

## บทที่ 4

### โพรงำทอนทักณะเฉื่อย

#### วัตถุประสงค์

วัตถุประสงค์ของการศึกษานี้ คือ

1. ให้นักศึกษาสามารถเปรียบเทียบโพรงำทอนแบบต่าง ๆ และสามารถอธิบายได้ว่า โพรงำทอนแบบใดเป็นโพรงำทอนเสถียรหรือไม่เสถียร
2. ให้นักศึกษาสามารถนำการปฏิบัติแบบฟอกซ์และลี (Fox and Li Treatment) ไปใช้ในวิชาทัศนศาสตร์ทั่วไป
3. ให้นักศึกษาสามารถจำแนกหมวดโพรงำทอนต่าง ๆ ด้วยชุดดัชนีของ  $l$ ,  $m$ ,  $n$

## 4.1 บทนำ

โพรงำทอนทศนะเจือย เราหมายถึง โพรงที่ประกอบด้วยผิวสะท้อนแสงและบรรจุด้วยตัวกลางไดอิเล็กตริกที่เป็นทั้งเอกพันธ์ (homogeneous) สมลัษณ์ (isotropic) และเจือย (passive) เราจะเรียกหมวดของโพรงำทอนที่กำหนดในหัวข้อ 2.1 ใหม่เป็นโครงรูปของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าคงตัว (stationary e.m. field configuration) ซึ่งเหมาะสมกับสมการของแมกซ์เวลล์ และเงื่อนไขขอบเขต สนามไฟฟ้าของโครงรูปนี้สามารถเขียนเป็น

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \vec{u}(\vec{r}) \exp(i\omega t) \quad \dots\dots\dots (4.1)$$

ในที่นี้  $\omega/2\pi$  เป็นความถี่หมวด

โพรงำทอนที่ใช้ในสาขาเลเซอร์แตกต่างจากที่ใช้ในสาขาคลิ้นไมโคร (microwave) ด้วยสองหลักใหญ่ ดังนี้

(1) โพรงำทอนเลเซอร์โดยปกติเป็นโพรงเปิด กล่าวคือไม่มีผิวด้านข้าง เหตุผลที่ใช้โพรงำทอนเปิดก็คือ ในกรณีของเลเซอร์ยกระดับพลังงานด้วยหลอดแสงแวน ผิวด้านข้างจะแทรกสอดกับการยกระดับพลังงาน

(2) ขนาดของโพรงำทอนต้องยาวกว่าความยาวคลื่นเลเซอร์มาก โดยปกติความยาวคลื่นมีตั้งแต่ช่วงจาก 1 ไมครอน (micron) จนถึงยี่สิบสามสิบไมครอน โพรงำทอนที่มีขนาดใกล้เคียงกับความยาวคลื่นเหล่านี้ จะมีกำลังขยายการออสซิลเลตเลเซอร์ต่ำมาก

คุณสมบัติข้อ (1) และ (2) สามารถพิจารณาได้จากผลของโพรงำทอนทศนะทั่วไป ยกตัวอย่างเช่น โพรงำทอนเปิด หมายความว่าสำหรับหมวดโพรงใด ๆ จะมีการสูญเสียบางอย่างบางส่วนไปอย่างหลีกเลี่ยงไม่ได้ การสูญเสียเกิดจากการเลี้ยวเบน (diffraction) ของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ซึ่งทำให้มีพลังงานบางส่วนหนีออกไปจากด้านข้างของโพรง จึงเป็นการสูญเสียเนื่องจากการเลี้ยวเบน ดังนั้น การกำหนดหมวด (4.1) จึงไม่สามารถใช้ได้กับโพรงำทอนเปิด และหมวดจริง ๆ (คือ โครงรูปคงตัว) จะไม่มีสำหรับโพรงำทอนเช่นนี้ อย่างไรก็ตามเราจะเห็นได้ว่า โครงรูปคลื่นนิ่งแม่เหล็กไฟฟ้ามีการสูญเสียในโพรงำทอนเปิดน้อยมาก ดังนั้นเราจะกำหนดเป็นหมวดหนึ่ง [บางครั้งเรียกว่า หมวดควอไซ (quasi mode)] ของโครงรูปแม่เหล็กไฟฟ้า ซึ่งสนามไฟฟ้าของมันสามารถเขียนเป็น

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \vec{u}(\vec{r}) \exp[(-t/2\tau_c) + i\omega t] \quad \dots\dots\dots (4.2)$$

ในที่นี้  $\tau_c$  (เป็นเวลากการลดระดับของอัมปลิจูดของสนามไฟฟ้ายกกำลังสอง) เรียกว่าเวลากการลดระดับของโฟตอนในโพรง คุณสมบัติข้อ (2) ที่กล่าวข้างต้น หมายถึงว่า ความถี่

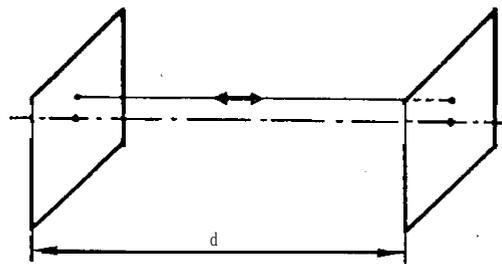
อภิธานของโพรงมีค่าเข้าใกล้ที่ว่าง นี่เป็นเหตุผลว่าทำไมเลเซอร์จึงชอบจะออสซิลเลตหลายหมวด สำหรับเหตุผลนี้โพรงก้ำทอนบางครั้งเรียกว่า โพรงก้ำทอนหลายหมวด

โพรงก้ำทอนเลเซอร์ทั่วไปที่ใช้กันอย่างกว้างขวาง มีทั้งเป็นกระจกราบขนานหรือ กระจกทรงกลมรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากขนานกัน (ส่วนมากเป็นวงกลม) วางห่างกันเป็นระยะ  $d$  ระยะห่าง  $d$  อาจจะเป็นสองสามเซนติเมตรจนถึงยี่สิบสามสิบเซนติเมตร ในขณะที่กระจกมี เส้นผ่านศูนย์กลางขนาดเพียงหนึ่งเซนติเมตรจนถึงสองสามเซนติเมตรเท่านั้น จากชนิดต่าง ๆ ของโพรงก้ำทอนเหล่านี้ เราจะพิจารณาเพียงบางชนิดดังต่อไปนี้

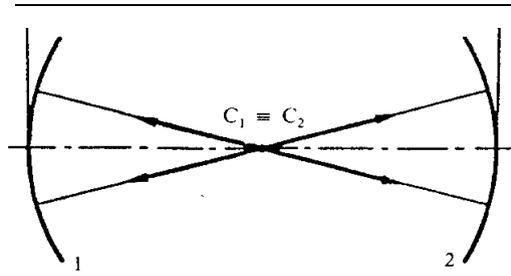
(1) โพรงก้ำทอนระนาบขนาน | หรือแฟบรี-เพอโรต์ (Fabry-Perot) | (รูป 4.1) โพรง ก้ำทอนชนิดนี้ประกอบด้วยกระจกระนาบสองแผ่นวางขนานกัน การประมาณหมวดของโพรง ก้ำทอนชนิดนี้ เราสามารถคิดว่าเป็นการรวมกันได้ของสองคลื่นระนาบแม่เหล็กไฟฟ้า เคลื่อนที่ ในทิศทางตรงกันข้ามตามแกนของโพรงดังที่แสดงไว้ในรูป 4.1 ภายใต้การประมาณนี้ ความถี่ อภิธานสามารถหาได้ง่ายโดยกำหนดเงื่อนไขว่า ความยาวโพรง  $d$  ต้องเป็นจำนวนเท่าของครึ่ง ความยาวคลื่น คือ  $d = n(\lambda/2)$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวก นี่เป็นเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับค่า สนามไฟฟ้าของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า มีคลื่นนิ่งเป็นศูนย์กลางตรงกระจกทั้งสองพอดี ดังนั้น ความถี่ อภิธานจึงกำหนดด้วย

$$v = n(c/2d) \quad \dots\dots\dots (4.3)$$

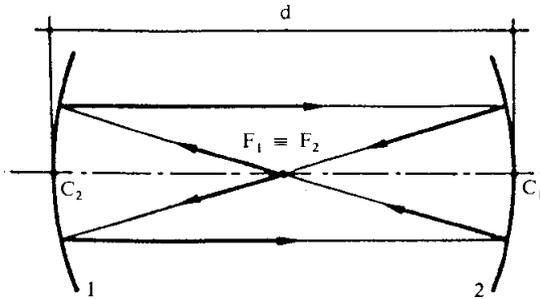
มีข้อน่าสังเกตว่า สมการ (4.3) สามารถหาได้จากการกำหนดเงื่อนไขว่า การย้ายเฟส ไปของคลื่นระนาบตลอดหนึ่งรอบผ่านโพรง จะต้องเท่ากับจำนวนเต็มคูณกับ  $2\pi$  คือ  $2kd = 2n\pi$  เงื่อนไขนี้หาได้จากเหตุผลของการคงตัว (self-consistency argument)



รูป 4.1 โพรงก้ำทอนระนาบขนาน



รูป 4.2 โพรงกำทอนร่วมศูนย์กลาง (ทรงกลม)



รูป 4.3 โพรงกำทอนร่วมโฟกัส

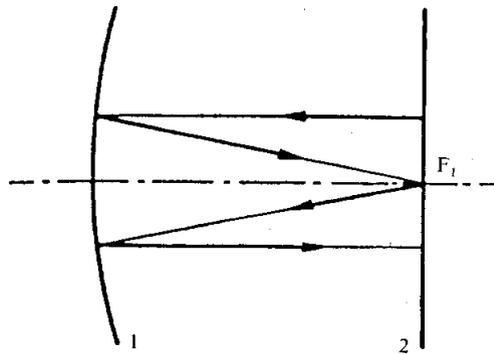
(2) โพรงกำทอนร่วมศูนย์กลาง [หรือทรงกลม (concentric resonator)] (รูป 4.2) โพรงกำทอนชนิดนี้ประกอบด้วยกระจกทรงกลมสองแผ่นมีรัศมี  $R$  เท่ากัน และวางห่างกันด้วยระยะทาง  $d$  ซึ่งมีศูนย์กลางความโค้งของกระจก  $C_1$  และ  $C_2$  อยู่ร่วมจุดเดียวกัน (คือ  $d = 2R$ ) ภาพทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิตของโหมดโพรงกำทอน ได้แสดงอยู่ในรูป 4.2 ด้วย ในกรณีนี้ ได้ประมาณโหมดโพรงด้วยการรวมกันได้ของคลื่นเคลื่อนที่ทรงกลมในทิศทางตรงข้ามกันสองคลื่นที่จุด  $C$  เมื่อใช้เหตุผลการคงตัวอีกครั้ง จะได้สมการ (4.3) สำหรับความถี่เรโซแนนซ์

(3) โพรงกำทอนร่วมโฟกัส (confocal resonator) (รูป 4.3) โพรงกำทอนชนิดนี้ประกอบด้วยกระจกทรงกลมสองแผ่นที่มีรัศมีความโค้ง  $R$  เท่ากัน และวางห่างกันเป็นระยะ  $d$  มีจุดโฟกัส  $F_1$  และ  $F_2$  ของกระจกทั้งสองอยู่ร่วมกัน ดังนั้นจุดศูนย์กลางของความโค้ง  $C$  ของกระจกแผ่นหนึ่งจะอยู่บนผิวของกระจกอีกแผ่นหนึ่ง (คือ  $d = R$ ) จากภาพทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิตเราสามารถวาดเส้นทางเดินปิดของแสงดังแสดงในรูป 4.3 เส้นทางเดินนี้ไม่ได้บ่งบอกว่าเป็นโครงรูปของโหมดใดโหมดหนึ่ง อย่างไรก็ตาม เราจะเห็นได้ว่าที่จริงแล้วโครงรูปนี้ไม่สามารถอธิบายด้วยทั้งคลื่นระนาบหรือคลื่นทรงกลม และความถี่เรโซแนนซ์ไม่สามารถหาได้ง่ายจากการพิจารณาภาพทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิต

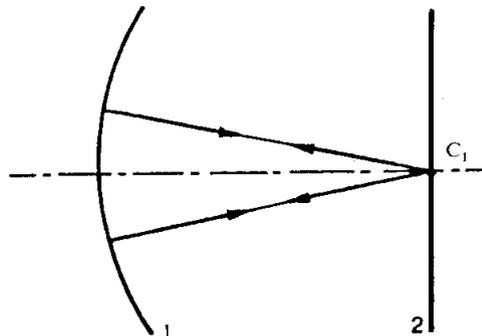
(4) โพรจก้าทอนระนาบและทรงกลมรวมกัน (ครึ่งทรงกลม) โพรจก้าทอนชนิดนี้ ได้แสดงในรูป 4.4 (โพรจก้าทอนครึ่งร่วมโฟกัส) และรูป 4.5 (โพรจก้าทอนครึ่งทรงกลม)

โพรจก้าทอนที่ได้จากกระจกทรงกลมสองแผ่นมีรัศมีความโค้ง  $R$  เท่ากัน และวางห่างกันเป็นระยะ  $d$  ซึ่ง  $R < d < 2R$  (คือวางอยู่ที่ตำแหน่งกึ่งกลางระหว่างจุดร่วมโฟกัสและจุดร่วมศูนย์กลาง) ยิ่งไปกว่านั้นเรายังสามารถมี  $d < R$  ได้ด้วย สำหรับกรณีเหล่านี้ มันจะไม่เป็นไปตามคุณสมบัติของรังสี คือรังสีจะสะท้อนกลับย้อนรอยเดิมหลังจากสะท้อนผ่านไปครึ่งสองครึ่ง

