บทที่ 4
ระบบสมการ

ในบทนี้จะกล่าวถึงการแก้ระบบสมการ ซึ่งสามารถเขียนเป็นรูปแบบทั่วไป คือ

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad & \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

4.1 วิธีกราฟ

พิจารณาสมการ

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2
\end{aligned}
$$

แก้สมการทั้งสองหาค่า x_2 ได้ดังนี้

$$x_2 = -\left(\frac{a_{11}}{a_{12}}\right)x_1 + \frac{b_1}{a_{12}}$$

$$x_2 = -\left(\frac{a_{21}}{a_{22}}\right)x_1 + \frac{b_2}{a_{22}}$$

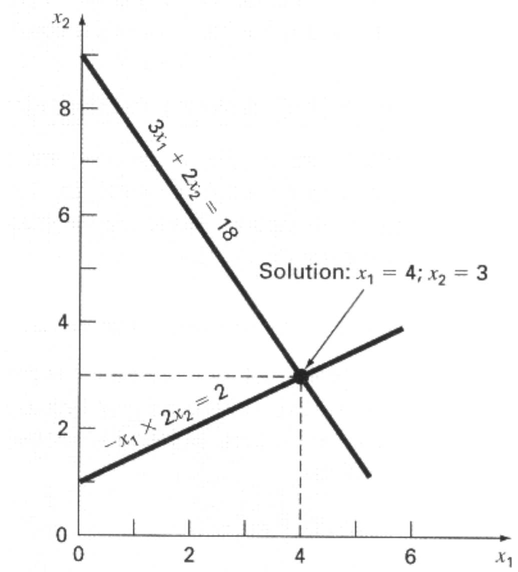
ตัวอย่างที่ 4.1 จงใช้วิธีกราฟแก้สมการ

$$3x_1 + 2x_2 = 18$$
$$-x_1 + 2x_2 = 2$$

วิธีทำ

$$x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9$$
$$x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1$$

นำสมการทั้งสองไปเขียนกราฟ ที่จุดตัด $x_1 = 4$ และ $x_2 = 3$ ซึ่งเป็นคำตอบของสมการ



รูป 4.1 วิธีกราฟ

ตัวอย่างที่ 4.2 จงใช้วิธีกราฟแก้สมการ

$$2x_2 - 6x_2 = -18$$
$$-x_1 + 8x_2 = 40$$

ตรวจสอบคำตอบโดยแทนค่ากลับลงในสมการ

วิธีทำ กำหนดให้ $x_1 = x$ $x_2 = y$ จากสมการข้างต้น เขียนใหม่ได้เป็น

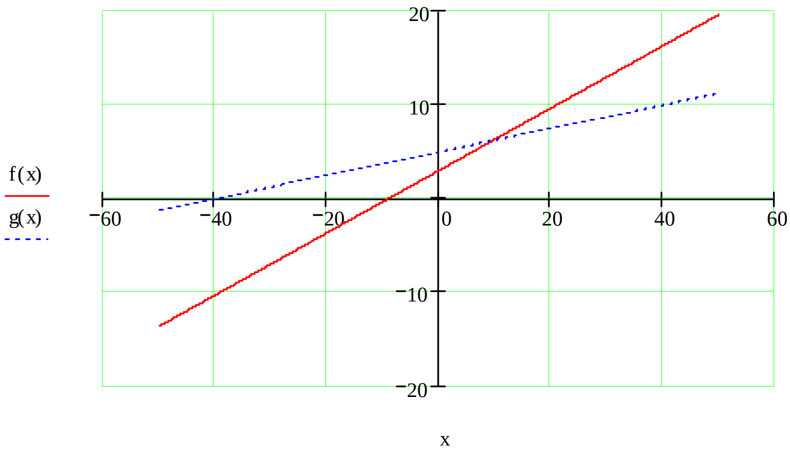
$$2x - 6y = -18 \Rightarrow -6y_1 = -2x - 18 \Rightarrow y_1 = \frac{x}{3} + 3 \Rightarrow f(x) = \frac{x}{3} + 3$$

$$-x + 8y = 40 \Rightarrow 8y_2 = x + 40 \Rightarrow y_2 = \frac{x}{8} + 5 \Rightarrow g(x) = \frac{x}{8} + 5$$

นำไปเขียนกราฟ จะได้

$x := -50, -49.99 .. 50$

$f(x) := \left(\frac{x}{3}\right) + 3$ $g(x) := \left(\frac{x}{8}\right) + 5$



จะได้ว่า

$$x_1 = x = 9.6 \qquad x_2 = f(x) = g(x) = 6.2$$

เมื่อนำค่า x_1 และ x_2 ที่ได้ไปแทนลงในสมการโจทย์ จะได้

$$2(9.6) - 6(6.2) = -18$$

$$-(9.6) + 8(6.2) = 40$$

ซึ่งทำให้สมการเป็นจริง

ดังนั้น $x_1 = 9.6$

$x_2 = 6.2$

เป็นคำตอบของระบบสมการ

4.2 วิธีใช้ หลักของเครเมอร์ (Cramer's Rule)

เป็นวิธีการที่สามารถช่วยแก้สมการที่มีจำนวนน้อยได้ง่าย

$$[A] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \textit{cocfficient matrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \text{Determinant}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21}a_{23} \\ a_{31}a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21}a_{22} \\ a_{31}a_{32} \end{vmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 4.3 จงหาค่า Determinant ของระบบในตัวอย่างที่ 4.1

