บทที่ 5

การสร้างเมทริกซ์ LU และอินเวิร์สของเมทริกซ์

ในบทนี้จะกล่าวถึงการสร้างเมทริกซ์ LU และการหาอินเวิร์สของเมทริกซ์

5.1 LU ดีคอมโพซิชัน (LU decomposition)

ช่วยการคำนวณเกี่ยวกับเมทริกซ์ให้มีความรวดเร็วขึ้น เริ่มต้นจากการนำวิธี Gauss elimination มาแก้สมการของระบบ

$$[A]\{X\} = \{B\}$$

จัดรูปสมการเป็น

$$[A]\{X\} - \{B\} = 0$$

สมมุติว่าสามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix}$$

ซึ่งก็คือ

$$[A]\{X\} - \{D\} = 0$$

สมมุติว่ามี lower diagonal matrix

$$[L]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ l_{21} & 1 & 0\\ l_{31} & l_{32} & 1\end{bmatrix}$$

ซึ่งมีคุณสมบัติว่า

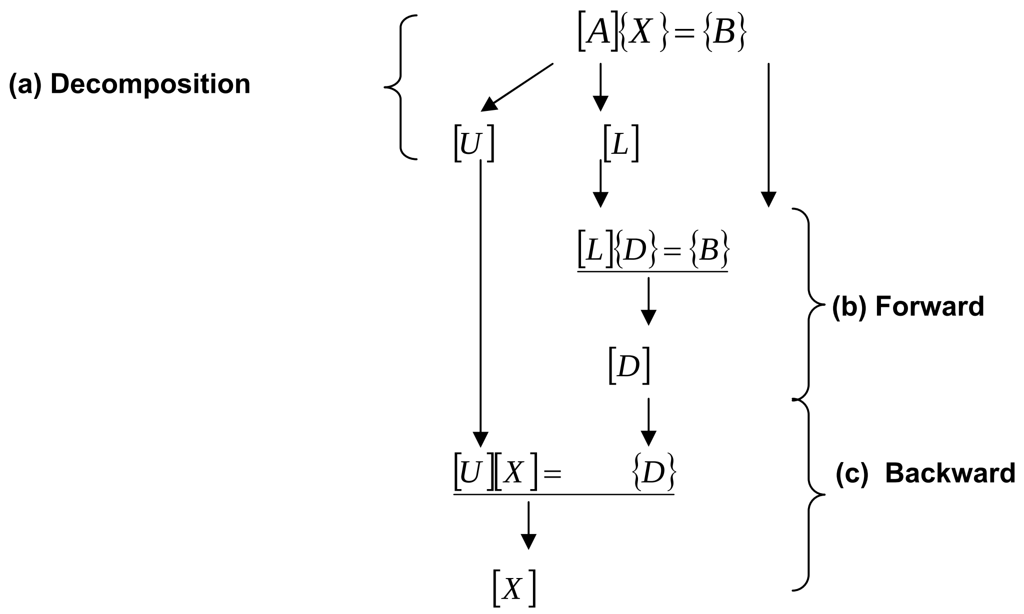
$$[L]\{[U]\{X\}-\{D\}\}=[A]\{X\}-\{B\}$$

จะได้

$$[L][U]=[A]$$

และ $$[L]\{D\}=\{B\}$$

สรุป วิธี LU ดีคอมโพซิชันเป็นขั้นตอน คือ



สำหรับ upper matrix

$$[U]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{bmatrix}$$

หลังจากการ eliminate จะได้ matrix $[A]$ เป็น

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ f_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ f_{31} & f_{32} & a''_{33} \end{bmatrix} \qquad \text{เมื่อ} \qquad \begin{aligned} f_{21} &= a_{21}/a_{11} \\ f_{31} &= a_{31}/a_{11} \\ f_{32} &= a'_{32}/a'_{22} \end{aligned}$$

matrix นี้จะอยู่ในรูป LU decomposition

$$[A]\rightarrow[L][U]$$

เมื่อ

$$[U]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad [L]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f_{21} & 1 & 0 \\ f_{31} & f_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 5.1 จงแบ่งเมทริกซ์ของสมการต่อไปนี้เป็นเมทริกซ์ L และเมทริกซ์ U โดยอาศัย Gauss Elimination

$$\begin{aligned} 0.3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\ 0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 &= -19.3 \\ 0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 &= 71.4 \end{aligned}$$

