# บทที่ 1
## การวิเคราะห์เชิงตัวเลข

ปัจจุบันคอมพิวเตอร์เข้ามามีบทบาทที่สำคัญต่อชีวิตประจำวันของมนุษย์มากมายหลายด้าน การนำคอมพิวเตอร์มาช่วยแก้ปัญหาทางฟิสิกส์ทำให้การเรียนรู้ฟิสิกส์แขนงใหม่ก้าวหน้าอย่างรวดเร็วและมีประสิทธิภาพ การศึกษาระบบไม่ใช่เชิงเส้นจะไม่สามารถกระทำได้เลยถ้าไม่มีคอมพิวเตอร์ที่มีความเร็วสูงและมีประสิทธิภาพในการคำนวณ ในบทนี้จะกล่าวถึงการนำคอมพิวเตอร์มาช่วยแก้ปัญหาทางฟิสิกส์ที่นักศึกษาคุ้นเคยก่อน คือ การตกของวัตถุอย่างอิสระภายใต้แรงดึงดูดของโลก นักศึกษาจะได้ทบทวนการคำนวณโดยอาศัยทฤษฎีทางฟิสิกส์ดั้งเดิม จากนั้นนักศึกษาจะได้เรียนรู้วิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลข(numerical analysis)ในการแก้ปัญหาเดียวกัน แล้วนำผลลัพธ์ที่ได้มาเปรียบเทียบกัน

### 1.1 การตกอย่างอิสระของวัตถุ (Freely falling objects)

วัตถุที่ตกอย่างอิสระหมายถึงวัตถุที่เคลื่อนที่อย่างอิสระภายใต้แรงดึงดูดของโลกอย่างเดียว โดยไม่คำนึงถึงการเคลื่อนที่เริ่มต้น วัตถุอาจจะถูกปล่อยตกจากมือ หรือขว้างขึ้นข้างบนก็ได้ จากกฎข้อที่สองของนิวตัน จะได้

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \qquad (1.1)$$

เมื่อ v เป็นความเร็ว (เมตร/วินาที)
t เป็นเวลา (วินาที)

สมมุติว่า มีแรงต้านทานของอากาศในทิศขึ้นมีค่าเท่ากับ $F_{air}$ และแรงเนื่องจากแรงโน้มถ่วงเท่ากับ $F_{grav}$ ดังนั้น แรงลัพธ์ (F)

$$F = F_{grav} - F_{air}$$

สมมุติว่า  แรงต้านของอากาศแปรตามความเร็วของวัตถุ

$$F_{air} = kv$$

เมื่อ  k =  ค่าคงที่เรียกว่าสัมประสิทธิ์ของความต้านทาน


จากสมการ  (1.1)  จะได้

$$\frac{dv}{dt} = \frac{mg - cv}{m}$$

$$= g - \frac{c}{m}v \qquad (1.2)$$

สมการ  (1.2)  เป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียล  ซึ่งจากคณิตศาสตร์  จะมีผลเฉลยคือ

$$v(t) = \frac{gm}{c}(1 - e^{-(c/m)t}) \qquad (1.3)$$

**ตัวอย่างที่ 1.1** นักโดดร่มมวล 68.1 กิโลกรัม กระโดดจากลูกบอลลูนที่หยุดนิ่ง จงคำนวณหาความเร็วของนักโดดร่มหลังจากเวลาผ่านไป กำหนดให้สัมประสิทธิ์ของความต้านทานเท่ากับ 12.5 กิโลกรัม/วินาที

