

บทที่ 3

การแก้สมการ

ในบทนี้จะกล่าวถึงการแก้สมการโดยวิธีเปิด สมการอาจจะเป็นชนิดเชิงเส้นหรือไม่เป็นเชิงเส้น โดยที่สมการจะอยู่ในรูป $f(x) = 0$ วิธีเปิดจะเริ่มต้นจากจุดเดียวหรือสองจุดที่ไม่จำเป็นต้องครอบคลุมค่ารากของสมการ ทำให้ง่ายต่อการคำนวณ เพราะที่ไม่จำเป็นที่จะต้องเดาค่ารากของสมการก่อน

3.1 วิธีทำซ้ำจุดคงที่ (Simple fixed-point iteration)

จัดรูปแบบฟังก์ชัน $f(x) = 0$ ให้อยู่ในรูป $x = g(x)$ โดยมีค่า x อยู่ทางด้านซ้ายของสมการ

เช่น $x^2 - 2x + 3 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{x^2 + 3}{2}$$

หรือ $\sin x = 0$

$$\Rightarrow x = \sin x + x$$

ตัวอย่างที่ 3.1 จงหารากของสมการ $f(x) = e^{-x} - x$ ด้วยวิธี วิธีทำซ้ำจุดคงที่

วิธีทำ

$$x_{i+1} = e^{-x_i} \quad \text{เริ่มต้นจาก } x_i = 0$$

i	x_i	ε_a (%)	ε_t (%)
0	0		100.0
1	1.000000	100.0	76.3
2	0.367879	171.8	35.1
3	0.692201	46.9	22.1
4	0.500473	38.3	11.8
5	0.606244	17.4	6.89
6	0.545396	11.2	3.83
7	0.579612	5.90	2.20
8	0.560115	3.48	1.24
9	0.571143	1.93	0.705
10	0.564879	1.11	0.399

ซึ่งรากที่แท้จริง คือ 0.56714329

ตัวอย่างที่ 3.2 จงเขียนโปรแกรมคำนวณรากของสมการ $f(x) = \sin(\sqrt{x}) - x$ โดยวิธี
ทำซ้ำจุดคงที่ โดยใช้ $x_0 = 0.5$ และทำซ้ำจนกระทั่ง $\varepsilon_a \leq 0.01$

วิธีทำ

```
PROGRAM FIX_PT  
WRITE(*,*)'ENTER X0,ES,IMAX'
```

```

READ(*,*)X0,ES,IMAX
WRITE(*,*)'THE ROOT IS',FIXPT(X0,ES,IMAX)
STOP
END

*-----
      FUNCTION FIXPT(X0,ES,IMAX)
*-----
      F(X)= SIN(SQRT(X))
*-----

      XR = X0
      DO 10 ITER=1,IMAX
      XROLD = XR
      XR = F(XROLD)
      IF (XR.NE.0.) THEN
        EA = ABS((XR-XROLD)/XR)*100.
      ENDIF
      IF (EA.LT.ES) THEN
        GO TO 20
      ENDIF
10     CONTINUE
20     FIXPT=XR
      RETURN
      END

*-----

```

เอาที่พุดจากโปรแกรม คือ

```

ENTER X0,ES,IMAX
0.5
.01
20
THE ROOT IS 0.768606246

```

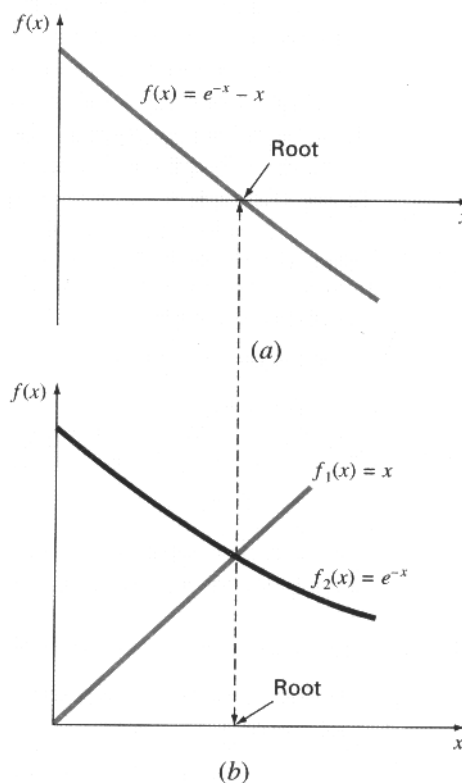
รากของสมการ = 0.768606246

ตัวอย่างที่ 3.3 แยกสมการ $e^{-x} - x = 0$ เป็น 2 ส่วน แล้วหารากของสมการโดยวิธีกราฟ
วิธีทำ

$$y_1 = x \quad \text{และ} \quad y_2 = e^{-x}$$

x	y_1	y_2
0.0	0.0	1.000
0.2	0.2	0.819
0.4	0.4	0.670
0.6	0.6	0.549
0.8	0.8	0.449
1.0	1.0	0.368

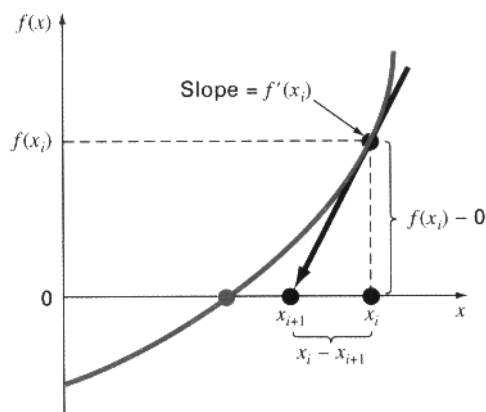
นำค่าในตารางไปเขียนกราฟ จุดตัดของกราฟทั้งสองเส้น คือ รากของสมการ ใน
ที่นี่จะได้รากของสมการ $x = 0.57$



รูปที่ 3.1 การแก้สมการโดยวิธีกราฟ

3.2 วิธีนิวตัน-ราฟสัน (The Newton-Raphson Method)

เป็นวิธีการหารากของสมการที่นิยมมากที่สุด เริ่มจากการเดาค่าราก x_i จากนั้นลากเส้นสัมผัสจากจุดนี้ จุดที่เส้นสัมผัสตัดกับแกน x จะเข้าใกล้ค่ารากของสมการมากขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 วิธีนิวตัน-ราฟสัน

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}$$

สามารถจัดได้เป็น

$$\Rightarrow x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

ซึ่งเป็นสูตรที่ใช้ในการคำนวณหารากโดยวิธีนิวตัน-ราฟสัน การคำนวณสูตรข้างบนนี้ จะเริ่มต้นจากอนุกรมเทย์เลอร์

