

บทที่ 7

เลขเซอร์ฟิสิกส์ขั้นสูง

วัตถุประสงค์

ในบทนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อให้

1. นักศึกษาเข้าใจวิธีการประมาณแบบกึ่งดั้งเดิม ซึ่งเป็นวิธีการประมาณใช้ทั้งแบบดั้งเดิมและแบบกลศาสตร์ควอนตัม วิธีการประมาณคลื่นลักษณะหมุนด้วยวิธีทางคณิตศาสตร์
2. สามารถแก้ปัญหาทางฟิสิกส์ขั้นสูงโดยใช้วิธีการประมาณแบบกึ่งดั้งเดิมได้อย่างเหมาะสม ให้คำตอบได้ถูกต้องเข้าใจได้ง่าย และสามารถทำแบบฝึกหัดข้อ 4, 5, 6, 7 และ 8 ได้
3. สามารถเปรียบเทียบวิธีการประมาณแบบกึ่งดั้งเดิมกับวิธีการประมาณแบบดั้งเดิม หรือแบบกลศาสตร์ควอนตัม และสามารถเปรียบเทียบสมการสสารและสมการสนาม

7.1 บทนำ

ในบทที่สอง ปัญหาของอันตรกิริยาระหว่างการแผ่รังสีมีต่อวัตถุ ได้พิจารณาโดยการประมาณทฤษฎีของการรบกวนอันดับแรก (first-order perturbation theory) ผลลัพธ์ที่หาได้นำไปใช้ในบทที่ 5 ศึกษาพฤติกรรมทางพลศาสตร์และไฟฟ้าสถิตของเลเซอร์ สมการที่อธิบายพฤติกรรมนี้ (สมการอัตร) ได้มาจากความสมดุลขึ้นพื้นฐานระหว่างจำนวนของโฟตอนและจำนวนของอะตอมที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลง

ในบทนี้เราจะแสดงวิธีการหาอันตรกิริยาระหว่างการแผ่รังสีมีต่อวัตถุ ซึ่งเกิดขึ้นอย่างรุนแรงภายใต้การประมาณด้วยการเข้าสู่แบบกึ่งดั้งเดิม ในการหาด้วยวิธีแบบกึ่งดั้งเดิมระบบอะตอมคิดเป็นกลศาสตร์ควอนตัม ในขณะที่สนามแม่เหล็กไฟฟ้าเกี่ยวข้องกับแบบดั้งเดิม สมการที่หาได้ด้วยวิธีนี้ จะต้องใช้กับกรณีเฉพาะที่สำคัญบางอย่างเท่านั้น ตัวอย่างเช่น ต้องพบว่ามีเงื่อนไขเสมอซึ่งทำให้การประมาณสมการอัตรใช้ได้ อย่างไรก็ตามต้องสังเกตว่าแม้ทฤษฎีที่กำหนดในบทนี้มีข้อจำกัดของตัวเองนอกเหนือจากพื้นฐานในการหาแบบกึ่งดั้งเดิม เช่น มันไม่สามารถนับเป็นสิ่งรบกวนของเลเซอร์และไม่สามารถนับเป็นพฤติกรรมทางสถิติของแสงส่งออกอีกด้วย

7.2 การเข้าสู่แบบกึ่งดั้งเดิม

ในหัวข้อนี้เราจะตั้งสมการขั้นมูลฐานขึ้น เพื่อใช้อธิบายอันตรกิริยาของการแผ่รังสีมีต่อวัตถุด้วยวิธีแบบกึ่งดั้งเดิม สมการนี้ใช้พิจารณาสองระดับได้อย่างเพียงพอ ดังนั้นสมการจะประกอบด้วยสมการสองระดับ (สองระดับ) และสมการสำหรับสนามแม่เหล็กไฟฟ้า

7.2.1 สมการสองระดับ

เราจะใช้สมการ (2.29) เป็นสมการเริ่มต้นซึ่งอยู่ภายใต้การประมาณแบบกึ่งดั้งเดิม เราจะสมมติให้มีอันตรกิริยาไดโพลไฟฟ้า เพื่อความสะดวกเราให้ $H_{11} = H_{22} = 0$ ดังนั้นเมื่อ $a(t) = a_1(t)\exp(-iE_1t/\hbar)$ และ $b(t) = a_2(t)\exp(-iE_2t/\hbar)$ (เนื่องจาก $\psi = au_1 + bu_2$) สมการ (2.29) กลายเป็น

$$i\hbar \dot{a} = E_1 a + H_{12} b \quad \dots \dots \dots (7.1 \text{ ก})$$

$$i\hbar \dot{b} = H_{21} a + E_2 b \quad \dots \dots \dots (7.1 \text{ ข})$$

ต่อไปเรากำหนดเวกเตอร์ $\vec{R}(t)$ ซึ่งมีองค์ประกอบตามแกน 1, 2 และ 3 ah

$$R_1 = ab^* + a^*b \quad \dots \dots \dots \text{ก)}$$

$$R_2 = i(ab^* - a^*b) \dots\dots\dots (7.2\text{ก})$$

$$R_3 = aa^* - bb^* \dots\dots\dots (7.2\text{ค})$$

สมการ (7.2) เห็นได้ชัดว่า ถ้ากำหนดค่า a และ b เวกเตอร์ \vec{R} สามารถพิจารณาได้ แต่ถ้ากำหนดค่า \vec{R} ไม่สามารถพิจารณาค่า a และ b ได้ง่าย ในกรณีนี้สมการ (7.2) เป็นระบบของสามสมการกับสี่ตัวแปรไม่ทราบค่า คือ $\text{Re}(a)$, $\text{Im}(a)$, $\text{Re}(b)$ และ $\text{Im}(b)$ อย่างไรก็ตาม เมื่อให้ $a = |a|\exp(i\varphi_a)$ และ $b = |b|\exp(i\varphi_b)$ เราสามารถได้ตัวไม่ทราบค่าเป็น $|a|$, $|b|$, $\varphi_b - \varphi_a$ และ φ_a ดังนั้นเราสามารถเห็นได้จากสมการ (7.2) ว่า ถ้ากำหนดค่า \vec{R} มีเพียง φ_a และค่าสัมบูรณ์ของเฟสเลขเชิงซ้อน a และ b ไม่สามารถพิจารณาได้ อย่างไรก็ตามค่าสัมบูรณ์ไม่ได้สัมพันธ์กับปริมาณที่สำคัญทางฟิสิกส์ใด ๆ ดังนั้นเราสามารถกล่าวได้ว่า \vec{R} อธิบายสถานะของระบบอะตอมได้อย่างสมบูรณ์ในแง่ที่ว่า \vec{R} เป็นค่ากำหนดฟังก์ชันไอเกน $\psi = a u_1 + b u_2$ พิจารณาได้ต่างจากตัวร่วมเฟสอสสาร ขอบอกกล่าวในที่นี้ว่า แกน 1, 2 และ 3 ไม่ได้สัมพันธ์ใด ๆ กับทิศทางในปริภูมิ (space) แต่อย่างใด (เช่น ทิศทางของการเคลื่อนที่ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า) ในทำนองเดียวกันเรากำหนดเวกเตอร์ $\vec{\omega}(t)$ ซึ่งมีองค์ประกอบสัมพันธ์กับแกน 1, 2 และ 3 คือ

$$\omega_1 = (H_{12} + H_{21})/\hbar \dots\dots\dots (7.3\text{ก})$$

$$\omega_2 = i(H_{12} - H_{21})/\hbar \dots\dots\dots (7.3\text{ข})$$

$$\omega_3 = (E_1 - E_2)/\hbar = -\omega_0 \dots\dots\dots (7.3\text{ค})$$

โดยใช้ความจริงที่ว่า $H_{12} = H_{21}^*$ เราเห็นได้ว่า ω_1 , ω_2 และ ω_3 (เหมือนกับ R_1 , R_2 และ R_3) เป็นปริมาณจริง เวกเตอร์ $\vec{\omega}$ ก็คือฟังก์ชันไอเกนของสถานะ 1 และ 2 และของค่าสนามไฟฟ้า $\vec{E}(t)$ ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า สำหรับระบบอะตอม $\vec{\omega}$ ขึ้นกับ $\vec{E}(t)$ เท่านั้น [ดูสมการ (7.6) สำหรับคลื่นไปลาไรซ์เชิงเส้น] เมื่อรวมทั้งสองเวกเตอร์ $\vec{\omega}(t)$ และ $\vec{R}(t)$ เข้าด้วยกันจะอธิบายสนามไฟฟ้า $\vec{E}(t)$ ตกกระทบและสถานะของระบบได้ตามลำดับ คือใช้สมการ (7.2) และ (7.3) สามารถเขียนสมการ (7.1) ได้ใหม่ ให้อยู่ในรูปรวมเข้าไว้ด้วยกัน คือ

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{R} \dots\dots\dots (7.4)$$

สมการนี้มีลักษณะเหมือนกับสมการบลอช (Bloch equation) ซึ่งใช้อธิบายอันตรกิริยาของสนามแม่เหล็กอสซิลเลตในระบบอะตอมที่มีสองระดับพลังงาน สร้างขึ้นด้วยสนามแม่เหล็กภายนอก (อันตรกิริยาไดโพลแม่เหล็ก) สมการ (7.4) มีประโยชน์กับการตีความทางเรขาคณิต

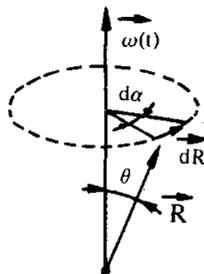
อย่างง่าย จากรูป 7.1 เราสามารถเห็นได้ว่าเวกเตอร์ $\vec{R}(t)$ หมุนควงรอบ ๆ เวกเตอร์ $\vec{\omega}(t)$ ด้วยความเร็วเชิงมุมของการควงเท่ากับ $\omega(t)$ จากสมการ (7.4) เราได้ $dR = \omega R \sin \theta dt$ และ จากรูป 7.1 $d\alpha = (dR/R \sin \theta) = \omega dt$ ถ้าทราบค่า $\omega(t)$ การเปลี่ยนแปลงตามเวลาของ เวกเตอร์ \vec{R} คือ สถานะของระบบสามารถเข้าใจได้เมื่อเห็นรูปทรงทางเรขาคณิต ใช้ผลคูณ สเกลาร์ทั้งสองด้านของสมการ (7.4) กับ \vec{R} และจำได้ว่า $\vec{R} \cdot \vec{\omega} \times \vec{R} = 0$ เราพบว่า $\vec{R} \cdot (d\vec{R}/dt) = \frac{1}{2}(dR^2/dt) = 0$ ดังนั้น $R =$ ค่าคงที่ เมื่อ R คือ ขนาดของเวกเตอร์ \vec{R} เราเห็นได้จาก สมการ (7.2) ทันทันทีว่าผลลัพธ์ข้างต้นหมายความว่า $|a|^2 + |b|^2 =$ ค่าคงที่ โดยกำหนดเงื่อนไข ตามปกติว่า $|a|^2 + |b|^2 = 1$ เราพบว่าสมการ (7.4) นำไปสู่สมการ $R = 1$ สำหรับค่าคงที่ R ของการเคลื่อนที่

ถ้าคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเป็นโพลาริซ์เชิงเส้น เรากำหนดเฟสของฟังก์ชันไอเกน $u_1(r)$ [หรือของ $u_2(r)$] ที่ว่า $\vec{\mu}_{12} = \int u_1^* \vec{e}_r u_2 dV$ เป็นค่าจริง เราพบว่า

$$H_{12} = H_{21} = -\mu E \quad \dots\dots\dots (7.5)$$

เมื่อ μ เป็นเงาของเวกเตอร์ $\vec{\mu} = \vec{\mu}_{12} = \vec{\mu}_{21}$ ในทิศทางของสนามไฟฟ้า \vec{E} ในกรณีนี้ สมการ (7.3) กลายเป็น

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\left(\frac{2\mu}{\hbar}\right)E(t) \\ \omega_2 &= 0 \\ \omega_3 &= -\omega_0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (7.6)$$



รูป 7.1 การเคลื่อนที่หมุนควงของเวกเตอร์สถานะ \vec{R} รอบ ๆ เวกเตอร์ $\vec{\omega}$

จากสมการ (7.6) สามารถมองเห็นได้ง่ายขึ้นว่า ω จะทราบค่าได้เมื่อเราทราบค่าสนาม $\vec{E}(t)$ และปริมาณคุณลักษณะ μ และ ω_0 ของสองระดับแล้ว ขณะนี้สมการ (7.4) ใช้คำนวณ $\dot{R}_i(t)$ เป็นไปได้มากขึ้น ค่าของ $\dot{R}_i(t)$ ใช้ตามความจริงที่ว่า องค์ประกอบของมันสัมพันธ์กับแกน 1, 2 และ 3 ที่ให้ปริมาณของความสำคัญทางฟิสิกส์ทันทีทันใด ยกตัวอย่างเช่น จากสมการ (7.2 ค) สามารถเห็นได้ว่า R_3 ให้ความแตกต่างระหว่างโอกาสของการมีอยู่ของสองระดับ ความสำคัญของ R_1 หาได้โดยคำนวณค่าที่คิดว่าจะเป็นของโมเมนต์ไดโพลไฟฟ้า (μ) ของอะตอม

$$\langle \mu \rangle = \int e \vec{r} |\psi|^2 dV = \vec{\mu} R_1 \quad \dots\dots\dots (7.7)$$

อย่างไรก็ตาม สำหรับคลื่นโปลาไรซ์เชิงเส้น องค์ประกอบ R_2 ไม่ได้สัมพันธ์กับปริมาณที่สำคัญทางฟิสิกส์ใด ๆ ในกรณีของการโปลาไรซ์วงกลมทั้ง R_1 และ R_2 ต่างสัมพันธ์กับปริมาณที่สำคัญทางฟิสิกส์ อย่างไรก็ตามเพื่อความสะดวกกรณีนี้ เราจะไม่ทำในที่นี้

สำหรับการโปลาไรซ์เชิงเส้น เมื่อเราเขียนสมการ (7.4) ออกเป็นแต่ละองค์ประกอบและใช้สมการ (7.6) เราได้สามสมการต่อไปนี้

$$\dot{R}_1 = \omega_0 R_2 \quad \dots\dots\dots (7.8 ก)$$

$$\dot{R}_2 = -\omega_0 R_1 + \frac{2\mu}{\hbar} R_3 E \quad \dots\dots\dots (7.8 ข)$$

$$\dot{R}_3 = -\frac{2\mu}{\hbar} E R_2 \quad \dots\dots\dots (7.8 ค)$$

เมื่อ R_2 ไม่มีความสำคัญทางฟิสิกส์ จึงกำจัดมันทิ้งจากสมการ (7.8) ได้ง่าย

$$\dot{R}_3 = -\left(\frac{2\mu}{\hbar\omega_0}\right) E \dot{R}_1 \quad \dots\dots\dots (7.9 ก)$$

$$\ddot{R}_1 + \omega_0^2 R_1 = \frac{2\mu\omega_0}{\hbar} E R_3 \quad \dots\dots\dots (7.9 ข)$$

สมการ (7.9) สามารถหาคำตอบได้เมื่อ $E = E(t)$ และทราบเงื่อนไขเริ่มต้น ตัวอย่างเราพิจารณากรณีเมื่อ $E = E_0 \cos \omega t$ (ด้วย $E_0 =$ ค่าคงที่) และ $R_3 = |a|^2 - |b|^2 = 1$ สำหรับ $t = 0$ (อะตอมตอนแรกอยู่ที่ระดับต่ำ) เพื่อเข้าใจปรากฏการณ์ของการดูดกลืนเกิดขึ้นได้อย่างไร เราจะใช้การวิเคราะห์อันดับแรก (ดูบทที่ 2) ดังนั้นเราให้ $R_3(t) \approx 1$ ทางด้านขวาของสมการ (7.9 ข) ทำให้กลับไปเป็นสมการของตัวออสซิลเลต [ไม่มีการแดมป์ (damp)] ถูกผลักดันด้วยแรงของพจน์ $E(t)$ ออสซิลเลตที่ความถี่ ω ปริมาณ $R_1(t)$ ที่ได้ด้วยวิธีนี้กระทบกับสนาม E [คือพจน์ $E \dot{R}_1$ ในสมการ (7.9 ก)] และสร้างการเปลี่ยนแปลง R_3 ขึ้นจากการดูดกลืน จากสมการ (7.7)

ได้ว่า องค์ประกอบของโมเมนต์ไดโพลไฟฟ้าของอะตอมในทิศทางของสนาม E มีค่าเป็น $\langle \mu \rangle = \mu R_1$ ดังนั้นเราสามารถกล่าวได้ว่า ปรากฏการณ์ของการดูดกลืนเกิดเนื่องจากรบกวนระหว่างสนามและไดโพลไฟฟ้าในความหมายที่ว่า สนามทำให้เกิดไดโพลแล้วทำอันตรกิริยากับสนามเดียวกัน จึงเกิดการดูดกลืนขึ้น

จากที่กล่าวข้างต้นจึงเป็นที่แน่ชัดว่า เมื่อสมการสำหรับ R_1 สอดคล้องกับตัวออสซิลเลตที่ไม่มีการสูญเสีย การดูดกลืนจะเกิดขึ้นต่อเมื่อ $\omega = \omega_0$ เท่านั้น ในกรณีนี้สัมประสิทธิ์การดูดกลืนจะแปรโดยตรงกับฟังก์ชัน δ ของไดเรค (Dirac δ function) [ดูสมการ (2.47)] เพื่อหลีกเลี่ยงฟังก์ชัน δ นี้ เราเติมสมการ (7.9 ข) ด้วยพจน์ที่แปรโดยตรงกับ \dot{R}_1 ดังนั้นเราเขียนใหม่ได้ว่า

$$\ddot{R}_1 + \frac{2}{T_2} \dot{R}_1 + \omega_0^2 R_1 = \left(\frac{2\mu\omega_0}{\hbar} \right) ER_3 \quad \dots\dots\dots (7.10 ก)$$

ค่าคงที่ที่คูณกับ \dot{R}_1 ก็คือ $2/T_2$ ทำนองเดียวกันเราสามารถบวกสมการ (7.9 ก) ด้วยพจน์การสูญเสียซึ่งเป็นพจน์ทำให้ลดลงในขณะใด ๆ (แผ่รังสี + ไม่แผ่รังสี) จากระดับ 2 ไป 1 ดังนั้นเราเขียนสมการ (7.9 ก) ใหม่เป็น

$$\dot{R}_3 + \frac{R_3 - 1}{T_1} = - \left(\frac{2\mu}{\hbar\omega} \right) ER_1 \quad \dots\dots\dots (7.10 ข)$$

T_1 คือ เวลาคงที่การสลดระดับสำหรับ R_3 ไปยังค่าสมดุลของมัน ($R_3 = 1$)^{*} สมการทั้งสองคือ (7.10 ก) และ (7.10 ข) แสดงผลของ $E = E(t)$ บนระบบสองระดับสำหรับกรณีโพลาริซเซชัน

มันสามารถแสดงว่าการบวกด้วยพจน์การคลายตัวในสมการ (7.10) เป็นสิ่งจำเป็นเพื่อให้สมดุลกับการบวกด้วยพจน์การคลายตัวในสมการ (7.8) ดังนี้

$$\dot{R}_1 = \omega_0 R_2 - \frac{R_1}{T_2} \quad \dots\dots\dots (7.11 ก)$$

$$R_2 = -\omega_0 R_1 + \frac{2\mu}{\hbar} R_3 E - \frac{R_2}{T_2} \quad \dots\dots\dots (7.11 ข)$$

$$R_3 = - \frac{2\mu}{\hbar} ER_2 - \frac{R_3 - 1}{T_1} \quad \dots\dots\dots (7.11 ค)$$

