคอร์ชอฟ จะได้

$$\begin{aligned}6I_1 - 4I_3 + V_s &= 0 \\8I_2 - 8I_3 - V_s &= 0 \\-4I_1 - 8I_2 + 18I_3 &= 0 \\-I_1 + I_2 &= 10\end{aligned}$$

ส่วนหนึ่งของโปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณ คือ

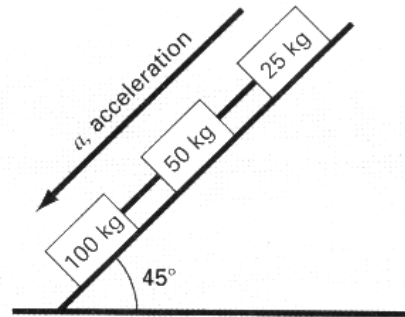
```
PROGRAM GAUSS
DIMENSION A(50,50),B(50),X(50)
PARAMETER (N=4)
DATA ((A(I,J),J=1,N),I=1,N)/6.,0.,-4.,1.,
+           0.,8.,-8.,-1.,
+           -4.,-8.,18.,0.,
+           -1.,1.,0.,0. /
DATA (B(I),I=1,N) /0.,-20.,0.,10./
CALL GAUSS(N,A,B,X)
```

เอาท์พุท คือ

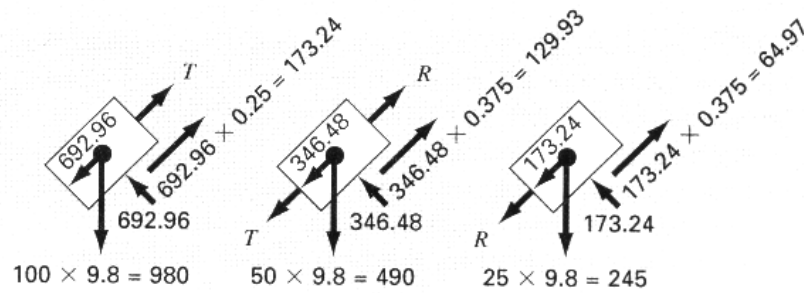
EQUATION NO.	SOLUTION X
1	-7.777778
2	2.222222
3	-0.740741
4	43.703705

ดังนั้น $I_1 = -7.78$ แอมแปร์
 $I_2 = 2.22$ แอมแปร์
 $I_3 = -0.7$ แอมแปร์
และ $V_s = 43.7$ โวลต์

ตัวอย่างที่ 6.9 มวล 3 อันผูกต่อกันวางอยู่บนพื้นเอียงตั้งรูป จงหาความเร่งของมวล และแรงตึงในเส้นเชือก



(a)



(b)

วิธีทำ จาก free – body diagram จะได้

$$100a + T = 519.72$$

$$50a - T + R = 0$$

$$25a - R = 0$$

ส่วนหนึ่งของโปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณค่า a, T และ R คือ

```

PROGRAM GAUSS
DIMENSION A(50,50),B(50),X(50)
PARAMETER (N=3)
DATA ((A(I,J),J=1,N),I=1,N)/100.,1.,0.,
+           50.,-1.,1.,
+           25.,0.,-1./
DATA (B(I),I=1,N) /519.72,216.55,108.27/
CALL GAUSS(N,A,B,X)

```

เอาท์พุทจากโปรแกรม

EQUATION NO.	SOLUTION X
1	4.825943
2	37.125710
3	12.378567

ดังนั้น $a = 4.8$ เมตร/วินาที²

$T = 37.1$ นิวตัน

$R = 12.4$ นิวตัน

แบบฝึกหัดบทที่ 6

1. ระบบสมการต่อไปนี้ ใช้ในการหาความเข้มข้น (c หน่วย กรัม/ม.³) ในเครื่องปฏิกรณ์ปรมาณูเป็นฟังก์ชันของมวลที่ใส่เข้าไปในเครื่อง (ทางขวาของสมการหน่วย กรัม/วัน)

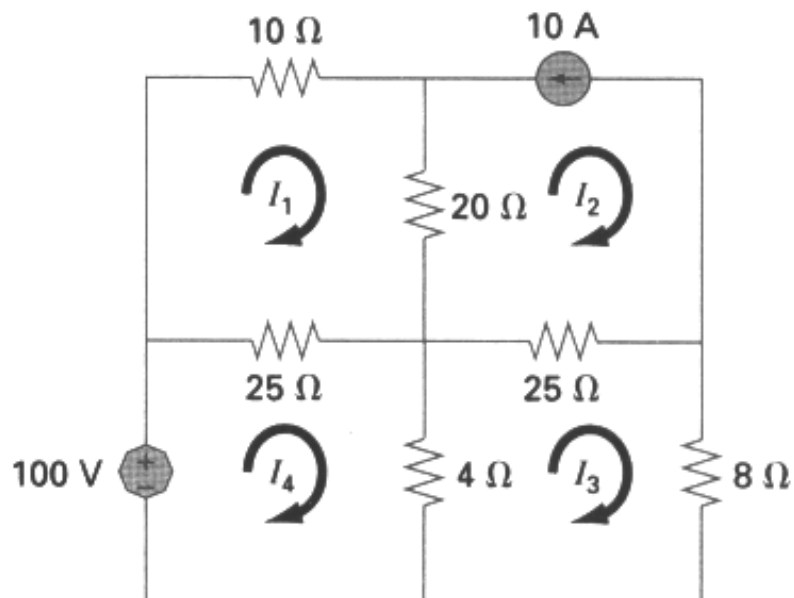
$$17C_1 - 2C_2 - 3C_3 = 500$$

$$-5C_1 + 21C_2 - 2C_3 = 200$$

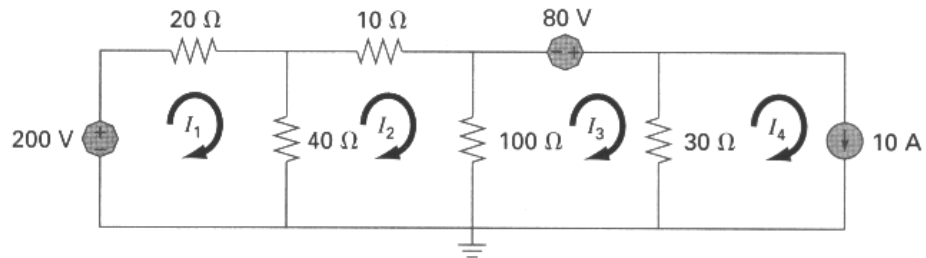
$$-5C_1 - 5C_2 + 22C_3 = 30$$

จงหาปริมาณความเข้มข้น

2. จากวงจรต่อไปนี้จงหาค่า I_1 , I_3 และ I_4



3. จากวงจรต่อไปนี้จงหาค่า I_1 , I_2 และ I_3



4. มวล 4 อัน 5, 8, 10 และ 15 กิโลกรัม ผูกติดกันและคล้องผ่านรอกดังรูป จงหา ความเร่งและแรงตึงในเส้นเชือก