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} (x-x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=x_0} (x-x_0)^2 + \dots$$

$$f(x) = 0 = f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} (x-x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x_0} (x-x_0)^2 + \dots$$

ถ้ารากใกล้ x_0

$$f(x) = 0 = f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} (x-x_0) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$$

หรือ

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\Rightarrow x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

ตัวอย่างที่ 3.4 จงใช้วิธีนิวตัน-ราฟสัน หารากของสมการ $f(x) = e^{-x} - x$ โดยที่ใช้ค่าเริ่มต้น $x = 0$ และจงเขียนโปรแกรมโดยวิธีนิวตัน-ราฟสัน เพื่อหารากของสมการ เปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากเครื่องคิดเลข

วิธีทำ

$$f'(x) = -e^{-x} - 1$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{e^{-x_i} - x_i}{-e^{-x_i} - 1}$$

เริ่มจาก $x = 0$

i	x_i	ε_i (%)
0	0	100
1	0.500000000	11.8
2	0.566311003	0.147
3	0.567143165	0.0000220
4	0.567143290	$< 10^{-8}$

จากตารางจะเห็นได้ว่า การคำนวณจะลู่เข้าหาค่ารากของสมการได้รวดเร็วมาก

โปรแกรมหารากของสมการโดยวิธีนิวตัน-ราฟสัน คือ

```
PROGRAM NEW-RAPH
WRITE(*,*)'ENTER X0,ES,IMAX'
READ(*,*)X0,ES,IMAX
WRITE(*,*)'THE ROOT IS',FIXPT(X0,ES,IMAX)
STOP
END

*-----
FUNCTION FIXPT(X0,ES,IMAX)
*-----
F(X)= X-((EXP(-X)-X)/(-EXP(-X)-1.))
*-----

XR = X0
DO 10 ITER=1,IMAX
XROLD = XR
```

```

XR = F(XROLD)
  IF (XR.NE.0.) THEN
    EA = ABS((XR-XROLD)/XR)*100.
  ENDIF
  IF (EA.LT.ES) THEN
    GO TO 20
  ENDIF
10  CONTINUE
20  FIXPT=XR
   RETURN
   END

```

*-----

เอาที่พุดจากโปรแกรม คือ

```

ENTER X0,ES,IMAX
0
1
20
THE ROOT IS 0.567143142

```

ดังนั้น รากของสมการ $x = 0.567143142$

จากเครื่องคิดเลข $x = 0.567143290$ ซึ่งมีค่าใกล้เคียงกันมาก

ตัวอย่างที่ 3.5 การวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อนโดยวิธีนิวตัน-กราฟสัน

ความคลาดเคลื่อนจะเป็นสัดส่วนกับกำลังสองของความคลาดเคลื่อนเดิม

$$E_{t,i+1} \cong \frac{-f''(x_r)}{2f'(x_r)} E_{t,i}^2$$

จงคำนวณความคลาดเคลื่อน หลังจากการทำซ้ำหลาย ๆ ครั้ง

วิธีทำ

$$f(x) = e^{-x} - x$$

$$f'(x) = -e^{-x} - 1$$

$$x_r = 0.56714329 \Rightarrow f'(0.56714329) = -1.56714329$$

$$f''(x) = e^{-x}$$

$$f''(0.56714329) = 0.56714329$$

จะได้
$$E_{t,i+1} \cong -\frac{0.56714329}{2(-1.56714329)} E_{t,i}^2 = 0.18095 E_{t,i}^2$$

จากตัวอย่าง 3.4
$$E_{t,0} = 0.56714329$$

จะได้
$$E_{t,1} \cong 0.18095(0.56714329)^2 = 0.0582$$

ซึ่งมีค่าใกล้เคียงกับความคลาดเคลื่อนจริง

สำหรับ iteration ต่อไป

$$E_{t,2} \cong 0.18095(0.06714329)^2 = 0.0008158$$

ซึ่งมีค่าใกล้เคียงกับความคลาดเคลื่อนจริง 0.0008323

สำหรับ iteration ที่สาม

$$E_{t,3} \cong 0.18095(0.0008323)^2 = 0.000000125$$

สำหรับ iteration ที่สี่

$$E_{t,4} \cong 0.18095(0.000000125)^2 = 2.83 \times 10^{-15}$$

ข้อเสียของวิธีนิวตัน-ราฟสัน

ถึงแม้ว่าวิธีนิวตัน-ราฟสัน จะมีประสิทธิภาพมาก แต่ในบางกรณีก็อาจจะมีปัญหาในการคำนวณได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.6 จงหารากที่เป็นบวกของ $f(x) = x^{10} - 1$ โดยวิธีนิวตัน-ราฟสัน โดยใช้ $x_0 = 0.5$

วิธีทำ
$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^{10} - 1}{10x_i^9}$$

Iteration	x
0	0.5
1	51.56
2	46.485
3	41.8365
4	37.65285
5	33.887565
M	M
∞	1.0000000

จะเห็นได้ว่า สำหรับฟังก์ชันนี้ การคำนวณโดยวิธี Newton – Raphson จะเข้าถึงคำตอบได้ช้ามาก

ตัวอย่างที่ 3.7 จงเขียนโปรแกรมเพื่อหารากของสมการ $f(x) = -0.9x^2 + 1.7x + 2.5$ โดยวิธี

- ก) วิธีทำซ้ำจุดคงที่
- ข) วิธีนิวตัน-ราฟสัน

ใช้ $x_0 = 5$, $\epsilon_a < 0.01 \%$ แล้วเปรียบเทียบค่ารากจากทั้งสองวิธี

วิธีทำ ก) วิธีทำซ้ำจุดคงที่

```
PROGRAM FIX_PT6
WRITE(*,*)'ENTER X0,ES,IMAX'
READ(*,*)X0,ES,IMAX
WRITE(*,*)'THE ROOT IS',FIXPT(X0,ES,IMAX)
STOP
END

*-----
FUNCTION FIXPT(X0,ES,IMAX)
*-----
F(X)= ((0.9*X*X)-2.5)/1.7
*-----

XR = X0
DO 10 ITER=1,IMAX
XROLD = XR
XR = F(XROLD)
IF (XR.NE.0.) THEN
EA = ABS((XR-XROLD)/XR)*100.
ENDIF
IF (EA.LT.ES) THEN
GO TO 20
ENDIF
10 CONTINUE
20 FIXPT=XR
RETURN
END
```

*-----

เอาที่พุดจากโปรแกรม คือ

```
ENTER X0,ES,IMAX
5
.001
20
THE ROOT IS 1.#INF
```

ดังนั้น จึงไม่สามารถหารากของสมการได้ ถ้า $x_0 = 5$

ข) วิธีนิวตัน-ราฟสัน

```
PROGRAM NR
WRITE(*,*)'ENTER X0,ES,IMAX'
READ(*,*)X0,ES,IMAX
WRITE(*,*)'THE ROOT IS',FIXPT(X0,ES,IMAX)
STOP
END
```