โพรจก้าทอนทั้งหมดเหล่านี้ สามารถพิจารณาได้เช่นเดียวกับตัวอย่างเฉพาะของโพรจก้าทอนทั่ว ๆ ไป ซึ่งประกอบด้วยกระจกทรงกลมสองแผ่นที่มีรัศมีความโค้งไม่เท่ากัน (ทั้งค่าบวกและค่าลบ) วางห่างกันเป็นระยะเท่ากับ  $d$  ตามที่เราต้องการ โพรจก้าทอนชนิดต่าง ๆ เหล่านี้ยังสามารถแยกออกเป็นหนึ่งหรือสองชนิด คือ โพรจก้าทอนเสถียรและโพรจก้าทอนไม่เสถียร โพรจก้าทอนที่อธิบายได้เป็นแบบไม่เสถียร คือ เมื่อรังสีที่เคลื่อนที่กลับไปกลับมา

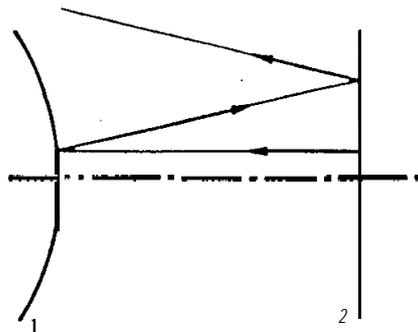


รูป 4.4 โพรจก้าทอนครึ่งร่วมโฟกัส



รูป 4.5 โพรจก้าทอนครึ่งทรงกลม

อยู่ระหว่างกระจกสองแผ่นจะลู่ออกอย่างไม่จำกัดจากแกนของโพรงกำเนิด ตัวอย่างที่เห็นได้ชัดของโพรงกำเนิดแบบไม่เสถียร ได้แสดงในรูป 4.6 ในทางตรงกันข้าม ถ้ารังสีลู่ออกในขณะเคลื่อนที่กลับไปกลับมา โพรงกำเนิดจะอธิบายได้เป็นแบบเสถียร



รูป 4.6 ตัวอย่างของโพรงกำเนิดไม่เสถียร

จุดมุ่งหมายของหัวข้อต่อไปนี้ คือ เพื่อคำนวณโครงสร้างของโหมดที่สอดคล้องกับความถี่และการสูญเสียเนื่องจากการเลี้ยวเบนสำหรับโพรงกำเนิดธรรมดาที่สุด

## 4.2 โพรงกำเนิดระนาบขนาน

### 4.2.1 ทฤษฎีการประมาณของสเกาโลและทาวน์ส (Schawlow and Townes)

การศึกษาโพรงกำเนิดระนาบขนานครั้งแรก เป็นผลงานของสเกาโลและทาวน์ส<sup>(12)</sup> ซึ่งทั้งสองได้พิจารณาแนวความคิดของเลเซอร์ในช่วงความถี่ของแสง สเกาโลและทาวน์สได้แก้ปัญหาโดยใช้โพรงกำเนิดที่มีลักษณะคล้ายคลึงกับโพรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีโหมดเป็นที่รู้จักกันดี (ดูหัวข้อ 2.1) ถึงแม้วิธีการของพวกเขาเป็นแบบสังหรณ์ใจมากกว่ามีขั้นตอนก็ตาม มันทำให้หาสมการที่สำคัญได้บางสมการด้วยวิธีง่าย ๆ

ก่อนที่จะแสดงทฤษฎีของสเกาโลและทาวน์ส เราจะเขียนโหมดขององค์ประกอบของสนามไฟฟ้าในโพรงสี่เหลี่ยมมุมฉากที่แสดงในรูป 2.1 ใหม่เป็น

$$\begin{aligned} E_x &= e_x \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \sin \omega t \\ E_y &= e_y \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z \sin \omega t \\ E_z &= e_z \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z \sin \omega t \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4.4)$$

ในที่นี้  $k_x = \ell\pi/2a$ ,  $k_y = m\pi/2a$ ,  $k_z = n\pi/d$  ( $\ell, m, n$  เป็นเลขจำนวนเต็มบวก) และความถี่กำหนดด้วย

$$v = \frac{c}{2} \left| \left( \frac{n}{d} \right)^2 + \left( \frac{m}{2a} \right)^2 + \left( \frac{\ell}{2a} \right)^2 \right|^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots\dots (4.5)$$

ให้สังเกตว่า สมการ (4.4) สามารถเลือกให้เป็นรูปเชิงซ้อนได้ โดยเขียนฟังก์ชันไซน์และโคไซน์อยู่ในพจน์ของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล ดังนั้น องค์ประกอบของสนามไฟฟ้าสามารถเขียนเป็นผลบวกของพจน์แปดพจน์ คือ  $\exp[i(\pm k_x x \pm k_y y \pm k_z z - \omega t + c.c)]$  กล่าวคือเป็นผลบวกของคลื่นระนาบแปดคลื่นเคลื่อนที่ไปตามทิศทางของแปดเวกเตอร์คลื่น ที่มีองค์ประกอบ  $\pm k_x$ ,  $\pm k_y$  และ  $\pm k_z$  ในที่นี้  $c.c$  หมายถึง เชิงซ้อนสังยุค (complex conjugate) ดังนั้นทิศทางโคไซน์ของเวกเตอร์เหล่านี้ คือ  $\pm(\ell\lambda/4a)$ ,  $\pm(m\lambda/4a)$  และ  $\pm(n\lambda/2d)$  เมื่อ  $\lambda$  เป็นความยาวคลื่นของหมวดการรวมกันได้ของแปดคลื่นระนาบเหล่านี้ ทำให้ได้คลื่นนิ่งของสมการ (4.4)

ต่อไปสเกาโลและทานเสได้สมมติว่า เพื่อเป็นการประมาณที่ดี ให้หมวดของโพรงเปิดในรูป 4.1 อธิบายได้ด้วยหมวดของโพรงสี่เหลี่ยมมุมฉากของรูป 2.1 โดยมี  $(\ell, m) \ll n$  (โพรงของรูป 4.1 หาได้จากรูป 2.1 โดยย้ายผิวด้านข้างออกไป) การสมมติเช่นนี้เหมาะสมดีแล้ว ทั้งนี้เพราะว่าตามที่เราเคยกล่าวไว้ตอนต้นว่า หมวดของโพรงนี้สามารถเขียนเป็นการรวมกันได้ของสองคลื่นระนาบเคลื่อนที่เป็นมุมแคบ ๆ กับแกน  $z$  ดังนั้นการย้ายผิวด้านข้างออกไปจึงคิดว่าไม่ทำให้หมวดเหล่านี้เปลี่ยนแปลงไปอย่างมากมาย ในทางตรงกันข้ามหมวดเหล่านี้ซึ่งสอดคล้องกับค่าของ  $\ell$  และ  $m$  ที่มีค่าไม่น้อยกว่า  $n$  จะมีผลอย่างมาก เมื่อเราเอาผิวด้านหนึ่งของโพรงกำทอนออกไป อย่างไรก็ตามเมื่อผิวด้านหนึ่งของโพรงถูกย้ายออกไป หมวดเหล่านี้จะมีการสูญเสียเนื่องจากการเลี้ยวเบนสูงมาก

ภายใต้ข้อสมมติว่า  $(\ell, m) \ll n$  ความถี่กึ่งนาคของโพรงระนาบขนาน สามารถหาได้จากสมการ (4.5) โดยการกระจายอนุกรมยกกำลังของสมการรากกำลังสอง คือ

$$v \simeq \frac{c}{2} \left( \frac{n}{d} + \frac{1}{2} \frac{(\ell^2 + m^2)}{n} \cdot \frac{d}{4a^2} \right) \quad \dots\dots\dots (4.6)$$

สมการนี้สามารถเทียบได้กับสมการ (4.3) ซึ่งหาโดยใช้เหตุผลธรรมดา การกำหนดหมวดโพรงและความถี่กึ่งนาค เราจะกำหนดด้วยแต่ละชุดของปริมาณสามค่า  $\ell, m$  และ  $n$

ความแตกต่างของความถี่ระหว่างหมวดสองหมวดที่มีค่าของ  $\ell$  และ  $m$  เท่ากัน ส่วนค่า  $n$  ของทั้งสองหมวดมีค่าต่างกันเป็น 1 คือ

$$\Delta v_n = c/2d \quad \dots\dots\dots (4.7)$$

เหมือนกับที่เราหาได้จากสมการ (4.6) หมวดทั้งสองเหล่านี้ต่างกันในการแจกแจงสนามของมันตามแกน  $z$  เท่านั้น (คือตามยาว) สำหรับเหตุผลข้อนี้  $\Delta v$  ใช้เป็นความแตกต่างความถี่ระหว่างสองหมวดตามยาวตามลำดับ ความแตกต่างความถี่ระหว่างสองหมวดที่มีค่า  $m$  เท่านั้น มีค่าต่างกันและต่างกันเป็น 1 คือ

$$\Delta v_m = \frac{c}{4} \frac{d[(m+1)^2 - m^2]}{4a^2n} = \frac{cd}{8na^2} \left(m + \frac{1}{2}\right)$$

และเมื่อใช้สมการ (4.7) ช่วย

$$\Delta v_m = A v_m \frac{d^2}{4na^2} \left(m + \frac{1}{2}\right) \quad \dots\dots\dots (4.8)$$

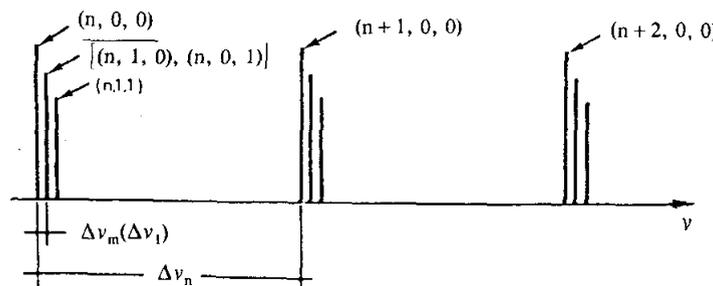
ในทำนองเดียวกันหมวดสองหมวดที่มีค่า  $\ell$  ต่างกันเท่านั้นและต่างกันเท่ากับ 1 ความถี่ต่างกันเป็น

$$\Delta v_\ell = A v_\ell \frac{d^2}{4na^2} \left(\ell + \frac{1}{2}\right) \quad \dots\dots\dots (4.9)$$

หมวดซึ่งมีค่า  $\ell$  (หรือ  $m$ ) เท่านั้นที่ต่างกันเป็นหนึ่ง จะมีการแจกแจงสนามต่างกันตลอดระยะนาบตั้งฉากกับแกน  $z$  (คือตามขวาง) สำหรับเหตุผลนี้  $\Delta v_m$  และ  $\Delta v_\ell$  จะใช้อ้างอิงเป็นความแตกต่างความถี่ระหว่างสองหมวดตามขวางเรียงลำดับ ให้สังเกตว่าสมการ (4.8) และ (4.9) สามารถเขียนได้เป็น

$$\Delta v_m = \Delta v_n \frac{m + \frac{1}{2}}{8N} \quad \dots\dots\dots (4.10)$$

$$A v_m = \Delta v_n \frac{\ell + \frac{1}{2}}{8N} \quad \dots\dots\dots (4.11)$$



รูป 4.7 แสดงช่วงความถี่อันนาของโพรงกำทอนระยะนาบขนาน

ในที่นี้  $N = a^2/d\lambda$  เรียกว่า เลขจำนวนเฟรอสเนล\* (Fresnel number) สำหรับโพรงเลเซอร์ที่ใช้กันทั่วไปส่วนมาก  $N$  มีค่ามากกว่าหนึ่งมาก ๆ ดังนั้นเมื่อ  $m$  (และ  $l$ ) ตามปกติมีขนาดเป็นหนึ่ง สมการ (4.10) และ (4.11) แสดงว่า  $(\Delta\nu_l, \Delta\nu_m) \ll \Delta\nu_n$  ซึ่ง  $\Delta\nu_n$  มีขนาดของสองสามร้อยเมกะเฮิรตซ์ (megahertz) ในขณะที่  $\Delta\nu_l, (\Delta\nu_m)$  มีขนาดของสองสามเมกะเฮิรตซ์ รูป 4.7 แสดงถึงแถบความถี่ของโพรงกำลังทอนระนาบขนาน ให้สังเกตว่าโหมดที่มีค่า  $n$  เท่ากัน แต่  $l$  และ  $m$  ต่างกัน เป็นไปตาม  $l^2 + m^2 =$  ค่าคงที่จะมีความถี่เท่ากัน กล่าวได้ว่ามีความถี่ซ้ำซ้อนกัน

ที่กล่าวมาทั้งหมด เรายังไม่ได้พิจารณาการสูญเสียของโพรงและโพรงกำลังทอน เราสมมติให้มีขนาดแคบ ๆ เท่าไรก็ดี แนนอนโพรงกำลังทอนจะต้องมีการสูญเสียเนื่องจากการเลี้ยวเบนอย่างหลีกเลี่ยงไม่ได้ ดังนั้นโหมดเราสามารถเขียนแทนด้วยสมการ (4.2) นั้นหมายความว่าความถี่ของโหมดนั้นจะมีความกว้างเส้น (FWHM) กำหนดด้วย

$$\Delta\omega_c = 1/\tau_c \quad \dots\dots\dots (4.12)$$

ซึ่งได้จากการใช้การแปลงฟูเรียร์ (Fourier transform) กับสมการ (4.2) ดังนั้นเวลาของการลดระดับของโฟตอนโพรง  $\tau_c$  กำหนดด้วย

$$\tau_c = d/cy \quad \dots\dots\dots (4.12 \text{ ก})$$

เมื่อ  $y$  คือ ส่วนของการสูญเสียจากการเคลื่อนที่ผ่านโพรงกำลังทอน และรวมถึงการสูญเสียเนื่องจากการเลี้ยวเบน การทะลุผ่านกระจกและการสูญเสียภายในสารกิริยา (คำนิยามของ  $y$  ซึ่งเหมาะสมมากสำหรับใช้กับโพรงกำลังทอนเลเซอร์ จะกำหนดในบทต่อไป) สมการ (4.12), (4.12 ก) และ (4.7) แสดงว่าเมื่อ  $y < 1$  เงื่อนไข  $\Delta\omega_c < 2\pi\Delta\nu_n$  จะเป็นจริงเสมอ และความถี่ของสองโหมดตามยาวติดกันยังคงเหมือนเดิม อย่างไรก็ตามจากสมการ (4.12), (4.12 ก) และ (4.10) เงื่อนไข  $\Delta\omega_c < 2\pi\Delta\nu_m$  จะเป็นจริงต่อเมื่อเงื่อนไข  $y < \pi m/8N$  เป็นจริง สำหรับค่า  $m$  มีขนาดเป็นหนึ่ง และ  $N$  มีขนาดเป็น 10 เราเห็นได้ว่า  $y$  ต้องมีค่าน้อยกว่าสองสามเปอร์เซ็นต์สำหรับโหมดตามขวาง เพื่อทำให้ความถี่เป็นค่าแน่นอนอย่างชัดเจน, ขนาดของ  $y$  สามารถมีช่วงได้จากหนึ่งถึงสามเปอร์เซ็นต์ (1-3%) สำหรับเลเซอร์ก๊าซที่มีกำลังขยายต่ำ ๆ จนถึง