วิธีทำ

$$[A]=\begin{bmatrix}3 & -0.1 & -0.2\\ 0.1 & 7 & -0.3\\ 0.3 & -0.2 & 10\end{bmatrix}$$

หลังจาก Forward Elimination จะได้

$$[U]=\begin{bmatrix}3 & -0.1 & -0.2\\ 0 & 7.00333 & -0.293333\\ 0 & 0 & 10.0120\end{bmatrix}$$

เมื่อ $f_{21}=\dfrac{0.1}{3}=0.03333333$, $f_{31}=\dfrac{0.3}{3}=0.10000000$

$$f_{32}=\frac{-0.19}{7.00333}=-0.0271300$$

จะได้

$$[L]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0.03333333 & 1 & 0\\ 0.10000000 & -0.0271300 & 1\end{bmatrix}$$

ดังนั้น LU decomposition คือ

$$\begin{aligned}[A]&=[L][U]\\ &=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0.03333333 & 1 & 0\\ 0.10000000 & -0.0271300 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -0.1 & -0.2\\ 0 & 7.00333 & -0.293333\\ 0 & 0 & 10.0120\end{bmatrix}\end{aligned}$$

ซึ่งเมื่อคูณเมทริกซ์ทั้งสองจะได้

$$[L][U]=\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.0999999 & 7 & -0.3 \\ 0.3 & -0.2 & 9.99996 \end{bmatrix}$$

ซึ่งตรงกับ $[A]$

ตัวอย่างที่ 5.2 จงแก้สมการในตัวอย่างที่ 5.1 โดยวิธีสร้างเมทริกซ์ LU และเขียนโปรแกรมเพื่อแก้สมการนี้

วิธีทำ

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 7 & -0.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 7.85 \\ -19.3 \\ 71.4 \end{Bmatrix}$$

จาก Gauss Elimination จะได้

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 7.00333 & -0.293333 \\ 0.3 & -0.2 & 10.0120 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 7.85 \\ -19.5617 \\ 70.0843 \end{Bmatrix}$$

อาศัยสมการจะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0333333 & 1 & 0 \\ 0.100000 & -0.0271300 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 7.85 \\ -19.3 \\ 71.4 \end{Bmatrix}$$

คูณออกมาได้

$$d_1 = 7.85$$
$$0.0333333 d_1 + d_2 = -19.3$$
$$0.1 d_1 - 0.02713 d_2 + d_3 = 71.4$$

จะได้

$$
\begin{aligned}
d_1 &= 7.85 \\
d_2 &= -19.3 - 0.0333333(7.85) = -19.5617 \\
d_3 &= 71.4 - 0.1(7.85) + 0.02713(-19.5617) = 70.0843
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$
\{D\} = \begin{Bmatrix} 7.85 \\ -19.5617 \\ 70.0843 \end{Bmatrix}
$$

แทนลงในสมการ $[U]\{X\} = \{D\}$

$$
\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.00333 & -0.293333 \\ 0 & 0 & 10.0120 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7.85 \\ -19.5617 \\ 70.0843 \end{Bmatrix}
$$