*-----

```
FUNCTION FIXPT(X0,ES,IMAX)
```

*-----

```
F(X)= X-((-0.9*X*X+1.7*X+2.5)/(-0.9*X+1.7))
```

*-----

```
XR = X0
DO 10 ITER=1,IMAX
XROLD = XR
XR = F(XROLD)
IF (XR.NE.0.) THEN
EA = ABS((XR-XROLD)/XR)*100.
```

```

ENDIF
IF (EA.LT.ES) THEN
    GO TO 20
ENDIF
10 CONTINUE
20 FIXPT=XR
RETURN
END

```

*-----

เอาที่พุกจากโปรแกรม คือ

```

ENTER X0,ES,IMAX
5
.001
20
THE ROOT IS -0.971214533

```

ดังนั้น รากของสมการ คือ - 0.971214533 ซึ่งเป็นค่าที่ถูกต้อง

จะเห็นได้ว่า วิธีนิวตัน-ราฟสันให้ค่ารากที่ถูกต้อง ส่วนวิธีทำซ้ำจุดคงที่จะหาค่ารากไม่ได้ เนื่องจากค่าเริ่มต้น $x_0 = 5$ จะไม่ลู่เข้าหาค่าตอบ แต่เมื่อเปลี่ยนค่า x_0 ให้เข้าใกล้ค่ารากของสมการ คือใช้ $x_0 = -1.0$ จะได้รากของสมการ $x = -1.02089381$ ซึ่งเป็นค่าที่ถูกต้อง เอาที่พุกเมื่อเปลี่ยน x_0 เป็น - 1.0 คือ

```

ENTER X0,ES,IMAX
-1
.001
20
THE ROOT IS -1.02089381

```

ตัวอย่างที่ 3.8 จงเขียนโปรแกรมหารากของสมการโดยวิธีนิวตัน-ราฟสัน

$$f(x) = -2.0 + 6x - 4x^2 + 0.5x^3$$

โดยใช้ค่าเริ่มต้น $x_0 = 4.2$ และ $x_0 = 4.43$ แล้วเปรียบเทียบค่ารากที่คำนวณได้

วิธีทำ อาศัยโปรแกรมจากตัวอย่าง 3.7 โดยเปลี่ยน $f(x)$

เอาที่พหุจากโปรแกรม เมื่อ $x_0 = 4.2$ คือ

```
ENTER X0,ES,IMAX
4.2
.000001
20
THE ROOT IS 0.47457245
```

จะได้รากของสมการคือ $x = 0.47457245$

เอาที่พหุจากโปรแกรม เมื่อ $x_0 = 4.43$ คือ

```
ENTER X0,ES,IMAX
4.43
.000001
20
THE ROOT IS -0.01764003
```

จะได้รากของสมการคือ $x = -0.01764003$

จะเห็นว่า รากของสมการเมื่อใช้จุดเริ่มต้นต่างกัน จะได้ค่าต่างกัน วิธีการนิเวศ-
ราฟสัน จึงขึ้นกับค่าเริ่มต้นมาก

3.3 วิธีซีแคน (The Secant Method)

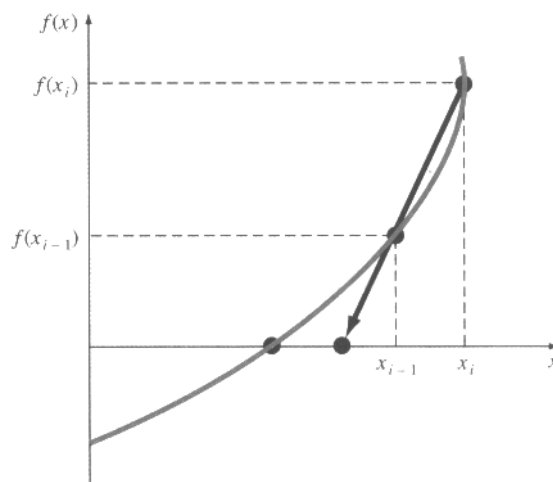
วิธีนิวตัน-ราฟสันมีข้อเสียที่จะต้องคำนวณอนุพันธ์ก่อน
ประมาณค่าอนุพันธ์โดยใช้

ส่วนวิธีซีแคนใช้การ

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}$$

ย้ายข้างสมการจะได้

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$



รูปที่ 3.3 วิธีซีแคน

ตัวอย่างที่ 3.9 โดยวิธีซีแคน จงหาค่ารากของ $f(x) = e^{-x} - x$ โดยใช้ ค่าเริ่มต้น $x_0 = 1.0$ และ $x_{-1} = 0$ และเขียนโปรแกรมเพื่อหาค่าราก

วิธีทำ รากแท้จริงของสมการ คือ 0.56714329

Iteration ครั้งที่ 1

$$x_{-1} = 0 \quad f(x_{-1}) = 1.0000$$

$$x_0 = 1.0 \quad f(x_0) = -0.63212$$

$$x_1 = 1 - \frac{-0.63212(0-1)}{1-(-0.63212)} = 0.61270$$

$$\varepsilon_t = 8.0\%$$

Iteration ครั้งที่ 2

$$x_0 = 1 \quad f(x_0) = -0.63212$$

$$x_1 = 0.61270 \quad f(x_1) = -0.07081$$

$$x_2 = 0.61270 - \frac{-0.07081(1-0.61270)}{-0.63212-(-0.07081)} = 0.56384$$

$$\varepsilon_t = 0.58\%$$

Iteration ครั้งที่ 3

$$x_{-1} = 0 \quad f(x_{-1}) = -0.07081$$

$$x_2 = 0.56384 \quad f(x_2) = 0.00518$$

$$x_3 = 0.56384 - \frac{0.00518(0.61270-0.56384)}{-0.07081-(0.00518)} = 0.56717$$

$$\varepsilon_t = 0.0048\%$$

โปรแกรมคำนวณรากของสมการโดยวิธีซีแคน คือ

```
PROGRAM SECANT
WRITE(*,*)'ENTER DELTA,X0,ES,IMAX'
READ(*,*) D,X0,ES,IMAX
WRITE(*,*)'THE ROOT IS',SECANT(D,X0,ES,IMAX)
STOP
```



```

END
*-----
FUNCTION SECANT(D,X0,ES,IMAX)
*-----
F(X)= EXP(-X)-X
*-----
XR = X0
DO 10 ITER=1,IMAX
XROLD = XR
DX = D*XROLD
XR = XROLD-((DX*F(XROLD))/(F(XROLD+DX)-F(XROLD)))
IF (XR.NE.0.) THEN
EA = ABS((XR-XROLD)/XR)*100.
ENDIF
IF (EA.LT.ES) THEN
GO TO 20
ENDIF
X11= XROLD
10 CONTINUE
20 SECANT=XR
RETURN
END
*-----