---

\* เลขจำนวนเฟรอสเนลกำหนดด้วยคลื่นระนาบแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีช่วงกว้างตามขวาง  $2a$  มีมุมแผ่อกเนื่องจากการเลี้ยวเบน  $\alpha_d = \lambda/2a$  หรือในอีกนัยหนึ่งสำหรับกระจกเส้นผ่าศูนย์กลางขวาง  $2a$  วางห่างกันเป็นระยะ  $d$  มีครึ่งมุม  $\alpha$  รองรับด้วยกระจกบานหนึ่งที่ศูนย์กลางของอีกบานหนึ่ง คือ  $\alpha_g = a/d$  ดังนั้นเราเห็นได้ว่า  $N = \alpha_g/2\alpha_d$  นั่นคือ เลขจำนวนเฟรอสเนลคือครึ่งหนึ่งของอัตราส่วนระหว่างครึ่งมุม  $\alpha_g$  และมุมเลี้ยวเบน  $\alpha_d$  ของคลื่น

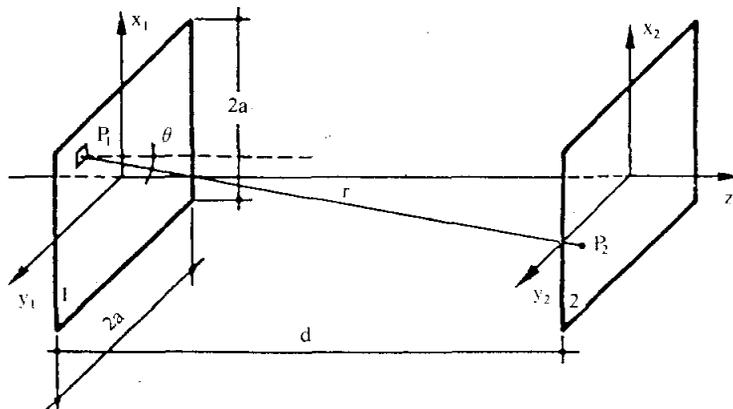
หลาย ๆ เปอร์เซนต์ (10-30% หรือมากกว่า) สำหรับเลเซอร์กำลังขยายสูง ๆ เช่น เลเซอร์สภาวะของแข็งหรือเลเซอร์ไดย์ (dye lasers) ดังนั้น มันจะเป็นไปทำนองที่ว่าสองหมวดตามขวางใด ๆ จะมีความถี่ไม่แน่นอนเสมอไป

#### 4.2.2 การปฏิบัติแบบฟอกซ์และลี (Fox and Li Treatment)

การปฏิบัติที่ได้ผลสำหรับโพรงก้ำทอนระนาบขนานกระทำโดยฟอกซ์และลี ซึ่งได้ศึกษาปัญหาด้วยการประมาณแบบสเกลาร์ (scalar approximation) ที่ใช้กันบ่อย ๆ ในวิชาทัศนศาสตร์ ในการประมาณแบบนี้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าสมมติให้เกือบจะเป็นคลื่นตามขวางและไปลาไรซ์สม่ำเสมอ (เชิงเส้นหรือเชิงกลม) ดังนั้น สนามสามารถอธิบายเป็นปริมาณสเกลาร์  $U$  ยกตัวอย่างเช่น ขนาดของสนามไฟฟ้า (หรือขนาดของสนามแม่เหล็ก) ถ้าเราให้  $U_1$  เป็นการแจกแจงสนามบางอย่างบนกระจก 1 (รูป 4.8) การแจกแจงนี้เกิดเนื่องจากการเลี้ยวเบนและสร้างการแจกแจงสนามบนกระจก 2 ขึ้น ซึ่งสมการของมันสามารถหาได้จากอินทิกรัลการเลี้ยวเบนของเคอร์ชอฟฟ์ (Kirchoff diffraction integral)<sup>(3)</sup> คือสนาม  $U_2(P_2)$  ที่จุด  $P_2$  ใด ๆ บนกระจก 2 กำหนดด้วย

$$U_2(P_2) = - \frac{i}{2\lambda} \int_{S_1} \frac{U_1(P_1) \exp(ikr) (1 + \cos \theta)}{r} dS_1 \quad \dots\dots\dots (4.13)$$

ในที่นี้  $r$  คือ ระยะทางระหว่างจุด  $P_1$  และ  $P_2$   $\theta$  เป็นมุมที่  $P_1P_2$  กระทำกับเส้นตั้งฉากของผิวที่  $P_1$   $dS_1$  เป็นพื้นที่ผิวเล็ก ๆ รอบจุด  $P_1$  และ  $k = 2\pi/\lambda$  อินทิกรัลในสมการ (4.13) ต้องคิดคำนวณตลอดพื้นที่ผิวทั้งหมดของกระจก 1



รูป 4.8 การคำนวณหมวดสำหรับโพรงก้ำทอนระนาบขนานด้วยอินทิกรัลการเลี้ยวเบนของเคอร์ชอฟฟ์

แทนที่เราจะพิจารณาการแจกแจงทั่วไป  $U_1$  เรามาพิจารณาการแจกแจง  $U$  ที่สอดคล้องกับหมวดโพรง ในกรณีของการแจกแจงสนามบนกระจก 2 เหมือนที่คำนวณด้วยสมการ (4.13) ต้องมีค่าเท่ากับ  $U$  แต่ต่างกันด้วยค่าคงที่ร่วมบางตัว ดังนั้นจากสมการ (4.13) เราจะต้องได้

$$\sigma U(P_2) = - \frac{i}{2\pi} \int_1 \frac{U(P_1) \exp(ikr) (1 + \cos \theta)}{r} dS_1 \quad (4.14)$$

ในที่นี้  $\sigma$  เป็นค่าคงที่สมการ (4.14) คือ สมการอินติกราลเอกพันธ์เฟรดโฮล์ม (Fredholm homogeneous integral equation) ชนิดที่สอง คำตอบไอเกน (eigen solution)  $U$  ของมันให้การแจกแจงสนามหมวดโพรงตลอดทั่วกระจก เมื่อตัวดำเนินการอินติกราลของสมการ (4.14) เป็นแบบไม่-เฮอร์มิเทียน (non-Hermitian) ค่าไอเกน  $\sigma$  จะเป็นค่าไม่จริง และทั้งอัมพลิจูดและเฟสต่างมีความหมายตรงไปตรงมา ถ้าเราให้  $\sigma = |\sigma| \exp(i\phi)$  เราสามารถเห็นได้ทันทีว่า  $\gamma_d = 1 - |\sigma|^2$  ซึ่งเป็นส่วนของการสูญเสียกำลังต่อการเคลื่อนที่ผ่านไปเนื่องจากการเลี้ยวเบน ปริมาณ  $\phi$  เป็นการหวนเฟสของคลื่นในการเคลื่อนที่จากกระจกบานหนึ่งไปยังอีกบานหนึ่ง และเราได้ละทิ้งส่วนที่เป็นเวลา  $\exp(i\omega t)$  จากทั้งสองข้างของสมการ (4.13) และ (4.14) ด้วย ดังนั้นปริมาณ  $2\phi$  เป็นการหวนเฟสในหนึ่งรอบ เมื่อพิจารณา  $2\phi$  ให้เท่ากับเลขจำนวนเต็มคูณกับ  $2\pi$  เราจะได้ความถี่กิบนาท (เหมือนกับที่พบในหัวข้อ 4.1 สำหรับกรณีทั่ว ๆ ไป) ดังนั้นเราเห็นได้ว่าคำตอบไอเกนและค่าไอเกนของสมการ (4.14) ให้ปริมาณที่น่าสนใจทั้งหมดของการแจกแจงสนามบนกระจก ความถี่กิบนาทและการสูญเสียเนื่องจากการเลี้ยวเบน เมื่อเราทราบการแจกแจงสนาม  $U$  บนกระจกมันเป็นไปได้ที่จะใช้สมการ (4.13) คำนวณการแจกแจงสนามที่จุดใด ๆ ภายใน (คลื่นนิ่ง) หรือภายนอก (คลื่นเคลื่อนที่) ของโพรงกำหนดได้

เมื่อ  $d \gg a$  กล่าวคือ เมื่อความยาวโพรงมีค่ามากกว่าช่วงกว้างตามขวางของมันมาก สมการ (4.14) สามารถพิจารณาได้ง่าย ความจริงเราสามารถให้  $\cos \theta = 1$  และ  $r = d$  ในตัวร่วมอัมพลิจูดที่ปรากฏภายในเครื่องหมายอินติกราล เพื่อให้ได้สมการการประมาณเหมาะสมสำหรับตัวร่วมเฟส  $kr$  เราเขียน  $r$  เป็น

$$\begin{aligned} r &= [d^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= d + (1/2d) [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2] + \epsilon \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4.15)$$

ในที่นี้เราสามารถละทิ้งค่า  $\epsilon$  ได้ ซึ่งเป็นส่วนที่เหลือของอนุกรมยกกำลัง ถ้าหากว่า  $k\epsilon \ll 2\pi$  เมื่อ  $\epsilon$  ประกอบด้วยพจน์ของอนุกรมที่มีเครื่องหมายสลับกันไป และค่าของมันมีค่า

น้อยกว่าขนาดของพจน์แรก ดังนั้นสำหรับเงื่อนไข  $k\epsilon \ll 2\pi$  จึงเหมาะสมแล้ว และเป็นการเพียงพอว่า  $ka^4/d^3 \ll 2\pi$  หรือปรากฏในพจน์ของเลขจำนวนเฟรอสเนล  $N = a^2/d\lambda$  ซึ่งเราต้องการ  $N \ll d^2/a^2$  ดังนั้น จึงได้สมมติว่า  $d \gg a$  และ  $N \ll d^2/a^2$  และเราสามารถเขียนได้ว่า

$$\exp(ikr) \approx \exp\{i(kd) + i(\pi N/a^2)[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]\} \quad \dots \dots \dots (4.16)$$

โดยใช้ปริมาณที่ไม่มีขนาด

$$\begin{aligned} \xi &= (\sqrt{N}/a)x \\ \eta &= (\sqrt{N}/a)y \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (4.17)$$

และด้วยความช่วยเหลือของสมการ (4.16) เราสามารถเขียนสมการ (4.14) ใหม่ ในพจน์ของปริมาณเหล่านี้ คือ

$$\sigma^* U(\xi, \eta) = -i \int_1 U(\xi_1, \eta_1) \exp\{i\pi[(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2]\} d\xi_1 d\eta_1 \quad \dots \dots \dots (4.18)$$

ในที่นี้เราได้กำหนด

$$\sigma^* = \sigma \exp(ikd) \quad (4.19)$$

สำหรับกระจกรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส เราสามารถแยกตัวแปรในสมการ (4.18) ออกจากกัน ดังนั้น เราให้

$$\begin{aligned} U(\xi, \eta) &= U_\xi(\xi) U_\eta(\eta) \\ \sigma^* &= \sigma_\xi^* \sigma_\eta^* \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (4.20)$$

ดังนั้น สมการ (4.18) ให้สองสมการสำหรับ  $U_\xi(\xi)$  และ  $U_\eta(\eta)$  คือ

$$\sigma_\xi^* U_\xi(\xi_2) = \exp[-i(\pi/4)] \int_{-\sqrt{N}}^{\sqrt{N}} U_\xi(\xi_1) \exp\{i\pi(\xi_1 - \xi_2)^2\} d\xi_1 \quad \dots \dots \dots (4.21 ก)$$

$$\sigma_\eta^* U_\eta(\eta_2) = \exp[-i(\pi/4)] \int_{-\sqrt{N}}^{\sqrt{N}} U_\eta(\eta_1) \exp\{i\pi(\eta_1 - \eta_2)^2\} d\eta_1 \quad \dots \dots \dots (4.21 ข)$$

มันยังสามารถแสดงว่าฟังก์ชัน  $U_\xi$  ให้การแจกแจงสนามสำหรับโพรงกำหนดที่ประกอบด้วยกระจะกระนาบสองแผ่น มีเส้นผ่าศูนย์กลาง  $2a$  ในทิศ  $x$  และยาวไม่จำกัดในทิศ  $y$  ทำนองเดียวกันเป็นจริงสำหรับ  $U_\eta$  เราจะบอกความแตกต่างของไอเกนฟังก์ชันและค่า