^{*} ในสภาวะสมดุลเรามี $|b|^2/|a|^2 = \exp[-(\hbar\omega_0/KT)]$ อย่างไรก็ตามที่ความถี่แสง $\hbar\omega_0 \gg KT$ ดังนั้น $|b|^2 = 0$ และ $|a|^2 = 1$

ที่กล่าวมาทั้งหมดตั้งแต่ต้นบทนี้ ใช้ได้ดีสำหรับกรณีอะตอมเดี่ยว สำหรับกรณีอะตอมหลายอะตอมรวมกัน มันจำเป็นต้องแยกความแตกต่างระหว่างการแผ่อกเอกพันธ์กับการแผ่อกไม่เอกพันธ์ สำหรับกรณีการแผ่อกเอกพันธ์ เมื่อ N_i เป็นจำนวนอะตอมต่อหน่วยปริมาตร เรามี

$$N = N_i R_3 \quad \dots\dots\dots (7.12 ก)$$

$$P = N_i(\mu) = N_i \mu R_1 \quad \dots\dots\dots (7.12 ข)$$

เมื่อ N คือ จำนวนประชากรที่ต่างกันระหว่างระดับล่างและระดับสูง และ P เป็นองค์ประกอบของเวกเตอร์โปลาไรเซชันในทิศทางของ \vec{E} จะสังเกตได้ว่าปริมาณ N ที่กำหนดในที่นี้มีขนาดเท่ากัน แต่ทิศทางตรงกันข้ามกับปริมาณที่กำหนดในบทที่ 5 สำหรับการแผ่อกไม่เอกพันธ์ คือ เมื่อความถี่ ω_0 สำหรับการเปลี่ยนแปลงแผ่อกตลอดช่วงความยาวเดียวกัน เวกเตอร์ $\vec{\omega}$ จะต่างกันสำหรับอะตอมที่ต่างกัน ดังนั้นเวกเตอร์ \vec{R} จะต่างกันด้วยสำหรับอะตอมที่ต่างกัน และเป็นฟังก์ชันของ ω_0 และ t สัญลักษณ์ \vec{R}' จะใช้แทน \vec{R} ด้วย $\vec{R}' = \vec{R}(\omega_0, t)$ ในกรณีนี้

$$N = N_i \int_0^\infty g^* R'_3 d\omega_0 \quad \dots\dots\dots (7.13 ก)$$

$$P = N_i \mu \int_0^\infty g^* R'_1 d\omega_0 \quad \dots\dots\dots (7.13 ข)$$

ในที่นี้ ฟังก์ชัน $g^* = g^*(\omega_0 - \omega_0)$ ทำให้ $N_i g^* d\omega_0$ เป็นจำนวนของอะตอมที่มีความถี่อยู่ระหว่าง ω_0 และ $\omega_0 + d\omega_0$ โดยทั่วไปฟังก์ชัน g^* (ดูบทที่ 2) กำหนดด้วยฟังก์ชันเกาส์เซียน ซึ่ง

$$g^* \propto \exp[-(\omega_0 - \omega_0)^2 \ln 2 / (\Delta\omega_0^*/2)^2]$$

เมื่อ $\Delta\omega_0^*$ คือ ความกว้างเต็มที่มีความเข้มครึ่งหนึ่งของค่ามากที่สุด สรุปได้ว่าไม่ว่าสสารจะแผ่อกเอกพันธ์หรือไม่เอกพันธ์ก็ตาม มันสามารถอธิบายได้ด้วยตัวแปรสองตัว คือ N และ P เสมอ จากสมการ (7,10), (7.12) และ (7.13) สมการลัพท์สำหรับ N และ P เป็น

(1) สำหรับเส้นแผ่อกเอกพันธ์ :

$$\dot{N} + \frac{N - N_i}{T_1} = - \left(\frac{2}{\hbar \omega_0} \right) E \dot{P} \quad \dots\dots\dots (7.14 น)$$

$$\dot{P} + \frac{2}{T_2} \dot{P} + \omega_0^2 P = \left(\frac{2\omega_0 \mu^2}{\hbar} \right) E N \quad \dots\dots\dots (7.1491)$$

(2) สำหรับเส้นแฉอกไม่เอกพันธ์ :

$$\dot{R}'_1 + \frac{2}{T_2} R'_1 + \omega_0'^2 R'_1 = \left(\frac{2\mu\omega_0'}{\hbar} \right) E R'_3 \quad \dots\dots\dots (7.15 ก)$$

$$\dot{R}'_3 + \frac{R'_3 - 1}{T_1} = - \left(\frac{2\mu}{\hbar\omega_0'} \right) E R'_1 \quad \dots\dots\dots (7.15 ข)$$

$$N = N_t \int_0^\infty g^* R'_3 d\omega_0' \quad \dots\dots\dots (7.15 ค)$$

$$P = N_t \mu \int_0^\infty g^* R'_1 d\omega_0' \quad \dots\dots\dots (7.15 ง)$$

เราจะพิจารณากรณีของสนามไฟฟ้าที่มีทั้งเฟสและอัมพลิจูดเป็นค่าคงที่ในเวลา คือ

$$E = \frac{1}{2} (E \exp i\omega t + c.c) \quad \dots\dots\dots (7.16)$$

เมื่อ E_0 เป็นค่าจริงและคงที่ ในกรณีนี้เราจะหาคำตอบที่เป็นคำตอบอย่างแท้จริงไม่ใช่การประมาณอันดับแรก เพื่อความสะดวกเราจะทำเฉพาะกรณีการแฉอกเอกพันธ์เท่านั้น จากสมการ (7.14) เมื่อละทิ้งพจน์ที่มีความถี่ 2ω เราสามารถให้

$$N = N_0 \quad \dots\dots\dots (7.17 ก)$$

$$P = \frac{1}{2} (P_0 \exp i\omega t + c.c.) \quad \dots\dots\dots (7.17 ข)$$

เมื่อ N_0 และ P_0 เป็นค่าคงที่ แทนสมการ (7.16) และ (7.17) ลงในสมการ (7.14 ข) และใช้ $(-\omega^2 + \omega_0^2) \approx -2\omega_0(\omega - \omega_0) = 2\omega_0\Delta\omega$ เราได้ว่า

$$P_0 = - \frac{\mu^2}{\hbar} \left(\frac{iT_2}{+i\Delta\omega T_2} \right) N_0 E_0 \quad \dots\dots\dots (7.18)$$

ให้สังเกตว่าสมการ (7.18) สามารถเขียนอยู่ในรูปแบบที่ง่ายกว่านี้ คือ

$$P_0 = \chi E_0 \quad \dots\dots\dots (7.19)$$

เมื่อ $\chi = \chi' + i\chi''$ ซึ่งเป็นสภาพรับไว้ได้เชิงซ้อน (complex susceptibility) แทนค่าสมการ (7.16), (7.17 ข) และ (7.18) ลงในสมการ (7.14 ก) และละทิ้งพจน์ออสซิลเลตที่ 2ω เราได้

$$\frac{N_0 - N_t}{T_1} = \frac{\chi'' E_0^2}{\hbar} = - \frac{\mu^2 E_0^2}{\hbar^2} \left(\frac{T_2}{1 + (\Delta\omega T_2)^2} \right) N_0 \quad \dots\dots\dots (7.20)$$

เปรียบเทียบสมการ (7.20) กับสมการ (2.122) (ให้สังเกตว่า $N_0 \equiv \Delta N$ และ $T_1 \equiv \tau$)
เราพบว่า

$$W = -\frac{\chi'' E_0^2}{2N_0} = \frac{\mu^2 E_0^2}{2\hbar^2} \left(\frac{T_2}{1 + (\Delta\omega T_2)^2} \right) \quad \dots\dots\dots (7.21)$$

สมการนี้สามารถเปรียบเทียบได้กับสมการ (2.53) ซึ่งได้รวมสมการ (2.46) และ (2.52) ด้วย จะเห็นได้ว่าค่าของ W ที่หาได้ในบอทนี้ ต่างจากค่าที่หาได้ในบอทที่ 2 ด้วย $\frac{1}{3}$ ค่านี้ได้จากความจริงที่ว่าในบอทที่ 2 เราใช้ค่าเฉลี่ยของเงา μ บน \bar{E} นั้นเอง [ดูสมการ (2.45)] ให้สังเกตว่าการเพิ่มพจน์ $2R_1/T_2$ ในสมการ (7.10) ให้ค่า W ซึ่งขึ้นกับความถี่สอเรนซ์กับความกว้างเส้นที่ครึ่งความสูง

$$\Delta\omega_0 = 2/T_2 \quad \dots\dots\dots (7.21 \text{ n})$$

ผลของพจน์การทำให้ลดลงนี้ ทำให้ได้เท่ากับสมการ (2.49)

จากสมการ (7.21) สามารถเห็นได้ว่าการดูดกลืนเกิดขึ้นโดยผ่านพจน์ P (คือ $\chi'' E_0$) ซึ่งออสซิลเลตด้วยเฟสต่างกัน 90 องศากับสนาม และยังแสดงว่าการแลกเปลี่ยนกำลังต่อหน่วยปริมาตรระหว่างอะตอมและสนามแม่เหล็กไฟฟ้ามีค่าเป็น [ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีของพอยนติง (Poynting's theorem)]

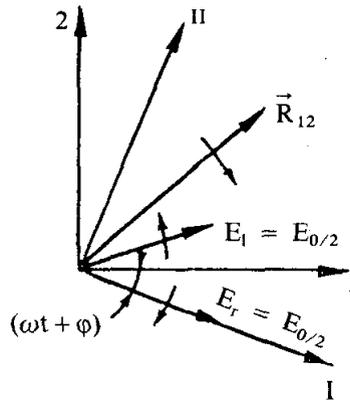
$$\frac{dP_s}{dV} = E\dot{P} \quad \dots\dots\dots (7.22)$$

เป็นส่วนของ P ที่มีเฟสตรงกับสนาม ($\chi'' E_0$) ให้ค่าดัชนีหักเหของสสารเพิ่มขึ้น ก่อนที่จะสรุปหัวข้อนี้ ยังมีกรณีที่ย่ง่ายสำหรับการอธิบายการประมาณ ซึ่งตามปกติใช้สำหรับสมการพฤติกรรมของสสารที่เรียกว่า “การประมาณคลื่นลักษณะหมุน” (“rotating-wave approximation”) ดังนั้นเรามาดูที่สมการบลดขคือ สมการ (7.4) บ้าง จากสมการ (7.6) เราเห็นได้ว่า เมื่อไม่มีสนามไฟฟ้า \bar{E} เวกเตอร์ \bar{R} คงรอบ ๆ แกน 3 ด้วยความเร็วเท่ากับ ω_0 ทิศทางของการหมุนคงอยู่ในแนวเงา \bar{R}_{12} ของ \bar{R} ในระนาบ 1-2 หมุนในทิศทางดังแสดงในรูป 7.2 ต่อไปเรามาพิจารณาสนามภายในที่เข้าไปเป็นแบบ

$$E = E_0 \cos[\omega t + \varphi(t)] \quad \dots\dots\dots (7.23)$$

โดยสมมติว่าทั้งอัมพลิจูด $E_0(t)$ และเฟส $\varphi(t)$ ต่างก็เป็นฟังก์ชันของเวลา สนามนี้เคลื่อนที่ไปตามแกน 1 ในรูป 7.2 เราสามารถแยกการหมุนออกเป็นสองคลื่น (E_r หมุนไปทาง

ขวามือ และ E_1 หมุนไปทางซ้ายมือ) หมุนด้วยความเร็ว $\omega + \phi$ การประมาณคลื่นลักษณะหมุน เราต้องละทิ้งผลของ E_1 ความจริงพจน์นี้ไม่มีอยู่ในการแลกเปลี่ยนพลังงานใด ๆ กับระบบอะตอม เมื่อพจน์ $\vec{E}_1 \cdot \vec{R}$ ออสซิลเลตด้วยความถี่ 2ω (\vec{E}_1 และ \vec{R} หมุนในทิศทางตรงกันข้าม) ที่จริงการประมาณคลื่นลักษณะหมุน เราได้ทำมาแล้วในการหาสมการ (7.18) และ (7.20) ซึ่งสมการเหล่านี้หาโดยละทิ้งพจน์ออสซิลเลตด้วยความถี่ 2ω



รูป 7.2 การย้ายระบบแกนพิกัด 1, 2 ไปเป็นระบบแกนพิกัด I, II หมุนด้วยความเร็วเชิงมุม $\omega + \phi$

ในการประมาณคลื่นลักษณะหมุนเพื่อความสะดวก เราใช้แกนชุดใหม่คือ I, II และ III เมื่อ $III = 3$ และ I และ II หมุนด้วยความถี่ $\omega + \phi$ ของสนาม ในทิศทางเดียวกับ \vec{E}_r เราสมมติว่าแกน I อยู่ในทิศทางทับกับ \vec{E}_r ในกรณีนี้ เราเห็นจากรูป 7.2 ว่าองค์ประกอบของ \vec{R} เมื่อเทียบกับแกนชุด I, II และ III กำหนดด้วย

$$R_I = R_I \cos(\omega t + \phi) + R_{II} \sin(\omega t + \phi) \quad \dots\dots\dots (7.24 ก)$$

$$R_2 = -R_I \sin(\omega t + \phi) + R_{II} \cos(\omega t + \phi) \quad \dots\dots\dots (7.24 ข)$$

$$R_3 = R_{III} \quad \dots\dots\dots (7.24 ค)$$

ความสำคัญทางฟิสิกส์ขององค์ประกอบ \vec{R} ตามแกน I, II และ III สามารถเห็นได้ทันทีจากสมการ (7.24) สมการ (7.24 ค) ได้ผลลัพธ์ว่า R_{III} เหมือนกับ R_3 ใช้แทนความแตกต่างระหว่างโอกาสของการมีบรรจุกอยู่สำหรับระดับบนและระดับล่าง สมการ (7.24 ก) แสดงว่า μR_I ใช้แทนองค์ประกอบของสนามไดโพล μR_I มีเฟสตรงกับสนาม ในขณะที่ μR_{II} เป็นองค์ประกอบมีเฟสต่างจากสนาม 90 องศา ปัญหาในขณะนี้ก็คือ เราต้องการหาสมการที่อธิบายการเคลื่อนที่ของ R_I, R_{II} และ R_{III} กล่าวคือ การเคลื่อนที่ของ \vec{R} ในขณะที่ยังสั่นเคลื่อนที่ตามการหมุนของแกน I, II และ III แทนสมการ (7.24) ลงในสมการ (7.11) และละทิ้งพจน์ออส-

ซิวเลตที่ความถี่ $2(\omega + \phi)$ (การประมาณคลื่นลักษณะหมุน) เราพบว่า

$$\dot{R}_I = -(\Delta\omega + \phi)R_{II} - \frac{R_I}{T_2} \quad \dots\dots\dots (7.25 ก)$$

$$R_{II} = (\Delta\omega + \phi)R_I + \frac{\mu E_0}{\hbar} R_{III} - \frac{R_{II}}{T_2} \quad \dots\dots\dots (7.25 ข)$$

$$\dot{R}_{III} = -\frac{\mu E_0}{\hbar} R_{II} - \frac{R_{III} - 1}{T_1} \quad \dots\dots\dots (7.25 ค)$$

ในกรณีที่ไม่มีพจน์ทำให้ลดลง ($T_2 = T_1 \rightarrow \infty$) สมการ (7.25) สามารถหาได้ด้วยวิธีง่าย ๆ โดยเริ่มต้นจากสมการ (7.4) การเปลี่ยนแปลงตามเวลา $(dR/dt)^*$ ของเวกเตอร์ \vec{R} ขณะที่ยังมองเห็นจากจุดของแกนหมุน กำหนดด้วย

$$\left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)^* = \frac{d\vec{R}}{dt} - \vec{\omega}' \times \vec{R} \quad \dots\dots\dots (7.26)$$

เมื่อ $\vec{\omega}'$ คือ เวกเตอร์อธิบายการหมุนของแกนชุดหนึ่งเทียบกับแกนอื่น ดังนั้นเราให้มันไปตามแกน 3 และมีค่า $\omega' = -(\omega + \phi)$ จากสมการ (7.4) และ (7.26) เราพบว่าการเคลื่อนที่เทียบกับจุดของแกนหมุน กำหนดด้วยสมการ

$$\left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)^* = \vec{\Omega} \times \vec{R} \quad \dots\dots\dots (7.27)$$

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega} - \vec{\omega}' \quad \dots\dots\dots (7.28)$$

ดังนั้นการเคลื่อนที่ยังคงเป็นการควงแต่ควงรอบ ๆ เวกเตอร์ใหม่ $\vec{\Omega}$ องค์กรประกอบของมันเทียบกับจุดของการหมุน คือ

$$\Omega_I = \omega_I = -\frac{\mu E_0}{\hbar} \quad \dots\dots\dots (7.29 ก)$$

$$\Omega_{II} = 0 \quad \dots\dots\dots (7.29 ข)$$

$$\Omega_{III} = (\omega + \phi - \omega_0) = \Delta\omega + \phi \quad \dots\dots\dots (7.29 ค)$$

ให้สังเกตว่าสมการ (7.29) แสดงในแกนชุดใหม่นี้ สนาม $E_r = E_0/2$ (ละทิ้งสนาม E_r) ตามแกน I แก่สมการ (7.27) อีกครั้ง ให้แยกเป็นองค์กรประกอบตามแกน I, II และ III และใช้สมการ (7.29) เราหาสมการ (7.25) ได้ (เมื่อ $T_2 = T_1 \rightarrow \infty$)

ข้อดีของสมการ (7.27) และ (7.25) เหนือกว่าสมการ (7.4) คือ $\vec{\Omega}$ เป็นค่าคงที่ (ถ้า E_0 และ ϕ เป็นค่าคงที่) หรือมีการแปรค่าอย่างช้า ๆ ตามเวลา [ถ้า $E_0(t)$ และ $\phi(t)$ แปรค่าอย่าง

ช้า ๆ ตามเวลา คือ $\dot{E}_0 \ll \omega E_0$ และ $\dot{\phi} \ll \omega$ อย่างไรก็ตามในสมการ (7.4) เราสังเกตได้ว่า ω แปรค่าตามเวลาอย่างรวดเร็วเมื่อ $\omega_1 = -(2\mu\hbar)E_0\cos(\omega t + \phi)$ ออสซิลเลตที่ความถี่ $\omega + \dot{\phi}$ ค่าหนึ่ง ดังนั้นสมการ (7.25) จึงทำให้มองเห็นการเคลื่อนที่ของเวกเตอร์ \vec{R} ง่ายขึ้น สำหรับคลื่นโปลาไรซ์เชิงกลมเราสามารถหาสมการที่มีลักษณะคล้ายกับสมการ (7.25) ได้อีกครั้ง (ครั้งนี้หาได้โดยไม่ต้องใช้การประมาณ) อย่างไรก็ตามความสำคัญทางฟิสิกส์ของ R_I และ R_{II} ในขณะนี้แตกต่างกันมากมาย ตัวอย่างเช่น ถ้าสนามไฟฟ้ามีการหมุนไปทางขวามือ ไดโพล μ จะหมุนไปทางเดียวกัน นั่นคือ μR_I และ μR_{II} ให้องค์ประกอบของ μ หมุนด้วยเฟสตรงกัน และต่างกัน 90 องศา กับสนามตามลำดับ

สรุป สมการสำหรับการประมาณคลื่นลักษณะหมุนเป็นดังต่อไปนี้

(1) กรณีการแผ่อกเอกพันธ์ จากสมการ (7.12), (7.24) และ (7.25) เราได้

$$P = C \cos(\omega t - \phi) + S \sin(\omega t + \phi) \quad \dots\dots\dots (7.30 \text{ ก})$$

$$\dot{C} = -(\Delta\omega + \dot{\phi})S - \frac{C}{T_2} \quad \dots\dots\dots (7.30 \text{ ข})$$

$$\dot{S} = (\Delta\omega + \dot{\phi})C + \frac{\mu^2 E_0}{\hbar} N - \frac{S}{T_2} \quad \dots\dots\dots (7.30 \text{ ค})$$

$$\dot{N} = -\frac{E_0 S}{\hbar} - \frac{N - N_1}{T_1} \quad \dots\dots\dots (7.30 \text{ ง})$$