อาศัย Back substitution จะได้

$$
\{x\} = \begin{Bmatrix} 3 \\ -2.5 \\ 7.00003 \end{Bmatrix}
$$

โปรแกรมที่ใช้ในการแก้สมการโดยวิธี LU ดิคอมโพซิชัน คือ

```
      PROGRAM LUDCOM
      DIMENSION A(50,50),B(50),X(50)
      DIMENSION AL(50,50),AU(50,50),Y(50)
      PARAMETER (N=3)
      DATA ((A(I,J),J=1,N),I=1,N)/3.,-0.1,-0.2,
   +                              0.1,7.,-0.3,
   +                              0.3,-0.2,10./
      DATA (B(I),I=1,N) /7.85,-19.3,71.4/
      CALL LU(N,A,B,X,AL,AU,Y)
      WRITE(*,100)
100    FORMAT(/,7X,'EQUATION NO.',
   +           7X,'SOLUTION X',/)
      DO 10 I=1,N
        WRITE(*,200) I,X(I)
200      FORMAT(I12,8X,F16.6)
10     CONTINUE
      STOP
      END
*----------------------------------------------------
      SUBROUTINE LU(N,A,B,X,AL,AU,Y)
      DIMENSION A(50,50),B(50),X(50)
      DIMENSION AL(50,50),AU(50,50),Y(50)
      DO 10 I=1,50
        DO 10 J=1,50
          AL(I,J)=0.
          AU(I,J)=0.
10     CONTINUE
```

```
      DO 20 I=1,N
        AL(I,1)=A(I,1)
20    CONTINUE
      DO 30 J=2,N
        AU(1,J)=A(1,J)/AL(1,1)
30    CONTINUE
      DO 40 J=2,N-1
        DO 50 I=J,N
          SUM=0.
          DO 60 K=1,J-1
            SUM=SUM+AL(I,K)*AU(K,J)
60        CONTINUE
          AL(I,J)=A(I,J)-SUM
50      CONTINUE
        DO 70 K=J+1,N
          SUM=0.
          DO 80 I=1,J-1
            SUM=SUM+AL(J,I)*AU(I,K)
80        CONTINUE
          AU(J,K)=(A(J,K)-SUM)/AL(J,J)
70      CONTINUE
40    CONTINUE
      SUM=0.
      DO 90 K=1,N-1
        SUM=SUM+AL(N,K)*AU(K,N)
90    CONTINUE
      AL(N,N)=A(N,N)-SUM
      Y(1)=B(1)/AL(1,1)
      DO 100 I=2,N
```

```
          SUM=0.
          DO 110 J=1,I-1
            SUM=SUM+AL(I,J)*Y(J)
110         CONTINUE
          Y(I)=(B(I)-SUM)/AL(I,I)
100       CONTINUE
        X(N)=Y(N)
        DO 120 I=N-1,1,-1
          SUM=0.
          DO 130 J=I+1,N
            SUM=SUM+AU(I,J)*X(J)
130         CONTINUE
          X(I)=Y(I)-SUM
120       CONTINUE
        RETURN
        END
*----------------------------------------------
```

เอาท์พุทจากสมการคือ

EQUATION NO.	SOLUTION X
1	3.000000
2	-2.500000
3	7.000000

จะได้ $x_1 = 3$, $x_2 = -2.5$, $x_3 = 7$

ตัวอย่างที่ 5.3 จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้ โดยวิธี LU ดีคอมโพซิชัน

$$7x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -12$$
$$2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -20$$
$$x_1 - x_2 - 6x_3 = -26$$

วิธีทำ ใช้โปรแกรมแก้ระบบสมการข้างบน โดยเปลี่ยนระบบสมการ

```
      PROGRAM LUDCOM
      DIMENSION A(50,50),B(50),X(50)
      DIMENSION AL(50,50),AU(50,50),Y(50)
      PARAMETER (N=3)
      DATA ((A(I,J),J=1,N),I=1,N)/7.,2.,-3.,
     +                           2.,5.,-3.,
     +                           1.,-1.,-6./
      DATA (B(I),I=1,N) /-12.,-20.,-26./
```