วิธีทำ

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3(2) - 2(-1) = 8$$

หลักของเครเมอร์ เป็นวิธีการคำนวณหาผลเฉลยของระบบสมการที่มีจำนวนไม่มากนัก เช่น ถ้าเรามีสมการ 3 สมการและมีตัวแปรที่ต้องการหาค่า 3 ค่า จะได้

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{D}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{D}$$

เมื่อ

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 4.4 จงอาศัยหลักของเครเมอร์ แก้สมการ

$$0.3x_1 + 0.52x_2 + x_3 = -0.01$$
$$0.5x_1 + x_2 + 1.9x_3 = 0.67$$
$$0.1x_1 + 0.3x_2 + 0.5x_3 = -0.04$$

วิธีทำ

$$D=\begin{vmatrix}0.3 & 0.52 & 1\\ 0.5 & 1 & 1.9\\ 0.1 & 0.3 & 0.5\end{vmatrix}=0.3(-0.07)-0.52(0.06)+1(0.05)=-0.0022$$

ไมเนอร์ (Minor) คือ

$$A_1=\begin{vmatrix}1 & 1.9\\ 0.3 & 0.5\end{vmatrix}=1(0.5)-1.9(0.3)=-0.07$$

$$A_2=\begin{vmatrix}0.5 & 1.9\\ 0.1 & 0.5\end{vmatrix}=0.5(0.5)-1.9(0.1)=0.06$$

$$A_3=\begin{vmatrix}0.5 & 1\\ 0.1 & 0.3\end{vmatrix}=0.5(0.3)-1(0.1)=0.05$$

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}-0.01 & 0.52 & 1\\ 0.67 & 1 & 1.9\\ -0.44 & 0.3 & 0.5\end{vmatrix}}{-0.0022}=\frac{0.03178}{-0.0022}=-14.9$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix}0.3 & -0.01 & 1\\ 0.5 & 0.67 & 1.9\\ 0.1 & -0.44 & 0.5\end{vmatrix}}{-0.0022}=\frac{0.0649}{-0.0022}=-29.5$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix}0.3 & 0.52 & -0.01\\ 0.5 & 1 & 0.67\\ 0.1 & 0.3 & -0.44\end{vmatrix}}{-0.0022}=\frac{-0.04356}{-0.0022}=19.8$$

4.3 วิธีกำจัดตัวแปร

การแก้สมการอีกวิธีหนึ่งก็คือ การกำจัดตัวแปรจากสมการ

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

คูณสมการแรกด้วย a_{21} $\Rightarrow$ $a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 = b_1a_{21}$

คูณสมการสองด้วย a_{11} $\Rightarrow$ $a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 = b_1a_{21}$

แล้วลบกันจะได้

$$a_{22}a_{11}x_2 - a_{12}a_{21}x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

ทำให้เหลือตัวแปรเพียงตัวเดียว ซึ่งสามารถหาค่า x_2 ได้

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

และ

$$x_1 = \frac{a_{21}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

เทียบกับจากหลักของเครเมอร์

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{a_{11}b_1 - b_2a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

จะได้ผลเฉลยตรงกันทั้งสองวิธี

ตัวอย่างที่ 4.5 จงใช้วิธีกำจัดตัวแปร หาค่า x_1, x_2 จากสมการ

$$3x_1 + 2x_2 = 18$$
$$-x_1 + 2x_2 = 2$$

วิธีทำ

$$x_1 = \frac{2(18) - 2(2)}{3(2) - 2(-1)} = 4$$

$$x_2 = \frac{3(2) - (-1)18}{3(2) - 2(-1)} = 3$$

ซึ่งเท่ากับวิธีกราฟ

4.4 วิธี Naive Gauss Elimination

วิธีการนี้ใช้ขยายมาจากวิธีกำจัดตัวแปรจากหัวข้อที่ผ่านมา โดยสามารถนำไปใช้กับเซทของสมการที่มีหลายสมการได้ วิธีนี้เหมาะในการคำนวณโดยใช้คอมพิวเตอร์ จะสามารถหาค่าตัวแปรได้อย่างรวดเร็ว แต่ก็มีข้อเสียเมื่อสัมประสิทธิ์ตังหนึ่งตัวใดเป็นศูนย์ ก็จะทำให้เกิดการหารด้วยศูนย์ ซึ่งจะไม่สามารถคำนวณต่อไปได้ วิธีการนี้จึงมีชื่อเรียกว่า “naive” Gauss elimination

สมมุติว่า มีเซตของ n สมการ

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 .... 9.12a$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 .... 9.12b$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n .... 9.12c$$

กำจัดตัวแปร

คูณสมการด้วย $\frac{a_{21}}{a_{11}} \Rightarrow \quad a_{21}x_1 + \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}x_2 + \ldots + \frac{a_{21}}{a_{11}}a_m x_n \quad = \quad \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1$

ลบออกจากสมการที่สองจะได้

$$\left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}\right)x_2 + \ldots\ldots + \left(a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_1 x_n\right) = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1$$

หรือ

$$a'_{22}x_2 + \ldots. + a'_{2n}x_n = b'_2$$

ทำซ้ำต่อไปอีกโดยคูณด้วย $\frac{a_{31}}{a_{11}}$ แล้วจะได้

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
a'_{32}x_2 + \ldots + a'_{3n}x_n &= b'_3 \\
\vdots \qquad\qquad & \vdots \\
a'_{n2}x_2 + \ldots + a'_{nn}x_n &= b'_n
\end{aligned}$$