เมื่อ $C = N_I \mu R_I \quad \dots\dots\dots (7.31 \text{ ก})$

$S = N_{II} \mu R_{II} \quad \dots\dots\dots (7.31 \text{ ข})$

(2) กรณีการแผ่อกไม่เอกพันธ์ จากสมการ (7.13), (7.24) และ (7.25) เราได้

$$N = \int g^* N' d\omega'_0 \quad \dots\dots\dots (7.32 \text{ ก})$$

$$P = C \cos(\omega t + \phi) + S \sin(\omega t + \phi) \quad \dots\dots\dots (7.32 \text{ ข})$$

$$C = \int g^* C d\omega'_0 \quad \dots\dots\dots (7.32 \text{ ค})$$

$$S = \int g^* S d\omega'_0 \quad \dots\dots\dots (7.32 \text{ ง})$$

$$\dot{C} = -(\Delta\omega + \dot{\phi})S' - \frac{C'}{T_2} \quad \dots\dots\dots (7.32 \text{ จ})$$

$$\dot{S} = (\Delta\omega + \dot{\phi})C' + \frac{\mu^2 E_0}{\hbar} N' - \frac{S'}{T_2} \quad \dots\dots\dots (7.32 \text{ ฉ})$$

$$\dot{N} = -\frac{E_0 S'}{\hbar} - \frac{N' - N_1}{T_1} \quad \dots\dots\dots (7.32 \text{ ช})$$

เมื่อ $\Delta\omega' = \omega - \omega'_0$, $C = N_1\mu R'_I$ และ $S' = N_2\mu R'_{II}$

7.2.2 สมการสนาม (Field Equations)

ในหัวข้อที่แล้วเราได้คำนวณการตอบสนองของสสารมีต่อสนามไฟฟ้า $E(t)$ ในหัวข้อนี้ เราจะมองปัญหาในทางกลับกันคือ คำนวณผลของสสารมีต่อสนามได้อย่างไร ผลอันนี้มีขึ้นตั้งแต่นั้นในการโปลาไรซ์ P ซึ่งค่าของมันเราหาได้แล้วในหัวข้อที่แล้ว

สนามภายในสสารกำหนดได้ด้วยสมการของแมกซ์เวลล์ คือ

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (7.33 ก)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (7.33 ข)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad \dots\dots\dots (7.33 ค)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \dots\dots\dots (7.33 ง)$$

เมื่อ ρ คือ ความหนาแน่นประจุอิสระ สำหรับตัวกลางที่น่าสนใจเราสามารถสมมติว่า

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} \approx \mu_0 \vec{H} \quad \dots\dots\dots (7.34)$$

การสูญเสียภายในสสาร (เช่น การสูญเสียจากการเสียดสี) สามารถเกิดจากสภาพการนำไฟฟ้า σ_s กำหนดด้วย

$$\vec{J} = \sigma_s \vec{E} \quad \dots\dots\dots (7.35)$$

สุดท้ายเราเขียน

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}' + \vec{P} = \epsilon \vec{E} + \vec{P} \quad \dots\dots\dots (7.36)$$

เมื่อ \vec{P} คือโปลาไรเซชันของสสารซึ่งเป็นผลจากการเปลี่ยนแปลงระหว่างสองระดับพลังงานที่เรากำลังพิจารณา พจน์ \vec{P}' คือโปลาไรเซชันที่เกิดจากประจุนอื่น ๆ ทั้งหมดที่เหมือนกัน เช่น เกิดจากระดับอื่นของอะตอมหรือเกิดจากอะตอมชนิดอื่นที่มีอยู่ในตัวกลาง ดังนั้นสมการ (7.36) แสดงโปลาไรเซชัน \vec{P} ของระบบสองระดับคู่ควบกับสนาม นำตัวดำเนินการ $\vec{\nabla} \times$ กระทำทางเวกเตอร์บนสมการ (7.33ก) ทั้งสองด้านแล้วใช้สมการ (7.33ข), (7.34) และ (7.35) เราได้

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \left(\sigma_s \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\epsilon \partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \right) \quad \dots\dots\dots (7.37)$$

โดยใช้ความสัมพันธ์ทางเวกเตอร์

$$\nabla_x \nabla_x \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \quad \dots\dots\dots (7.38)$$

และข้อสมมติว่า $\nabla \cdot \vec{E} \approx 0$ เราพบจากสมการ (7.37) ได้ว่า

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\sigma_s}{\epsilon c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \quad \dots\dots\dots (7.39)$$

เมื่อ $c = (\epsilon\mu_0)^{1/2}$ เป็นความเร็วเฟสในสสาร สำหรับคลื่นโพลาริซเซชันเชิงเส้น ถ้าเราเขียน E สำหรับพิกัดของสนาม เราได้

$$\nabla^2 E - \frac{\sigma_s}{\epsilon c^2} \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad \dots\dots\dots (7.40)$$

สมการ (7.40) อธิบายผลของการโพลาริซเซชันบนคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าของสสาร สมการ (7.40) และ (7.14) (สำหรับเส้นโค้งเอกพันธ์) หรือสมการ (7.40) และ (7.15) (สำหรับเส้นโค้งไม่เอกพันธ์) ให้คำจำกัดความของอันตรกิริยาระหว่างการแผ่รังสีมีต่อวัตถุในการใช้การประมาณแบบกึ่งดั้งเดิมได้อย่างสมบูรณ์ ในการประมาณคลื่นลักษณะหมุนโพลาริซเซชัน P สามารถคำนวณได้จากสมการ (7.30) สำหรับเส้นโค้งเอกพันธ์หรือคำนวณจากสมการ (7.32) สำหรับเส้นโค้งไม่เอกพันธ์

7.3 คลื่นเคลื่อนที่ (Traveling Waves)

ต่อไปเราจะทดสอบกรณีของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเคลื่อนที่ด้วยความถี่ ω เข้าไปในตัวกลางสองระดับ พลังงานต่างกันระหว่างสองระดับสอดคล้องกับความถี่ ω_0 เพื่อความสะดวกเราจะพิจารณาคลื่นระบบเคลื่อนที่ในทิศทาง x และเราสมมติด้วยว่าตัวกลางกินบริเวณเกือบเต็มครึ่งหนึ่งของปริภูมิ $x \geq 0$ สำหรับ $x \geq 0$ เราสามารถเขียนได้ว่า

$$E = E_0(x, t) \cos[\omega t - kx + \phi(x, t)] \quad \dots\dots\dots (7.41ก)$$

$$P = C(x, t) \cos[\omega t - kx + \phi(x, t)] + S(x, t) \sin[\omega t - kx + \phi(x, t)] \quad \dots\dots\dots (7.41ข)$$

$$N = N(x, t) \quad \dots\dots\dots (7.41ค)$$

เมื่อ $k = \omega/c$ c คือความเร็วของแสงในตัวกลาง ในที่นี้เราสมมติว่าคลื่นอาจจะมี การปรุงแต่งอัมพลิจูดและการปรุงแต่งเฟสด้วย

สำหรับเส้นเอกพันธ์เริ่มต้นด้วยสมการ (7.30) และ (7.40) แน่นนอนในกรณีนี้เราต้องเข้าใจว่าอนุพันธ์เวลาเป็นอนุพันธ์ย่อย การแก้สมการเหล่านี้ต้องใช้การประมาณสองอย่าง คือ (1) การประมาณที่พัฒนาเปลี่ยนแปลงไปอย่างช้า ๆ (2) การประมาณสมการอัตรา

เราเริ่มต้นพิจารณาการประมาณอย่างแรกก่อน สมมติว่าทั้งอัมพลิจูดสนาม E_0

และ ϕ ต่างเปลี่ยนแปลงไปอย่างช้า ๆ ตามปริภูมิและเวลา

$$|\partial E_0/\partial t| \ll \omega E_0 \quad \dots\dots\dots (7.42ก)$$

$$|\partial E_0/\partial x| \ll k E_0 \quad \dots\dots\dots (7.42ข)$$

$$|\partial \phi/\partial t| \ll \omega \quad \dots\dots\dots (7.42ค)$$

$$|\partial \phi/\partial x| \ll k \quad \dots\dots\dots (7.42ง)$$

โดยแทนสมการ (7.41ก) ลงในสมการ (7.40) และใช้เงื่อนไขที่กำหนดในสมการ (7.42) พร้อมกับใช้การประมาณต่อไปนี้ด้วย คือ

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \approx \omega^2 P \quad \dots\dots\dots (7.428)$$

สุดท้ายจัดพจน์โคไซน์และพจน์ไซน์ทั้งสองข้างให้เท่ากัน ได้ผลลัพธ์เป็น

$$c \frac{\partial E_0}{\partial x} + \frac{\partial E_0}{\partial t} = \frac{\omega S}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_s E_0}{2\epsilon} \quad \dots\dots\dots (7.43ก)$$

$$E_0 \left(c \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = - \frac{WC}{2\epsilon} \quad \dots\dots\dots (7.43ข)$$

ดังนั้น เราหาได้ว่าทั้งสองสมการอธิบายการเคลื่อนที่ของเฟส ϕ และอัมพลิจูด E_0 นั่นคือ การประมาณที่พัฒนาเปลี่ยนแปลงไปอย่างช้า ๆ ให้ห้าสมการคือสมการ (7.30ข) ถึง (7.30ง) และ (7.43ก) และ (7.43ข) มีตัวที่ไม่ทราบค่าห้าตัว คือ E_0 , ϕ , C , S และ N เป็นกลุ่มของสมการที่ใช้อธิบายอันตรกิริยาระหว่างการแผ่รังสีที่มีต่อวัตถุได้อย่างสมบูรณ์ (สำหรับเส้นเอกพันธ์)

การประมาณอีกอย่างหนึ่งคือการประมาณสมการอัตรา และใช้ข้อสมมติต่อไปนี้ด้วย คือ

$$|\partial C/\partial t| \ll |C/T_2| \quad \dots\dots\dots (7.44ก)$$

$$|\partial S/\partial t| \ll |S/T_2| \quad \dots\dots\dots (7.44ข)$$

จากสมการ (7.30ข) ถึง (7.30ง) เราพบว่า

$$C = - \left(\Delta\omega + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) T_2 S \quad \dots\dots\dots (7.45ก)$$

$$S = \left(\Delta\omega + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) T_2 C + \left(\frac{\mu^2 E_0 T_2}{\hbar} \right) N \quad \dots\dots\dots (7.45ข)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = - \left(\frac{E_0 S}{\hbar} \right) - \frac{N - N_t}{T_1} \quad \dots\dots\dots (7.45ค)$$

เมื่อ $1/T_2 \ll \omega$ จากเงื่อนไข (7.44) เรากล่าวได้ทันทีว่าเงื่อนไข (7.42) ใช้ได้ ด้วยเหตุนี้การประมาณสมการอัตราจึงได้สมการ (7.45) พร้อมกับสมการ (7.43)

เราจะเข้าใจว่าทำไมจึงรู้ว่าการประมาณของสมการ (7.44) เป็นการประมาณสมการอัตราเมื่อเราพิจารณากรณีสำหรับคลื่นที่ไม่ได้ปรับแต่งทั้งอัมพลิจูดและเฟส ดังนั้นที่ $x = 0$ เราให้ $\varphi(0, t) = 0$ และ $E_0(0, t) =$ ค่าคงที่ จากสมการ (7.43) และ (7.45) เราเห็นได้ว่า φ และ E_0 ต่างไม่ขึ้นกับเวลาสำหรับ $x > 0$ ใดๆ ดังนั้นเราเขียน $\varphi(x, t) = \varphi(x)$, $E_0(x, t) = E_0(x)$ และ $N(x, t) = N(x)$ ดังนั้นสมการ (7.43) และ (7.45) สามารถลดรูปลงเหลือเพียงสามสมการ ดังนี้

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -(\sigma N + \alpha_s)F \quad \dots\dots\dots (7.46ก)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left(\frac{\Delta\omega T_2}{2}\right)\sigma N \quad \dots\dots\dots (7.46ข)$$

$$2F\sigma N + \frac{N - N_t}{T_1} = 0 \quad \dots\dots\dots (7.46ค)$$

เมื่อ $F = \frac{1}{2} \epsilon c E_0^2 / \hbar \omega \quad \dots\dots\dots (7.46ง)$

เป็นฟลักซ์โฟตอน (photon flux) และเราได้ให้

$$\sigma = \frac{\mu^2 \omega T_2}{\epsilon c \hbar [1 + (\Delta\omega T_2)^2]} \quad \dots\dots\dots (7.47)$$

และ $\alpha_s = \sigma_s / \epsilon c \quad \dots\dots\dots (7.48)$

เปรียบเทียบสมการ (7.47) กับสมการ (2.63) [เมื่อ $\eta \epsilon_0 c_0 = \epsilon c$ และ $g(\Delta\omega)$ กำหนดด้วยสมการ (2.52)] เห็นได้ว่า σ ในสมการ (7.47) แทนเป็นภาคตัดขวางการดูดกลืนของสสาร ความสำคัญทางฟิสิกส์ของ α_s สามารถหาได้โดยให้ $N = 0$ ในสมการ (7.46ก) ได้ว่า α_s เป็นสัมประสิทธิ์การทำลายของสสารเป็นผลจากการสูญเสียโดยไม่เกิดอภินาต (nonresonant losses) (คือการกระจัดกระเจิง) จากสมการ (7.46ก) เรากล่าวได้ว่าความเข้มแสงมีค่าลดลงเมื่ออยู่ในตัวกลางซึ่งเกิดจากการอภินาต (σN) และการดูดกลืนไม่อภินาต (α_s) ส่วนสมการ (7.46ค) อธิบายปรากฏการณ์การอิมิตัวได้ดี จากสมการ (7.26ค) เราสังเกตได้ว่า $N = N(F)$ ดังนั้นเราสามารถเห็นได้จากสมการ (7.46ก) ว่า การลดลงของความเข้มเป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งไม่ใช่พฤติกรรมแบบเอกซ์โปเนนเชียล ตอนนี้เหลือเพียงแต่อธิบายสมการ (7.46ข) เท่านั้น สมการนี้กล่าวว่า สำหรับ $\Delta\omega \neq 0$ เฟสของคลื่นเป็น $(-kx + \varphi)$ ซึ่งเพิ่มขึ้นจากพจน์ $-kx$ โดยที่พจน์ที่เพิ่มขึ้นมาหาได้จากการอินทิเกรตสมการ (7.46ข) [ให้สังเกตว่า $N = N(x)$] พจน์นี้ได้

จากความจริงที่ว่าสำหรับ $\Delta\omega \neq 0$ โปลาไรเซชัน P บรรจุด้วยพจน์ $P' = x'E$ [ดูจากสมการ (7.19)] มีเฟสตรงกับสนาม ดังนั้นเฟสนี้จึงเสริมค่าดัชนีหักเหของตัวกลางและเป็นเหตุให้เกิดการย้ายเฟสเพิ่มขึ้น

ก่อนที่จะสรุปหัวข้อนี้ เรามาพิจารณาการประมาณทั้งสองแบบข้างต้น (การประมาณที่พัฒนาไปอย่างช้า ๆ และการประมาณสมการอัตรา) ใช้กับพฤติกรรมทางพลศาสตร์บนมาตราส่วนของเวลาที่แตกต่างกันอย่างมาก สำหรับการประมาณที่พัฒนาไปอย่างช้า ๆ เราต้องการตัวแปร (C, S, N, E_0 และ φ) ดำเนินไปโดยไม่ต้องสนใจการเปลี่ยนแปลงภายในหนึ่งคาบแสง ($\sim 10^{-15}$ วินาที) และตลอดช่วงความยาวคลื่น ($\sim 10^{-4}$ ซม.) ในทางกลับกันสำหรับการประมาณสมการอัตรา ตัวแปรเหล่านี้จะต้องรับรู้ต่อการเปลี่ยนแปลงเวลาเพียงเล็กน้อย T_2 (กล่าวคือ $T_2 = 2/\Delta\omega_0 \approx 10^{-12}$ วินาที สำหรับเลเซอร์ทึบหรือเลเซอร์นีโอไดเนียม และ $T_2 = 10^{-9}$ วินาที สำหรับเลเซอร์ CO_2 ที่ความดันหนึ่งบรรยากาศ) ตัวอย่างเช่นในกรณีของคลื่นดลแสงใช้ระยะเวลา 10^{-12} วินาที เคลื่อนที่ผ่านทึบ การประมาณที่พัฒนาไปอย่างช้า ๆ สามารถใช้ได้ดี แต่การประมาณสมการอัตราไม่สามารถใช้ได้

สุดท้ายเราสังเกตได้ว่า ห้าสมการของการประมาณที่พัฒนาไปอย่างช้า ๆ [สมการ (7.30ข) ถึง (7.30ง) และ (7.43)] สามารถทำให้อยู่ในรูปไม่มีมิติโดยใช้นิยามต่อไปนี้ คือ

$$\theta = \frac{T_2 \mu E_0}{\hbar} \quad \dots\dots\dots (7.49ก)$$

$$\Delta = \frac{N}{N_t} \quad \dots\dots\dots (7.49ข)$$

$$\Phi = \frac{S}{\mu N_t} \quad \dots\dots\dots (7.49ค)$$

$$\psi = -\frac{C}{\mu N_t} \quad \dots\dots\dots (7.49ง)$$

ห้าสมการเหล่านั้นกลายเป็น

$$T_2 \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(\delta + \frac{\partial \varphi}{\partial t} T_2 \right) \Phi - \psi \quad \dots\dots (7.50ก)$$

$$T_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\left(\delta + \frac{\partial \varphi}{\partial t} T_2 \right) \psi + \theta \Delta - \Phi \quad \dots\dots\dots (7.50ข)$$

$$T_2 \frac{\partial \Delta}{\partial t} = -\theta \Phi \quad \gamma(\Delta - 1) \quad \dots\dots (7.50ค)$$

$$T_2 \left(c \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) = -G(\Phi + L\theta) \quad \dots\dots\dots (7.509)$$

$$T_2 \theta \left(c \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = G\psi \quad \dots\dots\dots (7.50จ)$$

ในที่นี้เราให้ $\gamma = T_2/T_1$, $\delta = \Delta\omega T_2$, $G = \alpha_0 c T_2/2$ และ $L = \alpha_s/\alpha_0$, $\alpha_0 = \sigma(0)N_1$ เป็นสัมประสิทธิ์การดูดกลืนตรงศูนย์กลางของเส้นโค้ง ($\Delta\omega = 0$) สมการ (7.50) สามารถหาคำตอบได้เมื่อเราทราบเงื่อนไขขอบเขต [คือ $\theta = f(t)$ และ $\varphi = g(t)$ ที่ $x = 0$] และเงื่อนไขเริ่มต้น [คือค่าของ Δ , Φ และ ψ ภายในสสาร ($x \geq 0$) ก่อนที่คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจะมาถึง] มันสามารถแสดงว่าเมื่อกำหนดเงื่อนไขขอบเขตและเงื่อนไขเริ่มต้นแล้วสามารถหาคำตอบได้แน่นอน

ต่อไปเราจะศึกษาบางตัวอย่างของคลื่นดลแสงเคลื่อนที่ภายใต้การประมาณที่พัฒนาไปอย่างช้า ๆ ถ้าระยะเวลาของคลื่นดลใกล้เคียงกับ (หรือสั้นกว่า) T_2 ผลลัพธ์จะต่างจากที่หาได้ภายใต้การประมาณสมการอัตรามาก

7.3.1 ตัวกลางขยายคลื่นตามยาวเป็นอนันต์ (คลื่นดล π)