เอาท์พุทจากโปรแกรม คือ

```
EQUATION NO.        SOLUTION X

     1                 0.718750
     2                -1.468750
     3                 4.697917
```

x_1 = 0.718750, x_2 = - 1.468750, x_3 = 4.697917

ตัวอย่างที่ 5.4 ทำเช่นเดียวกับตัวอย่าง 5.2 แต่เปลี่ยน {B} เป็น

$$\{B\}^T = [12 \quad 18 \quad -6]$$

วิธีทำ โปรแกรมเช่นเดียวกับในตัวอย่าง 5.2 แต่เปลี่ยนค่า {B} เป็น [12 18 -6] ซึ่งจะได้เอาท์พุท คือ

```
EQUATION NO.        SOLUTION X

     1               4.038069
     2               2.484966
     3              -0.671443
```

x_1 = 4.o38069, x_2 = 2.484966, x_3 = -0.671443

5.2 อินเวิร์สของเมทริกซ์

$$[A][A]^{-1} = [A]^{-1}[A] = [1]$$

ตัวอย่างที่ 5.5 อาศัย LU decomposition หา matrix inverse สำหรับระบบในตัวอย่างที่ 5.1

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 7 & -0.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 \end{bmatrix}$$

ซึ่งมี lower และ upper triangular matrixes

$$[U] = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.00333 & -0.293333 \\ 0 & 0 & 10.0120 \end{bmatrix}$$

$$[L]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0333333 & 1 & 0 \\ 0.1000000 & -0.0271300 & 1 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0333333 & 1 & 0 \\ 0.1000000 & -0.0271300 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

อาศัย forward substitution จะได้

$$\{D\}^T=[1 \quad -0.03333 \quad -0.1009]$$

ใช้เป็นด้านขวาของสมการ

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.00333 & -0.293333 \\ 0 & 0 & 10.0120 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1 \\ -0.03333 \\ -0.1009 \end{Bmatrix}$$

อาศัย Back substitution จะได้

$$\{X\}^T=[0.33249 \quad -0.00518 \quad -0.01008]$$

ดังนั้นเฉพาะ column แรก

$$[A]^{-1}=\begin{bmatrix} 0.33249 & 0 & 0 \\ -0.00518 & 0 & 0 \\ -0.01008 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

สำหรับ column ที่สอง

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0333333 & 1 & 0 \\ 0.100000 & -0.0271300 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

หาค่า $\{D\}$ ได้แทนลงในสมการจะได้

$$\{X\}^T = [0.004944 \quad 0.142903 \quad 0.00271]$$

เป็น column ที่สองของ matrix

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.33249 & 0.004944 & 0 \\ -0.00518 & 0.142903 & 0 \\ -0.01008 & 0.00271 & 0 \end{bmatrix}$$

เช่นเดียวกัน อาศัย $\{B\}^T = [0 \quad 0 \quad 1]$ จะได้

$$\{X\}^T = [0.006798 \quad 0.004183 \quad 0.09988]$$

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.33249 & 0.004944 & 0.006798 \\ -0.00518 & 0.142903 & 0.004183 \\ -0.01008 & 0.00271 & 0.09988 \end{bmatrix}$$