ใช้วิธีการเช่นนี้ ทำซ้ำหลาย ๆ ครั้งจะได้

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
a'_{33}x_3 + \ldots + a'_{3n}x_n &= b'_3 \\
\vdots \qquad\qquad & \vdots \\
a''_{n3}x_3 + \ldots + a''_{nn}x_n &= b''_n
\end{aligned}$$

ทำซ้ำต่อไปอีกจะได้

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3n}x_n &= b''_3 \\
\ddots \qquad\qquad & \vdots \\
a_{nn}^{(n-1)}x_n &= b_n^{(n-1)}
\end{aligned}
$$

ซึ่งจะสามารถแทนค่าย้อนกลับเพื่อหาค่า x_n ก่อน

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_n^{(n-1)}}$$

แล้วจึงหาค่า x_{n-1}, x_{n-2}, … จนสุดท้ายจะได้ค่า x_1 ตามต้องการ สามารถเขียนเป็นสมการทั่วไปได้ คือ

$$x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} x_j}{a_{ij}^{(i-1)}} \qquad \text{เมื่อ } i = n-1, n-2, ..., 1$$

สรุป ขั้นตอนต่าง ๆ ได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 \end{array}\right] \text{ Forward Elimination}$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c'_1 \\ & a'_{22} & a'_{23} & c'_2 \\ & & a''_{33} & c'_3 \end{array}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{aligned}
x_3 &= c''_3 / a''_{33} \\
x_3 &= \left(c'_2 - a'_{23}x_3\right) / a''_{22} \qquad\qquad \text{Back Substitution} \\
x_1 &= \left(c_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3\right) / a_{11}
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 4.5 จงใช้ Gauss Elimination แก้สมการ

$$0.3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85$$

$$0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3$$

$$0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 = 71.4$$

วิธีทำ

คูณสมการด้วย 0.1/3 แล้วหักออกจากสมการจะได้

$$7.00333x_2 - 0.293333x_3 = -19.5617$$

คูณสมการด้วย 0.3/3 แล้วหักออกจากสมการจะได้

$$0.3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85$$

$$7.00333x_2 - 0.293333x_3 = -19.5617$$

$$-0.19000x_2 + 10.0200x_3 = 70.6150$$

ต่อไปทำให้ x_2 ในสมการหมดไป

คูณสมการด้วย - 0.19000/7.00333 แล้วหักออกจากสมการจะได้

$$0.3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85$$

$$7.00333x_2 - 0.293333x_3 = -19.5617$$

$$10.0200x_3 = 70.0843$$

หาค่า x_3 จากสมการ

$$x_3 = \frac{70.0843}{10.0200} = 7.00003$$

แทน x_3 ลงไปในสมการ

$$7.00333x_2 - 0.293333(7.00003) = -19.5617$$

ดังนั้น

$$x_2 = \frac{-19.5617 + 0.293333(7.00003)}{7.00333}$$

$$= -2.5000$$

แทน x_2 และ x_3 ลงในสมการจะได้

$$0.3x_1 - 0.1(-2.50000) - 0.2(7.00003) = 7.85$$

ดังนั้น

$$x_1 = \frac{7.85 + 0.1(-2.50000) + 0.2(7.00003)}{3}$$

$$= 3.0000$$

ตัวอย่างที่ 4.6 จงเขียนโปรแกรมเพื่อแก้สมการ

$$2x_1 - 6x_2 = -18$$

$$-x_1 + 8x_2 = 40$$

วิธีทำ

```
      PROGRAM GAUSS_ELE
      DIMENSION A(50,50),B(50),X(50)
      PARAMETER (N=2)
      DATA ((A(I,J),J=1,N),I=1,N)/2.,-6.,
     +                          -1.,8./
      DATA (B(I),I=1,N) /-18.,40./
      CALL GAUSS(N,A,B,X)
*     --------------------------------
      WRITE(*,100)
```

```
100       FORMAT(/, 7X, 'EQUATION NO.',
    +           7X, 'SOLUTION X', /)
          DO 20 I=1,N
          WRITE(*,200) I, X(I)
200       FORMAT(I12, 8X, F16.6)
20        CONTINUE
*       ---------------------------------
          STOP
          END
*-------------------------------------------------------
          SUBROUTINE GAUSS(N,A,B,X)
          DIMENSION A(50,50),B(50),X(50)
          CALL SCL(N,A,B)
          DO 100 IP=1,N-1
          CALL PIVOT(N,A,B,IP)
          DO 200 IE=IP+1,N
          RATIO = A(IE,IP)/A(IP,IP)
          DO 300 IC=IP+1,N
          A(IE,IC) = A(IE,IC) - RATIO*A(IP,IC)
300       CONTINUE
          B(IE)=B(IE)-RATIO*B(IP)
200       CONTINUE
          DO 400 IE=IP+1,N
          A(IE,IP)=0.
400       CONTINUE
100       CONTINUE
          X(N)=B(N)/A(N,N)
          DO 500 IE=N-1,1,-1
          SUM=0.
```

```
      DO 600 IC=IE+1,N
      SUM=SUM+A(IE,IC)*X(IC)
600     CONTINUE
      X(IE)=(B(IE)-SUM)/A(IE,IE)
500     CONTINUE
      RETURN
      END
*------------------------------------------------------------
      SUBROUTINE SCL(N,A,B)
      DIMENSION A(50,50),B(50)
      DO 10 IE=1,N
        BIG=ABS(A(IE,1))
        DO 20 IC=2,N
         AMAX=ABS(A(IE,IC))
         IF(AMAX.GT.BIG) BIG=AMAX
20       CONTINUE
        DO 30 IC=1,N
         A(IE,IC)=A(IE,IC)/BIG
30       CONTINUE
        B(IE)=B(IE)/BIG
10     CONTINUE
      RETURN
      END
*-----------------------------------------------------------
      SUBROUTINE PIVOT(N,A,B,IP)
      DIMENSION A(50,50),B(50)
      JP=IP
      BIG=ABS(A(IP,IP))
      DO 10 I=IP+1,N
```

```
      AMAX=ABS(A(I,IP))
      IF(AMAX.GT.BIG) THEN
        BIG=AMAX
        JP=I
      ENDIF
10    CONTINUE
    IF(JP.NE.IP) THEN
      DO 20 J=IP,N
        DUMY   = A(JP,J)
        A(JP,J)= A(IP,J)
        A(IP,J)= DUMY
20      CONTINUE
    DUMY  = B(JP)
    B(JP) = B(IP)
    B(IP) = DUMY
    ENDIF
    RETURN
    END
*----------------------------------------------------------
```