ในกรณีแรกเราจะพิจารณาตัวกลางที่ทำหน้าที่ขยายก่อน เพื่อความสะดวกเราจะสมมติดังต่อไปนี้ คือ

- (1) ก่อนที่คลื่นดลแสงจะมาถึงตัวกลางจะต่อมทั้งหมดอยู่ในระดับบน
- (2) คลื่นดลแสงเมื่อเข้าไปในตัวกลางจะไม่มีกรปรุ่งแต่งเฟส [$\varphi(x, t) = 0$ ที่ $x = 0$]
- (3) $\omega = \omega_0$
- (4) $T_1 \gg T_2$ (คือ $\gamma = 0$) ด้วยข้อสมมติเหล่านี้เราสามารถเห็นได้จากสมการ (7.50ก) และ (7.50จ) ว่า คำตอบสำหรับ φ และ ψ กำหนดด้วย $\varphi(x, t) = \psi(x, t) = 0$

ดังนั้น จึงให้ $\varphi = \psi = 0$ ในสมการ (7.50) สมการเหล่านี้จึงกลายเป็นอย่างง่าย คือ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \theta \Delta - \Phi \quad \dots\dots\dots (7.51ก)$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \tau} = -\theta \Phi \quad \dots\dots\dots (7.51ข)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} = -G(\Phi + L\theta) \quad \dots\dots\dots (7.51ค)$$

ในที่นี้แกนพิกัด τ และ η กำหนดด้วย

$$\tau = \frac{1 - (x/c)}{T_2} \quad (7.52ก)$$

$$\eta = \frac{x}{cT_2} \quad \dots\dots\dots (7.52ข)$$

ชุดของสมการ (7.51) หาคำตอบได้โดยกำหนดเงื่อนไขขอบเขตว่า $\theta = f(\tau)$ ที่ $\eta = 0$ [เมื่อ $f(\tau)$ เป็นลักษณะของคลื่นตกเมื่อเข้าไปในตัวกลาง] และมีเงื่อนไขเริ่มต้นว่าก่อนที่คลื่นตกจะมาถึงที่จุดใดจุดหนึ่ง $\eta \geq 0$ เรามี $\Phi = \psi = 0$ และ $\Delta = -1$ (อะตอมทั้งหมดอยู่ในระดับบน)

แม้ว่าด้วยข้อสมมติอย่างง่ายเหล่านี้แต่ปัญหาก็ยังไม่ใช่จะแก้ได้ง่ายดาย อย่างไรก็ตามเป็นไปได้ที่จะหาคำตอบอะซิมป์โทติก (asymptotic) สำหรับ $\eta \rightarrow \infty$ โดยอินทิเกรตสมการ (7.51ค) จะได้

$$\theta(\eta, \tau) = \exp(-GL\eta) \left[-G \int_0^\eta \Phi \exp(GL\eta') d\eta' + f(\tau) \right] \quad \dots\dots\dots (7.52ค)$$

สำหรับ $\eta \rightarrow \infty$ เราพบจากสมการ (7.52ค) ว่า

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \theta = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{G \int_0^\eta \Phi \exp(GL\eta') d\eta'}{\exp(GL\eta)} = \lim_{\eta \rightarrow \infty} -\frac{\Phi}{L} \quad \dots\dots\dots (7.53)$$

สมการ (7.53) แสดงว่าคำตอบอะซิมป์โทติกมีจริงและมันไม่ขึ้นกับลักษณะ $f(\tau)$ ของคลื่นตกตกกระทบในตอนแรก คำตอบนี้เป็นผลลัพธ์ของการทำให้พจน์ $-\phi$ (กำลังขยาย) และ $L\theta$ เท่ากัน ซึ่งแทนการสูญเสียโดยไม่อภิณาทของสสาร ดังนั้นรูปร่างของคลื่นอะซิมป์โทติกจะขึ้นกับการแข่งขันระหว่างปรากฏการณ์ของทั้งสองพจน์เท่านั้น จากสมการ (7.51) จะเห็นว่าเมื่อ $\Phi = -L\theta$ จะได้ $\partial\theta/\partial\eta = 0$ ดังนั้น คลื่นอะซิมป์โทติก $\theta(\tau)$ เคลื่อนที่ด้วยความเร็วเท่ากับความเร็วเฟส c คำตอบอะซิมป์โทติกหาได้โดยให้ $\phi = -L\theta$ ในสมการ (7.51ก) และ (7.51ข) นั่นคือ

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta}{d\tau} &= L\theta^2 \\ L \frac{d\theta}{d\tau} &= -\theta(\Delta + 1) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (7.54)$$

สมการเหล่านี้หาคำตอบได้โดยใช้เงื่อนไขเริ่มต้น $\theta = 0$ และ $\Delta = -1$ เมื่อ $\tau = -\infty$ (คือก่อนที่คลื่นตกมาถึง) จะได้คำตอบเป็น

$$\begin{aligned} \theta &= k \operatorname{sech}(k\tau) \\ \Delta &= [(1-L)\tan h(k\tau)] - L \\ \Phi &= -L\theta \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (7.55)$$

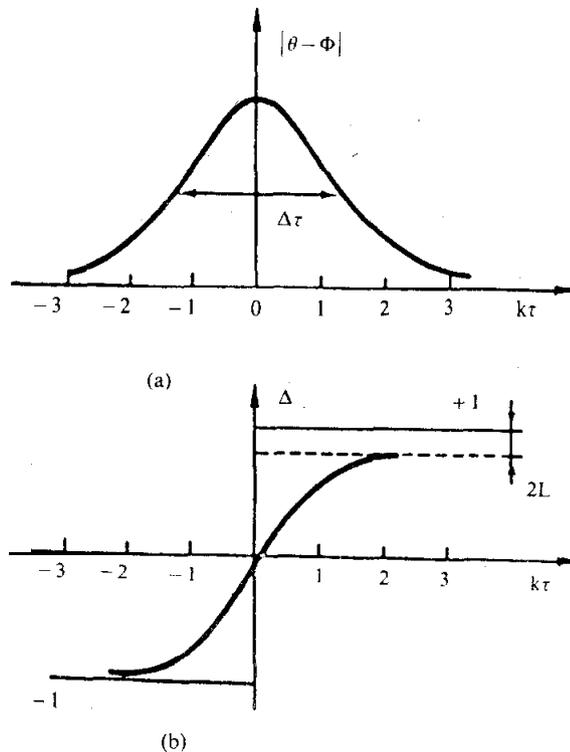
เมื่อ $k = \frac{1-L}{L}$ (7.56)

คำตอบเหล่านี้สามารถตรวจสอบได้โดยแทนลงในสมการ (7.54) ฟังก์ชัน $\theta(\tau)$, $\Phi(\tau)$ และ $\Delta(\tau)$ ได้แสดงในรูป 7.3 สำหรับความเข้มของคลื่นดลอะซิมป์โทต $|\alpha\theta^2(\tau)|$ ความกว้างที่ครึ่งอัมปลิจูด τ_p มีค่าเป็น

$\tau_p = 1.76/R$ (7.57)

และจากสมการ (7.56) และ (7.52ก)

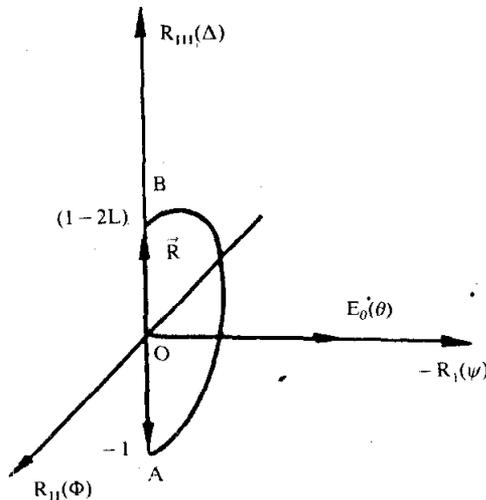
$t_p = 1.76LT_2/(1-L)$ (7.58)



รูป 7.3 คลื่นดล π ในตัวกลางขยาย (a) พฤติกรรมเวลาของอัมปลิจูดสนาม θ และอัมปลิจูดของการโพลาไรซ์ ϕ
(b) พฤติกรรมเวลาของจำนวนประชากร Δ ผันกลับ

จะเห็นได้ว่า τ_p แปรตาม T_2 และขึ้นกับ $L = \alpha_s/\alpha_0$ จากรูป 7.3 b เห็นได้ชัดว่าสำหรับ $\tau \gg 0$ (คือหลังจากคลื่นดลได้ผ่านไป) Δ มีค่ามากกว่าศูนย์มากถ้า $2L > 1$ ในกรณีนี้หลังจากคลื่นดลผ่านไปประชากรทั้งหมดจะมีอะตอมอยู่ในระดับล่างจำนวนมากกว่าระดับบน จึงเป็นที่แน่ชัดว่าผลลัพธ์นี้ไม่สามารถหาได้จากการวิเคราะห์สมการอัตรา

จากสมการ (7.49), (7.31) และ (7.12ก) เห็นได้ว่าปริมาณ ψ , ϕ และ Δ แปรโดยตรงกับ $-R_I$, R_{II} และ R_{III} ตามลำดับ ในทางกลับกันเราสังเกตว่า [สมการ (7.27)] ในกรอบของการเคลื่อนที่ลักษณะหมุนของ \vec{R} เป็นการหมุนควงรอบ ๆ เวกเตอร์ \vec{e} กำหนดด้วยสมการ (7.29) ดังนั้นการเคลื่อนที่ของ ψ , ϕ และ Δ สามารถแทนด้วยรูปทรงเรขาคณิตดังในรูป 7.4 ซึ่งได้แสดงองค์ประกอบ R_I , R_{II} และ R_{III} ตามแกน I, II และ III พร้อมกับ ψ , ϕ และ Δ เวกเตอร์ \vec{R} ซึ่งแทนสถานะของระบบในตอนแรก (ก่อนที่คลื่นแสงมาถึง) อยู่ในตำแหน่ง OA ($\psi = \phi = 0$ และ $\Delta = -1$) เมื่อคลื่นเคลื่อนมาถึงที่จุดกำลังพิจารณา ขณะที่ $\Delta\omega = \partial\phi/\partial t = 0$ เราสามารถเห็นได้จากสมการ (7.29) ว่า เวกเตอร์ \vec{R} หมุนควงรอบ ๆ แกน I นั่นคือ เวกเตอร์หมุนบนระนาบ II-III ดังนั้นเราต้องมี $R_I = \psi = 0$ เหมือนกับสถานะที่แล้ว ในทางกลับกันเราเห็นแล้วว่าคลื่นเคลื่อนที่ออกไปเวกเตอร์ \vec{R} มาถึงตำแหน่ง OB ในรูป 7.4 เราเห็นว่าคลื่นเคลื่อนที่ $\theta(\tau)$ ของรูป 7.3a หมุนเวกเตอร์ \vec{R} ด้วยมุม π สมการ (7.27) บ่งบอกว่าพิกัดของเวกเตอร์ \vec{R} ยังคงเป็นค่าคงที่ตามเวลา (เราสามารถแสดงได้โดยคูณสมการ (7.27) ทั้งสองด้านแบบสเกลาลดด้วยเวกเตอร์ \vec{R}) ทำให้ $OB = OA$ อย่างไรก็ตามในทางปฏิบัติสมการที่จะต้องใช้ก็คือสมการ (7.30ข) ถึง (7.30ง) บรรลุด้วยพจน์ $-C/T_2$ และ $-S/T_2$ ซึ่งไม่เหมือนกับสมการ (7.27) ให้ผลลัพธ์เป็น $OB \leq OA$



รูป 7.4 แสดงการเคลื่อนที่ของสถานะเวกเตอร์ \vec{R} สำหรับกรณีของคลื่นเคลื่อนที่

7.3.2 ตัวกลางศูนย์กลางเคลื่อนที่ตามยาวเป็นอนันต์ (คลื่นเคลื่อนที่ 2π)

กรณีที่สองเรามาพิจารณาตัวกลางที่ทำหน้าที่ศูนย์กลาง เพื่อความสะดวกเราจะสมมติว่า

- (1) ก่อนที่คลื่นดลแสงมาถึงตัวกลางอะตอมทั้งหมดอยู่ในระดับล่าง
- (2) เมื่อคลื่นดลแสงเข้าไปในสสารไม่มีการปรุ่่งแต่งเฟสเกิดขึ้น [$\phi(x, t) = 0$ ที่ $x = 0$]
- (3) $\omega = \omega_0$
- (4) $T_1 \gg T_2$ ($\gamma = 0$) เราจะละทิ้งการสูญเสียโดยไม่อภิณาทด้วย ($L = 0$) และสมมติให้คลื่นดลแสงสั้นมากเมื่อเทียบกับ T_2 หรือ

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right| \gg \left| \frac{\phi}{T_2} \right| \quad (7.59)$$

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right| \gg \left| \frac{\psi}{T_2} \right|$$

ในกรณีนี้เราพบว่าสมการ (7.50) อยู่ในรูปลักษณะอย่างง่ายอีกครั้งและลดเหลือเพียงสามสมการดังนี้

$$T_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = +\theta \Delta \quad \dots \dots (7.60ก)$$

$$T_2 \frac{\partial \Delta}{\partial t} = -\theta \Phi \quad \dots \dots (7.60ข)$$

$$T_2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + c \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = G \Phi \quad \dots \dots (7.60ค)$$

สมการชุดนี้หาคำตอบได้ภายใต้เงื่อนไขตอนเริ่มต้น ($\Delta = 1, \Phi = 0$) และเงื่อนไขขอบเขต $[\theta = f(t) \text{ ที่ } x = 0]$

สมการ (7.60) เราไม่ต้องหาคำตอบอย่างจริงจังแต่ใช้แทนด้วยรูปทางเรขาคณิตตามที่เคยใช้มาแล้ว (รูป 7.5) เราสังเกตได้ทันทีที่ว่ามีนเป็นไปได้สำหรับคลื่นดลแสงเคลื่อนที่ผ่านสสารโดยไม่ดูดกลืน เพื่อให้เห็นจริงเราเริ่มต้นโดยสังเกตว่าสมการ (7.60ก) และ (7.60ข) เมื่อละทิ้งพจน์การลดลงจะเท่ากันกับสมการ (7.27) เมื่อ $\Delta \omega = \partial \phi / \partial t = 0$ เวกเตอร์ \vec{R} หมุนรอบแกน I ภายในระนาบ II-III ดังนั้นเวกเตอร์ \vec{R} เริ่มต้นจากตำแหน่ง OA ($\Delta = 1$) หลังจากคลื่นดลเคลื่อนผ่านไปเราสามารถพบมันอีกครั้งที่ตำแหน่งเดียวกันโดยที่มันจะหมุนไปครบ I รอบ หรือมากกว่าพอดี ในเหตุการณ์เดียวกันนี้หลังจากคลื่นดลเคลื่อนผ่านไปพลังงานของตัวกลางยังคงเท่าเดิม ทำให้พลังงานที่มีอยู่ในคลื่นดลยังคงไม่เปลี่ยนแปลง เมื่ออัตราการหมุนคงเชิงมุมเท่ากับ $\mu E_0(t)/\hbar$ เงื่อนไขสำหรับการหมุนควงครบรอบพอดี คือ

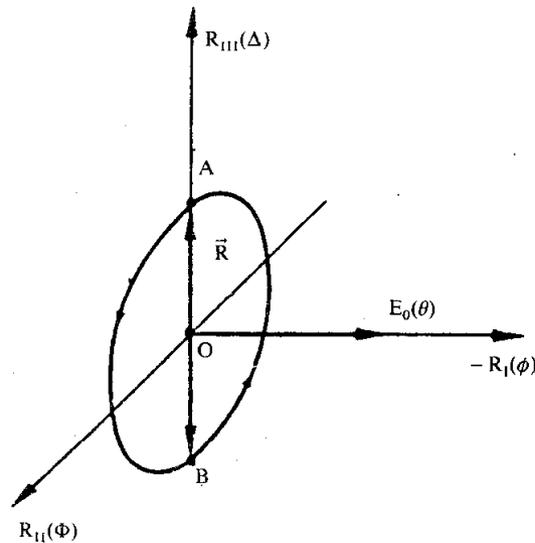
$$\frac{\mu}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} E_0 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta d\tau = 2\pi \quad (7.61)$$

คลื่นดลแสง $E_0(t)$ สอดคล้องกับสมการ (7.61) ดังนั้นจึงเรียกว่าคลื่นดล 2π

ต่อไปเราจะพิจารณารายละเอียดของอันตรกิริยาระหว่างคลื่นดล 2π และสสาร จากรูป 7.6 ซึ่งแสดงคลื่นดล 2π ทั่ว ๆ ไป ส่วนแรกของคลื่นดล (บริเวณแรงแรงในรูป) ขึ้นไปจนถึง t_0 เป็น

$$\mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{E_0 dt}{h} = \pi$$

สร้างเวกเตอร์หมุน \vec{R} ขึ้นจาก A ไป B (รูป 7.5) ดังนั้นคลื่นดลจะถูกสสารดูดกลืนบางส่วน เวกเตอร์จะหมุนควงอย่างต่อเนื่องไปรอบแกน I จนกว่ากลับมาที่ A ใหม่



รูป 7.5 การแทนการเคลื่อนที่ของเวกเตอร์ \vec{R} สำหรับกรณีของคลื่นดล 2π

ในเฟสที่สองนี้พลังงานที่สสารดูดกลืนไปจะส่งกลับไปให้กับสนาม ดังนั้นขณะที่คลื่นดลเคลื่อนที่ในปริภูมิระบบสองระดับพลังงานจะดูดกลืนพลังงานจากคลื่นดลตรงส่วนหน้า และคายพลังงานกลับไปแก่คลื่นดลส่วนหลัง ดังนั้นเห็นได้ว่าคลื่นดลต้องเคลื่อนที่ไปด้วยความเร็ว v น้อยกว่าความเร็วเฟส c จากวิธีการเข้าสู่ที่เราใช้ในตอนแรกเราใช้ระบบพิกัดที่ทำให้เป็นปกติแล้ว คือ

$$\tau = \frac{t - (x/v)}{T_2} \quad \dots\dots\dots (7.62\Gamma)$$

$$\eta = \frac{x}{vT_2} \quad \dots\dots\dots(7.62ข)$$

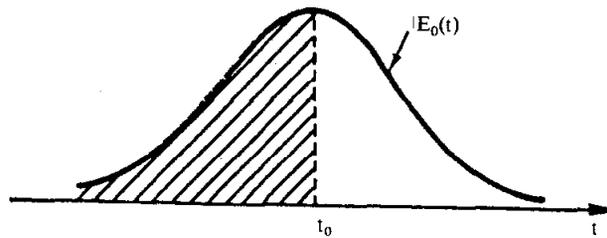
เมื่อ $v < c$ สมการ (7.60) กลายเป็น

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = -\theta \Phi \quad \dots\dots\dots (7.6311)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \theta \Delta \quad \dots\dots\dots (7.63ข)$$

$$\frac{\partial e}{\partial \eta} = -G\Phi \quad \dots\dots\dots (7.63ค)$$

เมื่อ $\beta = [1 - (v/c)] \geq 0 \quad \dots\dots\dots (7.64)$



รูป 7.6 คลื่นคด 2π ตัวกลางสองระดับดูดกลืนพลังงานจากสนาม E_0 ในบริเวณแรงและไม่ให้กลับคืนไปในบริเวณไม่แรง

กำหนดเงื่อนไขว่าคลื่นเคลื่อนที่โดยไม่เปลี่ยนแปลงรูปร่างเลย กล่าวคือ ให้ $\partial\theta/\partial\eta = 0$ เราได้

$$\frac{d\Delta}{d\tau} = -\theta\Phi \quad \dots\dots\dots (7.65ก)$$

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = \theta\Delta \quad \dots\dots\dots (7.65ข)$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = k^2\Phi \quad \dots\dots\dots (7.65ค)$$