**วิธีทำ** จากสมการ (1.3) แทนค่าที่โจทย์กำหนดให้

$$v(t) = \frac{gm}{c}(1 - e^{-(c/m)t})$$

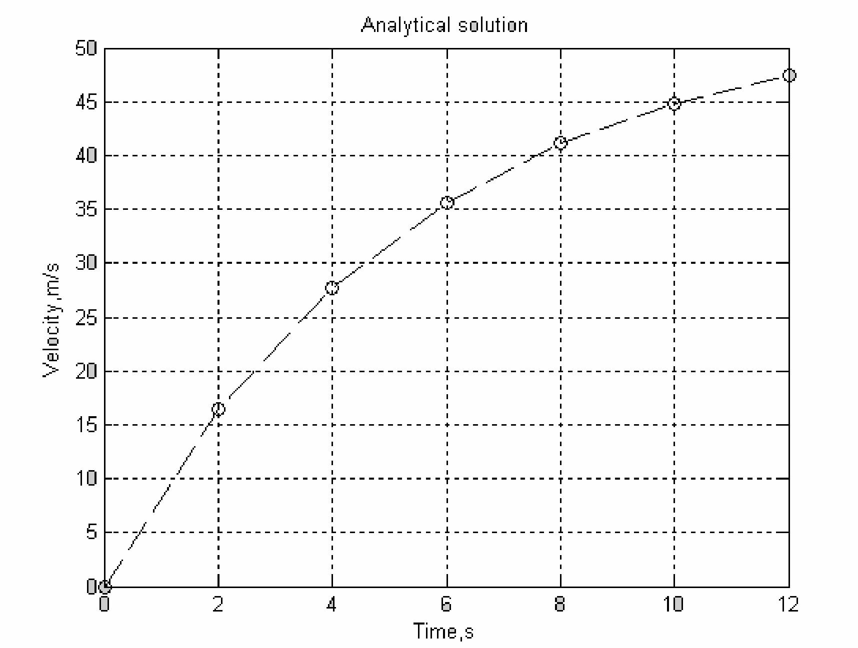
$$v(t) = \frac{9.8(68.1)}{12.5}\left(1 - e^{-(12.5/68.1)t}\right)$$

$$v(t) = 53.39\left(1 - e^{-0.18355t}\right)$$

แทนค่า t เป็นวินาที จะได้

| t (วินาที) | v (เมตร/วินาที) |
|---|---|
| 0 | 0.00 |
| 2 | 16.40 |
| 4 | 27.77 |
| 6 | 35.64 |
| 8 | 41.10 |
| 10 | 44.87 |
| 12 | 47.49 |
| M | M |
| $\infty$ | 53.39 |

ความเร็วเมื่อ t มีค่ามากเรียกว่า ความเร็วเทอร์มินัล (terminal velocity) จะมีค่าคงที่ เพราะ ณ เวลานี้แรงเนื่องจากแรงดึงดูดของโลกจะเท่ากับแรงต้านจากอากาศ ทำให้แรงลัพธ์เท่ากับศูนย์ นักกระโดดร่มจึงเคลื่อนที่โดยไม่มีความเร่ง ซึ่งก็คือมีความเร็วคงที่




รูปที่ 1.2 ความเร็วของนักกระโดดร่มที่เวลาใด ๆ คำนวณจากผลเฉลยจริง (exact solution)

กราฟระหว่างความเร็วของนักกระโดดร่มที่เวลาต่าง ๆ เขียนกราฟโดยใช้โปรแกรม sigma plot แสดงในรูปที่ 1.2 จะสังเกตเห็นว่าเมื่อ t มีค่ามาก ความเร็วจะมีค่าคงที่ที่ 53.39 เมตร/วินาที สมการ (1.3) มีชื่อเรียกว่าผลเฉลยวิเคราะห์ (analytical solution) หรือผลเฉลยแท้จริง (exact solution) เพราะว่าเป็นผลเฉลยที่ได้จากการแก้สมการดิฟเฟอเรนเชียล อย่างไรก็ตาม ยังมีสมการทางคณิตศาสตร์อีกมากมายซึ่งไม่สามารถแก้สมการได้โดยตรงเช่นนี้ จะต้องใช้วิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขมาช่วยในการประมาณค่าผลเฉลยของสมการ

## 1.2 การวิเคราะห์เชิงตัวเลข (numerical analysis)

การเปลี่ยนแปลงของความเร็ว สามารถประมาณค่าได้ด้วยสมการ

$$\frac{dv}{dt} \cong \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \tag{1.4}$$