เอาท์พุทคือ

```
EQUATION NO.        SOLUTION X

    1                  9.599999
    2                  6.200000
```

4.4.1 ข้อเสียของวิธี Elimination

จะมีอยู่ 3 ข้อ คือ

1. สัมประสิทธิ์ตัวใดตัวหนึ่งเป็นศูนย์ ทำให้เกิดการหารด้วยศูนย์
2. การปัดเศษหลาย ๆ ครั้ง ทำให้ผลเฉลยคลาดเคลื่อนไป
3. สมการบางสมการมีค่าความชันใกล้เคียงกัน ทำให้ไม่ทราบจุดตัดที่แน่นอนได้

ตัวอย่างที่ 4.7 จงแก้สมการ

$$x_1 + 2x_2 = 10$$
$$1.1x_1 + 2x_2 = 10.4$$

แล้วเปลี่ยนค่าสัมประสิทธิ์ของ x_1 ในสมการสองเป็น 1.05 แล้วแก้สมการอีกครั้ง

วิธีทำ

$$x_1 = \frac{2(10) - 2(10.4)}{1(2) - 2(1.1)} = 4$$

$$x_2 = \frac{1(10.4) - 1.1(10)}{1(2) - 2(1.1)} = 3$$

เมื่อเปลี่ยน a_{21} จาก 1.1 เป็น 1.05 จะได้

$$x_1 = \frac{2(10) - 2(10.4)}{1(2) - 2(1.05)} = 8$$

$$x_2 = \frac{1(10.4) - 1.1(10)}{1(2) - 2(1.05)} = 1$$

จะเห็นได้ว่า a_{21} เปลี่ยนไปเพียง 0.05 เท่านั้น แต่ผลเฉลยมีค่าแตกต่างกันมาก เนื่องจากว่า ทั้งสองสมการมีความชันใกล้เคียงกันมาก

พิจารณาสมการ

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$
$$x_1 = -\frac{a_{11}}{a_{12}}x_1 + \frac{b_1}{a_{12}}$$
$$x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_2 + \frac{b_2}{a_{22}}$$

ถ้าความชันเกือบจะมีค่าเท่ากัน

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} \cong \frac{a_{21}}{a_{22}}$$

หรือ

$$a_{11}a_{22} \cong a_{12}a_{21}$$
$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

ซึ่ง $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ เป็น Determinant ของระบบสมการเมื่อนำไปหารเพื่อหาค่าผลเฉลย จะทำให้ผลเฉลยมีค่าเปลี่ยนไปมาก

ตัวอย่างที่ 4.8 ผลของการคูณด้วยค่าคงที่ เพื่อทำให้ค่า determinant มีค่ามากขึ้น จงหา Determinant

ก)
$$3x_1 + 2x_2 = 18$$
$$-x_1 + 2x_2 = 2$$

ข)
$$x_1 + 2x_2 = 10$$
$$1.1x_1 + 2x_2 = 10.4$$

ค) ทำซ้ำข้อ ข) โดยคูณสมการด้วย 10

วิธีทำ

ก) D = 3(2) – 2(-1) = 8

มีค่ามากกว่าศูนย์ ใช้ได้ดี

ข) D = 1(2) – 2(1.1) = -0.2

มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ทำให้ผลเฉลยคลาดเคลื่อนได้มาก

ค) คูณสมการด้วย 10 (ผลเฉลยเท่าเดิม)

$$10x_1 + 20x_2 = 100$$
$$11x_1 + 20x_2 = 104$$

$$D = 10(20) - 20(11) = -20$$

มีค่ามาก โดยที่ผลเฉลยมีค่าเหมือนเดิม จึงเป็นวิธีการที่จะทำให้ D มีค่ามากขึ้น

ตัวอย่างที่ 4.9 ให้ scale สมการในตัวอย่าง 4.8 โดยสัมประสิทธิ์มีค่ามากที่สุดเท่ากับ 1 แล้วคำนวณหา Determinant