เมื่อ $k^2 = G/B \quad \dots\dots\dots (7.66)$

สมการเหล่านี้หาคำตอบได้ภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้นว่า $\Delta = 1$, $\Phi = 0$ และ $\theta = 0$ เมื่อ $\tau = -\infty$ ดังนั้นได้คำตอบสำหรับ θ เป็น

$$\theta = 2k \operatorname{sech}(k\tau) \quad \dots\dots\dots (7.67)$$

ขณะเดียวกันคำตอบสำหรับ Δ และ Φ สามารถหาได้โดยแทนสมการ (7.67) ลงในสมการ (7.65ข) และ (7.65ค) เพื่อให้สั้นเข้าเราจะไม่เขียนคำตอบเหล่านี้ และจำกัดตัวเองเพียง

คอยสังเกตว่าสมการ (7.67) เป็นคลื่นดล 2π จริงหรือไม่ในขณะที่สามารถตรวจสอบได้โดยใช้สมการ (7.61) ความกว้างคลื่นดลที่ครึ่งอัมปลิจูดกำหนดด้วยสมการ (7.57) ซึ่งเราพบว่า |ใช้สมการ (7.66) และ (7.63)|

$$\tau_p = 1.76 \left(\frac{1 - (v/c)}{G} \right)^{1/2} \dots\dots\dots (7.68)$$

สมการนี้สัมพันธ์กับความกว้างคลื่นดลเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v อย่างไรก็ตามเราสังเกตได้ว่ามันไม่เหมือนกับกรณีตัวกลางขยายที่เราได้พิจารณาไปแล้ว ในกรณีนี้ k และ τ_p ไม่สามารถพิจารณาจากเงื่อนไขขอบเขตได้ตามลำพัง (คือใช้ $\partial\theta/\partial\eta = 0$) ค่าของ k ขึ้นกับรูปร่างของคลื่นดลตอนเริ่มต้น $f(\tau)$ ที่ $x = 0$ การพิจารณาในตอนี้แสดงว่าสำหรับตัวกลางดูดคลื่นมันมีคำตอบบอเชิมป์โทดซึ่งเคลื่อนที่โดยไม่เปลี่ยนแปลงรูปร่าง

7.4 คลื่นนิ่ง (Standing Waves)

ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาสถานการณ์เมื่อสสารและคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจำกัดอยู่ในโพรงแม่เหล็กไฟฟ้าโพรงหนึ่ง ซึ่งมีความแตกต่างจากกรณีก่อนก็คือว่าในกรณีนี้ $E(\vec{r}, t)$ และ $P(\vec{r}, t)$ อยู่ในลักษณะของคลื่นนิ่งในโพรง ดังนั้นแทนที่จะใช้สมการ (7.41ก) เราจะสมมติสมการใหม่ขึ้นมา คือ

$$E(\vec{r}, t) = \sum_n E_n(t) U_n(\vec{r}) \dots\dots\dots (7.69)$$

ในที่นี้ $U_n(\vec{r})$ เป็นฟังก์ชันอธิบายการแจกแจงสนามของโหมดโพรงที่ n ในขณะนี้ [ดูสมการ (2.5ก)] $U_n(\vec{r})$ ต้องเป็นไปตามสมการของเฮลมโฮลทซ์ (Helmholtz's equation)

$$\nabla^2 U_n = -\Omega_n^2 U_n / c^2 \dots\dots\dots (7.70)$$

เมื่อ Ω_n คือความถี่เชิงมุม ให้สังเกตว่าสมการ (7.69) มันได้สมมติว่า U_n มีชุดของฟังก์ชันไอเกนสมบูรณ์ และเราสมมติว่ามันตั้งฉากซึ่งกันและกัน คือ

$$\int_c U_n U_m dV = 0 \quad (n \neq m) \dots\dots\dots (7.71)$$

ในที่นี้อินทิเกรตขยายออกไปตลอดปริมาตรของโพรง สำหรับ $n = m$ เขียนได้ว่า

$$\int_c U_m U_m dV = V_c \dots\dots\dots (7.72)$$

เมื่อ V_c คือปริมาตรขึ้นกับวิธีการกำหนด U_m ตัวอย่างเราจะพิจารณากรณีของโหมด TEM_{00} ซึ่งขนาดของจุดสว่างคงที่ตลอดโพรงกำหนด หมายถึงว่าเรากำลังพิจารณา

กรณีรัศมีความโค้งของกระจกมีค่ามากกว่าระยะห่างของมันมาก (ดูบทที่ 4) สำหรับกรณีนี้ เราสามารถเขียน

$$U_m = \exp[-(r/\omega_0)^2] \sin k_m z \quad \dots\dots\dots (7.73)$$

เมื่อ $k_m = \Omega_m/c$ จากสมการ (7.72) และ (7.73) เห็นได้ว่า (ละทิ้งพจน์ออสซิลเลตอย่างรวดเร็ว $\cos 2k_m z$)

$$V_c = \frac{1}{4} \pi \omega_0^2 d \quad \dots\dots\dots (7.74)$$

เมื่อ d คือความยาวของโพรงกำหนด ดังนั้นจากสมการ (7.71) และ (7.72) เราสามารถเขียน

$$\int_c U_n U_m dV = V_c \delta_{nm} \quad \dots\dots\dots (7.75)$$

ต่อไปแทนสมการ (7.69) ลงในสมการ (7.40) และใช้สมการ (7.70) โดยคูณด้วย $U_m dV$ สอดคล้องอินทิเกรตตลอดโพรงทั้งหมดและใช้สมการ (7.75) เราได้

$$\ddot{E}_m + \frac{1}{\tau_c} \dot{E}_m + \Omega_m^2 E_m = -\frac{\dot{P}_m}{\epsilon} \quad \dots\dots\dots (7.76)$$

ในที่นี้เราใช้ $\tau_c = \epsilon/\sigma_s \quad \dots\dots\dots (7.77)$

และ $P_m(t) = \left(\int_c P U_m dV \right) / V_c \quad \dots\dots\dots (7.78)$

อินทิกรัลทางด้านขวามือของสมการ (7.78) ขยายออกไปตลอดโพรงทั้งหมด ในทางปฏิบัติถ้ามีตัวกลางอยู่ในโพรงเพียงบางส่วนเท่านั้น อินทิกรัลจะขยายลดลงเหลือเพียงเท่ากับตัวกลางนั้น (คือ $P \neq 0$ ภายในตัวกลางเท่านั้น) สำหรับสมการ (7.76) เห็นได้ว่าอัมพลิจูด E_m ของแต่ละโหมดมีลักษณะเดียวกับกรณีของตัวออสซิลเลตเคลื่อนที่ลดลงด้วยพจน์ $-\dot{P}_m/\epsilon$ พจน์ลดลง \dot{E}_m/τ_c แทนการสูญเสียเนื่องจากการกระจัดกระเจิง การเลี้ยวเบนและการคู่ควบส่งออก ความสำคัญทางฟิสิกส์ของ τ_c สามารถหาได้โดยให้ $\dot{P}_m = 0$ ในสมการ (7.76) ในกรณีนี้คำตอบกำหนดด้วย $E_m \propto \exp(-t/2\tau_c) \cos(\Omega_m t + \phi)$ ดังนั้นปริมาณ τ_c จึงเป็นค่าคงที่เวลาสำหรับการลดลงของโหมดและกำหนดด้วยสมการ (5.11x) ถ้าเราให้ P_m เป็นปริมาณที่มีการออสซิลเลตคลื่นรูปไซน์ที่ความถี่ ω จากสมการ (7.76) เราเห็นได้ว่าคำตอบสำหรับอัมพลิจูดของการออสซิลเลต $E_{om} = E_{om}(\omega - \Omega_m)$ กำหนดด้วยลอเรนซ์เขียนมีความกว้างทั้งหมดที่ครึ่งความสูง คือ

$$\Delta\omega_c = 1/\tau_c \quad \dots\dots\dots (7.79)$$

ดังนั้น ปริมาณ $\Delta\omega$ ก็คือแถบกว้างของหมวดนั้นโดยเฉพาะ สมการ (7.76) อธิบายพฤติกรรมของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในโพรง ส่วนพฤติกรรมของสสาร [คือของ $P_m(t)$] จะอธิบายเป็นกรณีเฉพาะในหัวข้อต่อไป

7.4.1 เลเซอร์หมวดเดี่ยว (เส้นเอกพันธ์)

เราจะทำเหมือนกับตัวอย่างแรกคือ กรณีของเลเซอร์แผ่ออกอย่างเอกพันธ์ออสซิลเลตบนหมวดเดี่ยว ดังนั้นเราจะละทิ้งดัชนี m ออกจากสมการ (7.76) และเขียนใหม่ให้คล้ายกับสมการ (7.41) คือ

$$E(\vec{r}, t) = E(t)U(\vec{r}) = E_0(t)U(\vec{r}) \cos[\omega t + \phi(t)] \quad \dots\dots\dots (7.80ก)$$

$$P(\vec{r}, t) = C(\vec{r}, t) \cos[\omega t + \phi(t)] + S(\vec{r}, t) \sin[\omega t + \phi(t)] \quad \dots\dots\dots (7.80ข)$$

$$N = N(\vec{r}, t) \quad \dots\dots\dots (7.80ค)$$

สมการ (7.30) ยังคงใช้ได้ภายใต้การประมาณคลื่นลักษณะหมุน เราจัดให้ E_0U แทนในตำแหน่ง E_0 ของสมการ (7.30ค) และ (7.30ง) ทำให้

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -(\Delta\omega + \dot{\phi})S - \frac{C}{T_2} \quad \dots\dots\dots (7.81ก)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = (\Delta\omega + \dot{\phi})C + \frac{\mu^2 E_0 U N}{\hbar} - \frac{S}{T_2} \quad \dots\dots\dots (7.81ข)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{E_0 U S}{\hbar} \frac{N - N_1}{T_1} \quad \dots\dots\dots (7.81ค)$$

ต่อไปเราแทนสมการ (7.80ก) ลงในสมการสนาม (7.76) แล้วใช้เงื่อนไข (7.42ก) และ (7.42ค) ของการประมาณที่พัฒนาไปอย่างช้า ๆ และสุดท้ายจัดให้พจน์ไซน์และพจน์โคไซน์ของทั้งสองข้างของสมการเท่ากัน ซึ่งให้

$$E_0 + \frac{E_0}{2\tau_c} = \frac{\omega}{2\varepsilon} \frac{1}{V_c} \int S U dV \quad \dots\dots\dots (7.82ก)$$

$$[\dot{\phi} + (\omega - \Omega)]E_0 = -\frac{\omega}{2\varepsilon} \frac{1}{V_c} \int C U dV \quad \dots\dots\dots (7.82ข)$$

ห้าสมการ (7.81) และ (7.82) มีตัวไม่ทราบค่า C, S, N (สำหรับสสาร) และ E_0, ϕ (สำหรับสนาม) หากคำตอบได้ภายใต้การประมาณที่พัฒนาไปอย่างช้า ๆ สมการเหล่านี้คล้ายกับสมการ (7.50) ที่ใช้กับคลื่นเคลื่อนที่

ขั้นแรกเราพิจารณาสถานการณ์ของสภาวะคงตัว ซึ่งเราให้อนุพันธ์เวลาทั้งหมดเท่ากับศูนย์ ดังนั้นจากสมการ (7.81ก) เราได้

$$C = -\Delta\omega T_2 S \quad \dots\dots\dots (7.83)$$

แทนค่าสมการนี้ลงในสมการ (7.82ข) และใช้สมการ (7.82ก) ด้วย เราพบว่า

$$(\omega - \Omega)\tau_c = (\omega_0 - \omega)T_2/2 \quad \dots\dots\dots (7.84)$$

อาศัยจากสมการ (7.21ก) และ (7.79) สมการ (7.84) จะให้

$$\frac{W - Q}{\omega_0 - \omega} = \frac{\Delta\omega_c}{\Delta\omega_0} \quad \dots\dots\dots (7.85)$$

ซึ่งแสดงปรากฏการณ์ของการดึงความถี่ [ดูสมการ (5.48)]

ต่อไปเราสมมติความถี่ของการออสซิลเลตที่ทำให้ $\phi = 0$ ภายใต้การประมาณสมการอัตรา [สมการ (7.44)] จากสมการ (7.81ก) และ (7.81ข) เราหาได้ว่า

$$S = \frac{\mu^2 T_2 N E_0 U}{\hbar | I + (\Delta\omega T_2)^2 |} = \frac{\epsilon c \sigma}{\omega} N E_0 U \quad \dots\dots\dots (7.86)$$

ในที่นี้เราใช้สมการ (7.47) ด้วย ความเข้มพลังงานแม่เหล็กไฟฟ้าเฉลี่ยตามเวลา (พลังงานไฟฟ้าเฉลี่ย+พลังงานแม่เหล็กเฉลี่ย) คือ

$$\rho = \epsilon E_0^2 U^2 / 2 \quad \dots\dots\dots (7.87)$$

ดังนั้น จำนวนโฟตอนทั้งหมดในโพรงต้องเป็น

$$q = \frac{1}{\hbar\omega} \int_V \rho dV = \frac{\epsilon E_0^2 V_c}{2\hbar\omega} \quad \dots\dots\dots (7.88)$$

ซึ่งอาศัยสมการ (7.72) ช่วย แทนสมการ (7.86) ลงในสมการ (7.81 ค) และ (7.82ก) และใช้สมการ (7.88) ด้วย เราจะได้สองสมการซึ่งอธิบายสมการอัตรา คือ

$$\frac{\partial N}{\partial t} = - (c\sigma) \frac{2q}{V_c} N U^2 \frac{N - N_l}{T_1} \quad (7.89ก)$$

$$\dot{q} = \left(- \frac{c\sigma}{V_c} \int N U^2 dV - \frac{1}{\tau_c} \right) q \quad \dots\dots\dots (7.89ข)$$

เปรียบเทียบสมการ (7.89) กับสมการที่สอดคล้องกันของบทที่ 5 เราให้ $T_1 = \tau$ และบวกพจน์การยกระดับ และเปลี่ยน N เป็น $-N$ จะได้

$$\frac{\partial N}{\partial t} = W_p(N_l - N) - 2 \left(\frac{c\sigma}{V_c} \right) U^2 q N - \frac{N + N_l}{\tau} \quad \dots\dots\dots (7.90ก)$$

$$\dot{q} = \left(\frac{c\sigma}{V_c} \int N U^2 dV - \frac{1}{\tau_c} \right) q \quad \dots\dots\dots (7.90ข)$$

N ในที่นี้หมายถึงผลต่างจำนวนประชากรระหว่างระดับบนและระดับล่าง เปรียบเทียบสมการ (7.90) กับสมการ (5.15) เราพบว่าสมการทั้งสองไม่เหมือนกัน เพราะว่าสมการ (7.90) มีพจน์ที่แปรโดยตรงกับ $U^2(r)$ และทำให้ $N = N(\vec{r}, t)$ ดังนั้นจึงไม่สามารถหิบบ N ออกมานอกอินทิกราลในสมการ (7.90) ได้

วิธีแก้สมการ (7.90) คือ กำหนดชุด n_k ของค่าเฉลี่ยสำหรับ N ดังต่อไปนี้

$$n_1 = \int_a NU^2 dV / \int_a U^2 dV = \int_a NU^2 dV / V_a \quad \dots\dots\dots (7.91ก)$$

$$n_2 = \int_a NU^4 dV / \int_a U^2 dV \quad \dots\dots\dots (7.91ข)$$

$$n_k = \int_a NU^{2k} dV / \int_a U^2 dV \quad \dots\dots\dots (7.91ค)$$

เมื่ออินทิกราลขยายออกไปตลอดปริมาตรของสารกิริยา และเราให้

$$V_a = \int_a U^2 dV = \frac{\pi \omega_0^2 \ell}{4} \quad \dots\dots\dots (7.92)$$

ℓ คือ ความยาวของสารกิริยา จากสมการ (7.90) เมื่อใช้สมการ (7.91) เราหาได้ว่า

$$\dot{q} = \left| \left(\frac{c\sigma}{V_c} V_a \right) n_1 - \frac{1}{\tau_c} \right| q \quad \dots\dots\dots (7.93 ก)$$

$$n_1 = W_p(N_t - n_1) - 2 \left(\frac{c\sigma}{V_c} \right) q n_2 - \frac{n_1 + N_t}{\tau} \quad \dots\dots\dots (7.93 ข)$$

$$n_2 = W_p(N_t \langle U^4 \rangle - n_2) - 2 \left(\frac{c\sigma}{V_c} \right) q n_3 - \frac{n_2 + N_t \langle U^4 \rangle}{\tau} \quad \dots\dots\dots (7.93 ค)$$

เมื่อ

$$\langle U^4 \rangle = \frac{\int_a U^4 dV}{\int_a U^2 dV} \quad \dots\dots\dots (7.94)$$

สมการ (7.93 ข) และ (7.93 ค) เราเห็นได้ว่าสมการสำหรับ n_1 มี n_2 อยู่ สมการสำหรับ n_2 มี n_3 อยู่ เป็นต้น เพราะฉะนั้นเราได้สมการที่มีลำดับชั้นที่ไม่สิ้นสุดสำหรับตัวแปร n_k การแก้สมการชุดนี้เราต้องตัดปลายลำดับชั้นนั้นออก ซึ่งสามารถทำที่สมการอันดับที่ m โดยสังเกตว่า

$$n_{m+1} = \frac{\int (NU^{2m})U^2 dV}{\int U^2 dV} \approx \frac{\int NU^{2m} dV}{\int U^2 dV} = n_m \quad \dots \dots \dots (7.95)$$

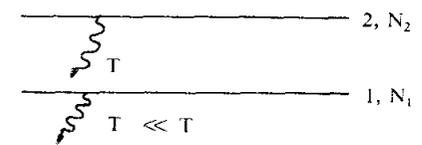
การประมาณสมการ (7.95) ทำโดยพิจารณาว่า สำหรับ m ค่าใหญ่มาก ฟังก์ชัน $U^{2m} = \exp(-2mr^2/\omega^2) (\sin kz)^{2m}$ สามารถประมาณด้วยชุดของฟังก์ชัน δ ไดรเรค อยู่ที่จุด $(r = 0, z = z_i)$ z_i เป็นจุดที่ค่ามากที่สุดของ $\sin^2 kz$ อยู่พอดี ดังนั้นการประมาณอันดับแรกเราสามารถให้ $n_2 = n_1$ ในสมการ (7.93 ข) เราได้

$$\dot{n}_1 = W_p(N_i - n_1) - 2\left(\frac{c\sigma}{V_c}\right)qn_1 - \frac{n_1 + N_i}{\tau} \quad \dots \dots \dots (7.96 ก)$$

$$\dot{q} = \left| \left(\frac{c\sigma V_a}{V_c}\right)n_1 - \frac{1}{\tau_c} \right| q \quad \dots \dots \dots (7.96 ข)$$

ในขณะนี้สมการ (7.96) เหมือนกับสมการ (5.15) เมื่อให้ n_1 เหมือนกับ N ปริมาตรหมวดโพรง (v ในบทที่ 5) ทำให้เหมือนกับ V_c ซึ่งกำหนดด้วยสมการ (7.74) และ V_a ของบทที่ 5 (ปริมาตรของหมวดภายในตัวกลางกิริยา) กำหนดด้วยสมการ (7.92)