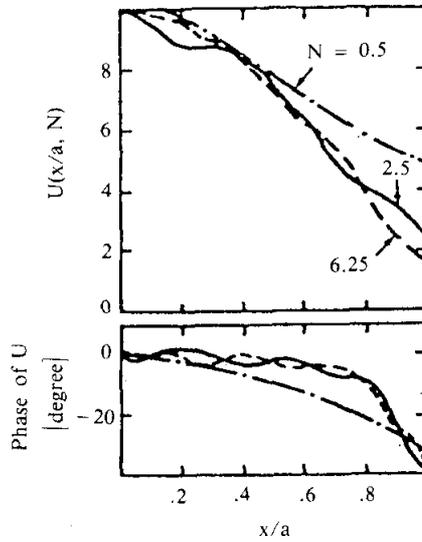
ไอเกนของสมการ (4.21 ก) และ (4.21 ข) ด้วยค่า  $m$  และ  $l$  ที่สอดคล้องกันตามลำดับ ดังนั้น จากสมการ (4.20) เราจะมี

$$U_{ml}(\xi, \eta) = U_{\xi m}(\xi) U_{\eta l}(\xi) \dots\dots\dots (4.22)$$

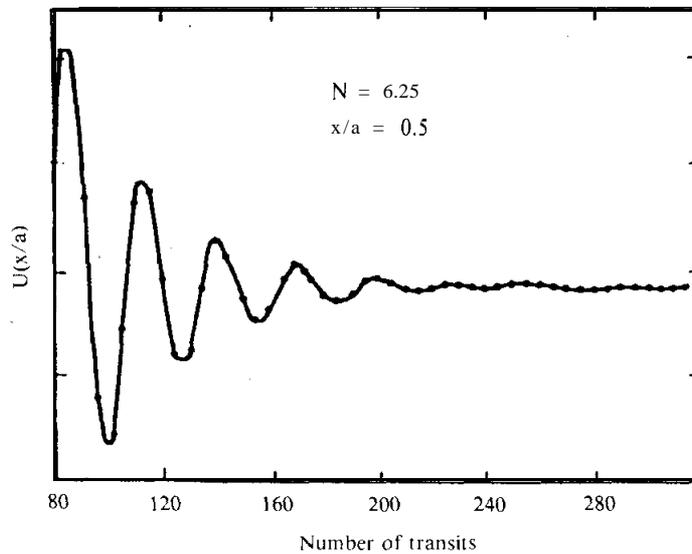
$$\sigma_{ml}^* = \sigma_{\xi m}^* \sigma_{\eta l}^*$$

สำหรับกระจกทรงกลมบางครั้งก็ใช้ได้ทำนองเดียวกัน อย่างไรก็ตามในกรณีนี้มันสะดวกที่จะแสดงสมการ (4.14) เป็นฟังก์ชันของพิกัดทรงกระบอกมากกว่าพิกัดสี่เหลี่ยมตั้งฉาก และตัวแปรสามารถแยกจากกันได้ในระบบพิกัดนี้

แม้ว่าสมการ (4.21) อยู่ในรูปแบบธรรมดามากกว่าสมการเดิม (4.14) ก็ตาม มันก็ไม่สามารถวิเคราะห์คำตอบออกมาได้ง่ายตามกฎข้อบังคับ ฟอกซ์และลีหาคำตอบออกมาได้โดยใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ช่วยสำหรับค่าต่าง ๆ ของเลขจำนวนเฟรอสเนล พวกเขาพิจารณาคลื่นเคลื่อนที่กลับไปกลับมาภายในโพรง และสมมติว่าที่เวลาหนึ่งการแจกแจงสนาม  $U_1(\xi_1)$  บนกระจก 1 เราทราบค่าแล้ว ดังนั้นการแจกแจงสนาม  $U_2(\xi_2)$  บนกระจก 2 สามารถคำนวณได้โดยใช้สมการ (4.21 ก) ความจริงถ้าเราแทนฟังก์ชัน  $U_2(\xi_2)$  ของด้านขวามือในสมการ (4.21 ก) ด้วยฟังก์ชัน  $U_1$  แล้วดำเนินการอินทิเกรตต่อไปเราจะหาฟังก์ชัน  $U_2 = U_2(\xi_2)$  ซึ่งเป็นผลลัพธ์ได้จากคำตอบครั้งแรก เมื่อ  $U_1$  ทราบค่าแล้ว เราสามารถคำนวณการแจกแจงสนามบนกระจก 1 ใหม่ เนื่องจากการพบกันครั้งที่สองและครั้งต่อ ๆ ไป ฟอกซ์และลีได้แสดงให้เห็นว่า หลังจากจำนวนครั้งผ่านไปพอเพียงแล้ว โดยไม่คำนึงถึงการแจกแจงสนามบนกระจก 1 ครั้งแรกเป็นอย่างไร การแจกแจงสนามจะถึงสถานะคงตัวโดยไม่เปลี่ยนแปลงใด ๆ อีกแล้ว แม้จะผ่านไปอีกครั้งแล้วครั้งเล่า ดังนั้นการแจกแจงนี้ก็คือ คำตอบไอเกนของสมการ (4.21) วิธีนี้ยังคำนวณค่าไอเกนได้อีกด้วย ด้วยเหตุนี้จึงอธิบายการสูญเสียเนื่องจากการเลี้ยวเบน และความถี่อภินาทของโหมดที่กำหนดได้ ถ้าการแจกแจงสนามตอนแรกเลือกให้เป็นฟังก์ชันคู่ของ  $\xi$  ซึ่งลงเอยด้วยโหมดเลขคู่ ขณะที่โหมดเลขคี่หาได้จากการเลือกการแจกแจงสนามในตอนแรกเป็นฟังก์ชันคี่ของ  $\xi$  ตัวอย่างเช่นรูป 4.9 แสดงผลลัพธ์หาได้สำหรับอัมพลิจูดและเฟสของ  $U = U(x/a, N)$  เมื่อ  $U_1$  เลือกให้เป็นการแจกแจงสนามสม่ำเสมอและสมมาตรตั้งแต่เริ่มแรก (คือ  $u_1 =$  ค่าคงที่) สำหรับกรณี  $N = 6.25$  ต้องการการผ่านไปประมาณ 200 ครั้ง จึงจะได้คำตอบไม่เปลี่ยนแปลงเหมือนในรูป 4.10



รูป 4.9 แสดงอัมพลิจูดและเฟสของหزمةอันดับต่ำสุดสำหรับโพรงกำหนดขนาดนานโดยเปรียบเทียบสนาม  $U(x/a, N)$  กับฟังก์ชันสมมาตร  $x/a$

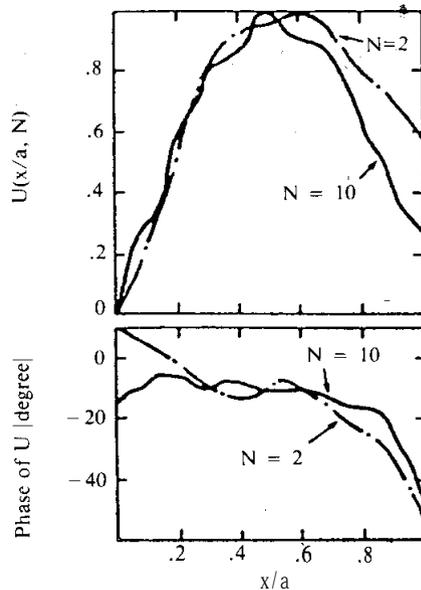


รูป 4.10 อัมพลิจูดของสนาม  $U$  ที่ตำแหน่ง  $x/a = 0.5$  เทียบกับจำนวนของการผ่านไป

ในทำนองเดียวกัน หมวดสมมาตรอันดับต่ำสุดจะหาได้เมื่อเราเลือกการแจกแจงสนามสม่ำเสมอและเป็นอสมมาตรตั้งแต่เริ่มต้น (คือเมื่อ  $U_1 = 1$  สำหรับ  $0 < x < a$  และ  $U_1 = -1$  สำหรับ  $-a < x < 0$ ) รูป 4.11 แสดงการแจกแจงสนาม  $U(x/a, N)$  ซึ่งหาด้วยวิธีนี้สำหรับเลขจำนวนเฟอร์อสเนลสองค่า

จากสมการ (4.22) การแจกแจงสนามตลอดทั้งหมด  $U_m(x, y)$  กำหนดด้วยผลคูณ  $U_m(x)U_l(y)$  หมวดซึ่งสอดคล้องกับ  $U(x)$  และ  $U(y)$  ทั้งสอง กำหนดด้วยค่าตอบอันดับต่ำสุด (คือ เมื่อ  $m = l = 0$ ) (รูป 4.9) เรียกว่า หมวด TEM<sub>00</sub> ส่วนหมวด TEM<sub>01</sub> หาได้เมื่อ  $U(x)$  กำหนดด้วยค่าตอบอันดับต่ำสุด ( $m = 0$  รูป 4.9) และ  $U(y)$  กำหนดด้วยค่าตอบอันดับสูงขึ้น (คือ  $l = 1$  รูป 4.11) (และในทำนองเดียวกันสำหรับหมวด TEM<sub>10</sub>) ตัวอักษรใช้แทนสนามแม่เหล็กไฟฟ้าตามขวาง สำหรับหมวดเหล่านี้ทั้งสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าตั้งฉากกับแกน  $z$  ของโพรงกำหนด

มันเห็นได้ง่ายจากสมการ (4.21) และ (4.22) ว่า  $\sigma^*$  ขึ้นกับเลขจำนวนเปอร์เซ็นต์เท่านั้น และขึ้นกับดัชนีของหมวดคือ  $m$  และ  $l$  รูป 4.12 แสดงการสูญเสียเนื่องจากการเลี้ยวเบน ( $\gamma_d = 1 - |\sigma^*|^2$ ) เทียบกับ  $N$  สำหรับหมวดสมมาตรอันดับต่ำสุด (TEM<sub>00</sub>) และหมวดอสมมาตร (TEM<sub>01</sub>) จากรูป 4.12 เราเห็นได้ว่าการสูญเสียมีค่าลดลงอย่างรวดเร็วในขณะที่  $N$  มีค่าเพิ่มขึ้น ทั้งนี้เนื่องจากว่า  $N$  มีค่าแปรโดยตรงกับอัตราส่วนระหว่างมุมเรขาคณิต ( $\alpha_y$ ) และมุมเลี้ยวเบน ( $\alpha_d$ ) ผลลัพธ์นี้เราสามารถเข้าใจได้โดยสังเกตว่า เมื่อ  $N$  มีค่าเพิ่มขึ้นสนามที่ขอบของกระจก ( $x = \pm a$ ) ได้ลดลงดังแสดงในรูป 4.9 และรูป 4.11 ความจริงมันคือสนามนี้ ซึ่งตอบสนองได้มากที่สุดสำหรับการสูญเสียเนื่องจากการเลี้ยวเบน สุดท้ายให้สังเกตว่า สำหรับเลขจำนวนเปอร์เซ็นต์ที่กำหนดการสูญเสียของหมวด TEM<sub>01</sub> มีค่ามากกว่าของหมวด TEM<sub>00</sub> เสมอ

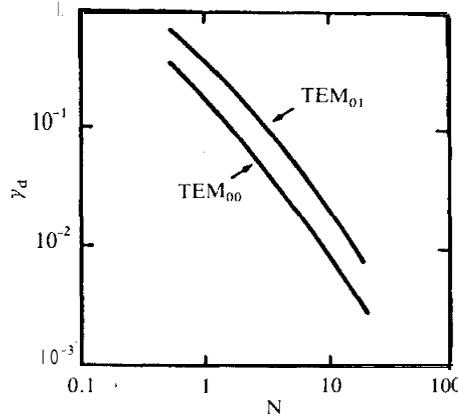


รูป 4.11 แสดงอัมพลิจูดและเฟสของหมวดอสมมาตรอันดับต่ำสุดของโพรงกำหนดระนาบขนาน (จากฟ็อกซ์และลี) สนาม  $U(x/a, N)$  เป็นฟังก์ชันอสมมาตรของ  $x/a$

ความถี่กึ่งนิตินาหาได้จากการพิจารณา  $\sigma^*$  ให้เท่ากับเลขจำนวนเต็มคูณด้วย  $\pi$  เมื่อใช้สมการ (4.19) เราได้

$$kd + \varphi_{m,\ell}^* = n\pi \quad \dots\dots\dots (4.22 \text{ ก})$$

ในที่นี้ได้บ่งบอกอย่างชัดเจนว่า เฟส  $\varphi^*$  ของ  $\sigma^*$  ขึ้นอยู่กับดัชนีของโหมด  $m$  และ  $\ell$  เมื่อ  $k = 2\pi/\lambda$  สมการ (4.22 ก) ใช้คำนวณความยาวคลื่นนิตินาหาได้ (และความถี่กึ่งนิตินาหาด้วย) เป็นฟังก์ชันของดัชนีของโหมด  $n, \ell$  และ  $m$  ผลลัพธ์จากเครื่องคอมพิวเตอร์ของฟอกซ์และลีสำหรับ  $\sigma^*$  ยืนยันว่าสำหรับค่า  $N$  สูงเพียงพอ ( $N > 10$ ) ความถี่กึ่งนิตินาหาทำนายได้ด้วยสมการ (4.6) เป็นการประมาณที่ดีวิธีหนึ่ง



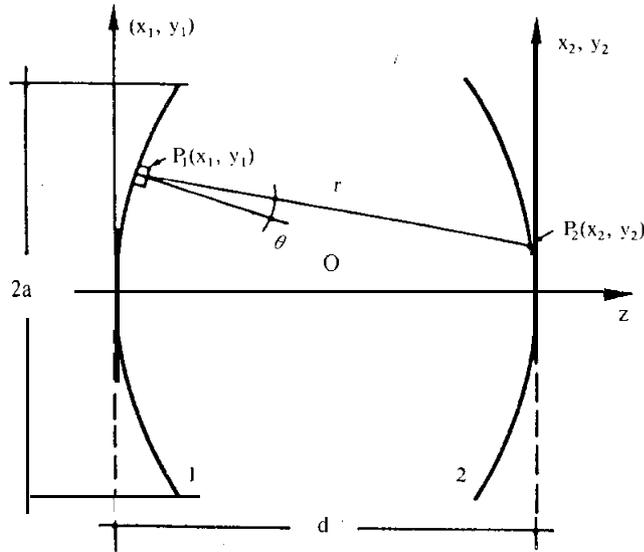
รูป 4.12 แสดงการสูญเสียเนื่องจากการเลี้ยวเบนต่อการผ่านไป  $\gamma_d$  เทียบกับเลขจำนวนเฟออส์เนลสำหรับโพรงก้ำทอนระนาบขนวน