```

เอาท์พุทจากโปรแกรม คือ

```

ENTER DELTA,X0,ES,IMAX
.01
1
.000001
20
THE ROOT IS 0.567143261

```

ดังนั้น รากของสมการคือ 0.567143261 ซึ่งตรงกับการคำนวณโดยใช้เครื่องคิดเลข

ตัวอย่างที่ 3.10 จงหาค่าของสมการ $f(x) = \sin x + \cos(1 + x^2) - 1$ โดยวิธีซีแคน
 โดยใช้ ก) $x_{i-1} = 1.0$ และ $x_i = 3.0$
 ข) $x_{i-1} = 1.5$ และ $x_i = 2.5$

วิธีทำ โปรแกรมการคำนวณอีกแบบหนึ่ง คือ

```

PROGRAM SECANT
    CALL SECANT(XI1,X0,ES,XR,EA,IMAX)
    STOP
END
* *****
FUNCTION F(X)
    F = SIN(X)+COS(1.+X*X)-1.
    RETURN
END
* *****
*     SECANT METHOD
*/////////////////////////////////////
SUBROUTINE SECANT(XI1,X0,ES,XR,EA,IMAX)
    WRITE(6,2)
2    FORMAT(' SECANT METHOD',/,' ENTER XI-1,X0,ES,IMAX')
    READ(*,*) XI1,X0,ES,IMAX
    WRITE(6,100)
100  FORMAT(/,8X,'ITER',15X,'XR',
+      15X,'%EA')
    XR = X0
    DO 10 I=1,IMAX
        XROLD = XR
*     -----
        XR=XROLD-(F(XROLD)*(XI1-XROLD))/(F(XI1)-F(XROLD))
*     -----
        IF (XR.NE.0.) THEN
            EA = ABS((XR-XROLD)/XR)*100.
    
```

```

ENDIF
XI1= XROLD
WRITE(6,200)I,XR,EA
200   FORMAT(I10,10X,F15.9,6X,E10.3)
      IF (EA.LT.ES) THEN
          GO TO 20
      ENDIF
10    CONTINUE
WRITE(6,40)
40    FORMAT(/)
      WRITE(*,*) 'CANNOT FIND ROOT FOR THE GIVEN CONDITIONS'
      GO TO 30
20    WRITE(6,300)
300   FORMAT(/)
      WRITE(*,*)'THE ROOT IS ',XR
30    RETURN
END

```

*-----

เอาท์พุทจากโปรแกรม คือ

```

SECANT METHOD
ENTER XI-1,X0,ES,IMAX
1
3
.000001
20

```

ITER	XR	%EA
1	-0.023214424	0.130E+05
2	-1.226348162	0.981E+02
3	0.233951151	0.624E+03
4	0.396365732	0.410E+02
5	0.944690585	0.580E+02
6	0.000912355	0.103E+06
7	-9.206797600	0.100E+03
8	3.140430927	0.393E+03
9	23.915151596	0.869E+02
10	-54.001361847	0.144E+03
11	-105.970458984	0.490E+02
12	6.147742748	0.182E+04
13	166.623626709	0.963E+02
14	844.111389160	0.803E+02
15	500.021392822	0.688E+02
16	761.667907715	0.344E+02
17	669.008972168	0.139E+02
18	726.377380371	0.790E+01
19	820.995544434	0.115E+02
20	1800.197021484	0.544E+02

```

CANNOT FIND ROOT FOR THE GIVEN CONDITIONS

```

ซึ่งไม่สามารถหารากของสมการได้

เมื่อเปลี่ยน $x_{i-1} = 1.5$ และ $x_i = 2.5$ จะได้เอาท์พุท

```

SECANT METHOD
ENTER XI-1,X0,ES,IMAX
1.5
2.5
.000001
20

      ITER          XR          %EA
      1          2.356928825      0.607E+01
      2          2.547287226      0.747E+01
      3          2.526339054      0.829E+00
      4          2.532106876      0.228E+00
      5          2.532213449      0.421E-02
      6          2.532212496      0.377E-04
      7          2.532212496      0.000E+00

THE ROOT IS    2.5322125
    
```

ซึ่งจะได้รากของสมการ $x = 2.5322125$

ตัวอย่างที่ 3.11 จงใช้วิธีฟอลส์-โพอิชชันและวิธีซีแคน หารากของ $f(x) = \ln x$ โดยใช้ค่าเริ่มต้น $x_0 = 1.0$ และ $x_{-1} = 0$

วิธีทำ

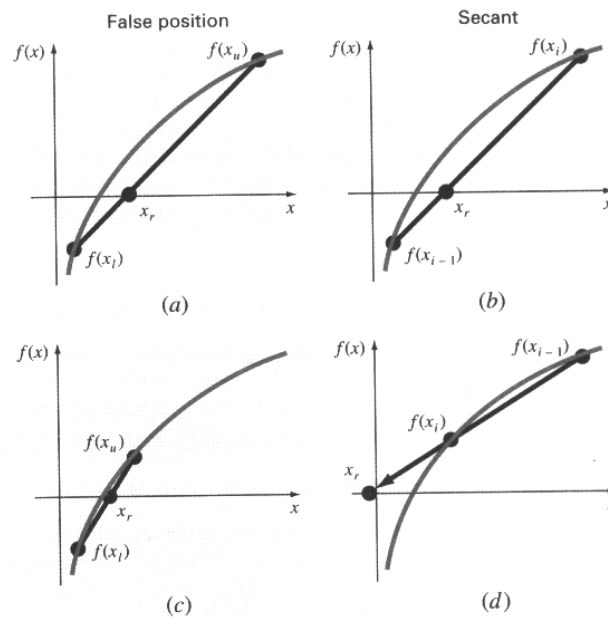
วิธีฟอลส์-โพอิชชัน

iteration	x_l	x_u	x_r
1	0.5	5.0	1.8546
2	0.5	1.8546	1.2163
3	0.5	1.2163	1.0585

วิธีซีแคน

iteration	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}
1	0.5	5.0	1.8546
2	5.0	1.8546	-0.10438

Diverge \Rightarrow จะหาค่ารากไม่ได้



รูปที่ 3.4 แสดงการ diverge

3.4 วิธีปรับปรุงซีแคน (Modified Secant Method)