วิธีการวิเคราะห์ข้างต้นและสมการ (7.81) ใช้ได้กับสถานการณ์เมื่อระดับเลเซอร์ล่างเป็นระดับพื้นเท่านั้น (เลเซอร์สามระดับ) ตัวอย่างที่เห็นได้ชัดคือ รูปแบบของพจน์ปรากฏการณ์ $(R_{III} - I)/T_1$ ซึ่งอยู่ในสมการ (7.25 ค) พจน์นี้มีความหมายว่าเมื่อยังไม่มีสนาม ($E_0 = 0$) ระบบได้ผ่อนคลายไปยังระดับเลเซอร์ล่าง เมื่อเหตุการณ์นี้อยู่ในเลเซอร์สี่ระดับ มันมีที่น่าสนใจบางอย่าง โดยดูว่าสำหรับกรณีนี้สมการ (7.81) ต้องการการเปลี่ยนแปลงบางส่วนอย่างไร ดังนั้นเราเริ่มต้นโดยให้พจน์การคลายตัวออกจากสมการ (7.81 ค) ถ้าเราเรียก N_1 และ N_2 เป็นจำนวนประชากรอะตอมของระดับ 1 และ 2 ในรูป 7.7 ในขณะที่ไม่มีการคลายตัว เราจะได้



รูป 7.7 สถานการณ์เมื่อระดับ 1 ไม่ใช่ระดับพื้น และทั้งระดับ 1 และ 2 มีการคลายตัวไปยังระดับต่ำกว่า

$$N_1 - N_2 = N \quad \dots\dots\dots (7.97 \text{ n})$$

$$N, + N_2 = \text{ค่าคงที่} \quad \dots\dots\dots (7.97 \text{ ข})$$

แทนสมการ (7.97) ลงในสมการ (7.81 ค) เราได้

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial N}{\partial t} - \frac{E_0 US}{h} \quad \dots\dots\dots (7.98)$$

ต่อไปเราเพิ่มพจน์การคลายตัว จากสมการ (7.98) เราหาได้ว่า

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} - \frac{E_0 US}{2h} = \frac{N_2}{5} \quad \dots\dots\dots (7.99)$$

ในที่นี้ τ คือ อายุขัยของระดับบน ถ้าสมมติว่าเวลาการคลายตัวของระดับล่างเร็วกว่าระดับบนมาก มันสามารถแสดงว่า $N_1 \ll N_2$ และ $(\partial N_1 / \partial t) \ll (\partial N_2 / \partial t)$ ซึ่งหมายความว่า เราสามารถให้ $N_2 = -N$ ในสมการ (7.99) และเราหาได้ว่า

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{E_0 US}{2h} - \frac{N}{5} \quad \dots\dots\dots (7.100)$$

อย่างไรก็ตาม สมการ (7.81 ก) และ (7.81 ข) ยังคงเหมือนเดิม ดังนั้นสมการสุดท้ายในกรณีนี้คือ สมการ (7.81 ก), (7.81 ข) และ (7.100) สำหรับสสาร และสมการ (7.82) สำหรับสนาม กรณีของเลเซอร์สี่ระดับแผ่ออกอย่างเอกพันธ์ เราจะไม่พิจารณามากไปกว่าที่ทำในที่นี้

สุดท้ายเราสังเกตได้ว่า มีวิธีต่างกันมากสำหรับการหาคำตอบของสมการ (7.90) อย่างประมาณโดยใช้การประมาณที่เรียกว่าอันดับหนึ่ง, อันดับสาม, อันดับห้า..... ซึ่งเราจะพิจารณาในหัวข้อต่อไปในกรณีของการแผ่ออกไม่เอกพันธ์

7.4.2 เลเซอร์หมวดเดียว (เส้นโค้งไม่เอกพันธ์)

สำหรับตัวอย่างที่สอง เรามองกรณีของเลเซอร์ไม่เอกพันธ์ออสซิลเลตบนหมวดเดียว ในกรณีนี้เราจะเขียนตัวแปร E, P, N เหมือนในสมการ (7.80) ภายใต้การประมาณที่พัฒนาไปอย่างช้า ๆ สมการสนามยังคงเหมือนกับสมการ (7.82) トラバได้ก็ตามที่เกี่ยวข้อกับสมการสสารจะมีสองกรณีที่แตกต่างกันคือ

- (1) อะตอมหยุดนิ่ง ความไม่เป็นเอกพันธ์เป็นผลมาจากสนามไฟฟ้าหรือสนามแม่เหล็กที่ไม่เอกพันธ์ (เช่น ทับทิมที่อุณหภูมิต่ำหรือแก้ว Nd³⁺)
- (2) อะตอมเคลื่อนที่ ความไม่เป็นเอกพันธ์เกิดจากปรากฏการณ์ดอปเปลอร์ (เช่น

เลเซอร์ก๊าซ)

สำหรับกรณีแรก สมการ (7.32) ยังคงใช้ได้ ถ้าหากว่าเราให้ E_0U แทน E_0 ในสมการ (7.32 ก) และ (7.32 ข) และมันเป็นเลเซอร์สามระดับด้วย สำหรับเลเซอร์สี่ระดับ เราต้องใช้สมการ (7.100) แทนสมการ (7.32 ข) (แทน N ด้วย N') สำหรับเลเซอร์สี่ระดับให้เปลี่ยน N' เป็น $-N'$ และบวกพจน์การยกกระดืบ* เราหาสมการที่ต้องการได้คือ

$$\frac{\partial C'}{\partial t} = -[(\omega - \omega'_0) + \phi] S' - \frac{C}{T_2} \quad \dots\dots\dots (7.101 \text{ ก})$$

$$\frac{\partial S'}{\partial t} = [(\omega - \omega'_0) + \phi] C' - \frac{\mu^2 E_0 U}{\hbar} N' - \frac{S'}{T_2} \quad \dots\dots\dots (7.101 \text{ ข})$$

$$\frac{\partial N'}{\partial t} = W_p N_1 + \frac{E_0 U S'}{2\hbar} - \frac{N'}{\tau} \quad (7.101 \text{ ค})$$

$$\dot{E}_0 + \frac{E_0}{2\tau_c} = -\frac{\omega}{2\varepsilon} \frac{1}{V_c} \int S U dV \quad \dots\dots\dots (7.101 \text{ ง})$$

$$[\dot{\phi} + (\omega - \Omega)] E_0 = -\frac{\omega}{2\varepsilon} \frac{1}{V_c} \int C U dV \quad \dots\dots\dots (7.101 \text{ จ})$$

สมการเหล่านี้พร้อมทั้งความสัมพันธ์ที่สร้างขึ้น

$$C = \int g^* C' d\omega'_0 \quad \dots\dots\dots (7.102 \text{ ก})$$

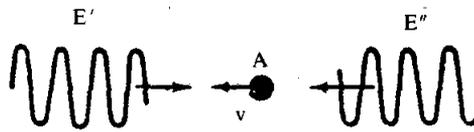
$$S = \int g^* S' d\omega'_0 \quad \dots\dots\dots (7.102 \text{ ข})$$

$$N = \int g^* N' d\omega'_0 \quad \dots\dots\dots (7.102 \text{ ค})$$

เมื่อ $g^* = g^*(\omega'_0 - \omega_0)$ ใช้อธิบายปัญหาสำหรับกรณีอะตอมหยุดนิ่งได้

สำหรับอะตอมเคลื่อนที่ที่สมการสสาร (7.101 ก) ถึง (7.101 ค) ไม่สามารถใช้ได้ และมีปัญหายุ่งยากมาก เรามาดูว่าทำไมสมการเหล่านี้จึงใช้ไม่ได้ เราเริ่มต้นโดยสังเกตว่าสนามในสมการ (7.80 ก) สามารถคิดเป็นการรวมกันได้ของสองคลื่นเคลื่อนที่ E' และ E'' (รูป 7.8) คลื่นแรกเคลื่อนที่ไปทางขวามือและคลื่นที่สองเคลื่อนที่ไปทางซ้ายมือ ต่อไปเราพิจารณาอะตอม A เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v ดังในรูป 7.8 จากปรากฏการณ์ดอปเปลอร์อะตอมนี้จะมองเห็นคลื่นทั้งสองมีความถี่ตามลำดับดังนี้

* เพื่อความสะดวก เราสมมติให้ $N' \ll N_1$ และพจน์การยกกระดืบในสมการ (7.101 ค) สามารถเขียนเป็น $W_p N_1$ แทนที่จะเป็น $W_p (N_1 - N)$



รูป 7.8 คลื่น E' และ E'' เคลื่อนที่ในทิศตรงกันข้ามเมื่อมองจากอะตอม A ซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v

$$\omega' = \omega(1 + v/c) \quad \dots\dots\dots (7.103 \text{ ก})$$

$$\omega'' = \omega(1 - v/c) \quad \dots\dots\dots (7.103 \text{ ข})$$

ดังนั้นอะตอมเหมือนกับว่ามันไม่ได้แผ่รังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีความถี่ต่างกันออกมา ขณะนี้เราสามารถมองเห็นจุดที่เกิดความยุ่งยากขึ้นแล้ว แต่ถ้าคลื่นเราแทนด้วยคลื่นเคลื่อนที่คลื่นหนึ่ง (เช่น E') ดังนั้นสมการ (7.103 ก) สามารถพิจารณาเป็นอะตอมหยุดนิ่ง แต่มีความถี่อภินา $\omega'_0 = \omega_0/[1 + (v/c)]$ ดังนั้นสมการ (7.101 ก) ถึง (7.101 ค) สามารถนำมาใช้ได้ เนื่องจากความยุ่งยากเกี่ยวกับคลื่นหนึ่งกรณีของอะตอมเคลื่อนที่ จึงไม่อาจพิจารณาไปกว่านี้ได้ อย่างไรก็ตามเราจะอ้างผลลัพธ์บางอย่างจากกรณีนี้เพื่อใช้ในการเปรียบเทียบ

ตอนแรกเราพิจารณาอะตอมหยุดนิ่ง ให้สภาวะคงตัวสมการ (7.101) กลายเป็น

$$C' = -(\omega - \omega'_0)T_2 S' \quad \dots\dots\dots (7.104 \text{ ก})$$

$$S' = -\frac{\mu^2 T_2}{\hbar[1 + (\omega - \omega'_0)^2 T_2^2]} N' E U = -\frac{ec\sigma'}{\omega} N' E_0 U \quad (7.104 \text{ ข})$$

$$N' = \frac{W_p \tau N_i}{[1 + (E_0^2 U^2 \tau / 2\hbar\omega) ec\sigma']} \quad \dots\dots\dots (7.104 \text{ ค})$$

$$\frac{1}{\tau_c} = c \int g^* \sigma' \left(\frac{1}{V_c} \int N' U^2 dV \right) d\omega'_0 \quad \dots\dots\dots (7.104 \text{ ง})$$

$$(\omega - \Omega) = -\frac{C}{2} \int (\omega - \omega'_0) T_2 g^* \sigma' \left(\frac{1}{V_c} \int N' U^2 dV \right) d\omega'_0 \quad \dots\dots\dots (7.104 \text{ จ})$$

ในที่นี้ บนฐานของสมการ (7.47) $\sigma' = \sigma'(\omega - \omega'_0)$ คือ (เอกพันธ์) ภาคตัดขวางการดูดกลืนสำหรับอะตอมด้วยความถี่อภินา ω'_0

การประมาณอันดับแรก เราให้ $E_0 \rightarrow 0$ ในสมการ (7.104 ค) หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า เราสมมติให้สนามเป็นสนามอ่อนมากจนไม่อาจจะสร้างการอิมิตัวของจำนวนประชากร N ขึ้นได้ เมื่อใช้กับเลเซอร์ตรงขีดเริ่มพอดีหรือสูงกว่าเล็กน้อย ดังนั้นจากสมการ (7.104 ค) เราได้

$$N' \approx W_p \tau N_i = N_0 \quad \dots\dots\dots (7.105)$$

ซึ่งเมื่อใช้กับสมการ (7.104 ง) ทำให้

$$N_0 = \frac{V_c}{V_a c \tau_c \sigma} \quad \dots\dots\dots (7.106)$$

เมื่อ

$$\sigma = \sigma(\omega - \omega_0) = \int |g^*(\omega'_0 - \omega_0) \sigma'(\omega - \omega'_0) d\omega'_0 \quad \dots\dots\dots (7.107)$$

คือ ภาคตัดขวางการดูดกลืนทั้งหมด เนื่องจากการชดของส่วนที่เป็นเอกพันธ์ (σ') และส่วนที่ไม่เป็นเอกพันธ์ (g^*) สมการ (7.106) ให้จำนวนการผันกลับประชากรที่ต้องการถึงขีดเริ่ม เราสามารถเห็นได้ทันทีว่าสมการ (7.106) คล้ายกับสมการ (5.33) ดังนั้นจากสมการ (7.105) เราได้ขีดเริ่มยกกระดืบ |คล้ายกับสมการ (5.34)|

$$W_{sp} = \frac{N_0}{N_T} \quad \dots\dots\dots (7.107 ก)$$

แทนสมการ (7.105) ลงในสมการ (7.104 จ) และใช้สมการ (7.106) และ (7.107) เราได้

$$\begin{aligned} \omega - \Omega &= -\frac{C}{2} \left(\frac{V_a}{V_c} N_0 \right) \int (\omega - \omega'_0) F_2 g^* \sigma' d\omega'_0 \\ &= -\frac{F_2}{2\tau_c} (\omega - \omega'_0) \quad \dots\dots\dots (7.108) \end{aligned}$$

ในที่นี้เราให้

$$(\omega - \omega'_0) = \frac{\int (\omega - \omega'_0) g^*(\omega'_0 - \omega_0) \sigma(\omega - \omega'_0) d\omega'_0}{\int |g^*(\omega'_0 - \omega_0) \sigma(\omega - \omega'_0) d\omega'_0} \quad \dots\dots\dots (7.109)$$

สมการ (7.108) ให้การอธิบายปรากฏการณ์ของการดึงความถี่ เราสามารถทำให้สมการง่ายขึ้นเมื่อ

- (1) พังก์ชัน g^* เป็นฟังก์ชันเกาส์เซียน คือ

$$g^*(\omega'_0 - \omega_0) \propto \exp - \frac{(\omega'_0 - \omega_0)^2}{(\Delta\omega_0^*/2)} \ln 2 \quad \dots\dots\dots (7.110)$$

เมื่อ $\Delta\omega_0^*$ คือ ความกว้างเส้นของเกาส์เซียนที่ครึ่งความสูง

- (2) เมื่อความกว้างเส้นที่ครึ่งความสูง $\Delta\omega_0$ ของเส้นตรงเอกพันธ์สั้นกว่าความกว้าง $\Delta\omega_0^*$ ของเส้นตรงไม่เอกพันธ์มาก ในกรณีนี้เราสามารถแสดงว่า สมการ (7.108) ลดรูปลงเป็น

$$(\omega - \Omega) = \frac{1}{\pi^2} \Delta\omega_c \int_0^{\infty} \exp(-x^2) dx \quad \dots\dots\dots (7.111)$$

$$\text{เมื่อ} \quad \xi = 2 \left| \frac{(\omega - \omega_0)}{\Delta\omega_0^*} \right| (\ln 2)^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots\dots (7.112)$$

สมการ (7.111) ให้ความสัมพันธ์ระหว่าง $\omega - \Omega$ และ $\omega - \omega_0$ เราสมมติเพิ่มเติมว่า $\omega - \omega_0 \ll \Delta\omega_0^*$ (กล่าวคือ $\xi \ll 1$) จากสมการ (7.111) เราหาได้ว่า

$$\frac{\omega - \Omega}{\omega_0 - \omega} = 0.939 \frac{\Delta\omega_c}{\Delta\omega_0^*} \quad (7.113)$$

เป็นความสัมพันธ์กันโดยตรงระหว่าง $\omega - \Omega$ และ $\omega_0 - \omega$ ในที่นี้เราหาได้เช่นเดียวกับกรณีของเส้นเอกพันธ์ สมการ (7.๑5) ซึ่งเป็นการดึงความถี่เชิงเส้น อย่างไรก็ตามเราสังเกตได้ว่าการนี้ (ไม่เอกพันธ์) การดึงเป็นเชิงเส้นเท่านั้นหลังจากที่เราได้ตั้งข้อสมมติสองข้อว่า

- (1) ใช้การวิเคราะห์อันดับแรก
- (2) $\omega - \omega_0 \ll \Delta\omega_0^*$

ดังนั้นในการวิเคราะห์อันดับแรก เราสามารถหาค่าขีดเริ่มของจำนวนการผันกลับประชากร ขีดเริ่มยกระดับพลังงาน และสมการอันดับแรกสำหรับการดึงความถี่ อย่างไรก็ตามมันเป็นไปไม่ได้ที่จะหาระดับของการออสซิลเลต แต่สามารถหาได้จากวิเคราะห์อันดับที่สาม กล่าวคือ เมื่อ N' ในสมการ (7.104 ค) ขยายออกเป็นอนุกรมในพจน์ยกกำลังของ E^2 และมีพจน์แรกเท่านั้นที่ยังคงเท่าเดิม (แปรตามตรงกับ E^2) นี่หมายความว่า การวิเคราะห์อันดับที่สามรวมถึงพจน์ C' และ S' (เนื่องจากการไปลาไรซ์) จนถึง E^3 การวิเคราะห์อันดับที่สาม เราจะประมาณสมการ (7.104 ค) ด้วย

$$\begin{aligned} N' &= W_p \tau N_i \left(1 - \frac{E_0^2 U^2}{2 \hbar \omega} \tau c \sigma' \right) \\ &= W_p \tau N_i \left(1 - \frac{q_0 U^2 c \tau \sigma'}{V_c} \right) \quad \dots\dots\dots (7.114) \end{aligned}$$

q_0 คือ จำนวนโฟตอนทั้งหมดในโพรงที่สภาวะคงตัว แทนสมการ (7.114) ลงในสมการ (7.104 ง) และแก้สมการหา q_0 ได้

$$q_0 = \frac{V_c^2}{V_a W_p \tau^2 \tau_c N_i c^2 (U^4)} \frac{(W_p \tau N_i V_a c \tau_c / V_c) \sigma - 1}{\int g^* \sigma'^2 d\omega_0'} \quad \dots\dots\dots (7.115)$$

เมื่อ

$$\langle U^4 \rangle = \frac{\int_a U^4 dv}{\int_a U^2 dv} = \frac{\int_a U^4 dV}{V_a} \dots\dots\dots (7.116)$$

ในที่นี้อินติกราลขยายออกตลอดช่วงของตัวกลางกิริยาเท่านั้น พจน์ q_0 ขึ้นกับความถี่การออสซิลเลต ω กำหนดด้วยพจน์ในวงเล็บสี่เหลี่ยมของสมการ (7.115) เมื่อ $\sigma = \sigma(\omega - \omega_0)$ กำหนดด้วยสมการ (7.107) $g^* = g^*(\omega'_0 - \omega)$ และ $\sigma' = \sigma'(\omega - \omega'_0)$ ความสำคัญทางฟิสิกส์ของพจน์ $(W_p \tau N_p V_a c c_c / V_c) \sigma$ สามารถเห็นได้โดยสังเกตว่า $W_p \tau N_p \sigma = N_0 \sigma$ เป็นสัมประสิทธิ์ของกำลังขยาย (ในการวิเคราะห์หอนดับแรก) $(c c_c)^{-1}$ คือ สัมประสิทธิ์การดูดกลืน และ V_a / V_c เป็นตัวร่วมที่เติมเข้าไป ซึ่งนับได้ว่ามีตัวกลางกิริยาอยู่ไม่เต็มโพรง ดังนั้นพจน์ที่เรากำลังพิจารณาก็คืออัตราส่วนระหว่างการได้รับ (ในการวิเคราะห์หอนดับแรก) และการสูญเสีย อย่างไรก็ตามพจน์ตัวหารนับได้ว่าเป็นการอิมิตัว (ของ N' คือพจน์ของการได้รับ) สมการสำหรับ q_0 มีความหมายทางกายภาพชัดเจนขึ้น สามารถหาได้ในกรณีความกว้างเส้นไม่เอกพันธ์ ซึ่งมีค่ามากกว่าความกว้างเส้นเอกพันธ์ ดังนั้น $\sigma' \propto \delta(\omega - \omega'_0)$ และ $\sigma = \sigma_0 \exp[-\xi(\omega - \omega_0)^2]$ เมื่อ

$$\xi = \frac{\ln 2}{(\Delta\omega_0^*/2)^2} \dots\dots\dots (7.117)$$

และ $\Delta\omega_0^*$ คือ ความกว้างเส้นไม่เอกพันธ์ ในกรณีนี้สมการ (7.115) กลายเป็น

$$q_0 \propto \frac{\{X_0 \exp[-\xi(\omega - \omega_0)^2]\} - 1}{\exp[-\xi(\omega - \omega_0)^2]} \dots\dots\dots (7.118)$$