### 4.3 โพรงก้ำทอนร่วมโฟกัส

วิธีการปฏิบัติของโพรงก้ำทอนร่วมโฟกัส คือใช้การประมาณแบบสเกลาร์ปรับปรุงโดยบอยด์และกอร์ดอน (Boyd and Gordon) วิธีการปฏิบัตินี้เราให้ความยาวของโพรงเป็น  $d$  และอ้างอิงจุดของผิวบนกระจกทั้งสองด้วยระบบแกนพิกัด  $(x_1, y_1)$  และ  $(x_2, y_2)$  ดังแสดงในรูป 4.13 กระจกทั้งสองแผ่นทำให้มีพื้นที่ภาคตัดขวางขนาด  $2a$  ในการประมาณแบบสเกลาร์คำตอบไอเกนกำหนดด้วยสมการ (4.14) เมื่อ  $d \gg a$  เราสามารถให้  $\cos \theta \approx 1$  และ  $r \approx d$  ในตัวร่วมอัมปลิจูด การหาวิธีการประมาณที่เหมาะสมสำหรับตัวร่วมเฟส  $kr$  เราต้องคำนวณระยะทางระหว่างจุด  $P_1$  และ  $P_2$  เป็นฟังก์ชันของพิกัดของทั้งสองจุดก่อน ต่อจากนั้นผลลัพธ์ที่ได้สำหรับ  $r$  สามารถขยายออกเป็นอนุกรมยกกำลัง กำหนดเป็น

$$r = d - (1/d)(x_1x_2 + y_1y_2) \quad \dots\dots\dots(4.23)$$

สมการนี้หาได้ด้วยการประมาณสำหรับ kr เหมือนกับกรณีของกระแจะระนาบขนาน คือ



รูป 4.13 การคำนวณหมวดโพรงสำหรับโพรงกำหนดร่วมโฟกัสโดยใช้อินทิกรัลการเดี่ยวเบนของเคอร์รี่ออฟพี

เงื่อนไข  $N \ll d^2/a^2$  เหมาะสมแล้ว หลังจากกำหนดตัวแปร  $\xi = \sqrt{N}(x/a)$  และ  $\eta = \sqrt{N}(y/a)$  ในสมการ (4.14) ทำให้

$$\sigma^*U(\xi_2, \eta_2) = -i \int_1 U(\xi_1, \eta_1) \exp[-i2\pi(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2)] d\xi_1 d\eta_1 \quad \dots\dots\dots(4.24)$$

ซึ่ง  $\sigma^*$  กำหนดด้วยสมการ (4.19) ต่อไปเรหาคำตอบที่สามารถแยกสัดส่วนออกจากกันได้เหมือนในสมการ (4.20) ซึ่งนำไปสู่

$$\sigma_\xi^*U_\xi(\xi_2) = \exp[-i(\pi/4)] \int_{-\sqrt{N}}^{+\sqrt{N}} U_\xi(\xi_1) \exp(-i2\pi\xi_1\xi_2) d\xi_1 \quad \dots\dots\dots(4.25)$$

$$\sigma_\eta^*U_\eta(\eta_2) = \exp[-i(\pi/4)] \int_{-\sqrt{N}}^{+\sqrt{N}} U_\eta(\eta_1) \exp(-i2\pi\eta_1\eta_2) d\eta_1 \quad \dots\dots\dots(4.26)$$

ความหมายทางกายภาพของสมการ (4.25) และ (4.26) เป็นเช่นเดียวกันเหมือนกับโพรงกำหนดแพไปร-พีรอก มันเป็นคำตอบสำหรับกระจกหนึ่งมิติ (กระจกแผ่นยาวแคบ) สมการ (4.25) และ (4.26) มีคำตอบไอเกินเป็นชุดจำนวนแน่นอน (finite set) ซึ่งเราจะแทนด้วย

ดัชนี  $m$  และ  $l$  คือ

$$U_{m,l}(\xi, \eta) = U_{\xi m}(\xi)U_{\eta l}(\eta) \quad \dots\dots\dots (4.27ก)$$

$$\sigma_{m,l}^* = \sigma_{\xi m}^* \sigma_{\eta l}^* \quad \dots\dots\dots (4.27ข)$$

ซึ่งไม่เหมือนกับกรณีของกระจกัระนาบ ในสมการอินติกราลขณะนี้สามารถแก้ปัญหาด้วยการวิเคราะห์ได้ มันสามารถแสดงว่า  $U_{\xi m}(\xi)$  และ  $U_{\eta l}(\eta)$  แปรตามตรงกับฟังก์ชันเชิงมุมทรงกลมแฟลมเมอร์ (Flammer spheroidal angular functions) ในขณะที่เดียวกันค่าไอเกน  $\sigma_{\xi m}^*$  และ  $\sigma_{\eta l}^*$  แปรตามตรงกับฟังก์ชันตามแนวรัศมีทรงกลมแฟลมเมอร์ (Flammer spheroidal radial functions)

ในส่วนของฟังก์ชันไอเกนสามารถพิจารณาได้ง่ายเมื่อ  $N \gg 1$  ในกรณีนี้ช่วงการอินติเกรตในสมการ (4.25) และ (4.26) สามารถขยายออกไปถึงช่วงจาก  $-\infty$  ถึง  $+\infty$  ในกรณีนี้ฟังก์ชันไอเกนเปลี่ยนไปเป็นผลคูณของฟังก์ชันแกส์เซียน กับฟังก์ชันเฮร์ไมท์ (Hermite) เพื่อให้พิถีพิถันมากขึ้นเรากลับมาที่แกนพิกัดเดิม คือ  $x$  และ  $y$  เราได้

$$U_{xm}(x) = H_m \left[ x \left( \frac{2\pi}{d\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \exp \left[ -(\pi/d\lambda)x^2 \right] \quad (4.28ก)$$

$$U_{yl}(y) = H_l \left[ y \left( \frac{2\pi}{d\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \exp \left[ -(\pi/d\lambda)y^2 \right] \quad \dots\dots\dots (4.28ข)$$

ในที่นี้  $H_m$  และ  $H_l$  คือ เฮร์ไมท์โพลีโนเมียล (Hermite polynomials) อันดับที่  $m$  และ  $l$  ดังนั้น ฟังก์ชันไอเกนทั้งหมดเป็น

$$U_{m,l}(x, y) = H_m H_l \exp \left[ -(\pi/d\lambda)(x^2 + y^2) \right] \quad \dots\dots\dots (4.29)$$

ต่อไปเรามาศึกษาสองสามตัวอย่าง ถ้า  $m = 0$  ดังนั้น  $H_0 = 1$  และจากสมการ (4.28ก) เราได้

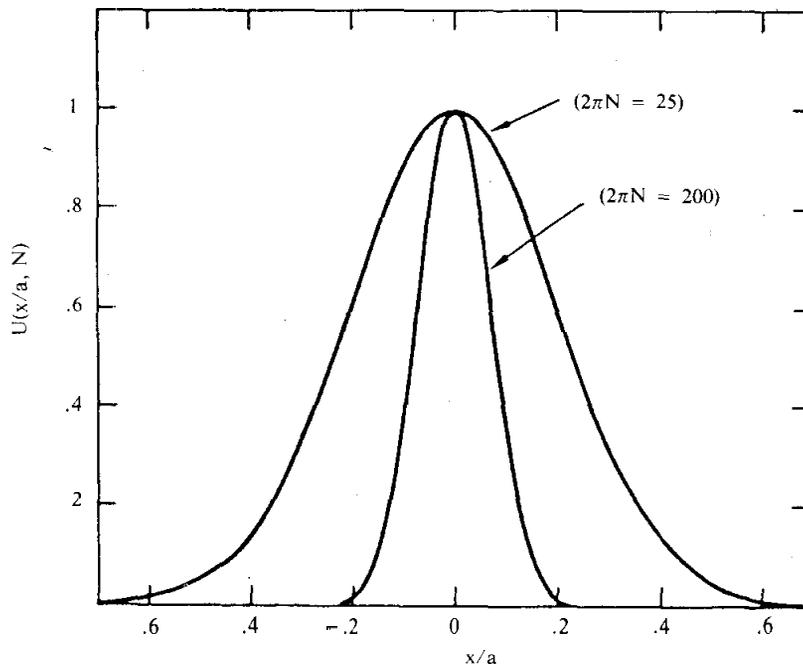
$$U_{x0}(x) = \exp \left[ -(\pi/d\lambda)x^2 \right] \quad \dots\dots\dots (4.30)$$

รูป 4.14 แสดงพฤติกรรมของ  $U$  เทียบกับ  $x/a$  สำหรับเลขจำนวนเฟอร์อส์เนลสองค่า อัมพลิจูดสนามไฟฟ้าบนผิวกระจกจะลดลงเป็น  $1/e$  ของค่ามากที่สุดที่ระยะ  $\omega_s$  ห่างจากศูนย์กลางเมื่อ  $\omega_s$  กำหนดด้วย

$$\omega_s = \left( \lambda d / \pi \right)^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots\dots (4.31)$$

เมื่อ  $m = 1$  ดังนั้น  $H_1 = (8\pi/d\lambda)^{1/2}x$  และในรูป 4.15 แสดงเส้นโค้งปกติของ  $U$  เทียบกับ  $x/a$  สำหรับเลขจำนวนเฟรอนส์เนลสองค่า เมื่อลวดลายของหมวดทั้งหมดพิจารณาได้ด้วยสมการ (4.27ก) หมวดอันดับต่ำสุดจะเป็นดังนี้ คือ

(1) หมวด  $TEM_{00}$  ( $m = \ell = 0$ ) คำตอบไอเกนเป็น  $U_{00}(x, y) = \exp[-\pi(x^2 + y^2)/d\lambda]$  และหมวดมีรัศมีเกาส์เซียนด้านข้างทั้งสองไปตามทิศ  $x$  และ  $y$  ในกรณีนี้ลวดลายของหมวดที่สอดคล้องกับจุดวงกลมสว่างบนกระจก (รูป 4.16) มีขนาดเท่ากับ  $\omega$ , ดังนั้น  $\omega_s$  จึงเรียกว่าเป็นขนาดของจุดกลมที่กระจก ตัวอย่างสำหรับ  $\lambda = 0.6$  ไมครอน และ  $d = 0.5$  เมตร เราได้  $\omega_s = 0.3$  มิลลิเมตร

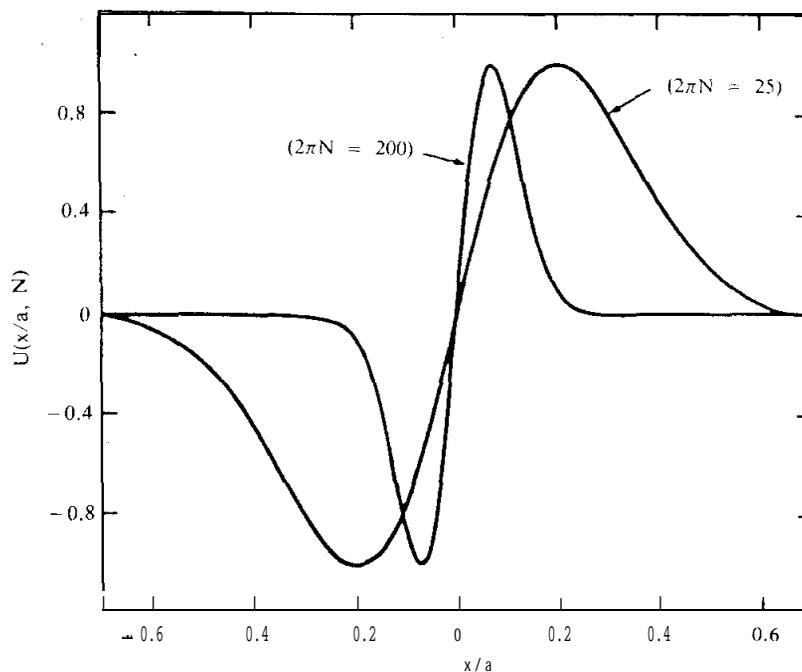


รูป 4.14 หมวดสมมาตรอันดับต่ำสุดของโพรงกำหนดร่วมโฟกัส

(2) หมวด  $TEM_{01}$  ( $m = 0, \ell = 1$ ) คำตอบไอเกนเป็น  $U_{01}(x, y) = H_1(y)\exp(-\pi(x^2 + y^2)/d\lambda)$  และพฤติกรรมตามแนวรัศมีของสนามในทิศทาง  $x$  เหมือนในรูป 4.14 ในขณะที่รูป 4.15 แสดงพฤติกรรมตามทิศทาง  $y$  ลวดลายของแสงบนกระจกของหมวดนี้ได้แสดงอยู่ในรูป 4.16

(3) หมวด  $TEM_{11}$  ( $m = 1, \ell = 1$ ) ฟังก์ชันไอเกนเป็น  $U_{11}(x, y) = H_1(x)H_1(y)\exp[-\pi(x^2 + y^2)/d\lambda]$  มีพฤติกรรมตามแนวรัศมีเหมือนในรูป 4.15 ในทิศทางของ  $x$  และ  $y$  ในทำนองเดียวกันเราสามารถหาฟังก์ชันไอเกนและลวดลายของหมวดอันดับสูงขึ้น (ดูรูป 4.16)

ที่กล่าวมาข้างต้นเราได้อธิบายเพียงฟังก์ชันไอเกนของสมการ (4.25) และ (4.26) เท่านั้น ในการอธิบายค่าไอเกนของมันเราจะต้องหลีกเลี่ยงข้อจำกัดข้างต้นที่ว่า  $N \gg 1$  (ภาคตัดขวางของกระจกใหญ่กว่าภาคตัดขวางของหลอดมาก) ความจริงมันสามารถแสดงว่า สำหรับ  $N \gg 1$  เราได้  $|\sigma| \approx 1$  และไม่มีการสูญเสียเนื่องจากการเลี้ยวเบน ดังนั้นการอธิบายความหมายของค่าไอเกน  $\sigma_{m\ell}^*$  เราจะต้องย้อนกลับไปฟังก์ชันตามแนวรัศมีทรงกลมแฟลมเมอร์ อย่างไรก็ตามเป็นการโชคดีที่สมการสำหรับ  $\sigma_{m\ell}^*$  เป็นสมการอย่างง่ายมากและจากการใช้สมการ (4.22ก)