เมื่อ $\Delta$v และ $\Delta$t เป็นการเปลี่ยนแปลงของความเร็วในช่วงเวลา $\Delta$t

$V(t_i)$ = ความเร็วที่เวลาเริ่มต้น $t_i$

$V(t_{i+1})$ = ความเร็วที่เวลาผ่านไป $t_{i+1}$

สมการ (1.4) เป็นการประมาณค่าเดอริเวทีฟด้วยวิธี finite divided difference แทนลงในสมการ (1.2) จะได้

$$\frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = g - \frac{c}{m} v(t_i)$$

จัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + \left[ g - \frac{c}{m} v(t_i) \right] (t_{i+1} - t_i) \tag{1.5}$$

วิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขสามารถกระทำได้โดยกำหนดค่าเริ่มต้นของความเร็วที่เวลา $t_i$ ก่อน ($v(t_i)$) แล้วแทนลงในสมการ (1.5) จะได้ความเร็วที่เวลา $t_{i+1}(v(t_{i+1}))$ นำค่า $v(t_{i+1})$ ที่ได้แทนลงในสมการ (1.5) อีกครั้งหนึ่ง จะได้ความเร็วที่เวลา $t_{i+2}$( $v(t_{i+2})$) ทำซ้ำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จะได้ความเร็วที่เวลา t ต่าง ๆ เขียนวิธีการเช่นนี้ในรูกสมการได้ว่า

ค่าใหม่ = ค่าเก่า + ความชัน x ช่วงขั้น

วิธีการเช่นนี้เรียกว่า วิธีออยเลอร์ (Euler's method)

**ตัวอย่างที่ 1.2** จงคำนวณความเร็วของนักกระโดดร่มที่เวลา t ใด ๆ ตามตัวอย่าง 1.1 โดยใช้วิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลข โดยใช้สมการ (1.5) กำหนดให้ช่วงขั้นเท่ากับ 2 วินาที

**วิธีทำ** ที่เวลาเริ่มต้น ($t_i = 0$) ความเร็วของนักกระโดดร่มเท่ากับ 0 ($v(t_i) = 0$) แทนลงในสมการ (1.5) โดยใช้ $t_{i+1} = 2$ วินาที จะได้

$$v = 0 + \left[ 9.8 - \frac{12.5}{68.1}(0) \right] 2 = 19.6 m/s$$

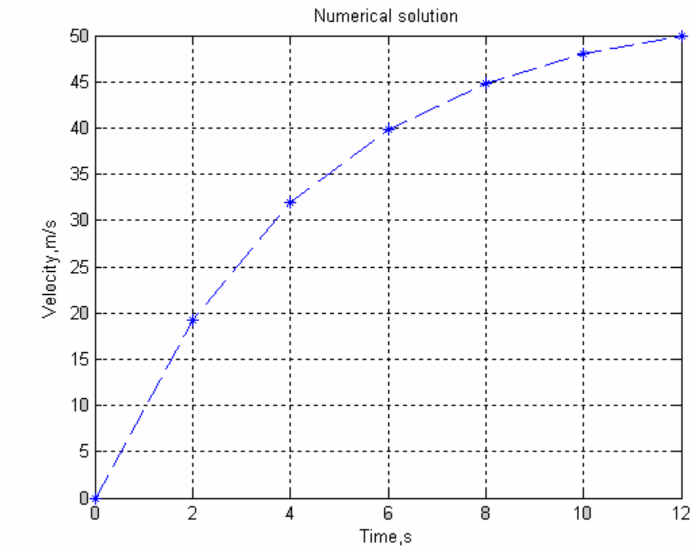
แทนค่า v = 19.60 เมตร/วินาที ลงในสมการ (1.5) อีกครั้งหนึ่ง จะได้

$$v = 19.6 + \left[ 9.8 - \frac{12.5}{68.1}(19.6) \right] 2 = 32 m/s$$

ทำเช่นนี้หลาย ๆ ครั้ง จะได้ความเร็วของนักกระโดดร่มที่เวลา t ใด ๆ ดังแสดงในตารางต่อไปนี้