X_0 คือ อัตราส่วนของอัตราการยกระดับจริง W_p ต่ออัตราการยกระดับขีดเริ่ม $W_{c,p}$ สำหรับ $\omega = \omega_0$

จากที่เราได้กล่าวข้างต้นว่า สำหรับอะตอมเคลื่อนที่จะมีปัญหายุ่งยากมาก อย่างไรก็ตามสมการสำหรับขีดเริ่มของจำนวนการกลับเป็นฝ่ายมากขีดเริ่มยกระดับและการดึงความถี่อันดับแรกยังคงเหมือนกับครั้งก่อน [สมการ (7.106), (7.107 ก) และ (7.113)] นี่เป็นสิ่งจำเป็นเพราะว่าในการวิเคราะห์หอนดับแรก ปัญหาก็คือ ความเป็นเส้นตรง (คือ C' และ S' ต่างแปรตามตรงกับ E_0) ดังนั้น สองคลื่นเคลื่อนที่ซึ่งรวมกันทำให้เกิดคลื่นนิ่งทำโดยไม่ขึ้นต่อกัน และสามารถศึกษาปัญหาเหมือนกับมีเพียงคลื่นเดียวเท่านั้น ดังนั้นสมการ (7.101) ยังคงเป็นจริงในทางกลับกันสมการสำหรับจำนวนโฟตอน q_0 ในโพรง แตกต่างจากสมการที่แล้ว เพราะว่ามันสามารถหาได้ด้วยการวิเคราะห์หอนดับสามเท่านั้น แทนที่จะเป็นสมการ (7.118) ในกรณีนี้เราหาได้ว่า

$$q_0 \propto \frac{X_0 \exp[-\zeta(\omega - \omega_0)^2] - 1}{1 + [1 + (\omega_0 - \omega)^2 T_2^2] - 1} = \frac{\alpha(\omega - \omega_0)}{\beta(\omega - \omega_0)} \dots \dots (7.119)$$

สมการ (7.119) ประกอบด้วยอัตราส่วนระหว่างสองฟังก์ชัน α และ β ซึ่งทั้งสองฟังก์ชันมีค่ามากที่สุดที่ $\omega = \omega_0$ ดังนั้นอัตราส่วนสามารถมีหลุมที่ $\omega = \omega_0$ สมการ (7.119) สามารถแสดงหลุมแลมเบิร์ต (ดูรูป 6.6) [โดยกำหนดเงื่อนไขใหม่ให้ q_0 มีค่าต่ำที่สุดที่ $\omega = \omega_0$ ก็คือ โดยให้ $(d^2q/d\omega^2)_{\omega_0} \geq 0$] เมื่อ

$$X_0 \geq \frac{1}{1 - (2\ln 2)(\Delta\omega_0/\Delta\omega_0^*)^2} \dots \dots (7.120)$$

เมื่อ $\Delta\omega_0^*$ คือ ความกว้างเส้นไม่เอกพันธ์ [ดูสมการ (7.117)] และ $\Delta\omega_0 = 2/T_2$ คือ ความกว้างเส้นเอกพันธ์ สำหรับเลเซอร์ก๊าซส่วนมาก $\Delta\omega_0 \ll \Delta\omega_0^*$ เงื่อนไขสมการ (7.120) สอดคล้องกับเลเซอร์ที่มีค่าสูงกว่าขีดเริ่มเท่านั้น จะต้องสังเกตว่าหลุมนี้ไม่อาจเกิดขึ้นในกรณีของอะตอมหยุดนิ่ง [ดูสมการ (7.118)] ดังนั้น ปรากฏการณ์หลุมแลมเบิร์ตจึงเกิดจากการเคลื่อนที่ของอะตอม จุดอื่นที่จะสังเกตคือ ความกว้างของหลุมมีขนาดเท่ากับความกว้างของฟังก์ชัน β และมีขนาดเดียวกับ $\Delta\omega_0$

7.4.3 เลเซอร์หลายหมวด: ทฤษฎีของการยึดหมวดเดี่ยว

สำหรับตัวอย่างที่สาม เราจะพิจารณากรณีของเลเซอร์ออสซิลเลตบนหลายหมวด และมีตัวดูดกลืนอิมิตัวเหมาะสมอยู่ในโพรงเพื่อยึดเฟสของหมวดออสซิลเลต (การยึดหมวดที่เดี่ยว ดูหัวข้อ 5.4.4) ดังนั้น เราจะพิจารณาเลเซอร์ชนิดดังแสดงในแผนภูมิจำแนก 7.9 ซึ่งมีเซลล์บรรจุด้วยตัวดูดกลืนอิมิตัวอยู่ในโพรง การเกิดอภินาตของมันเกิดที่ความถี่ ω_0 เหมือนกับเลเซอร์ ต่อไปเรามองดูผลของตัวดูดกลืนที่มีต่อเฟสของหมวดออสซิลเลต

ตามหลักการปัญหาจะไม่สามารถแก้ไขด้วยการคำนวณ สำหรับสนามที่กำหนดให้ค่าของตัวแปร N_1 และ P_1 สำหรับสารกิริยา และ (N_2, P_2) สำหรับตัวดูดกลืน ดังนั้น โปลาไรเซชันทั้งหมด $P = P_1 + P_2$ จะใช้เป็นพจน์แหล่งกำเนิดในสมการของแมกซ์เวลล์ [คือสมการ (7.40) หรือ (7.76)] อย่างไรก็ตาม เราจะทำให้ความซับซ้อนของปัญหาง่ายขึ้นมากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ โดยทำให้มันสอดคล้องถูกต้องกับปัญหาเสมอ เราสมมติว่าผลของตัวกลางกิริยาทำให้เกิดพจน์กำลังขยาย $-\dot{E}_m/\tau_g$ เพิ่มขึ้นในสมการ (7.76) หมายความว่าเราได้ละทิ้งพจน์การอิมิตัวของจำนวนประชากร N_1 (และของกำลังขยายด้วย) แท้ ๆ ที่ทำให้แสงปล่อยออกมาไม่เพิ่มขึ้นอย่างไม่จำกัด แต่เมื่อมันถึงค่าสูงสุดแล้วมันจะคลายตัวลดลง ดังนั้นเราละทิ้งการอิมิตัวของกำลัง

ขยายที่สอดคล้องกับการศึกษาปัญหาในระหว่างสถานะเริ่มต้นของการเพิ่มขึ้น (คือส่วนที่ เกิดก่อนของคลื่นดลที่แสดงในรูป 5.21 b) ให้เราสังเกตว่าขณะนี้เราได้เกี่ยวข้องกับปรากฏการณ์ ชั่วขณะ ทั้งนี้เพราะว่ามีตัวดูดกลืนที่มีผลซ้อน (double effect) อยู่ ทำให้ทั้งควิตชิงและการ ยืดหดเพิ่มขึ้น ดังนั้นในกรณีนี้เราต้องคงอนุพันธ์เวลาของอัมปลิจูดและเฟสของโหมดออสซิลเลตต่าง ๆ เอาไว้ อย่างไรก็ตาม ในบางครั้งการใส่ตัวดูดกลืนอิมิตัวเข้าไปในโพรงของเลเซอร์ ต่อเนื่อง สามารถสร้างคลื่นส่งออกยืดหดอย่างต่อเนื่องได้ สุดท้ายเราจะสมมติว่าตัวดูดกลืนอิมิตัวเป็นแบบการแผ่ออกเอกพันธ์ เราเห็นได้ว่าสมการที่ตรงกับกรณีเหล่านี้ ยังคงเป็นสมการ (7.14) และ (7.76) คือ

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\left(\frac{2}{\hbar\omega_0}\right) \frac{\partial P}{\partial t} E - \frac{N - N_1}{T_1} \quad \dots\dots\dots (7.121 \text{ ก})$$

$$-\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{2}{T_2} \frac{\partial P}{\partial t} + \omega_0^2 P = \left(\frac{2\omega_0 \mu^2}{\hbar}\right) EN \quad \dots\dots\dots (7.121 \text{ ข})$$

$$\ddot{E}_m - \frac{1}{\tau} \dot{E}_m + \Omega_m^2 E_m = -\frac{1}{\epsilon V_c} \int_V \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \dot{U}_m DV \quad \dots\dots\dots (7.121 \text{ ค})$$

เมื่อ N และ P ในที่นี้ หมายถึงตัวดูดกลืนอิมิตัว และเราได้ให้

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_g} - \frac{1}{\tau_c} \quad \dots\dots\dots (7.122)$$

ในที่นี้เราใช้สมการ (7.14) เป็นสมการสสารมากกว่าใช้สมการ (7.30) อย่างไรก็ตาม การวิเคราะห์สามารถทำได้เช่นกันเมื่อใช้สมการ (7.30) เพื่อความสะดวกเราจะพิจารณากรณีของสามโหมดออสซิลเลตด้วยความถี่ $\omega_m - \Delta\omega$, ω_m , $\omega_m + \Delta\omega$ เมื่อ $\Delta\omega$ คือ ผลต่างของความถี่ระหว่างโหมดติดกันของโพรง ($\Delta\omega = \pi c/d$ สำหรับโพรงกระจกระนาบ) ดังนั้นสนามไฟฟ้าอยู่ในรูปของ

$$\begin{aligned} E(\vec{r}, t) &= \sum_n E_n(t) U_n(\vec{r}) \\ &= \frac{1}{2} [A_{m-1} U_{m-1} \exp[i(\omega_m - \Delta\omega)t] + A_m U_m \exp(i\omega_m t) \\ &\quad + A_{m+1} U_{m+1} \exp[i(\omega_m + \Delta\omega)t] + c.c.] \quad \dots\dots\dots (7.123) \end{aligned}$$

ในที่นี้ c.c. ใช้แทนเป็นฟังก์ชันสังยุคเชิงซ้อน (complex conjugate) และ $A_m = A_m(t)$ เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนทั่วไป และสามารถเขียนเป็น

$$A_m = E_{0m} \exp(i\phi_m) \quad \dots\dots\dots (7.124)$$

เมื่อ E_{0m} และ φ_m ต่างขึ้นกับเวลา จากสมการ (7.121) สามารถเห็นได้ว่า ถ้าละทิ้งพจน์ความถี่ $2\omega_m$ (การประมาณคลื่นลักษณะหมุน) เราสามารถให้

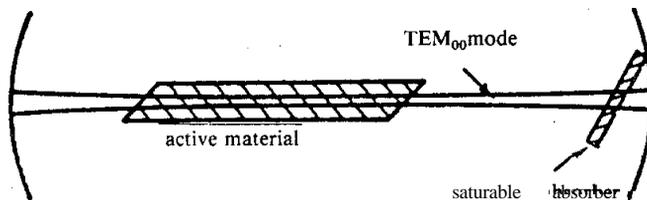
$$P = \frac{1}{2} \sum_k \{ P_{m-k} \exp[i(\omega_m - k\Delta\omega)t] + c.c. \} \quad \dots\dots\dots (7.125 \text{ ก})$$

$$N = \frac{1}{2} \sum_k [N_k \exp(ik\Delta\omega t) + c.c.] \quad \dots\dots\dots (7.125 \text{ ข})$$

เมื่อ $P_m(\vec{r}, t)$ และ $N_k(\vec{r}, t)$ เป็นฟังก์ชันของเวลาแปรอย่างช้า ๆ สังเกตได้ว่าเมื่อเปรียบเทียบกับกรวิเคราะห์ข้างต้นจะได้ว่า เราเลือกใช้สัญลักษณ์เชิงซ้อนกับกรณีนี้

ต่อไปเราสมมติว่า $\Delta\omega \ll 1/T_2$ หมายความว่าที่ตำแหน่งทุกจุดในโพรงอัมพลิจูดสนาม เปลี่ยนแปลงอย่างช้า ๆ เมื่อเทียบกับ T_2 ความจริงจากสมการ (7.123) สามารถเห็นได้ว่าอัมพลิจูดสนามมีพจน์บีต (beats) อยู่ด้วย ออสซิลเลตที่ความถี่ $\Delta\omega$ เมื่ออัมพลิจูดสนามเปลี่ยนแปลงอย่างช้า ๆ เทียบกับ T_2 อัมพลิจูดของโปลาไรเซชันจะเปลี่ยนแปลงอย่างช้า ๆ เมื่อเทียบกับ T_2 ด้วย ดังนั้นเราสามารถให้การประมาณสมการอัตราโดยสมมติเพิ่มเติมว่า $\omega_m = \Omega_m = \omega_0$ ซึ่งหมายความว่าเราสามารถให้

$$\left| \left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right) + \omega_0^2 P \right| \ll \left(\frac{2}{T_2} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)$$



รูป 7.9 แสดงแผนภูมิของการยืดหดเลเซอร์เลื่อย ที่ปลายของตัวกลางกิริยาเอียงเป็นมุมบรีวสเตอร์ เพื่อจำกัดการสะท้อนที่แปลกปลอมในโพรง ผิวหน้าของตัวถูกคลื่นอ้อมตัวก็เอียงเป็นมุมบรีวสเตอร์ด้วยเพื่อเหตุผลเดียวกัน เพื่อความสะดวกจึงไม่ได้แสดงลำแสงเนื่องจากการสะท้อน

ในสมการ (7.121 ข) ถ้าเราสมมติว่า $1/T_2 \ll \omega_0$ จะได้ $\Delta\omega \ll \omega_0$ นั่นคือ เราสามารถใช้การประมาณที่พัฒนาไปอย่างช้า ๆ สำหรับสนามแม่เหล็กไฟฟ้า คือ

$$\frac{d^2 A_m}{dt^2} \ll \omega_0 \frac{dA_m}{dt} \quad \dots\dots\dots (7.126 \text{ ก})$$

$$\frac{dA_m}{dt} \ll \omega_0 A_m \quad \dots\dots\dots (7.126 \text{ ข})$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = -\omega_0^2 P \quad \dots\dots\dots (7.126 \text{ ก})$$

ด้วยการสมมติเหล่านี้ สมการ (7.121) ลดรูปลงเป็น

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -2 \frac{E^2}{E_S^2} \frac{N}{T_1} - \frac{N-N_t}{T_1} \quad \dots\dots\dots (7.127 \text{ ก})$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = (ec\sigma_0)EN \quad \dots\dots\dots (7.127 \text{ ข})$$

$$2\dot{A}_m - \frac{1}{\tau} A_m = -\frac{i\omega_0}{\epsilon V_c} \int P_m U_m dV \quad \dots\dots\dots (7.127 \text{ ค})$$

สนามอิมพัลส์ E_S ที่อยู่ในสมการ (7.127 ก) สัมพันธ์กับความเข้มอิมพัลส์ I_S ของตัวดูดกลืน [ดูสมการ (2.128)] กำหนดด้วย $I_S = \hbar\omega_0/2\sigma_0 T_1$ ด้วยเหตุนี้ E_S จึงกำหนดด้วยความสัมพันธ์ $E_S^2 = 2I_S/ec$ และใช้สมการ (7.47) กับ $\Delta\omega = 0$ ให้

$$E_S^2 = \frac{\hbar^2}{\mu^2 T_2 T_1} \quad \dots\dots\dots (7.127 \text{ ง})$$

ปริมาณ σ_0 ในสมการ (7.127 ข) คือ ภาคตัดขวางการดูดกลืนของตัวดูดกลืนสำหรับ $\Delta\omega = 0$ [ดูสมการ (7.47)]

เพื่อให้การคำนวณง่ายขึ้น เรากำหนดให้ $(2E^2/E_S^2 T_1)N \approx (2E^2/E_S^2 T_1)N_t$ ในสมการ (7.127 ก) และเห็นได้จากสมการ (7.127 ก) และ (7.127 ข) ว่ามีพจน์ไม่เป็นเชิงเส้นอยู่ใน N จนถึง E^2 เท่านั้น และมีพจน์ไม่เป็นเชิงเส้นอยู่ใน P ถึง E^3 (การประมาณอันดับสาม) ในกรณีนี้ สมการ (7.125 ข) กลายเป็น

$$N = N_0 + \frac{1}{2} [N_t \exp(i\Delta\omega t) + \text{c.c.}] \quad \dots\dots\dots (7.128)$$

และจากสมการ (7.127 ก) เรามี

$$N_0 = N_t [1 - (1/E_S^2) (|A_{m-1}|^2 U_{m-1}^2 + |A_m|^2 U_m^2 + |A_{m+1}|^2 U_{m+1}^2)] \quad \dots\dots\dots (7.129 \text{ ก})$$

$$N_t = \frac{N_t}{E_S^2} \frac{A_{m-1}^* A_m U_{m-1} U_m + A_m^* A_{m+1} U_m U_{m+1}}{1 + i\Delta\omega T_1} \quad \dots\dots\dots (7.129 \text{ ข})$$

สมการ (7.129 ก) แสดงพฤติกรรมของการอิมพัลส์ จากสมการ (7.127 ข) พบว่า

$$P_m = (ec\sigma_0/2i\omega_0) (N_t A_{m-1} U_{m-1} + 2N_0 A_m U_m + N_t^* A_{m+1} U_{m+1}) \quad \dots\dots\dots (7.130)$$

และจากสมการ (7.127 ค) โดยใช้สมการ (7.130) และ (7.129) เราหาได้ว่า

$$2\dot{A}_m - \frac{1}{\tau} A_m = -\frac{1}{\tau_a} \left\{ A_m - \frac{A_m^3}{E_S^2} \left[(|A_{m-1}|^2 g + |A_m|^2 f + |A_{m+1}|^2 g) + \frac{|A_{m-1}|^2 (1 - i\Delta\omega T_2) + |A_{m+1}|^2 (1 + \Delta\omega T_1)}{1 + (\Delta\omega T_1)^2} h \right] - \frac{2}{E_S^2} \frac{A_{m-1} A_m^* A_{m+1}}{1 + (\Delta\omega T_1)^2} \cdot h \right\} \quad \dots\dots\dots (7.131)$$

เมื่อ $\frac{1}{\tau_a} = \frac{c\sigma N_f}{V_c} \int U_m^2 dV = \frac{c\sigma_0 N_f V_a}{V_c} \quad \dots\dots\dots (7.132 ก)$

$$f = \frac{\int U_m^4 dV}{\int U_m^2 dV} \quad \dots\dots\dots (7.132 ข)$$

$$g = \frac{\int U_{m-1}^2 U_m^2 dV}{\int U_m^2 dV} \approx \frac{\int U_{m+1}^2 U_m^2 dV}{\int U_m^2 dV} \quad \dots\dots\dots (7.132 ค)$$

$$h = \frac{\int U_{m-1} U_m^2 U_{m+1} dV}{\int U_m^2 dV} \quad \dots\dots\dots (7.132 ง)$$

อินทิกราลของสมการเหล่านี้ ขยายออกไปตลอดปริมาตรของเซลล์ที่บรรจุในตัวดูดกลืนอิมพัลส์ มันสามารถเห็นได้ทันทีจากสมการ (7.36) ว่า τ_a ใช้แทนเวลาการลดระดับของ $|A_m|^2$ ก็คือ ของจำนวนโฟตอนซึ่งเป็นผลมาจากการสูญเสียอิมพัลส์ของตัวดูดกลืน