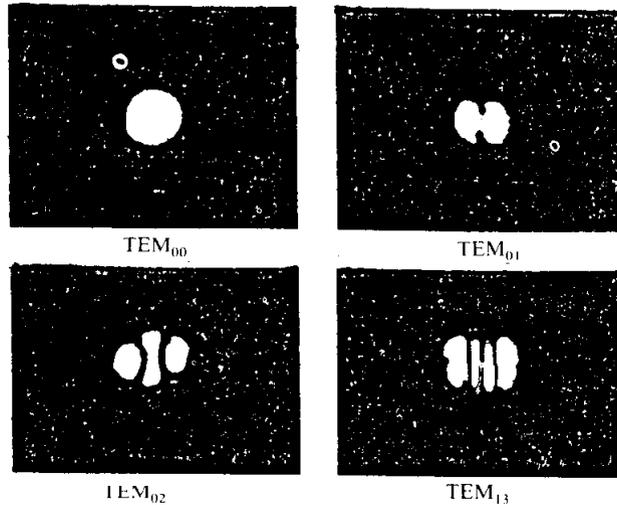
รูป 4.15 โหมดสมมาตรก้ำ (antisymmetric mode) อันดับต่ำสุดของโพรงกำทอนร่วมโฟกัส

ความถี่กัทนากำหนดด้วย

$$v = \frac{c|2n + (1 + m + \ell)|}{4d} \quad (4.32)$$

แถบความถี่กัทนากำหนดแสดงในรูป (4.17) ให้สังเกตว่าโหมดที่มีค่าของ  $2n + m + \ell$  เท่ากันจะมีความถี่กัทนากำหนดเท่ากันแม้ว่ามันจะมีพิกัดตำแหน่งต่างกัน โหมดเหล่านี้เรียกว่ามีความถี่ซ้ำซ้อนกัน ให้สังเกตด้วยว่ามันไม่เหมือนกับกรณีของคลื่นระนาบ (รูป 4.7) ที่มีความถี่อยู่ห่างกันในขณะนี้ คือ  $c/4d$  อย่างไรก็ตามความถี่ห่างกันระหว่างสองโหมดที่มีค่า  $\ell, m$  เท่ากัน (คือ  $TEM_{00}$ ) และค่า  $n$  ต่างกันเป็น 1 (คือความถี่ห่างกันระหว่างสองโหมดตามยาวชิดกัน) เป็น

$c/2d$  เป็นกรณีของคลื่นระนาบ ต่อไปเราพิจารณาขนาดของ  $\sigma$  ซึ่งเป็นการสูญเสียเนื่องจากการเลี้ยวเบน รูป 4.18 แสดงพฤติกรรมของการสูญเสียเนื่องจากการเลี้ยวเบน  $\gamma_d = 1 - |\sigma|^2$  เทียบกับเลขจำนวนเฟรอสเนลตามที่หาได้จากค่าของฟังก์ชันตามแนวรัศมีทรงกลม เปรียบเทียบรูป 4.18 กับรูป 4.12



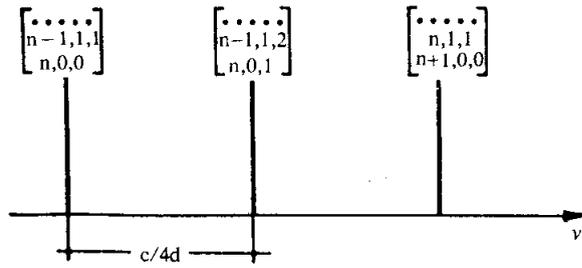
รูป 4.16 สวดลายหมวดสำหรับหมวดอันดับต่ำบางหมวด

แสดงว่า สำหรับเลขจำนวนเฟรอสเนลที่กำหนดให้การสูญเสียเนื่องจากการเลี้ยวเบนของโพรงกำหนดร่วมไฟกัสมีน้อยกว่าของโพรงกำหนดระนาบขนานมาก ซึ่งเราสามารถเข้าใจได้ง่ายโดยสังเกตว่าในโพรงกำหนดร่วมไฟกัสนามมีความเข้มสูงมากกว่ามากในโพรงระนาบขนานตามแกนโพรงกำหนด ทั้งนี้เป็นผลลัพธ์ของการไฟกัสนี้เป็นคุณสมบัติของกระเจกโค้งทรงกลม

เมื่อเราทราบการแจกแจงสนามบนกระเจกทั้งหมดแล้ว การแจกแจงสนามที่จุดใด ๆ ในโพรงก็สามารถหาได้โดยใช้อินทิกราลของเคอร์ชอฟฟ์ ซึ่งมันสามารถแสดงได้ว่าการแจกแจงสนามนี้กำหนดด้วย

$$U(x, y, z, t) = \frac{\omega_0}{\omega} H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{\omega}\right) H_l\left(\frac{\sqrt{2}y}{\omega}\right) \cdot x \exp\left[-(x^2 + y^2)/\omega^2\right] \sin \varphi(x, y, z) \sin(\omega t) \quad (4.33)$$

$$\text{เมื่อ } \omega^2 = \omega_0^2 [1 + (2z/d^2)] \quad (4.34)$$



รูป 4.17 ความถี่ของโพรงกำหนดร่วมโฟกัส

ในสมการ (4.34)  $\omega_0$  คือขนาดของจุดสว่างที่ศูนย์กลางของโพรงกำหนด กำหนดด้วย

$$\omega_0 = \left(\frac{d\lambda}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (4.35)$$

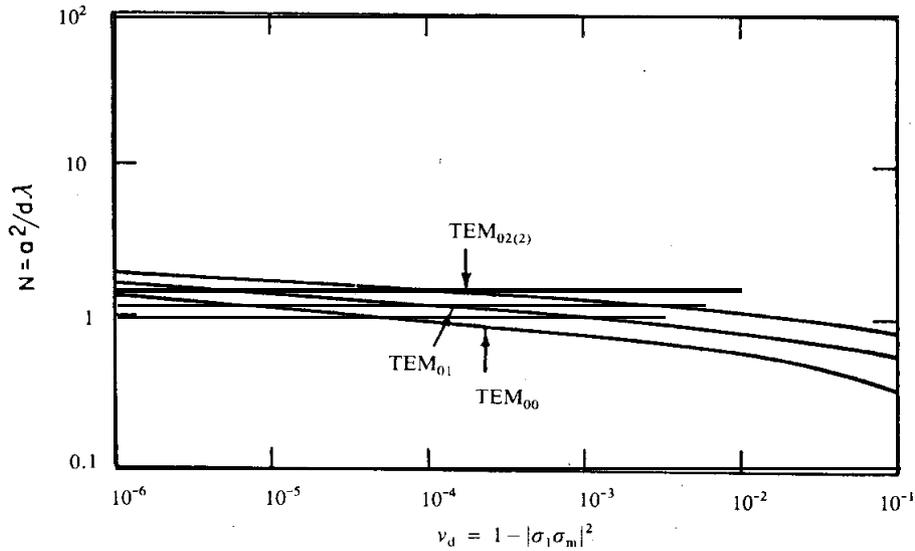
สมการสำหรับพจน์ของเฟส  $\phi(x, y, z)$  บางครั้งมีความยุ่งยากมาก ดังนั้นจึงไม่สามารถกำหนดในที่นี้ได้ เราจะบ่งบอกผิวที่มีเฟสเท่ากันเป็นทรงกลมที่มีรัศมีความโค้ง  $R(z)$  กำหนดด้วย

$$R(z) = z\left[1 + \left(\frac{d}{2z}\right)^2\right] \dots\dots\dots (4.36)$$

ในทั้งสมการ (4.34) และ (4.36) จุดกำเนิดของพิกัดให้อยู่ที่ศูนย์กลางของโพรงกำหนด ความถี่ของโพรง  $\omega = 2\pi\nu$  ในสมการ (4.33) กำหนดด้วยสมการ (4.32)

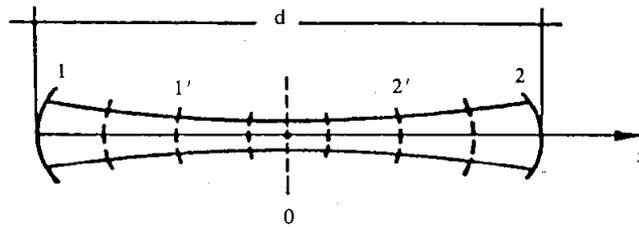
รูป 4.19 แสดงผิวที่มีเฟสเท่ากัน (เส้นโค้งประ) และขนาดของจุด (เส้นโค้งทึบ) ที่หาได้จากสมการ (4.34) และ (4.36) ตามลำดับ สังเกตว่าสำหรับ  $z = d/2$  (บนกระจกทั้งสอง) เราได้  $\omega = (d\lambda/\pi)^{\frac{1}{2}}$  เหมือนกับที่หาได้จากสมการ (4.31) และเรายังเห็นได้ว่า  $R = d$  ผลลัพธ์หลังนี้แสดงว่าผิวของกระจกทั้งสองอยู่ร่วมกับผิวที่มีเฟสเท่ากัน สำหรับ  $z = 0$  (คือที่ศูนย์กลางของโพรงกำหนด) เราพบว่า  $R = \infty$  และแนวหน้าคลื่นเป็นระนาบเหมือนกับที่คาดคะเนได้จากการพิจารณาสมมาตร ยิ่งไปกว่านั้นสำหรับ  $z = 0$  เราเห็นได้ว่า  $\omega = \omega_0 = (d\lambda/2\pi)^{\frac{1}{2}}$  ซึ่งแสดงว่าขนาดของจุดที่ศูนย์กลางของโพรงกำหนดเป็น  $2^{\frac{1}{2}}$  เล็กกว่าที่ผิวของกระจก ทั้งนี้เพราะว่ากระจกได้รวมลำแสงเข้าด้วยกันที่ศูนย์กลางของโพรงกำหนด

สำหรับการคำนวณการแจกแจงสนามที่จุดใด ๆ นอกโพรงกำหนด โดยคิดว่าเมื่อใช้โพรงกำหนดร่วมโฟกัสเป็นโพรงเลเซอร์โพรงหนึ่งได้ปล่อยคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าออกมาภายนอก การแจกแจงสนามนี้ยังคงหาได้ด้วยอินทิกรัลเคอร์ชอฟฟ์และไม่ประหลาดใจเลยว่าสมการ (4.34) และ (4.36) ยังคงใช้ได้กับกรณีนี้เช่นกัน ไม่ว่าสนามจะกระจายออกไปไกลแสนไกล



รูป 4.18 เปรียบเทียบการสูญเสียเนื่องจากการเลี้ยวเบนกับเลขจำนวนเฟรอนส์เนลสำหรับโพรงกำทอนร่วมโฟกัส (โดยบอยด์และกอร์คอน)

แค้ไหนสมการ (4.33) ยังคงใช้ได้เพียงแต่ว่าเราแทน  $\sin \phi \sin \omega t$  (คลื่นนิ่ง) ด้วย  $\cos(\phi \pm \omega t)$  (คลื่นเคลื่อนที่)



รูป 4.19 แสดงขนาดของจุดและผิวที่มีเฟสเท่ากันสำหรับโหมด  $TEM_{00}$  ในโพรงกำทอนร่วมโฟกัสโพรงหนึ่ง

#### 4.4 โพรงกำทอนทรงกลมทั่วไป

ต่อไปเราจะพิจารณากรณีทั่ว ๆ ไปของโพรงกำทอนที่ประกอบด้วยกระจกทรงกลมสองแผ่นมีรัศมี  $R_1$  และ  $R_2$  วางห่างกันเป็นระยะ  $d$  การแจกแจงสนามภายในโพรงกำทอนนี้สามารถอนุมานได้จากโพรงกำทอนร่วมโฟกัสที่สมมูลกัน ในการพิจารณาโดยคิดว่ากระจกทรงกลมทั้งสองอยู่ที่ตำแหน่งเดียวกันกับผิวที่มีเฟสเท่ากันของผิว  $1'$  และผิว  $2'$  ในรูป 4.19 โพรงกำทอนในขณะนี้จะประกอบด้วยกระจก  $1'$  และ  $2'$  มากกว่าประกอบจากกระจก  $1$  และ  $2$  การแจกแจงสนามภายในและภายนอกโพรงกำทอนอย่างไรก็ตามจะไม่เปลี่ยนแปลงและขนาด

ของจุดสว่างและมีเฟสเท่ากันยังคงเหมือนในรูป 4.19 ในทางตรงกันข้ามเราสามารถเห็นได้จากสมการ (4.36) ว่ากระจก 1' และ 2' ทั้งสองจะไม่ยาวกว่าโพรงกำกับพร้อมโฟกัส ดังนั้นการหาหมวดของโพรงกำกับที่ประกอบด้วยกระจก 1' และ 2' เราสามารถคำนวณตำแหน่งของสองผิวร่วมโฟกัส 1 และ 2 ที่สอดคล้องกัน เพื่อลดปัญหาของโพรงกำกับพร้อมโฟกัสที่สมมูลกันลง ซึ่งคำตอบของปัญหาหาได้ด้วยสมการ (4.36) เมื่อทราบค่ารัศมี  $R_1$  และ  $R_2$  ของกระจก 1' และ 2' พร้อมทั้งทราบระยะห่างของมัน  $d$  เราสามารถหาค่าของ  $d$  ได้จากสมการ (4.36) ต่อจากนั้นรัศมีความโค้งและตำแหน่งของโพรงกำกับสมมูลจึงหาได้ เมื่อทราบค่า  $d$  แล้วการแจกแจงสนามภายในและภายนอกโพรงกำกับเราสามารถหาได้จากสมการ (4.33) จากที่เคยกล่าวไว้ว่ามีเพียงการแจกแจงสนามเท่านั้นที่ใช้คำนวณหาฟังก์ชันไอเกนของปัญหาได้ อย่างไรก็ตามก็ดีเมื่อเกี่ยวข้องกับค่าไอเกนแล้วการคำนวณไม่สามารถทำได้ด้วยวิธีง่าย ๆ เหมือนกับกรณีโพรงกำกับพร้อมโฟกัส โดยเฉพาะความถี่อภินาต  $\nu$  ไม่ได้กำหนดด้วยสมการ (4.32) แต่กำหนดด้วยสมการที่ยู่ยากมากขึ้น เพื่อความสะดวกเราจะไม่แสดงในที่นี้ แต่เราต้องการชี้บ่งบอกว่าปรากฏการณ์ของการเข้าซ้อนทางความถี่เป็นสิ่งธรรมดาที่มีอยู่ในโพรงกำกับทรงกลมทั่วไป