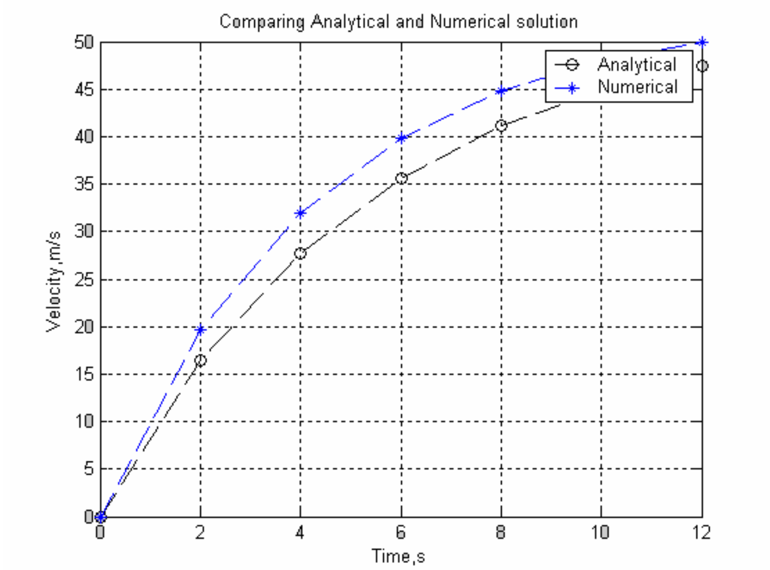
| t (วินาที) | v (เมตร/วินาที) |
|---|---|
| 0 | 0.00 |
| 2 | 19.60 |
| 4 | 32.00 |
| 6 | 39.85 |
| 8 | 44.82 |
| 10 | 47.97 |
| 12 | 49.96 |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\infty$ | 53.39 |

เมื่อนำค่าในตารางมาเขียนกราฟ จะได้กราฟดังรูปที่ 1.3 ซึ่งเมื่อ t มีค่ามาก ความเร็วจะมีค่าคงที่ที่ 53.39 เมตร/วินาที ตรงกับการคำนวณจากผลเฉลยจริง



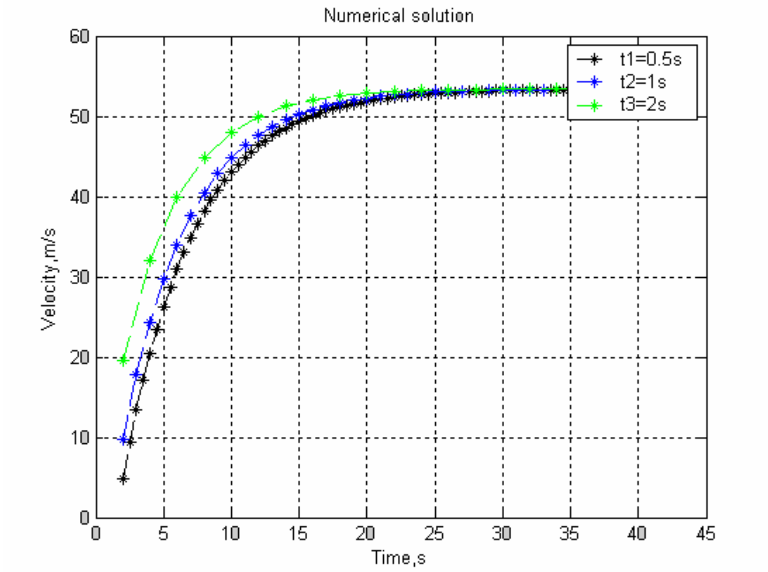

รูปที่ 1.3 ความเร็วของนักกระโดดร่มที่เวลาใด ๆ คำนวณจากการวิเคราะห์เชิงตัวเลข (numerical solution) กราฟระหว่างความเร็วของนักกระโดดร่ม