แทนที่จะใช้ค่าสองค่าในการหาอนุพันธ์ วิธีนี้จะใช้ค่า δx_i แทน

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_i + \delta x_i) - f(x_i)}{\delta x_i}$$

เมื่อ δ = ช่วงที่มีขนาดเล็ก

$$x_{i+1} = x_i - \frac{\delta x_i f(x_i)}{f(x_i + \delta x_i) - f(x_i)}$$

ตัวอย่างที่ 3.12 ใช้วิธีปรับปรุงซีแคน หาค่ารากของ $f(x) = e^{-x} - x$ โดยใช้ ค่า $\delta = 0.01$ และ $x_0 = 1.0$ ค่ารากที่ถูกต้อง คือ 0.56714329 และเขียนโปรแกรมหารากของสมการด้วย

วิธีทำ

Iteration ครั้งที่ 1

$$\begin{aligned} x_0 &= 1.0 & f(x_0) &= -0.63212 \\ x_0 + \delta x_0 &= 1.01 & f(x_0 + \delta x_0) &= -0.64578 \\ x_1 &= 1 - \frac{0.01(-0.63212)}{-0.64578 - (-0.63212)} = 0.537263 \\ |\varepsilon_i| &= 5.3\% \end{aligned}$$

Iteration ครั้งที่ 2

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.537263 & f(x_0) &= 0.047083 \\ x_0 + \delta x_0 &= 0.542635 & f(x_0 + \delta x_0) &= 0.038579 \\ x_1 &= 0.537263 - \frac{0.537263(0.047083)}{0.038579 - 0.047083} = 0.56701 \\ |\varepsilon_i| &= 0.0236\% \end{aligned}$$

Iteration ครั้งที่ 3

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.56701 & f(x_0) &= 0.000209 \\ x_0 + \delta x_0 &= 0.567143 & f(x_0 + \delta x_0) &= -0.00867 \end{aligned}$$

$$x_1 = 0.56701 - \frac{0.00567(0.000209)}{-0.00867 - 0.000209} = 0.567143$$

$$|\varepsilon_r| = 2.365 \times 10^{-5}\%$$

โปรแกรมที่ใช้คำนวณโดยวิธีปรับปรุงซีแคน คือ

```

PROGRAM MODSECANT
WRITE(*,*)'ENTER DELTA,X0,ES,IMAX'
READ(*,*) D,X0,ES,IMAX
WRITE(*,*)'THE ROOT IS',SECANT(D,X0,ES,IMAX)
STOP
END

*-----
FUNCTION SECANT(D,X0,ES,IMAX)
*-----
F(X)= EXP(-X)-X
*-----

XR = X0
DO 10 ITER=1,IMAX
XROLD = XR
DX = D*XROLD
XR = XROLD-((DX*F(XROLD))/(F(XROLD+DX)-F(XROLD)))
IF (XR.NE.0.) THEN
EA = ABS((XR-XROLD)/XR)*100.
ENDIF
IF (EA.LT.ES) THEN
GO TO 20
ENDIF
XI1= XROLD
10 CONTINUE

```

```

20     SECANT=XR
      RETURN
      END

```

*-----

เอาท์พุทจากโปรแกรม คือ

```

ENTER DELTA,X0,ES,IMAX
.01
1
.000001
20
THE ROOT IS 0.567143261

```

ดังนั้น รากของสมการคือ $x = 0.567143261$ ซึ่งมีค่าตรงกับค่ารากที่ต้องการ

ตัวอย่างที่ 3.13 จงหารากของสมการ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.1$

- ก) วิธีนิวตัน-ราฟสัน ($x_i = 3.5$, Iteration = 100)
- ข) วิธีซีแคน ($x_{i-1} = 2.5$ และ $x_i = 3.5$, Iteration = 3)
- ค) วิธีปรับปรุงซีแคน ($x_i = 3.5$, $\delta = 0.02$, Iteration = 3)

วิธีทำ ก) วิธีนิวตัน-ราฟสัน

เอาท์พุทคือ

```

STANDARD NEWTON RAPHSON METHOD
ENTER XI,ES,IMAX
3.5
.000001
100

ITER          XR          %EA
1             3.491532803    0.243E+00
2             3.483118057    0.242E+00
3             3.474758387    0.241E+00
4             3.466456175    0.240E+00
5             3.458213806    0.238E+00
6             3.450033903    0.237E+00
7             3.441918850    0.236E+00
8             3.433871031    0.234E+00
9             3.425892830    0.233E+00
10            3.417986631    0.231E+00
11            3.410154819    0.230E+00
12            3.402399302    0.228E+00
13            3.394722462    0.226E+00
14            3.387126446    0.224E+00
15            3.379613161    0.222E+00
16            3.372184753    0.220E+00
17            3.364842892    0.218E+00

```



```

80      3.096648932      0.556E-01
81      3.094979286      0.539E-01
82      3.093361855      0.523E-01
83      3.091794968      0.507E-01
84      3.090277195      0.491E-01
85      3.088807344      0.476E-01
86      3.087384224      0.461E-01
87      3.086006403      0.446E-01
88      3.084672689      0.432E-01
89      3.083381653      0.419E-01
90      3.082132339      0.405E-01
91      3.080923557      0.392E-01
92      3.079753876      0.380E-01
93      3.078622341      0.368E-01
94      3.077527761      0.356E-01
95      3.076469183      0.344E-01
96      3.075445414      0.333E-01
97      3.074455261      0.322E-01
98      3.073498011      0.311E-01
99      3.072572470      0.301E-01
100     3.071677685      0.291E-01

THE ROOT IS 3.07167768

```

ข) วิธีซีแคน

เอาท์พุทคือ

```

SECANT METHOD
ENTER XI-1,X0,ES,IMAX
2.5
3.5
.000001
3

      ITER          XR          %EA
      1          2.711111069      0.291E+02
      2          2.871090651      0.557E+01
      3          3.221920729      0.109E+02

THE ROOT IS 3.22192073

```

ค) วิธีปรับปรุงซีแคน

เอาที่พูดคือ

```

MODIFY OF SECANT METHOD
ENTER DELTA, X0, ES, IMAX
.02
3.5
.000001
3

ITER          XR          %EA
1            3.207573175    0.912E+01
2            3.082034349    0.407E+01
3            3.050811291    0.102E+01

THE ROOT IS  3.05081129
    
```

ได้รากของสมการคือ $x = -3.050811291$

จะเห็นว่าวิธีปรับปรุงซีแคนเข้าหาคำตอบได้เร็วที่สุด

3.5 รากซ้ำ (Multiple roots)