ตรวจสอบคำตอบได้ โดยการพิสูจน์ $[A][A]^{-1} = [I]$

ตัวอย่างที่ 5.6 จงหาอินเวิร์สของเมทริกซ์

$$[A] = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ โปแกรมที่ใช้ในการคำนวณหาอินเวิร์สของเมทริกส์ คือ

```
      PROGRAM INVERSE
      PARAMETER (N=3)
      REAL A(N,N)
      DATA ((A(I,J),J=1,N),I=1,N)/7.,2.,-3.,
     +                            2.,5.,-3.,
     +                           1.,-1.0,-6.0/
      CALL MINV(A,AINV,N,N,DET)
      STOP
      END
*============================================
      SUBROUTINE MINV(A,AINV,ND,N,DET)
      INTEGER ND,N,IPASS
      REAL A(ND,ND),AINV(ND,ND),DET,FCTR
*------
      DET = 1.0
      DO 1 I = 1,N
      DO 1 J = 1,N
         IF(I.EQ.J)THEN
            AINV(I,J) = 1.0
         ELSE
            AINV(I,J) = 0.0
```

```
      ENDIF
 1    CONTINUE
*--------
    DO 7 IPASS = 1,N
      IMX = IPASS
      DO 2 IROW = IPASS,N
        IF(ABS(A(IROW,IPASS)).GT.ABS(A(IMX,IPASS)))THEN
          IMAX = IROW
        ENDIF
 2      CONTINUE
*-----------
      IF(IMX.NE.IPASS)THEN
        DO 3 ICOL = 1,N
          TEMP           = AINV(IPASS,ICOL)
          AINV(IPASS,ICOL)= AINV(IMX,ICOL)
          AINV(IMX,ICOL)  = TEMP
          IF(ICOL.GE.IPASS)THEN
            TEMP         = A(IPASS,ICOL)
            A(IPASS,ICOL)= A(IMX,ICOL)
            A(IMX,ICOL)  = TEMP
          ENDIF
 3        CONTINUE
      ENDIF
*---------------
      PIVOT = A(IPASS,IPASS)
      DET   = DET*PIVOT
      IF(DET.EQ.0.)THEN
         WRITE(*,10)
         PAUSE 'FATAL ERROR IN MINV - ZERO DETERMINANT'
```

```
          RETURN
        ENDIF
*--------------
        DO 4 ICOL = 1,N
          AINV(IPASS,ICOL) = AINV(IPASS,ICOL)/PIVOT
          IF(ICOL.GE.IPASS)THEN
            A(IPASS,ICOL) = A(IPASS,ICOL)/PIVOT
          ENDIF
 4      CONTINUE
*--------------
        DO 6 IROW = 1,N
          IF(IROW.NE.IPASS)THEN
            FCTR = A(IROW,IPASS)
            DO 5 ICOL = 1,N
              AINV(IROW,ICOL) = AINV(IROW,ICOL)-
   +                            FCTR*AINV(IPASS,ICOL)
              A(IROW,ICOL) = A(IROW,ICOL)-FCTR*A(IPASS,ICOL)
 5          CONTINUE
          ENDIF
 6      CONTINUE
 7    CONTINUE
      PRINT*,AINV
      RETURN
*============
 10   FORMAT(/,T5,'==============ERROR IN MINV==============',/,
   +        T5,'|        THE MATRIX IS SINGULAR        |',/,
   +        T5,'============PROGRAM TERMINATED===========')
      END
*-----------------------------------------------------------------------------------------
```

เอาท์พุทจากโปรแกรม คือ

```
 0.171875015   -0.0468750037  0.0364583321
-0.0781250075   0.203125     -0.046875
-0.0468749963  -0.078125     -0.161458328
```