สำหรับหมวดคออสซิลเลต n หมวดสมการ (7.131) สร้างชุดสมการอนุพันธ์ n สมการในตัวไม่ทราบค่า A_m n ตัว เพื่อหาว่าตัวดูดกลืนอิมพัลส์สามารถยึดเฟสของหมวดเหล่านั้นได้อย่างไร เราจะจำกัดเพียงพิจารณากรณีอิมพัลส์จุดของหมวดทั้งหมดมีค่าเท่ากัน โดยสมมติให้การได้รับและการสูญเสียของแต่ละหมวดเท่ากัน ในกรณีนี้เราจะให้

$$A_m = A \exp(i\phi_m) \quad \dots\dots\dots (7.133)$$

ดังนั้น สมการ (7.131) กลายเป็น

$$2A + 2i\dot{\phi}_m A - \frac{1}{\tau} A = \frac{1}{\tau} \left\{ A - \frac{A^3}{E_S^2} \left[f + g + \frac{2g}{1 + (\Delta\omega T_1)^2} \right] - \frac{2A^3 h}{E_S^2 [1 + (\Delta\omega T_1)^2]} \exp[i(\phi_{m-1} - 2\phi_m + \phi_{m+1})] \right\} \quad \dots\dots\dots (7.134)$$

จัดให้ส่วนเป็นจริงและส่วนจินตภาพของสมการ (7.134) ทั้งสองด้านให้เท่ากัน ได้สองสมการดังนี้

$$2\dot{A} = \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_a} \right) A + \frac{A^3}{\tau_a E_S^2} \left[f + g + \frac{2g}{1 + (\Delta\omega T_1)^2} \right]$$

$$+ \frac{2A^3h}{\tau_a E_S^2 [1 + (\Delta\omega T_1)^2]} \cos(\varphi_{m-1} - 2\varphi_m + \varphi_{m+1}) \quad \dots\dots\dots (7.135 \text{ ก})$$

$$\varphi_m = \frac{h}{1 + (\Delta\omega T_1)^2} \left(\frac{A}{E_S^2 \tau_a} \right) \sin(\varphi_{m-1} - 2\varphi_m + \varphi_{m+1}) \quad \dots\dots\dots (7.135 \text{ ข})$$

ให้สังเกตว่าเรามี $\dot{A} > 0$ ถ้า $1/\tau > 1/\tau_a$ และจากสมการ (7.122) เราได้

$$\frac{1}{\tau_g} > \frac{1}{\tau_c} + \frac{1}{\tau_a} \quad \dots\dots\dots (7.136)$$

ซึ่งแสดงว่าการได้รับต้องมากกว่าการสูญเสียของโพรง ($1/\tau_c$) บวกด้วยการสูญเสียเนื่องจากตัวดูดกลืน ดังนั้นถ้าสมการ (7.136) ถูกต้องใช้ได้ A จะเริ่มต้นจากการรบกวน (การเปล่งแสงตามปกติวิสัย) และจะเกิดมากขึ้นอย่างรวดเร็วเนื่องจากพจน์ A^3 ซึ่งอธิบาย (การวิเคราะห์ถึงอันดับสาม) ปรากฏการณ์การดูดกลืนอิมพัลส์ ในข้อจำกัดจากการวิเคราะห์นี้ A จะโตขึ้นอย่างไม่จำกัด ในทางปฏิบัติค่าของ A สูงเพียงพอ กำลังขยายของตัวกลางกิริยาจะเริ่มอิมพัลส์ และ $A(t)$ จะถึงค่ามากที่สุด หลังจากนั้นจะลดลง (ดูรูป 5.21 b)

จากสมการ (7.135 ข) แสดงว่ามีสองคำตอบที่สถานะคงตัวสำหรับเฟสคือ

$$\varphi_{m-1} - 2\varphi_m + \varphi_{m+1} = 2n\pi \quad \dots\dots\dots (7.137 \text{ ก})$$

$$\varphi_{m-1} - 2\varphi_m + \varphi_{m+1} = (2n + 1)\pi \quad \dots\dots\dots (7.137 \text{ ข})$$

สามารถแสดงคำตอบถาวรของมัน คือสมการ (7.137 ก) หรือสมการ (7.137 ข) เป็นไปตามทั้ง $h \leq 0$ ให้เราสมมติว่าที่ t ใดๆ บางค่าเฟส φ_m ได้ย้ายไปด้วยค่าเล็กน้อย $\delta\varphi_m$ จากค่าสถานะคงตัวของมัน ดังนั้นเราให้ $\varphi_m = \varphi_0 + \delta\varphi_m$ ในที่นี้ φ_0 คือ ค่าคงที่สอดคล้องกับสมการ (7.137 ก) [หรือ (7.137 ข)] จากสมการ (7.135 ข) เราพบว่า

$$\delta\varphi_m = \pm \frac{2h}{1 + (\Delta\omega T_1)^2} \left(\frac{A^2}{E_S^2 \tau_a} \right) \delta\varphi_m \quad \dots\dots\dots (7.138)$$

ในที่นี้เครื่องหมาย + หรือ - เป็นไปตาม φ_0 ที่เป็นคำตอบของสมการ (7.137 ข) หรือ (7.137 ก) ดังนั้นมันสามารถเห็นได้ว่า ถ้า $h > 0$ นั่นคือ $\delta\varphi_m$ มีค่าลดลง ถ้าถือตามสมการ (7.137 ก) ดังนั้นสำหรับ $h > 0$ คำตอบถาวรกำหนดด้วยสมการ (7.137 ก) ในทางกลับกันสำหรับ $h < 0$ คำตอบถาวรกำหนดด้วยสมการ (7.137 ข) ขนาดของเวลาสตรระดับ t_0 สำหรับ $\delta\varphi_m$ และขนาดของเวลาของเฟสที่ยึดไว้ สามารถหาได้จากสมการ (7.138) คือ

$$t_0 = \tau_a [1 + (\Delta\omega T_1)^2] (E_S^2 / 2hA^2) \quad \dots\dots\dots (7.139)$$

ถ้าเฟสของหมวดถูกยึดไว้ตามสมการ (7.137) t_0 จำเป็นต้องสั้นกว่าเวลาที่เกิดขึ้นของ $A(t)$ มันน่าสนใจที่สังเกตว่าถ้า $1 + (\omega T_1)^2 \gg 1$ t_0 กลายเป็นค่าใหญ่มาก และการยึดหมวดไม่สามารถเกิดขึ้นได้ เนื่องจากการตอบสนองของตัวดูดกลืนซ้ำ (คือ T_1 ใหญ่มาก) จำนวนประชากรตัวดูดกลืนไม่เป็นไปตามพจน์ของรูป $\exp(i\Delta\omega)$ ที่เกิดจากหมวดที่เป็นบีต

ในขณะนี้เราเหลือเพียงแต่หาเครื่องหมายของปริมาณ h ที่กำหนดด้วยสมการ (7.132 ง) โดยสมมติว่า $u_m(\vec{r})$ กำหนดด้วยสมการ (7.78) เราแทนสมการ (7.78) ลงในสมการ (7.132 ง) และสมมติความหนาของเซลล์มากกว่าความยาวคลื่นมาก* แต่อย่างน้อยก็ความยาวของโพรงมาก และ $\Delta\omega = \pi c/d$ เราพบว่า

$$h = \frac{1}{8} [2\cos(2\pi z_0/d) + 1] \quad \dots\dots\dots (7.140)$$

ในที่นี้ z_0 เป็นพิกัดของศูนย์กลางเซลล์ ดังนั้นเราสามารถเห็นได้ว่าตำแหน่ง z_0 ของตัวดูดกลืนภายในโพรงใช้พิจารณาเครื่องหมายของ h ได้ นั่นคือ คำตอบถาวรสำหรับเฟสโดยเฉพาะ เราหาได้คือ

$$h = \frac{3}{8} > 0 \quad (z_0 = 0, z_0 = d) \quad \dots\dots\dots (7.141 \text{ ก})$$

$$h = -\frac{1}{8} < 0 \quad (z_0 = \frac{1}{2}d) \quad \dots\dots\dots (7.141 \text{ ข})$$

ในกรณีที่เซลล์อยู่ตรงปลายข้างหนึ่งของโพรง ($z_0 = 0$ หรือ $z_0 = d$) คำตอบถาวรกำหนดด้วยสมการ (7.137 ก) และสามารถเขียนมันใหม่ (ละทิ้งพจน์ $2n\pi$ ได้ เพราะว่ามันไม่มีความสำคัญ)

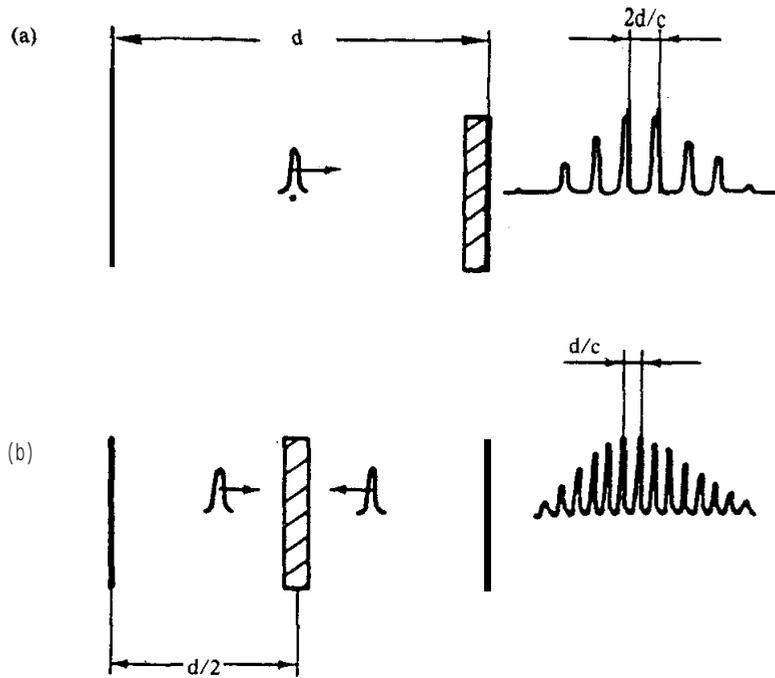
$$\varphi_m - \varphi_{m-1} = \varphi_{m+1} - \varphi_m \quad \dots\dots\dots (7.142)$$

ซึ่งแสดงว่าความแตกต่างของเฟสระหว่างสองหมวดติดกันใด ๆ เท่ากัน กรณีนี้เราพิจารณาไปแล้วในหัวข้อ 5.4.4 [ดูสมการ (5.79)] จากสมการ (7.123) และ (7.73) เราสังเกตได้ว่าถ้าเฟสกำหนดด้วยสมการ (7.142) ดังนั้นสนามทั้งหมด $E(\vec{r}, t)$ ประกอบด้วยคลื่นดลของแสงด้วยระยะเวลาเท่ากับส่วนกลับของความกว้างแถบการออสซิลเลตทั้งหมด และเคลื่อนที่กลับไปกลับมาภายในโพรง (รูป 7.10 a) ดังนั้นลำแสงส่งออกประกอบด้วยชบวนของคลื่นดลเคลื่อนที่ห่างกันด้วยเวลาเท่ากับสองเท่าของเวลาที่เคลื่อนผ่านระหว่างสองกระจก ($2d/c$) ตามที่ได้แสดงในหัวข้อ 5.4.4

ในกรณีที่เซลล์อยู่ตรงศูนย์กลางของโพรง ($z_0 = d/2$) คำตอบถาวรกำหนดด้วย

สมการ (7.137 ข) ซึ่งสามารถเขียนเป็น

$$(\phi_{m-1} - \phi_m = \phi_m - \phi_{m-1} + \pi) \dots \dots \dots (7.143)$$



รูป 7.10 แสดงตำแหน่งของเซตหักเหบนบนพฤติกรรมการหักเห

(a) เซตหักเหตรงปลายข้างหนึ่งของโพรง คลื่นแสงประกอบด้วยขบวนของคลื่นคลห่างกันเป็นระยะ $2d/c$

(b) เซตหักเหที่ศูนย์กลางโพรง คลื่นแสงประกอบด้วยขบวนของคลื่นคลห่างกันเป็นระยะ d/c

เป็นกรณีเฉพาะของการหักเหซึ่งไม่ได้กล่าวถึงในหัวข้อ 5.4.4 เราเพิ่งสังเกตเห็นว่า จากสมการ (7.123) และ (7.124) มันสามารถแสดงว่า [สมมติสมการ (7.143) เป็นความสัมพันธ์ระหว่างเฟส] สนาม $E(\vec{r}, t)$ ประกอบด้วยสองคลื่นคลแสงเหมือนกัน แต่ละคลื่นคลมีระยะเวลาเท่ากับส่วนกลับของความกว้างแถบการออสซิลเลตเคลื่อนที่ในทิศตรงกันข้ามในโพรง และมาพบกันที่ $z = d/2$ ในตัวดูดกลืน (ดูรูป 7.10 b) ดังนั้นคลื่นคลแสงประกอบด้วยขบวนของคลื่นคลห่างกันด้วยเวลาเท่ากับเวลาที่ใช้เคลื่อนผ่านระยะระหว่างสองกระจก

7.5 สรุป

1. สมการสสารสำหรับการประมาณคลื่นลักษณะหมุนแบบกึ่งดั้งเดิม คือ

(1) กรณีการแผ่อกเอกพันธ์

$$P = C \cos(\omega t + \phi) + S \sin(\omega t + \phi)$$

$$\dot{C} = -(\Delta\omega + \dot{\phi})S - \frac{C}{T_2}$$

$$\dot{S} = (\Delta\omega + \dot{\phi})C + \frac{\mu^2 E_0}{\hbar} N - \frac{S}{T_2}$$

$$\dot{N} = -\frac{E_0 S}{\hbar} - \frac{N - N_1}{T_1}$$

เมื่อ $C = N_1 \mu R_1$

$$S = N_1 \mu R_{11}$$

(2) กรณีการแผ่อกไม่เอกพันธ์

$$N = \int g^* N' d\omega_0'$$

$$P = C \cos(\omega t + \phi) + S \sin(\omega t + \phi)$$

$$C = \int g^* C d\omega_0'$$

$$S = \int g^* S d\omega_0'$$

$$\dot{C} = -(\Delta\omega + \dot{\phi})S' - \frac{C'}{T_2}$$

$$\dot{S} = (\Delta\omega + \dot{\phi})C' + \frac{\mu^2 E_0}{\hbar} N' - \frac{S'}{T_2}$$

$$\dot{N} = -\frac{E_0 S'}{\hbar} - \frac{N' - N_1}{T_1}$$

เมื่อ $\Delta\omega' = \omega - \omega_0'$, $C = N_1 \mu R_1'$ และ $S' = N_1 \mu R_{11}'$

2. สมการสนามสำหรับการประมาณแบบกึ่งดั้งเดิม ใช้สมการของแมกซ์เวลล์ อธิบายไปลาไรเซชันบนคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าของสสารด้วยสมการ (7.40) และ (7.14) สำหรับเส้นโค้งเอกพันธ์ หรือสมการ (7.40) และ (7.15) สำหรับเส้นโค้งไม่เอกพันธ์

3. สำหรับการประมาณใช้กับคลื่นเคลื่อนที่ คือ

(1) การประมาณที่พัฒนาเปลี่ยนแปลงไปอย่างช้า ๆ

(2) การประมาณสมการอัตรา

4. สำหรับคลื่นนิ่ง สมการสนามคือ $E(\vec{r}, t) = \sum E_n(t) U_n(\vec{r})$ โดยใช้การประมาณคลื่นลักษณะหมุน เราได้สมการสำหรับเลเซอร์หมวดเดียว คือสมการ (7.81 ก), (7.81 ข) และ (7.100) สำหรับสสาร และสมการ (7.82) สำหรับสนาม และสมการสำหรับเลเซอร์หลายหมวด

ที่มีตัวคูณกัณนิมตัวอยู่ภายใน เราได้สมการสนามกำหนดด้วยสมการ (7.123) หลังจากใช้การ
ประมาณที่พัฒนาไปอย่างช้า ๆ เราได้สมการของการเปลี่ยนแปลงเป็นไปตามสมการ (7.127)
และ (7.131) สำหรับหมวดต่าง ๆ

แบบฝึกหัดที่ 7

- 7.1 สำหรับระดับความเข้มต่ำ (คือสำหรับ $I \ll \hbar\omega/2\sigma T_1$) จากสมการ (7.46 ข) ให้แสดงว่า ดัชนีหักเหเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงคือ

$$\eta = \left(\frac{\Delta\omega T_2}{2} \right) \frac{\sigma N \lambda_0}{2\pi}$$

ด้วยความช่วยเหลือของสมการ (7.47) ให้แสดงว่าค่ามากที่สุดของดัชนีหักเหเกิดขึ้นที่ความถี่ $\Delta\omega$ ซึ่ง $\Delta\omega T_2 = 1$ และจงคำนวณค่ามากที่สุดของ η ด้วย

- 7.2 คลื่นดลแสงคลื่นหนึ่งมีช่วงระยะเวลา $\tau_p \approx 1$ พิโควินาที และความยาวคลื่น $\lambda = 0.69$ ไมครอน ได้เคลื่อนที่ผ่านแท่งแท็บทิมที่อุณหภูมิห้อง สำหรับปัญหานี้เราจะต้องใช้การประมาณแบบใด ?
- 7.3 ถ้าช่วงระยะเวลาของคลื่นดลแสงในข้อ 7.2 เป็น 1 นาโนวินาที มากกว่าเป็น 1 พิโควินาที เราจะต้องใช้การประมาณแบบใด ?
- 7.4 จงแสดงว่าสมการ (7.55) เป็นคำตอบของสมการ (7.54) โดยการแทนค่าโดยตรง
- 7.5 ใช้สมการ (7.46 ง), (7.47) และ (7.49 ก) ให้แสดงว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นจริง

$$\sigma_0 J = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta^2 dt$$

เมื่อ J คือ การอินทิเกรตฟลักซ์โฟตอน (คือ $J = \int_{-\infty}^{+\infty} F dt$)

- 7.6 โดยใช้สมการ (7.55) และผลลัพธ์ของข้อ 7.5 ให้แสดงว่าความกว้างคลื่นดลของคลื่นดล π สามารถเขียนได้เป็น

$$l_p = \frac{1.76}{\sigma_0 J} T_2$$

- 7.7 จงใช้สมการ (7.67) และผลลัพธ์ที่หาได้ในข้อ 7.5 พิสูจน์ว่าความกว้างของคลื่นดล 2π สามารถเขียนได้เป็น

$$l_p = \frac{7.04}{\sigma_0 J} T_2$$

- 7.8 จงพิสูจน์สมการ (7.74)

- 7.9 จงคำนวณค่าของ X_0 (อัตราส่วนระหว่างอัตราการยกกระดักที่แท้จริงและอัตราการยกกระดักขีดเริ่ม ที่ $\omega = \omega_0$) สำหรับหลุมแลมบ์ซึ่งหาได้ในเลเซอร์ He-Ne บนเส้นการเปลี่ยนแปลงสีแดงของมัน ($\lambda = 0.6$ ไมครอน) ข้อสังเกต : ความกว้างเส้นเอกพันธ์สามารถอธิบายได้ด้วยเวลาการคลายตัว T_2 กำหนดด้วยสมการ $T_2^{-1} = \tau_s^{-1} + \tau_p^{-1}$ ในที่นี้ τ_s (~100 นาโนวินาที) และ τ_p (~10 นาโนวินาที) เป็นเวลาการลดระดับโดยแผ่รังสีของระดับเลเซอร์บน (สถานะ s) และระดับเลเซอร์ล่าง (สถานะ p)
- 7.10 ให้แสดงว่า ถ้า $\omega_0 R_2 \gg R_1/T_2$ สมการ (7.11 ก) และ (7.11 ข) ลดรูปลงเป็น (7.10 ก) (ข้อแนะนำ : ใช้อนุพันธ์เวลากับทั้งสองข้างของสมการ (7.11 ก) และใช้สมการ (7.11 ข) แล้วค่อยสมมติ $\omega_0 R_2 = R_1$)