รากซ้ำเป็นจุดที่ฟังก์ชันสัมผัสกับแกน x ตัวอย่างเช่น

$$f(x) = (x - 3)(x - 1)(x - 1)$$

จะมีรากซ้ำสองค่า (double root) ที่ $x = 1$

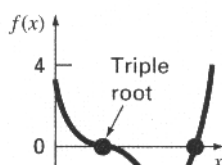
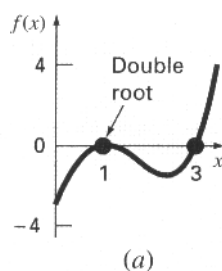
และ

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3$$

$$= (x - 3)(x - 1)(x - 1)(x - 1)$$

จะมีรากซ้ำสามค่า(triple root) ที่ $x = 1$

มีวิธีการสองวิธีในการหารากซ้ำของสมการ



รูปที่ 3.5 รากซ้ำ

วิธีที่ 1 วิธีนิวตัน-ราฟสัน

ใช้สมการ

$$x_{i+1} = x_i - m \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

เมื่อ m = จำนวนราก ในการหารากของสมการ

วิธีที่ 2 วิธีปรับปรุงนิวตัน-ราฟสัน

กำหนดให้

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

จะเกิดค่ารากที่เดียวกับ $f(x)$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{u(x_i)}{u'(x_i)}$$

เนื่องจาก

$$u'(x) = \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

ดังนั้น

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x)f'(x)}{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}$$

ใช้สมการนี้ในการหารากของสมการ

ตัวอย่างที่ 3.14 จงใช้วิธีมาตรฐาน และ วิธีปรับปรุงนิวตัน-ราฟสัน หารากของสมการ
 $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

วิธีทำ

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7$$

วิธีที่ 1 มาตรฐาน

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^3 - 5x_i^2 + 7x_i - 3}{3x_i^2 - 10x_i + 7}$$

i	x_i	ε_i %
0	0	100
1	0.4285714	57
2	0.6857143	31
3	0.8328654	17
4	0.9133290	8.7
5	0.9557833	4.4
6	0.9776551	2.2

วิธีที่ 2 วิธีปรับปรุงนิวตัน-กราฟสัน

$$x_{i+1} = x_i - \frac{(x_i^3 - 5x_i^2 + 7x_i - 3)(3x_i^2 - 10x_i + 7)}{(3x_i^2 - 10x_i + 7) - (x_i^3 - 5x_i^2 + 7x_i - 3)(6x_i - 10)}$$

i	x_i	ε_i %
0	0	100
1	1.105263	11
2	1.003082	0.31
3	1.000002	0.00024

หารากที่ $x = 3$

i	standard	ε_i %	modified	ε_i %
0	4	33	4	33
1	3.4	13	2.636364	12
2	3.1	3.3	2.820225	6.0
3	3.008396	0.29	2.961728	1.3
4	3.000075	0.0025	2.998479	0.051
5	3.000000	2×10^{-7}	2.999998	7.7×10^{-3}

โปรแกรมต่อไปนี้เป็นคำนวณรากของสมการชนิดรากซ้ำ โดยวิธีมาตรฐาน

```

PROGRAM STDNEWRAPH
  CALL MNR(X0,ES,XR,EA,IMAX)
  STOP
END
* *****
FUNCTION F(X)
  F = X**3.+2.*X*X-5.*X+3
  RETURN
END
    
```

```

* -----
FUNCTION DIF_F(X)
  DIF_F = 3.*X*X+4.*X-5.
  RETURN
END
* *****
*/////////////////////////////////////
*   MULTIPLE NEWTON RAPHSON METHOD (M = ...)
*/////////////////////////////////////
SUBROUTINE MNR(X0,ES,XR,EA,IMAX)
  WRITE(6,2)
2   FORMAT(' MODIFIED NEWTON RAPHSON METHOD ',/,
+       ' ENTER XI,ES,IMAX')
  READ(*,*) X0,ES,IMAX
  WRITE(6,100)
100  FORMAT(/,8X,'ITER',12X,'XR',
+       15X,'%EA')
* -----
  M = 2.
  XR = X0
  DO 10 I=1,IMAX
  XROLD = XR
  XR = XROLD-M*((F(XROLD))/(DIF_F(XROLD)))
  IF (XR.NE.0.) THEN
    EA = ABS((XR-XROLD)*100./XR)
  ENDIF
  IF (EA.LT.ES) THEN
    GO TO 20
  ENDIF
* -----
  WRITE(6,200)I,XR,EA
200  FORMAT(I10,10X,F12.9,6X,E10.3)

```

```

10     CONTINUE
      WRITE(6,40)
40     FORMAT(/)
      WRITE(*,*) ' CANNOT FIND ROOT FOR THE GIVEN CONDITIONS'
      GO TO 50
20     WRITE(6,300)
300    FORMAT(/)
      WRITE(*,*) 'THE ROOT IS ',XR
50     RETURN
      END
*-----

```

โปรแกรมต่อไปนี้ คำนวณรากของสมการชนิดรากซ้ำ โดยวิธีปรับปรุงนิวตัน-กราฟสั้น

```

PROGRAM MODNEWRAPH
      CALL MNR2(X0,ES,XR,EA,IMAX)
      STOP
      END
* *****
      FUNCTION F(X)
          F = X**3.+2.*X*X-5.*X+3
          RETURN
      END
* -----
      FUNCTION DIF_F(X)
          DIF_F = 3.*X*X+4.*X-5.
          RETURN
      END
* -----

```

```

FUNCTION DIFF_F(X)
  DIFF_F = 6.*X+4.
  RETURN
END

* *****
*////////////////////////////////////
*   MODIFIED NEWTON RAPHSON
*////////////////////////////////////
  SUBROUTINE MNR2(X0,ES,XR,EA,IMAX)
    WRITE(6,2)
2    FORMAT(' MODIFIED NEWTON RAPHSON ',/,
+      ' ENTER XI,ES,IMAX')
    READ(*,*) X0,ES,IMAX
    WRITE(6,100)
100  FORMAT(/,8X,'ITER',15X,'XR',
+      15X,'%EA')
    XR = X0
    DO 10 I=1,IMAX
      XROLD = XR

*-----
      XR = XROLD-( (F(XROLD)*DIF_F(XROLD))/
+      ((DIF_F(XROLD))**2.-F(XROLD)) )
*-----

      IF (XR.NE.0.) THEN
        EA = ABS((XR-XROLD)*100./XR)
      ENDIF
      WRITE(6,200)I,XR,EA
200  FORMAT(I10,10X,F15.9,6X,E10.3)
      IF (EA.LT.ES) THEN
        GO TO 20
      ENDIF
10   CONTINUE

68

```



```

WRITE(6,40)
40  FORMAT(/)
WRITE(*,*) ' CANNOT FIND ROOT FOR THE GIVEN CONDITIONS'
GO TO 50
20  WRITE(6,300)
300  FORMAT(/)
WRITE(*,*)'THE ROOT IS ',XR
50  RETURN
END