เมื่อเปรียบเทียบค่าที่ได้จากการคำนวณโดยตรงกับค่าที่ได้จากการคำนวณโดยวิธีวิเคราะห์เชิงตัวเลขจะพบว่า ความเร็วของวัตถุที่เวลา t ใด ๆ มีค่าใกล้เคียงกัน ดังแสดงในกราฟรูปที่ 1.4




รูปที่ 1.4 เปรียบเทียบความเร็วจากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขและค่าที่แท้จริง

ความเร็วของนักกระโดดร่มคำนวณโดยวิธีวิเคราะห์เชิงตัวเลข จะขึ้นกับช่วงเวลา $\Delta t$ เมื่อ $\Delta t$ มีค่ามาก ความเร็วที่คำนวณได้จะแตกต่างจากค่าที่แท้จริงมากกว่าเมื่อ $\Delta t$ มีค่าน้อย รูปที่ 1.5 แสดงค่าความเร็วเมื่อ $\Delta t$ = 0.5, 1 และ 2 วินาที จะเห็นได้ว่า เมื่อ t น้อยกว่า 20 วินาที ความเร็วจะมีค่าขึ้นกับ $\Delta t$ แต่เมื่อ t มากกว่า 20 วินาที ความเร็วจะมีค่าเท่ากันไม่ว่า $\Delta t$ จะมีค่าเท่าไร และมีค่าเท่ากับความเร็วเทอร์มินัล




รูปที่ 1.5 ความเร็วของนักกระโดดร่ม คำนวณโดยวิธีวิเคราะห์เชิงตัวเลข โดยใช้ $\Delta t$ = 0.5, $\Delta t$ = 1 และ $\Delta t$ = 2 วินาที

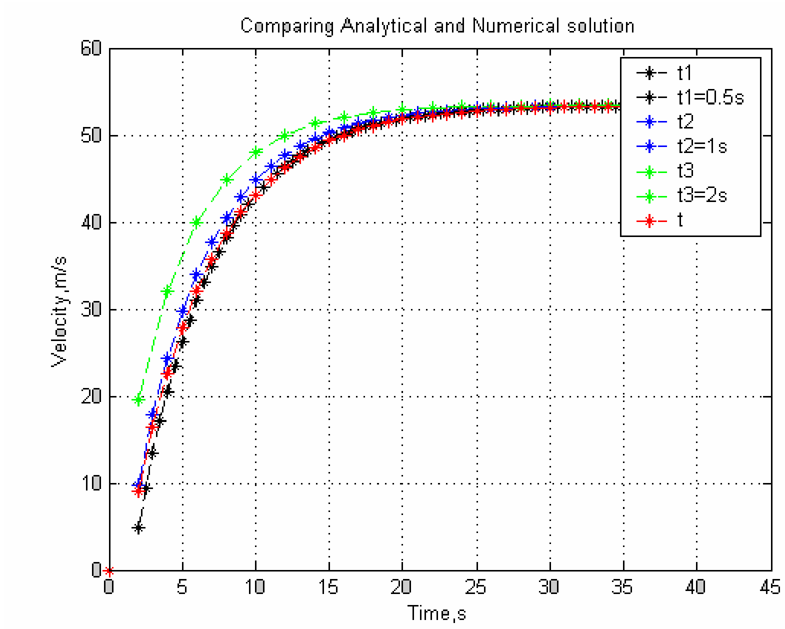
โปรแกรมภาษาฟอร์แทรนต่อไปนี้ คำนวณความเร็วของนักกระโดดร่ม โดยวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลข โดยใช้ช่วงเวลา $\Delta t$ = 0.5, $\Delta t$ = 1 และ $\Delta t$ = 2 วินาที

```
          PROGRAM VELANA
          REAL VR,VA,ER,T,DT
          VR= 0.
          DT= 4.
          ER= 0.
          DO 10 I=1,3
            T = 0.
            VA= 0.
            DT = DT/2.
            WRITE(*,*)'    DT =',DT,' SEC.'
            WRITE(6,100)
100         FORMAT(5X,'Times(sec.)',5X,'V real',
     +           12X,'VA',11X,'% ERROR')
              DO 20 N=1,6
                T = T+DT
                VR= 53.39*(1.-EXP(-0.18355*T))
                VA= VA+((9.81-12.5*VA/68.1)*DT)
                ER= (VA-VR)*100/VA
                WRITE(6,200) T,VR,VA,ER
200             FORMAT(F10.1,6F16.2)
20            CONTINUE
10        CONTINUE
          STOP
          END
```