โพรงกำกับทรงกลมสามารถเป็นทั้งแบบเสถียรและไม่เสถียร ถ้า  $R_1$  และ  $R_2$  เป็นรัศมีของกระจกทั้งสอง และ  $d$  เป็นระยะที่กระจกทั้งสองแผ่ขวางห่างกัน เราสามารถกำหนดปริมาณไม่มีขนาดสองตัวขึ้น ดังนี้

$$g_1 = 1 - d/R_1 \quad (4.37)$$

$$g_2 = 1 - d/R_2$$

โพรงกำกับที่เป็นแบบเสถียรเมื่อ

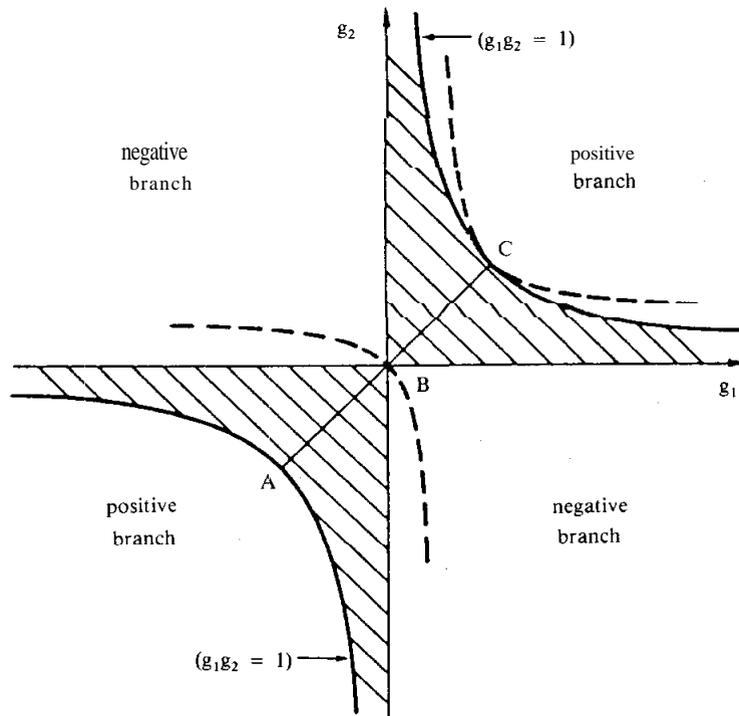
$$0 < g_1 g_2 < 1 \quad \dots\dots\dots (4.38)$$

เงื่อนไขของสภาพเสถียรในสมการ (4.38) ได้แสดงในรูป 4.20 ในรูปภาพนี้บริเวณเสถียรคือบริเวณพื้นที่แรเงา

จำพวกของโพรงกำกับทรงกลมที่น่าสนใจโดยเฉพาะคือโพรงกำกับที่สอดคล้องกับจุดบนเส้นตรง AC ซึ่งทำมุม 45 องศากับแกน  $g_1$  และ  $g_2$  เส้นตรงนี้กำหนดด้วยสมการ  $g_1 = g_2$  (ดังนั้น  $R_1 = R_2$ ) และสอดคล้องกับโพรงกำกับที่ประกอบด้วยกระจกที่มีรัศมีความโค้งเท่ากัน (โพรงกำกับสมมาตร) เกี่ยวกับโพรงกำกับสมมาตรชนิดต่าง ๆ เหล่านี้ เราจะมุ่งความสนใจไปยังโพรงกำกับสอดคล้องกับจุด A, B และ C ในรูป 4.20 จากสมการ (4.37)

เราสามารถเห็นได้ง่ายว่าจุด A, B และ C สอดคล้องกับโพรงำทอนร่วมศูนย์กลาง โพรงำทอนร่วมโฟกัสและโพรงำทอนระนาบขนานตามลำดับ ดังนั้นโพรงำทอนทั้งสามชนิดต่างอยู่บนขอบเขตระหว่างบริเวณเสถียรและบริเวณไม่เสถียร จากเหตุผลนี้จึงนิยมใช้โพรงำทอนใกล้เคียงร่วมโฟกัสมากกว่าโพรงำทอนร่วมโฟกัสโดยการจัดระยะห่างระหว่างกระจกให้กว้างกว่าหรือแคบกว่าที่สอดคล้องกับกรณีร่วมโฟกัส โพรงำทอนกึ่งร่วมโฟกัส (รูป 4.4) ( $R_1 = \infty$  และ  $R_2 = 2d$ ) เป็นรูปลักษณะอีกแบบหนึ่งซึ่งสามารถใช้เพื่อหลีกเลี่ยงบริเวณแรงความจริงโพรงำทอนที่ได้กล่าวมาทั้งหมดข้างต้นอยู่ภายในบริเวณเสถียรนั่นเอง

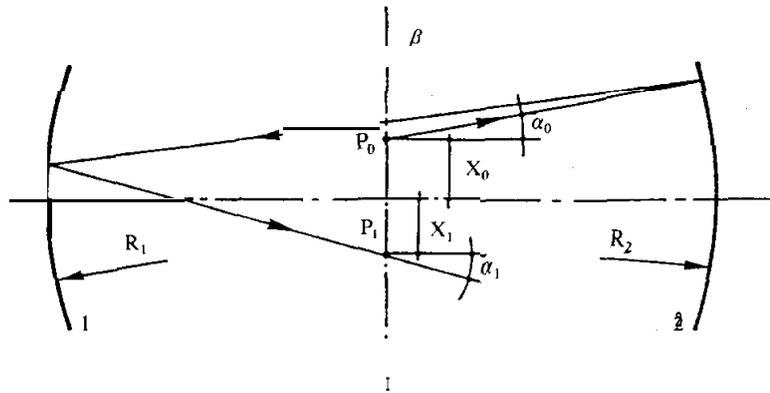
สรุปสำหรับหัวข้อนี้ เราจะพิสูจน์เงื่อนไขสมการ (4.38) ด้วยเหตุผลทางทัศนศาสตร์



รูป 4.20 แผนภูมิสภาพเสถียร  $g_1, g_2$  สำหรับโพรงำทอนทรงกลมทั่วไป บริเวณเสถียรคือบริเวณที่แรงของรูปเส้นโค้งประสอดคล้องกับโพรงำทอนร่วมโฟกัสที่เป็นไปได้

เชิงเรขาคณิต จากรูป 4.21 เราพิจารณาเส้นรังสีที่มาจากจุด  $P_0$  ของระนาบ  $\beta$  ใด ๆ ภายในโพรงำทอน รังสีนี้หลังจากสะท้อนจากกระจก 1 และ 2 แล้ว จะตัดกับระนาบ  $\beta$  ที่จุด  $P_1$  ถ้าเราให้  $x_0$  และ  $x_1$  เป็นพิกัดของ  $P_0$  และ  $P_1$  เมื่อเทียบกับแกนของโพรงำทอน และ  $\alpha_0, \alpha_1$  เป็นมุมที่สอดคล้องกับรังสีที่ทำกับแกน ดังนั้นสำหรับค่าน้อย ๆ ของ  $x$  และ  $\alpha$  ปริมาณ  $x_1$  และ  $\alpha_1$  จะหาได้จาก  $x_0$  และ  $\alpha_0$  ด้วยวิธีการแปลงเชิงเส้น (linear transformation) ดังนั้น ในรูป

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (4.39)$$



รูป 4.21 วิธีทางเมตริกซ์สำหรับการหาเงื่อนไขเสถียรภาพของโพรงกำเนิดรังสีแกมมาทั่วไป

ปริมาณ A, B, C และ D จะขึ้นกับเรขาคณิตของโพรงเท่านั้น รังสีที่มาจากจุด  $P_1(x_1, \alpha_1)$  หลังจากการสะท้อนสองครั้งจะตัดกับระนาบ  $\beta$  ที่จุด  $P_2(x_2, \alpha_2)$  กำหนดด้วย

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} x_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (4.40)$$

ดังนั้น หลังจากวิ่งกลับไปกลับมาในโพรง n รอบ จุด  $P_n(x_n, \alpha_n)$  กำหนดด้วย

$$\begin{pmatrix} x_n \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (4.41)$$

สำหรับโพรงกำเนิดรังสีแกมมาเราต้องการว่าสำหรับจุดเริ่มแรก  $(x_0, \alpha_0)$  ใดๆ จุด  $(x_n, \alpha_n)$  จะต้องไม่ลู่ออก (diverge) เมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้น นี่หมายความว่าเมตริกซ์

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^n$$

จะต้องไม่ลู่ออกด้วยในขณะที่ n มีค่าเพิ่มขึ้น เราทราบจากเมตริกซ์แคลคูลัสว่า

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^n = \frac{1}{\sin \theta} \begin{pmatrix} A \sin n\theta - \sin(n-1)\theta & B \sin n\theta \\ C \sin n\theta & D \sin n\theta - \sin(n-1)\theta \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (4.42)$$

$$\text{ในที่นี้} \quad \cos \theta = \frac{1}{2}(A+D) \quad \dots\dots\dots (4.43)$$

จากสมการ (4.43) เราเห็นว่าสำหรับเมตริกซ์ (4.42) ไม่ลู่ออก เราได้ว่า

$$1 < \frac{1}{2}(A+D) < 1 \quad \dots\dots\dots (4.44)$$

ที่จริงถ้าสมการ (4.44) ไม่เป็นจริง  $\theta$  จะเป็นจำนวนเชิงซ้อนและ  $\sin(n\theta)$  จะมีค่าลู่ออกในขณะที่  $n$  มีค่าเพิ่มขึ้น โดยการคำนวณสัมประสิทธิ์  $A$  และ  $D$  สำหรับโพรงกำทอนทั่วไป และใช้สมการ (4.44) สุดท้ายเราหาเงื่อนไขสมการ (4.38) ได้

#### 4.5 โพรงกำทอนไม่เสถียร

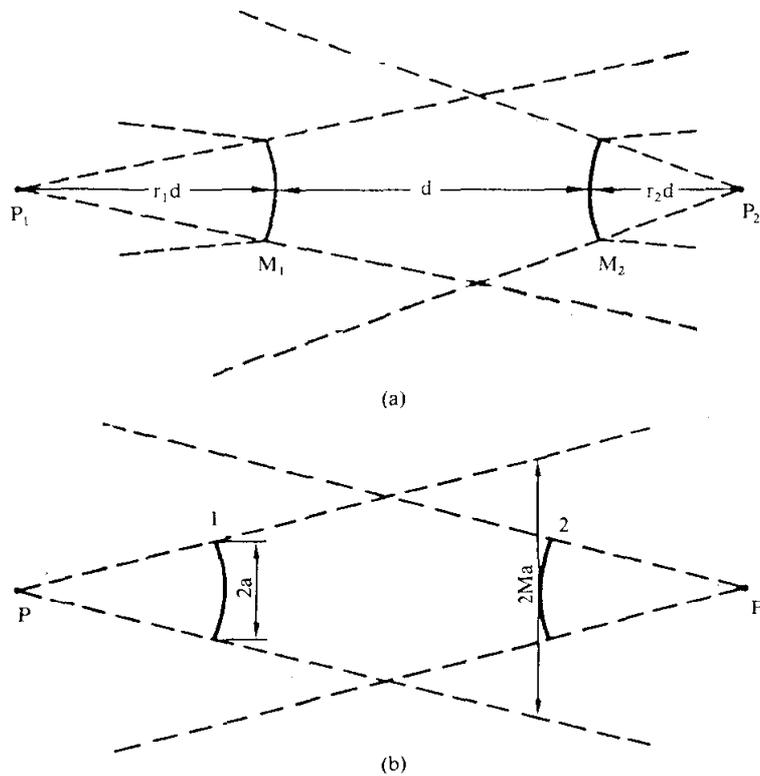
เงื่อนไขเสถียรภาพสำหรับโพรงกำทอนทรงกลมทั่วไปได้อธิบายในหัวข้อที่แล้ว [ดูสมการ (4.38)] และบริเวณไม่เสถียรได้แสดงเป็นบริเวณไม่ได้เรเงาของระนาบ  $g_1 - g_2$  ในรูป 4.20 เราสามารถแยกแยะโพรงกำทอนไม่เสถียรได้เป็นสองชนิด คือ (1) โพรงกำทอนด้านบวกซึ่งสอดคล้องกับกรณี  $g_1 g_2 > 1$  และ (2) โพรงกำทอนด้านลบซึ่งสอดคล้องกับกรณี  $g_1 g_2 < 0$

ก่อนที่จะอธิบายโพรงกำทอนไม่เสถียรสมควรที่จะบอกถึงเหตุผลว่าทำไมโพรงกำทอนเหล่านี้จึงเป็นที่สนใจของสาขาเลเซอร์ ขั้นแรกเราสังเกตเห็นได้ว่าสำหรับโพรงกำทอนเสถียรขนาดของจุดกลมสว่างเป็นขนาดของกรณีโพรงกำทอนร่วมโฟกัสเสมอ นี่หมายความว่าสำหรับความยาวโพรงกำทอนของขนาดหนึ่งเมตรและความยาวคลื่นอยู่ในช่วงของคลื่นแสงที่มองเห็นได้ ขนาดของจุดกลมสว่างจะเท่ากับหรือเล็กกว่า 1 มิลลิเมตร (คือค่อนข้างจะเล็กกว่า) ด้วยปริมาตรขนาดเล็กเช่นนี้กำลัง (หรือพลังงาน) ที่ส่งออกมาหาได้ในหมวดตามขวางเดียวจำเป็นต้องมีค่าค่อนข้างน้อยเมื่อเปรียบเทียบกับโพรงกำทอนไม่เสถียร สนามไม่ได้ถูกจำกัดขอบเขตด้วยแกน (ดูตัวอย่างในรูป 4.6) และปริมาตรมีขนาดใหญ่ในหมวดตามขวางเดียวที่เป็นไปได้ อย่างไรก็ตามก็ดีโพรงกำทอนไม่เสถียรยังมีปัญหาว่ารังสีที่ออกจากโพรงไม่เป็นไปตามที่เราคิดไว้ ดังนั้นในหมวดที่สอดคล้องจึงมีการสูญเสียมากกว่า (ทางเรขาคณิต) ของโพรงเสถียรมาก (ในที่นี้การสูญเสียเกิดจากการเลี้ยวเบน) อย่างไรก็ตามความจริงนี้สามารถใช้ให้เป็นประโยชน์ได้ โดยใช้การสูญเสียเหล่านี้ให้เป็นประโยชน์คู่ควบกับกำลังที่ส่งออกมา