วิธีทำ ก)

$$x_1 + 0.667x_2 = 6$$
$$-0.5x_1 + x_2 = 1$$

$$D = 1(1) - 0.667(-0.5) = 1.333$$

ข)

$$0.5x_1 + x_2 = 5$$
$$0.55x_1 + x_2 = 5.2$$

$$D = 0.5(1) - 1(0.55) = -0.05$$

ค) scaling เหมือนข้อ ข)

$$D = -0.05$$ เหมือนกัน

4.4.2 วิธีแก้ข้อเสียของวิธี Elimination

มีอยู่ 2 วิธี คือ

1. เพิ่มทศนิยมในการคำนวณ
2. สลับแถว หรือคอลัมน์

Partial $\longrightarrow$ สลับแถว

Complete $\longrightarrow$ สลับแถวและคอลัมน์

ตัวอย่างที่ 4.10 อาศัย Gauss elimination แก้สมการ

$$0.0003x_1 + 3.0000x_2 = 2.0001$$
$$1.0000x_1 + 1.0000x_2 = 1.0000$$

เนื่องจาก $a_{11} = 0.0003$ มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ให้สลับลำดับของสมการ ผลเฉลยที่แท้จริง คือ $x_1 = 1/3$ และ $x_2 = 2/3$

วิธีทำ คูณสมการแรกด้วย $1/0.0003$ จะได้

$$x_1 + 10.000x_2 = 6667$$

ทำให้ x_1 หมดจากสมการสอง

$$-9999x_2 = -6666$$
$$x_2 = \frac{2}{3}$$

แทน x_2 กลับเข้าไปในสมการแรกเพื่อหา x_1

$$x_1 = \frac{2.0001 - 3\left(\frac{2}{3}\right)}{0.0003}$$

Significant Figures	x_2	x_1	Absolute Value of Percent relative Error for x_1
3	0.667	-3.33	1099
4	0.6667	0.0000	100
5	0.66667	0.3000	10
6	0.666667	0.330000	1
7	0.6666667	0.3330000	0.1

สลับ order ของสมการ ซึ่งจะทำให้ได้ผลเฉลยของสมการที่มีความแน่นอนกว่า

$$1.0000x_1 + 1.0000x_2 = 1.0000$$
$$0.0003x_1 + 3.0000x_2 = 2.0001$$

จะได้ $$x_2 = \frac{2}{3}$$

และ $$x_1 = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)}{1}$$

Significant Figures	x_2	x_1	Absolute Value of Percent relative Error for x_1
3	0.667	0.333	0.1
4	0.6667	0.3333	0.01
5	0.66667	0.33333	0.001
6	0.666667	0.333333	0.0001
7	0.6666667	0.3333333	0.00001

จะเห็นได้ว่า การสลับ order จะให้ผลที่น่าพึงพอใจมากกว่า

ตัวอย่างที่ 4.11 Scaling

ก) แก้สมการโดยใช้ Gauss elimination และ pivoting

$$2x_1 + 100,000x_2 = 100,000$$
$$x_1 + x_2 = 2$$

ข) แก้สมการโดยการ Scaling ให้สัมประสิทธิ์สูงสุดของแต่ละแถว = 1

ค) อาศัยการ Scaling สัมประสิทธิ์ เพื่อที่จะพิจารณาว่า การ pivot จำเป็นหรือไม่ อย่างไรก็ตามให้แก้สมการโดยอาศัยสัมประสิทธิ์ค่าเดิม ใช้เลขนัยสำคัญ 3 หลักคำตอบที่ถูกต้อง คือ $x_1 = 1.00002$, $x_2 = 0.99998$ หรือถ้าใช้เลข 3 หลัก $x_1 = x_2 = 1.00$

วิธีทำ

ก) โดยไม่ใช้การ Scale

$$2x_1 + 100,000x_2 = 100,000$$
$$-50,000x_2 = -50,000$$

ซึ่งจะได้ $x_1 = 1.00$, $x_2 = 0.00$ ค่า x_1 มีError 100% เนื่องจากการปัดทศนิยม

ข) Scaling

$$0.00002x_1 + x_2 = 1$$
$$x_1 + x_2 = 2$$

Pivot แถวแรก

$$x_1 + x_2 = 2$$
$$0.00002x_1 + x_2 = 1$$

จาก Forward elimination ได้

$$x_1 + x_2 = 2$$
$$x_2 = 1.00$$

จะได้ $x_1 = x_2 = 1$ ซึ่งตรงกับค่าที่แท้จริง

ค) สัมประสิทธิ์ของการ Scale บ่งชี้ว่าจำเป็นที่จะต้องใช้ Pivot เราจะทำการ Pivot แต่ใช้ ค่าสัมประสิทธิ์เดิม

$$x_1 + x_2 = 2$$
$$2x_1 + 100,000x_2 = 100,000$$

จาก Forward elimination ได้

$$x_1 + x_2 = 2$$
$$100,000x_2 = 100,000$$

ซึ่งจะได้ว่า $x_1 = x_2 = 1$

ดังนั้นการ Scale เป็นประโยชน์ต่อการพิจารณาว่าPivotจำเป็นหรือไม่ แต่ไม่จำเป็นที่จะต้อง Scale เพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้อง