ตัวอย่างที่ 5.7 จงหาอินเวิร์สของเมทริกซ์

$$[A] = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ โปรแกรมอีกโปรแกรมหนึ่งที่ใช้ในการคำนวณ โดยมีการปรับปรุงในส่วนของเอาท์พุทคือ

```
      PROGRAM INV_M
      PARAMETER (N=3)
      REAL A(N,N),B(N,N),C(N,N)
      DATA ((A(I,J),J=1,N),I=1,N)/7.,2.,-3.,
     +                            2.,5.,-3.,
     +                            1.,-1.,-6./
      CALL PRINT(A,N,N)
      CALL MINV(A,B,N,N,DET)
      CALL PRINT(B,N,N)
      STOP
      END
```

```
*==================================================================
      SUBROUTINE PRINT(A,N,ND)
      REAL A(ND,ND)
      CHARACTER DASH*8
      DATA DASH/'-------|'/
        WRITE(*,*)
        WRITE(*,10)  (     J,J=1,N)
        WRITE(*,11)  ( DASH,J=1,N)
      DO 1 I=1,N-1
        WRITE(*,12)I,(A(I,J),J=1,N)
1      CONTINUE
        WRITE(*,12)N,(A(N,J),J=1,N)
        WRITE(*,11)   ( DASH,J=1,N)
10      FORMAT(   T5,'|',10(2X,I3,2X,'|'))
11      FORMAT(   T5,'|',10A8)
12      FORMAT(I3,T5,'|',10(F7.3,'|'))
      RETURN
      END
*==================================================================
      SUBROUTINE MINV(A,AINV,ND,N,DET)
        INTEGER ND,N,IPASS
        REAL A(ND,ND),AINV(ND,ND),DET,FCTR
        DET=1.0
        DO 1 I=1,N
        DO 1 J=1,N
          IF(I.EQ.J)THEN
            AINV(I,J)=1.0
          ELSE
            AINV(I,J)=0.0
```

```
          ENDIF
1         CONTINUE
*          CALL PRINT(AINV,ND,N)
*-----------------------------------------------------------------------
         DO 7 IPASS=1,N
          IMX=IPASS
          DO 2 IROW=IPASS,N
            IF(ABS(A(IROW,IPASS)).GT.ABS(A(IMX,IPASS)))THEN
              IMX=IROW
            ENDIF
2           CONTINUE
          IF(IMX.NE.IPASS)THEN
            DO 3 ICOL=1,N
              TEMP            = AINV(IPASS,ICOL)
              AINV(IPASS,ICOL) = AINV(IMX,ICOL)
              AINV(IMX,ICOL)   = TEMP
              IF(ICOL.GE.IPASS)THEN
                TEMP          = A(IPASS,ICOL)
                A(IPASS,ICOL) = A(IMX,ICOL)
                A(IMX,ICOL)   = TEMP
              ENDIF
3             CONTINUE
          ENDIF
          PIVOT = A(IPASS,IPASS)
          DET   = DET*PIVOT
          IF(DET.EQ.0.)THEN
            WRITE(*,10)
            PAUSE'FATAL ERROR IN MINV - zero determinant'
            RETURN
```

```
      ENDIF
      DO 4 ICOL=1,N
        AINV(IPASS,ICOL) = AINV(IPASS,ICOL)/PIVOT
        IF(ICOL.GE.IPASS)THEN
          A(IPASS,ICOL) = A(IPASS,ICOL)/PIVOT
        ENDIF
4     CONTINUE
      DO 6 IROW = 1,N
       IF(IROW.NE.IPASS)THEN
         FCTR = A(IROW,IPASS)
         DO 5 ICOL = 1,N
           AINV(IROW,ICOL) = AINV(IROW,ICOL)-
     +                   FCTR*AINV(IPASS,ICOL)
           A(IROW,ICOL) = A(IROW,ICOL)-FCTR*A(IPASS,ICOL)
5          CONTINUE
       ENDIF
6     CONTINUE
7    CONTINUE
      RETURN
*----------------------------------------------------------------------
10    FORMAT(/,T5,'==========ERROR IN MINV==========',/,
     +        T5,'|  The matrix is singular       |',/,
     +        T5,'================================')
      END
*=====================================================================
```

ซึ่งจะได้เอาท์พุท

	1	2	3
1	7.000	2.000	-3.000
2	2.000	5.000	-3.000
3	1.000	-1.000	-6.000

	1	2	3
1	0.172	-0.078	-0.047
2	-0.047	0.203	-0.078
3	0.036	-0.047	-0.161

โดยเมทริกซ์ชุดด้านล่างเป็นอินเวิร์สของเมทริกส์ชุดที่อยู่ด้านบน คือ

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.172 & -0.078 & -0.047 \\ -0.047 & 0.203 & -0.078 \\ 0.036 & -0.047 & -0.161 \end{bmatrix}$$