```

3.6 ระบบหลายสมการไม่เป็นเชิงเส้น (Systems of nonlinear equations)

ถ้ามีหลายสมการ และมีตัวแปรมากกว่า 1 ตัว

$$\begin{array}{l}
 f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\
 f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\
 \quad \quad \quad \mathbf{M} \quad \quad \mathbf{M} \\
 f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0
 \end{array}$$

เช่น

$$\begin{array}{l}
 x^2 + xy = 10 \\
 y + 3xy^2 = 57
 \end{array}$$

สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{array}{l}
 u(x, y) = x^2 + xy - 10 = 0 \\
 v(x, y) = y + 3xy^2 - 57 = 0
 \end{array}$$

ผลเฉลย คือ ค่า x และค่า y ที่ทำให้ $u(x, y)$ และ $v(x, y)$ เท่ากับศูนย์

วิธีทำซ้ำจุดคงที่

ตัวอย่างที่ 3.15 จงหารากของระบบสมการข้างบน ค่ารากที่ถูกต้องคือ $x = 2$ และ $y = 3$ โดยใช้ค่าเริ่มต้น $x = 1.5$ และ $y = 3.5$

วิธีทำ $x_{i+1} = \frac{10 - x_i^2}{y_i}$ และ $y_{i+1} = 57 - 3x_i y_i^2$

อาศัยค่าเริ่มต้น $x = 1.5$ และ $y = 3.5$

$$x = \frac{10 - (1.5)^2}{3.5} = 2.21429$$

ใช้ค่า x นี้และ $y = 3.5$ แทนลงไปในค่า y ใหม่จะได้

$$y = 57 - 3(2.21429)(3.5)^2 = -24.37516$$

ค่าที่ได้จะ diverge

ทำซ้ำครั้งที่ 2

$$x = \frac{10 - (2.21429)^2}{-24.37516} = -0.20910$$

$$y = 57 - 3(-0.20910)(-24.37516)^2 = 429.709$$

ซึ่งจะสังเกตเห็นการ diverge อย่างชัดเจน

ตั้งสมการใหม่

$$x = \sqrt{10 - xy} \quad \text{และ} \quad y = \sqrt{\frac{57 - y}{3x}}$$

$$x = \sqrt{10 - 1.5(3.5)} = 2.217945$$

$$y = \sqrt{\frac{57 - 3.5}{3(2.17945)}} = 2.86051$$

$$x = \sqrt{10 - 2.17945(2.86051)} = 1.94053$$

$$y = \sqrt{\frac{57 - 2.86051}{3(1.94053)}} = 3.04955$$

ใกล้เคียงกับค่าจริง $x = 2$ และ $y = 3$

โปรแกรมต่อไปนี้ คำนวณรากของสมการ 2 สมการ โดยวิธีทำซ้ำจุดคงที่

```
PROGRAM TWO_EQ_FP
  CALL TWEQ_ITER(X,Y,IMAX,TOL)
  STOP
END

=====
*      TWO EQUATION FIXED-POINT ITERATION
=====

SUBROUTINE TWEQ_ITER(X,Y,IMAX,TOL)
  WRITE(6,1)
1  FORMAT(/,17X,'TWO EQUATION FIXED-POINT ITERATION CASE ',/)
  WRITE(*,*)  ENTER X,Y,IMAX,TOL '
  READ(*,*)X,Y,IMAX,TOL
  WRITE(6,100)
100  FORMAT(/,5X,'ITER',7X,'XR',
+      10X,'YR',10X,'ERROR X',5X,'ERROR Y',/)
  XR=X
  YR=Y
  DO 10 I=1,IMAX
    XROLD=XR
    YROLD=YR
    X=XR
    Y=YR
    CALL X_NEW(X,Y,XR)
    X=XR
    CALL Y_NEW(X,Y,YR)
    Y=YR
```

```

*-----*
*           DEFINE ERROR
*-----*
           ERX = ABS((XR-XROLD)*100./XR)
           ERY = ABS((YR-YROLD)*100./YR)
*-----*
           WRITE(6,200)I,XR,YR,ERX,ERY
200      FORMAT(I7,2X,2F10.4,3X,2E12.3)
*-----*
*           CHEAK ERROR
*-----*
           IF (ERX.LT.TOL) THEN
           WRITE(6,500)
           GO TO 300
           ENDIF
           IF (ERY.LT.TOL) THEN
           WRITE(6,600)
           GO TO 300
           ENDIF
*-----*
10      CONTINUE
           WRITE(6,400)
400     FORMAT(/,5X,'PROGRAM TERMINATE WITH MAXIMUM ITERATION')
500     FORMAT(/,5X,'PROGRAM TERMINATE WITH ERROR X < TOL')
600     FORMAT(/,5X,'PROGRAM TERMINATE WITH ERROR Y < TOL')
300     RETURN
           END
*=====
           SUBROUTINE X_NEW(X,Y,XR)
*           *****
           XR=Y+X*X-0.5
*           *****

```

```

RETURN
END
SUBROUTINE Y_NEW(X,Y,YR)
* *****
YR=X*X-5.*X*Y
* *****

RETURN
END
=====

```

วิธีนิวตัน-ราฟสัน

จากอนุกรมเทย์เลอร์

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + (x_{i+1} - x_i) f'(x_i)$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

ซึ่งก็คือสมการของ นิวตัน-ราฟสัน

สำหรับระบบสมการไม่เป็นเชิงเส้น

$$u_{i+1} = u_i + (x_{i+1} - x_i) \frac{\partial u_i}{\partial x} + (y_{i+1} - y_i) \frac{\partial u_i}{\partial y}$$

และ

$$v_{i+1} = v_i + (x_{i+1} - x_i) \frac{\partial v_i}{\partial x} + (y_{i+1} - y_i) \frac{\partial v_i}{\partial y}$$

จะได้

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} x_{i+1} + \frac{\partial u_i}{\partial y} y_{i+1} = -u_i + x_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + y_i \frac{\partial u_i}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x} x_{i+1} + \frac{\partial v_i}{\partial y} y_{i+1} = -v_i + x_i \frac{\partial v_i}{\partial x} + y_i \frac{\partial v_i}{\partial y}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{u_i \frac{\partial v_i}{\partial y} - v_i \frac{\partial u_i}{\partial y}}{\frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial v_i}{\partial y} - \frac{\partial u_i}{\partial y} \frac{\partial v_i}{\partial x}}$$

$$y_{i+1} = y_i - \frac{v_i \frac{\partial u_i}{\partial x} - u_i \frac{\partial v_i}{\partial x}}{\frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial v_i}{\partial y} - \frac{\partial u_i}{\partial y} \frac{\partial v_i}{\partial x}}$$