ตัวอย่างที่ 4.12 จงแก้สมการต่อไปนี้

$$0.77x_1 + x_2 = 14.25$$
$$1.2x_1 + 1.7x_2 = 20$$

ก) โดยวิธีกราฟ

ข) จากกราฟที่ได้ จงพิจารณาภาวะของระบบสมการ

ค) จงเขียนโปรแกรมโดยใช้วิธี Gauss elimination เพื่อแก้สมการนี้

วิธีทำ

ก) กำหนดให้ $x_1 = x$, $x_2 = y$ จากสมการข้างต้น เขียนใหม่ได้เป็น

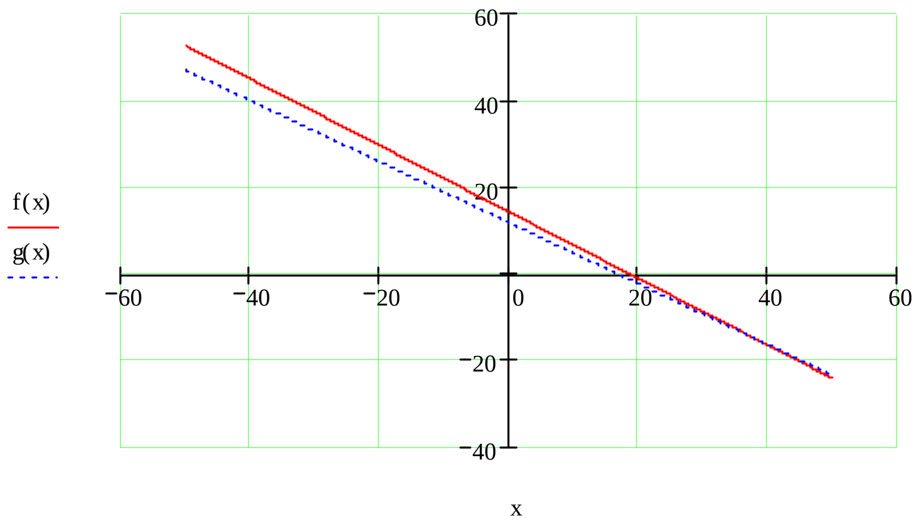
$$0.77x + y = 14.25 \Rightarrow y_1 = -0.77x + 14.25 \Rightarrow f(x) = -0.77x + 14.25$$

$$1.2x + 1.7y = 20 \Rightarrow y_2 = \frac{-1.2x + 20}{1.7} \Rightarrow g(x) = \frac{-1.2x + 20}{1.7}$$

นำไปเขียนกราฟ จะได้

$x := -50, -49.99 .. 50$

$f(x) := -0.77x + 14.25$ $\quad g(x) := \frac{(-1.2x + 20)}{1.7}$



ข) จะได้ว่า

$$x_1 = x \cong 38.761482$$
$$x_2 = f(x) = g(x) \cong -15.596339$$

เนื่องจากว่ากราฟทั้งสองมีความชันใกล้เคียงกัน จึงทำให้การหาจุดตัดจากการคาดคะเนทำได้ยาก ค่ารากของระบบสมการจึงเป็นเพียงค่าประมาณหยาบๆ

ค)
```
      PROGRAM GAUSS
      DIMENSION A(50,50),B(50),X(50)
      PARAMETER (N=2)
      DATA ((A(I,J),J=1,N),I=1,N)/0.77,1.,
     +                     1.2,1.7/
      DATA (B(I),I=1,N) /14.25,20./
      CALL GAUSS(N,A,B,X)
*     ---------------------------------
      WRITE(*,100)
100   FORMAT(/, 7X, 'EQUATION NO.',
     +        7X, 'SOLUTION X', /)
      DO 20 I=1,N
      WRITE(*,200) I, X(I)
200   FORMAT(I12, 8X, F16.6)
20    CONTINUE
*     ----------------------------------
      STOP
      END
*-------------------------------------------------------
      SUBROUTINE GAUSS(N,A,B,X)
      DIMENSION A(50,50),B(50),X(50)
```

```
      CALL SCL(N,A,B)
      DO 100 IP=1,N-1
      CALL PIVOT(N,A,B,IP)
      DO 200 IE=IP+1,N
      RATIO = A(IE,IP)/A(IP,IP)
      DO 300 IC=IP+1,N
      A(IE,IC) = A(IE,IC) - RATIO*A(IP,IC)
300     CONTINUE
      B(IE)=B(IE)-RATIO*B(IP)
200     CONTINUE
      DO 400 IE=IP+1,N
      A(IE,IP)=0.
400     CONTINUE
100     CONTINUE
      X(N)=B(N)/A(N,N)
      DO 500 IE=N-1,1,-1
      SUM=0.
      DO 600 IC=IE+1,N
      SUM=SUM+A(IE,IC)*X(IC)
600     CONTINUE
      X(IE)=(B(IE)-SUM)/A(IE,IE)
500     CONTINUE
      RETURN
      END
*-------------------------------------------------------
      SUBROUTINE SCL(N,A,B)
      DIMENSION A(50,50),B(50)
      DO 10 IE=1,N
        BIG=ABS(A(IE,1))
```

```
          DO 20 IC=2,N
           AMAX=ABS(A(IE,IC))
           IF(AMAX.GT.BIG) BIG=AMAX
20         CONTINUE
          DO 30 IC=1,N
           A(IE,IC)=A(IE,IC)/BIG
30         CONTINUE
          B(IE)=B(IE)/BIG
10       CONTINUE
        RETURN
        END
*-----------------------------------------------------------------
        SUBROUTINE PIVOT(N,A,B,IP)
        DIMENSION A(50,50),B(50)
        JP=IP
        BIG=ABS(A(IP,IP))
        DO 10 I=IP+1,N
          AMAX=ABS(A(I,IP))
          IF(AMAX.GT.BIG) THEN
            BIG=AMAX
            JP=I
          ENDIF
10       CONTINUE
        IF(JP.NE.IP) THEN
          DO 20 J=IP,N
            DUMY   = A(JP,J)
            A(JP,J)= A(IP,J)
            A(IP,J)= DUMY
20         CONTINUE
```

```
      DUMY  = B(JP)
      B(JP) = B(IP)
      B(IP) = DUMY
      ENDIF
      RETURN
      END
*---------------------------------------------------------
```