5.3 การคูณเมทริกซ์

ถ้า [A] และ [B] เป็นเมทริกซ์จตุรัสลำดับ n สมาชิกของผลคูณเมทริกซ์ [C] = [A][B] จะมีค่าดังนี้

$$c_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

ซึ่งการคำนวณหาค่าสมาชิกโดยใช้เครื่องคิดเลขจะยุ่งยาก ใช้เวลานาน และมีข้อผิดพลาดได้ง่าย โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมทริกซ์ที่มีขนาดใหญ่ n > 3 จึงจำเป็นที่จะต้องใช้คอมพิวเตอร์มาช่วยในการคำนวณ

ตัวอย่างที่ 5.8 จงหาผลคูณของเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

```
      PROGRAM MULTIPLY
      PARAMETER(N=4)
      REAL A(N,N),B(N,N),C(N,N)
      DATA ((A(I,J),J=1,N),I=1,N)/1.,2.,3.,4.,
     +                           1.,1.,1.,2.,
     +                           2.,1.,1.,1.,
     +                           4.,3.,4.,1./
      DATA ((B(I,J),J=1,N),I=1,N)/1.,0.,1.,0.,
     +                           0.,1.,0.,1.,
     +                           1.,0.,1.,0.,
     +                           0.,1.,0.,1./
      CALL PROD(A,B,C,N,N)
      CALL PRINT(A,N,N)
      CALL PRINT(B,N,N)
      CALL PRINT(C,N,N)
      STOP
      END
*================================================
      SUBROUTINE PRINT(A,N,ND)
      REAL A(ND,ND)
      CHARACTER DASH*8,BLANK*8
```

```
      DATA DASH,BLANK/'-------|','       |'/

         WRITE(*,10)  (     J,J=1,N)
         WRITE(*,11)  ( DASH,J=1,N)
*----
      DO 1 I = 1,N-1
         WRITE(*,12)I,(A(I,J),J=1,N)
         WRITE(*,11)   (BLANK,J=1,N)
    1  CONTINUE
         WRITE(*,12)N,(A(N,J),J=1,N)
         WRITE(*,11)   ( DASH,J=1,N)

   10 FORMAT(/, T5,'|',10(2X,I3,2X,'|'))
   11 FORMAT(   T5,'|',10A8)
   12 FORMAT(I3,T5,'|',10(F7.3,'|'))
      RETURN
      END
*=================================================
      SUBROUTINE PROD(A,B,C,N,ND)
      REAL A(ND,ND),B(ND,ND),C(ND,ND)
      DO 2 I = 1,N
      DO 2 J = 1,N
        C(I,J) = 0.0
        DO 1 K = 1,N
          C(I,J) = C(I,J) + A(I,K)*B(K,J)
    1     CONTINUE
    2  CONTINUE
      RETURN
      END
```

เอาท์พุทจากโปรแกรม คือ

	1	2	3	4
1	1.000	2.000	3.000	4.000
2	1.000	1.000	1.000	2.000
3	2.000	1.000	1.000	1.000
4	4.000	3.000	4.000	1.000

	1	2	3	4
1	1.000	0.000	1.000	0.000
2	0.000	1.000	0.000	1.000
3	1.000	0.000	1.000	0.000
4	0.000	1.000	0.000	1.000

	1	2	3	4
1	4.000	6.000	4.000	6.000
2	2.000	3.000	2.000	3.000
3	3.000	2.000	3.000	2.000
4	8.000	4.000	8.000	4.000

ผลลัพธ์จากการคูณเมทริกซ์ [A] และ [B] แสดงในเมทริกซ์ชุดที่ 3

แบบฝึกหัดบทที่ 5

1. จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้ โดยวิธี LU ดีคอมโพซิชัน

$$
\begin{aligned}
x_1 + 7x_2 - 4x_3 &= -51 \\
4x_1 - 4x_2 + 9x_3 &= 62 \\
12x_1 - x_2 + 3x_3 &= 8
\end{aligned}
$$

2. จงหาอินเวิร์สของเมทริกซ์ในข้อ 1.

3. จงหาผลคูณของเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$