ตัวอย่างที่ 3.11 จงใช้วิธี multiple-equation Newton-Raphson หาคำรากของสมการในตัวอย่างที่ผ่านมา คำรากที่ถูกต้องคือ $x = 2$ และ $y = 3$ โดยใช้ค่าเริ่มต้น $x = 1.5$ และ $y = 3.5$

วิธีทำ

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = 2x + y = 2(1.5) + 3.5 = 6.5$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = x = 1.5$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial x} = 3x^2 = 3(3.5)^2 = 36.75$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial y} = 1 + 6xy = 1 + 6(1.5)(3.5) = 32.5$$

หา determinant ของ Jacobian ของ iteration ครั้งแรก = $6.5(32.5) - 1.5(36.75) = 156.125$

ค่าของฟังก์ชันหาได้จาก

$$u_0 = (1.5)^2 + 1.5(3.5) - 10 = -2.5$$

$$v_0 = 3.5 + 3(1.5)(3.5)^2 - 57 = 1.625$$

แทนลงในสมการ จะได้

$$x = 1.52 - \frac{-2.5(32.5) - 1.625(1.5)}{156.125} = 2.03603$$

$$y = 3.5 - \frac{1.625(6.5) - (-2.5)(36.75)}{156.125} = 2.84388$$

จะเห็นได้ว่า x,y จะเข้าสู่ค่าที่แท้จริง x = 2 และ y = 3

โปรแกรมต่อไปนี้ คำนวณรากของสมการ 2 สมการ โดยวิธีนิวตัน-ราฟสัน

```
PROGRAM TWO_EQ_NR
```

```
CALL TWEQNR(X,Y,IMAX,U,V,DUX,DUY,DVX,DVY)
```

```
STOP
```

```
END
```

```
=====
```

```
* TWO EQUATION VERSION OF THE NEWTON-RAPHSON
```

```
=====
```

```
SUBROUTINE TWEQNR(X,Y,IMAX,U,V,DUX,DUY,DVX,DVY)
```

```
WRITE(6,1)
```

```
1 FORMAT(/,17X,'TWO EQUATION VERSION OF THE NEWTON-RAPHSON',/)
```

```
WRITE(*,*) ENTER X,Y,IMAX,TOL '
```

```
READ(*,*)X,Y,IMAX,TOL
```

```
WRITE(6,100)
```

```
100 FORMAT(/,5X,'ITER',7X,'XR',
```

```
+ 10X,'YR',10X,'ERROR X',5X,'ERROR Y',/)
```

```
XR=X
```

```
YR=Y
```

```
DO 10 I=1,IMAX
```

```
XROLD=XR
```

```
YROLD=YR
```

```
X=XR
```

```
Y=YR
```

```

CALL FUV(X,Y,U,V)
CALL DIFF_UV(X,Y,DUX,DUY,DVX,DVY)
*
-----
XR=XROLD-((U*DVIY-V*DUY)/(DUX*DVIY-DUY*DVX))
YR=YROLD-((V*DUX-U*DVX)/(DUX*DVIY-DUY*DVX))
*
-----
*-----*
*
*       DEFINE ERROR
*-----*
ERX = ABS((XR-XROLD)*100./XR)
ERY = ABS((YR-YROLD)*100./YR)
*-----*
WRITE(6,200)I,XR,YR,ERX,ERY
200   FORMAT(I7,2X,2F12.6,3X,2E12.3)
*-----*
*
*       CHEAK ERROR
*-----*
IF (ERX.LT.TOL) THEN
  IF (ERY.LT.TOL) THEN
    WRITE(6,500)
    GO TO 300
  ENDIF
ENDIF
*-----*
10    CONTINUE
      WRITE(6,400)
400   FORMAT(/,5X,'PROGRAM TERMINATE WITH MAXIMUM ITERATION')
500   FORMAT(/,5X,'PROGRAM TERMINATE WITH ERR X AND ERR Y < TOL')
300   RETURN
      END
*=====
SUBROUTINE FUV(X,Y,U,V)

```



```

*          *****
      U= X*X-X+Y-0.5
      V= X*X-5.*X*Y-Y
*          *****

      RETURN
      END

*=====
      SUBROUTINE DIFF_UV(X,Y,DUX,DUY,DVX,DVY)
*          *****

      DUX= 2.*X-1
      DUY= 1.
      DVX= 2.*X-5.*Y
      DVY= -5.*X-1.
*          *****

      RETURN
      END

*=====

```

แบบฝึกหัดบทที่ 3

- จงใช้วิธีทำซ้ำจุดคงที่ หาค่าของสมการ $f(x) = \sin(\sqrt{x}) - x$ ใช้ค่าเริ่มต้น $x_0 = 0.5$ และ ทำซ้ำหลายๆ ครั้ง จนกระทั่ง $\varepsilon_a \leq 0.01\%$
- จงใช้วิธี ก) ทำซ้ำจุดคงที่ ข) นิวตัน-ราฟสัน หาค่าของสมการ $f(x) = -0.9x^2 + 1.7x + 2.5$ โดยใช้ $x_0 = 5$ และคำนวณจนกระทั่ง $\varepsilon_a \leq 0.01\%$
- จงหาค่าของสมการ $f(x) = -2.0 + 6x - 4x^2 + 0.5x^3$
 - วิธีกราฟ
 - วิธี นิวตัน-ราฟสัน จนกระทั่ง $\varepsilon_a \leq 0.01\%$
- จงหาค่าของสมการ $f(x) = -11 - 22x + 17x^2 - 2.5x^3$
 - วิธีกราฟ
 - วิธี Secant
- จงหาค่าของสมการ $x^{33} = 79$ โดยวิธีปรับปรุงซีแคน โดยที่ $\varepsilon_a = 0.1\%$ และทำการเปลี่ยนค่า δ เพื่อดูความแตกต่าง
- ฟังก์ชัน $x^3 + 2x^2 - 5x + 3$ มี double root ที่ $x = 1$ จงหาค่านี้โดยวิธี
 - มาตรฐานนิวตัน-ราฟสัน
 - ปรับปรุงนิวตัน-ราฟสัน ทั้งสองวิธี เปรียบเทียบการลู่เข้าสู่ค่าราก และใช้ $x_0 = 0.2$
- จงหาค่าของสมการสองสมการต่อไปนี้ โดยวิธี
 - ทำซ้ำจุดคงที่
 - นิวตัน-ราฟสัน
$$x = y + x^2 - 0.5$$
$$y = x^2 - 5xy$$
โดยใช้ค่าเริ่มต้น $x = y = 1.0$