ตัวอย่างที่ 4.13 จงเขียนโปรแกรมภาษาฟอร์แทรนโดยใช้วิธี Gauss elimination พร้อมทั้ง partial pivoting เพื่อแก้สมการต่อไปนี้ (ซึ่งมีคำตอบคือ $x_1 = x_2 = x_3 = 1$)

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1$$
$$6x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 10$$
$$-3x_1 + 4x_2 + x_3 = 2$$

วิธีทำ

```
      PROGRAM GAUSS
      DIMENSION A(50,50),B(50),X(50)
      PARAMETER (N=3)
      DATA ((A(I,J),J=1,N),I=1,N)/1.,1.,-1.,
     +                             6.,2.,2.,
     +                             -3.,4.,1./
      DATA (B(I),I=1,N) /1.,10.,2./
      CALL GAUSS(N,A,B,X)
*     ---------------------------------
      WRITE(*,100)
100   FORMAT(/, 7X, 'EQUATION NO.',
     +        7X, 'SOLUTION X', /)
      DO 20 I=1,N
      WRITE(*,200) I, X(I)
```

```
200       FORMAT(I12, 8X, F16.6)
20       CONTINUE
*     ----------------------------------
          STOP
          END
*-------------------------------------------------------
          SUBROUTINE GAUSS(N,A,B,X)
          DIMENSION A(50,50),B(50),X(50)
          CALL SCL(N,A,B)
          DO 100 IP=1,N-1
          CALL PIVOT(N,A,B,IP)
          DO 200 IE=IP+1,N
          RATIO = A(IE,IP)/A(IP,IP)
          DO 300 IC=IP+1,N
          A(IE,IC) = A(IE,IC) - RATIO*A(IP,IC)
300       CONTINUE
          B(IE)=B(IE)-RATIO*B(IP)
200       CONTINUE
          DO 400 IE=IP+1,N
          A(IE,IP)=0.
400       CONTINUE
100       CONTINUE
          X(N)=B(N)/A(N,N)
          DO 500 IE=N-1,1,-1
          SUM=0.
          DO 600 IC=IE+1,N
          SUM=SUM+A(IE,IC)*X(IC)
600       CONTINUE
          X(IE)=(B(IE)-SUM)/A(IE,IE)
```

```
500       CONTINUE
         RETURN
         END
*-------------------------------------------------------
         SUBROUTINE SCL(N,A,B)
         DIMENSION A(50,50),B(50)
         DO 10 IE=1,N
           BIG=ABS(A(IE,1))
           DO 20 IC=2,N
            AMAX=ABS(A(IE,IC))
            IF(AMAX.GT.BIG) BIG=AMAX
20          CONTINUE
           DO 30 IC=1,N
            A(IE,IC)=A(IE,IC)/BIG
30          CONTINUE
           B(IE)=B(IE)/BIG
10        CONTINUE
         RETURN
         END
*------------------------------------------------------
         SUBROUTINE PIVOT(N,A,B,IP)
         DIMENSION A(50,50),B(50)
         JP=IP
         BIG=ABS(A(IP,IP))
         DO 10 I=IP+1,N
           AMAX=ABS(A(I,IP))
           IF(AMAX.GT.BIG) THEN
             BIG=AMAX
             JP=I
```

```
          ENDIF
10       CONTINUE
        IF(JP.NE.IP) THEN
          DO 20 J=IP,N
            DUMY   = A(JP,J)
            A(JP,J)= A(IP,J)
            A(IP,J)= DUMY
20         CONTINUE
        DUMY  = B(JP)
        B(JP) = B(IP)
        B(IP) = DUMY
        ENDIF
        RETURN
        END
*----------------------------------------------------------
```

ตัวอย่างที่ 4.14 จงเขียนโปรแกรมเพื่อแก้สมการ

$$0.5x_1 - x_2 = -9.5$$

$$0.26\,x_1 - 0.5x_2 = -4.7$$

วิธีทำ อาศัยโปรแกรมในตัวอย่าง 4.13 โดยเปลี่ยนระบบสมการ

เอาท์พุท คือ

```
EQUATION NO.        SOLUTION X

     1                5.000023
     2               12.000011
```

ตัวอย่างที่ 4.5 จงเขียนโปรแกรมโดยวิธี naive – Gauss elimination เพื่อแก้สมการ

$$-12x_1 + x_2 - x_3 = -20$$
$$-2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 10$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 25$$

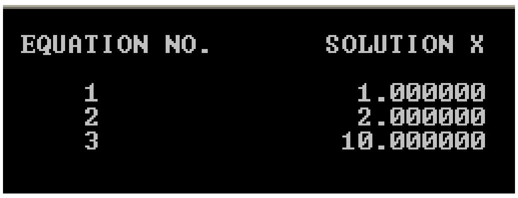
วิธีทำ อาศัยโปรแกรมในตัวอย่าง 4.13 โดยเปลี่ยนระบบสมการ

```
      PROGRAM GAUSS_ELE
      DIMENSION A(50,50),B(50),X(50)
      PARAMETER (N=3)
      DATA ((A(I,J),J=1,N),I=1,N)/-12.,1.,-1.,
     +                          -2.,-4.,2.,
     +                           1.,2.,2./
      DATA (B(I),I=1,N) /-20.,10.,25./
      CALL GAUSS(N,A,B,X)
```