เอาท์พุทจากโปรแกรม VELANA คือ

```
DT =  2. SEC.
Times(sec.)      V real          VA          % ERROR
  2.0            16.40          19.62         16.39
  4.0            27.77          32.04         13.32
  6.0            35.64          39.90         10.67
  8.0            41.09          44.87          8.41
 10.0            44.87          48.02          6.55
 12.0            47.49          50.01          5.04
DT =  1. SEC.
Times(sec.)      V real          VA          % ERROR
  1.0             8.95           9.81          8.74
  2.0            16.40          17.82          7.94
  3.0            22.61          24.36          7.19
  4.0            27.77          29.70          6.49
  5.0            32.07          34.06          5.85
  6.0            35.64          37.62          5.25
DT =  0.5 SEC.
Times(sec.)      V real          VA          % ERROR
  0.5             4.68           4.91          4.55
  1.0             8.95           9.36          4.35
  1.5            12.85          13.41          4.15
  2.0            16.40          17.08          3.96
  2.5            19.65          20.42          3.77
  3.0            22.61          23.45          3.59
```

เมื่อเปรียบเทียบกับความเร็วที่แท้จริง จะเห็นได้ว่าความเร็วจากวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลข เมื่อใช้ $\Delta t$ = 0.5 วินาที มีค่าใกล้กับความเร็วที่แท้จริงมากที่สุด




รูปที่ 1.6 เปรียบเทียบความเร็วของนักกระโดดร่ม คำนวณโดยวิธีวิเคราะห์เชิงตัวเลขโดยใช้ $\Delta t$ ต่าง ๆ กันกับค่าที่แท้จริง

## 1.3 ภาษาคอมพิวเตอร์

คอมพิวเตอร์จะทำงานตามคำสั่งที่ได้รับ การเขียนคำสั่งหรือเขียนโปรแกรมจะต้องเขียนด้วยภาษาคอมพิวเตอร์ ซึ่งมีกฎเกณฑ์และวิธีการเขียนที่แน่นอน ภาษาคอมพิวเตอร์มีวิวัฒนาการมาโดยลำดับ โดยแบ่งออกเป็น ภาษาเครื่อง (Machine language) ภาษาแอสเซมบลี (Assembly language) ซึ่งเป็นภาษาชั้นต่ำ (Low level language) และภาษาชั้นสูง (High level language) เช่น ภาษาเบสิก (Basic), พาสคาล (Pascal), โคบอล (Cobol), ฟอร์แทรน (Fortran) และภาษาซี (C) เป็นต้น สำหรับตัวอย่างในตำราเล่มนี้ จะเขียนด้วยภาษาฟอร์แทรน ซึ่งเป็นภาษาที่ถูกออกแบบมาสำหรับงานคำนวณทางด้าน

ปัจจุบันมีโปรแกรมประยุกต์ที่ใช้ในการคำนวณทางด้านวิทยาศาสตร์หลายโปรแกรมด้วยกัน ซึ่งนักศึกษาสามารถใช้งานได้ง่ายกว่าการเขียนดปรแกรมด้วยภาษาฟอร์แทรน เช่น MATLAB, Mathematica, Mathcad และ Maple ซึ่งเป็นโปรแกรมประยุกต์ มีประสิทธิภาพในการคำนวณสูง และยังมีความสามารถในการเขียนกราฟ ซึ่งทำให้นักศึกษาเข้าใจระบบที่ทำการศึกษาได้ดียิ่งขึ้น นอกจากนั้นนักศึกษาอาจใช้โปรแกรม Excel ช่วยในการเก็บและวิเคราะห์ข้อมูล หรือใช้โปรแกรม Sigma Plot เพื่อใช้ในการเขียนกราฟ ซึ่งทั้งสองโปรแกรมยังมีโมดุลย่อยช่วยในการวิเคราะห์ทางสถิติได้ด้วย อย่างไรก็ตามการศึกษาการแก้ปัญหาทางฟิสิกส์ โดยเริ่มต้นจากการเขียนโปรแกรมด้วยภาษาฟอร์แทรนจะทำให้นักศึกษาเข้าใจวิธีการศึกษาการแก้ปัญหาได้ดีและถูกต้องยิ่งขึ้น

สำหรับคอมไพเลอร์ที่ใช้กับโปรแกรมภาษาฟอร์แทรนตามตัวอย่างในหนังสือเล่นนี้ ชื่อ FORCE 2.0 เป็นทั้งคอมไพเลอร์และอีดิเตอร์บนวินโดว์ เป็นโปรแกรมฟรี นักศึกษาสามารถดาว์นโหลดได้จากอินเตอร์เน็ท www.forceproject.hpq.com.hr โดยไม่ต้องเสียค่าใช้จ่ายใด ๆ ทั้งสิ้น

# แบบฝึกหัดบทที่ 1

1. จงพิมพ์และ execute โปรแกรมภาษาฟอร์แทรน COUNT โดยส่งเอาท์พุทเป็น hard copy

```
*        A program to count the number of students who pass a quiz,
*        that is, score 60 or above. The total number of quiz scores
*        is less than 100. The end of the list is marked by entering
*        a negative value for the Latest score.
         PROGRAM COUNT
         NTOT = 0.
         NPASS= 0.
1        DO 3 I=1,100
           PRINT *,'Enter next quiz score'
2          READ *,SCORE
           NTOT = NTOT+1
           IF(SCORE.GT.100.) THEN
              PRINT *,'Input Error'
              PRINT *,'You entered a score greater than 100'
              PRINT *,'Re-enter the correct value'
              NTOT = NTOT-1
              GO TO 2
           ELSEIF(SCORE.LT.0.) THEN
              NPASS = NPASS+1
           ELSEIF(SCORE.LT.0.) THEN
              GO TO 99
           ENDIF
3        CONTINUE
99       PRINT *,'The number of students who passed was ',NPASS
         PRINT *,'out of ',NTOT
         STOP
         END
```

2. จงพิมพ์และ execute โปรแกรมภาษาฟอร์แทรน GASTBL โดยส่งเอาท์พุทเป็น hard copy

```
         PROGRAM GASTBL
*
         INTEGER TC
         REAL P,V,T,R,N
         N = 1.0
         R = 8.3144
*
*     Print overall headings outside of all Loops
*
         PRINT *,'Pressure of a container of ',N,' moles of ideal gas.'
*
*     Outer Loop is the volume of the container, from 0.1 to 0.5 m^3
*
         DO 2 V=0.1,0.5,0.1
*
*        For each value of the outer Loop parameter, print a heading
```

```
*        for this table.
*
         PRINT *,'Pressure as a function of Temperature for V = ',V
         PRINT *,'     P(n/m^2)          T(K)     '
         PRINT *,'    ----------      ----------'
*
*        The inner Loop steps through the range of Temperatures and
*        prints one Line for each value of T from 0 to 100 degrees C
*        in steps of 10 degrees.
*
              DO 1 TC = 0, 100, 10
                   T = TC+273.
                   P = N*R*T/V
                   PRINT *,P,T
1             CONTINUE
2        CONTINUE
         STOP
         END
```

3. สารกัมมันตรังสีสลายตัวตามสมการ

$$\frac{dC}{dt} = -kC$$

เมื่อ C = ความเข้มของสาร (Bq/L)

K = ค่าคงที่ ($day^{-1}$)

จงใช้วิธีการเชิงตัวเลขแก้สมการนี้ เมื่อ t = 0 ถึง 1 วัน และ $k = 0.1\ d^{-1}$ ให้ใช้ $\Delta t = 0.1$ และความเข้มข้นของสารที่ t = 0 เท่ากับ 10 Bq/L