● --------------------------------

●

เอาท์พุทคือ



```
EQUATION NO.        SOLUTION X

    1                1.000000
    2                2.000000
    3               10.000000
```

ดังนั้น $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ และ $x_3 = 10$

ตัวอย่างที่ 4.16 จงเขียนโปรแกรมโยวิธี naive – Gauss elimination เพื่อแก้สมการ

$$4x_1 + x_2 - x_3 = -2$$

$$5x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$

$$6x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

วิธีทำ อาศัยโปรแกรมในตัวอย่าง 4.13 โดยเปลี่ยนระบบสมการ

```
      PROGRAM GAUSS_ELE
      DIMENSION A(50,50),B(50),X(50)
      PARAMETER (N=3)
      DATA ((A(I,J),J=1,N),I=1,N)/4.,1.,-1.,
     +                            5.,1.,2.,
     +                            6.,1.,1./
      DATA (B(I),I=1,N) /-2.,4.,6./
      CALL GAUSS(N,A,B,X)
*    ---------------------------------
```

เอาท์พุทคือ

```
EQUATION NO.        SOLUTION X

     1                 3.000000
     2               -13.000001
     3                 1.000000
```

ดังนั้น $x_1 = 3$, $x_2 = -13$, $x_3 = 1$

4.5 วิธีเกาส์-จอร์แดน (Gauss – Jordan)

วิธีการของเกาส์-จอร์แดนจะคล้ายกับวิธีการของเกาส์ ข้อแตกต่างอยู่ตรงที่ว่า หลังจากการกำจัดตัวแปรแล้ว เมทริกซ์ที่ได้จะเป็น identity matrix

ตัวอย่างที่ 4.17 ใช้เทคนิคเกาส์-จอร์แดนแก้สมการ

$$
\begin{aligned}
&3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85 \\
&0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3 \\
&0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 = 71.4
\end{aligned}
$$

วิธีทำ

$$
\begin{bmatrix}
3 & -0.1 & -0.2 \\
0.1 & 7 & -0.3 - -19.3 \\
0.3 & -0.2 & 10
\end{bmatrix}
$$

Normalize แถวแรกด้วยการหารด้วย 3

$$
\begin{bmatrix}
1 & -0.0333333 & -0.066667 & \\
0.1 & 7 & -0.3 & - -19.3 \\
0.3 & -0.2 & 10 &
\end{bmatrix}
$$

ทำให้ x_1 หมดจากสมการสอง โดยการหัก 0.1 เท่าของสมการหนึ่ง จากสมการสองและเช่นเดียวกัน หัก 0.3 เท่าของแถวแรก จากแถว 3 จะทำให้ x_1 ในแถว 3 หมดไป

$$
\begin{bmatrix}
1 & -0.0333333 & -0.066667 \\
0 & 7.00333 & -0.293333 - -19.5617 \\
0 & -0.190000 & 10.0200
\end{bmatrix}
$$

ต่อไป Normalize แถวสองโดยการหารด้วย 7.00333

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.0333333 & -0.066667 & \\ 0 & 1 & -0.0418848 & --2.79320 \\ 0 & -0.190000 & 10.0200 & \end{bmatrix}$$

ทำให้เทอม x_2 หมดจากสมการหนึ่งและสามจะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.0680629 & \\ 0 & 1 & -0.0418848 & --2.79320 \\ 0 & 0 & 10.01200 & \end{bmatrix}$$

ต่อไป Normalize แถวสามโดยการหารด้วย 10.01200

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.0680629 & \\ 0 & 1 & -0.0418848 & --2.79320 \\ 0 & 0 & 1 & \end{bmatrix}$$

ทำให้เทอม x_3 หมดจากสมการหนึ่งและสองจะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & --2.50001 \\ 0 & 0 & 1 & \end{bmatrix}$$

สรุป ขั้นตอนของวิธีเกาส์-จอร์แดน

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c_1^{(n)} \\ 0 & 1 & 0 & c_2^{(n)} \\ 0 & 0 & 1 & c_3^{(n)} \end{array}\right]$$

$$x_1 = c_1^{(n)}$$
$$x_2 = c_2^{(n)}$$
$$x_3 = c_3^{(n)}$$

แบบฝึกหัดบทที่ 4

1. จงแก้สมการต่อไปนี้ โดยวิธีกราฟ

$$0.5x_1 - x_2 = -9.5$$
$$0.26x_1 - 0.5x_2 = -4.7$$

2. จงแก้สมการต่อไปนี้ โดยวิธีกำจัดตัวแปร

$$0.77x_1 + x_2 = 14.25$$
$$1.2x_1 + 1.7x_2 = 20$$

3. กำหนดเซทของสมการ

$$2x_2 + 5x_3 = 1$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$$
$$3x_1 + x_2 = 2$$

   ก) จงหา determinant

   ข) จงใช้หลักของเครเมอร์ หาค่า x_i

   ค) แทนค่า x_i กลับลงในสมการ เพื่อตรวจสอบคำตอบ

4. จงแก้สมการต่อไปนี้

$$4x_1 + x_2 - x_3 = -2$$
$$5x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$
$$6x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

   ก) โดยวิธีกำจัดเกาส์ ใช้วิธีสลับแถว (partial pivoting)

   ข) เขียนโปรแกรม