การหาหมวดของโพรงกำทอนไม่เสถียรเราสามารถเริ่มต้นโดยใช้การประมาณทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิตซึ่งทำโดยซิกมาน (Seigman) เป็นครั้งแรก ซึ่งเริ่มจากผลลัพธ์หลักสำหรับคำตอบไอเกนของโพรงกำทอนเสถียร (ดูรูป 4.19) คือ (1) ขนาดกำหนดด้วยผลคูณของเฮอร์ไมท์โพลีโนเมียลกับฟังก์ชันแกาส์เซียน (2) การแจกแจงเฟสเหมือนกับแนวหน้าคลื่น

ทรงกลม การปรากฏของฟังก์ชันแก๊สเซียนได้จำกัดขนาดของจุดกลมสว่างของลำแสงและเกิดขึ้นจากคุณสมบัติการโฟกัสของโพรงก้ำทอนทรงกลมเสถียร เนื่องจากแนวหน้าคลื่นเป็นทรงกลมได้เกี่ยวข้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ตั้งขึ้นจากกระจกทรงกลม ในกรณีโพรงก้ำทอนไม่เสถียรจึงไม่มีคำตอบเฮอริเมท์-แก๊สเซียนที่เป็นไปได้ เมื่อลำแสงไม่ได้โฟกัสไปที่แกนของโพรงก้ำทอน ดังนั้นจึงเป็นไปได้ที่จะสมมติเป็นการประมาณครั้งแรกว่าคำตอบในกรณีนี้มีอัมพลิจูดสอดคล้องกับการส่องสว่างอย่างสม่ำเสมอในขณะที่แนวหน้าคลื่นยังคงเป็นทรงกลมอยู่

ต่อไปเรามาศึกษาโพรงก้ำทอนไม่เสถียรทั่วไปดังเช่นในรูป 4.22a เราจะสมมติว่าหวมวดหาได้จากการรวมกันได้ของสองคลื่นทรงกลมความเข้มสม่ำเสมอ จุดศูนย์กลาง  $P_1$  และ  $P_2$  ของทั้งสองคลื่นไม่ใช่จุดศูนย์กลางของกระจก  $M_1$  และ  $M_2$  และตำแหน่งของมันหาได้ง่ายจากคลื่นทรงกลมที่กำเนิดจากจุด  $P_1$  สะท้อนที่กระจก  $M_2$  จะต้องมีคลื่นทรงกลมกำเนิดจากจุด  $P_2$  หรือในทางกลับกันก็เป็นทำนองเดียวกัน ดังนั้น ตำแหน่งของจุด  $P_1$  และ  $P_2$  หาได้



รูป 4.22 (a) โพรงก้ำทอนไม่เสถียรของกระจกโค้งนูนทั่วไป  
(b) โพรงก้ำทอนไม่เสถียรปลายคู่สมมาตร

โดยคำนวณทางทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิตตรง ๆ ผลลัพธ์สำหรับปริมาณ  $r_1$  และ  $r_2$  ที่ปรากฏในรูป 4.22 เป็น

$$r_1 = g_2 \left\{ \left[ g_1 g_2 (g_1 g_2 - 1) \right]^{\frac{1}{2}} + g_1 g_2 - g_2 \right\}^{-1} \quad \dots\dots\dots (4.45ก)$$

$$r_2 = g_1 \left\{ \left[ g_1 g_2 (g_1 g_2 - 1) \right]^{\frac{1}{2}} + g_1 g_2 - g_1 \right\}^{-1} \quad \dots\dots\dots (4.45ข)$$

เมื่อ  $g_1$  และ  $g_2$  กำหนดด้วยสมการ (4.37)

เราได้พิจารณาเฉพาะโครงสร้างของหมวดเท่านั้น ส่วนการคำนวณการสูญเสียของหมวดเราจะพิจารณาถึงการสมมาตร (คือ  $R_1 = R_2 = R$  เมื่อ  $R$  คือรัศมีของกระจก)

ปลายคู่เหมือน (double-ended) (คือ  $a_1 = a_2 = a$  เมื่อ  $2a$  เป็นความกว้างของกระจก) และโพรงกำหนดไม่เสถียร (รูป 4.22b) ในกรณีนี้มันสามารถแสดงได้ว่าการเคลื่อนผ่านจากกระจกหนึ่งไปยังอีกกระจกหนึ่งจุดกลมของแต่ละคลื่นทรงกลมได้ขยายโตขึ้นด้วยขนาด  $M$  เท่ากำหนดด้วย

$$M = g + (g^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots\dots (4.46)$$

ในที่นี้เราจัดให้  $g = g_1 = g_2$  ดังนั้น ปริมาณ  $M$  จึงเรียกว่าตัวร่วมการขยายภาพทางเดียว (one-way magnification factor) (สมมาตร) เมื่อเราได้สมมติการส่องสว่างอย่างสม่ำเสมอแล้ว ดังนั้นการสูญเสียต่อจำนวนครั้งที่ผ่านไปกลายเป็น

$$y = \frac{S_2 - S_1}{S_2} = \frac{M^2 - 1}{M^2} \quad \dots\dots\dots (4.47)$$

เมื่อ  $S_1$  และ  $S_2$  เป็นภาคตัดขวางที่กระจก 1 และ 2 ตามลำดับของลำแสงที่เกิดจากจุด  $P$  เหมือนที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น การสูญเสียต่อจำนวนครั้งที่ผ่านไปยังให้สัดส่วนการคู่ควบกำลังที่ส่งออกมาจากแต่ละข้าง ให้สังเกตว่าทั้ง  $M$  และ  $y$  ต่างไม่ขึ้นกับเส้นผ่าศูนย์กลาง  $2a$  ของกระจก

เราเพียงพิจารณาหนึ่งหมวดเท่านั้น (ซึ่งก็คือหมวดของการสูญเสียต่ำสุด) เพื่อหาหมวดอันดับสูงขึ้นเรายังคงพิจารณาด้วยการประมาณทางทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิตเช่นกัน เราจะจำกัดเพียงพิจารณาเฉพาะกรณีปลายคู่เหมือนสมมาตรอีกครั้งหนึ่ง ในกรณีนี้สนามที่ตำแหน่ง  $x$  ของกระจก 2 เกิดจากสนามที่ตำแหน่ง  $x/M$  ของกระจก 1 ถ้าเราให้  $U_2$  และ  $U_1$  เป็นการแจกแจงสนามที่จุดเหล่านั้นตามลำดับ เราสามารถเขียนได้ว่า

$$U_2(x) = \frac{1}{M^{\frac{1}{2}}} U_1(x/M) \quad (4.48)$$

ในที่นี้ตัวร่วม  $1/M^2$  ทางด้านขวามือของสมการ (4.48) นับเป็นขนาดของลำแสงที่เพิ่มขึ้นด้วยปริมาณ  $M$  จากการผ่านจากกระจก 1 ไปกระจก 2 สำหรับ  $U(x)$  กลายเป็นหมวดโพรงหมวดหนึ่ง เราต้องการว่า (เมื่อโพรงเป็นโพรงสมมาตร)  $U_2(x) = \sigma_x U_1(x)$  ดังนั้นจากสมการ (4.48) เราได้ว่า

$$\sigma_x U(x) = \frac{1}{M^2} U\left(\frac{x}{M}\right) \quad \dots\dots\dots (4.49)$$

ซึ่งเป็นสมการของค่าไอเกนสมการหนึ่ง ทำนองเดียวกันสมการของฟังก์ชัน  $y$  ก็เป็นเช่นเดียวกัน ดังนั้นคำตอบไอเกนทั้งหมด คือ  $U(x, y) = U(x)U(y)$  และค่าไอเกน คือ  $\sigma = \sigma_x \sigma_y$  ดังนั้นเราสามารถหาคำตอบอันดับศูนย์ของสมการ (4.49) ได้ทันที คือ  $U_0 =$  ค่าคงที่ และ  $\sigma_x = 1/M^2$  รวบรวมสมการเหล่านี้ทั้งฟังก์ชัน  $x$  และ  $y$  เข้าด้วยกัน เราได้  $U(x, y) =$  ค่าคงที่ และ  $\sigma = 1/M^2$  นี่คือนิพจน์ที่เราได้พิจารณากันในตอนแรกและการสูญเสียของมันกำหนดด้วยสมการ (4.47) อย่างไรก็ตามยังสามารถแสดงให้เห็นได้ง่ายว่าคำตอบอันดับสูงของสมการ (4.49) อยู่ในรูปแบบของ

$$U_n(x) = x^n \quad \dots\dots\dots (4.50a)$$

เมื่อ  $n > 0$  และค่าไอเกนของมันคือ

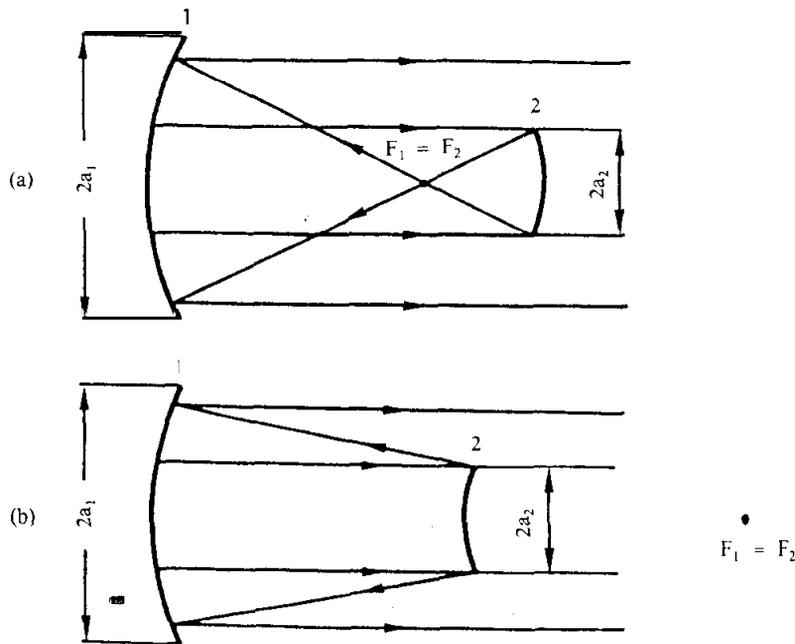
$$\sigma_{x^n} = 1/M^{n+1/2} \quad \dots\dots\dots (4.50b)$$

ให้สังเกตว่ากรณี  $n = 0$  (คำตอบอันดับศูนย์) สอดคล้องกับคำตอบการสูญเสียต่ำสุดที่กล่าวมาทั้งหมดนี้ทำให้เราสามารถบ่งบอกโพรงกำหนดไม่เสถียรสมมาตรอย่างกว้าง ๆ ได้ง่ายด้าย เราจะจำกัดการอธิบายถึงการพิจารณาชนิดที่สำคัญโดยเฉพาะของโพรงกำหนดสมมาตรที่เรียกว่าโพรงกำหนดร่วมโฟกัสเท่านั้น ชนิดนี้สามารถแบ่งออกเป็นชนิดย่อย ๆ อีกดังนี้ (1) สาขาด้านลบ (รูป 4.23a) และ (2) สาขาด้านบวก (รูป 4.23b) ทั้งสองสาขาเหล่านี้แสดงในระนาบ  $g_1 - g_2$  โดยแทนด้วยเส้นโค้งประไฮเปอร์โบลาในรูป 4.20 | ของสมการ  $(2g_1 - 1)(2g_2 - 1) = 1$  โพรงกำหนดชนิดต่าง ๆ เหล่านี้มีเพียงโพรงกำหนดชนิดร่วมโฟกัส (สมมาตร  $g_1 = g_2 = 0$ ) อย่างหนึ่งและชนิดระนาบขนาน ( $g_1 = g_2 = 1$ ) อีกอย่างหนึ่งวางอยู่บนขอบเขตระหว่างบริเวณเสถียรและบริเวณไม่เสถียร ส่วนโพรงกำหนดร่วมโฟกัสอื่น ๆ เป็นแบบไม่เสถียรทั้งสิ้น หมวดของโพรงกำหนดร่วมโฟกัสไม่เสถียรได้จากการรวมกันได้ของคลื่นทรงกลม (เกิดจากมีการโฟกัสร่วมกัน) กับคลื่นระนาบ ในกรณีนี้เราสามารถกำหนดตัวร่วมการขยายภาพ  $M$  ด้วย  $M = R_1/R_2$  เมื่อ  $R_1$  และ  $R_2$  เป็นรัศมีของกระจกทั้งสอง ปริมาณ

M ทำให้เส้นผ่าศูนย์กลางของคลื่นระนาบเพิ่มขึ้นหลังจากวิ่งไปกลับหนึ่งรอบ ถ้าเส้นผ่าศูนย์กลาง  $2a_1$  ของกระจก 1 มีขนาดโตเพียงพอ ( $2a_1 > 2Ma_2$ ) จะมีเพียงลำแสงระนาบผ่านออกมาจากโพรงได้เท่านั้น การสูญเสียจากการวิ่งไปกลับหนึ่งรอบของโพรงกำหนดโดยสมการ (4.47)

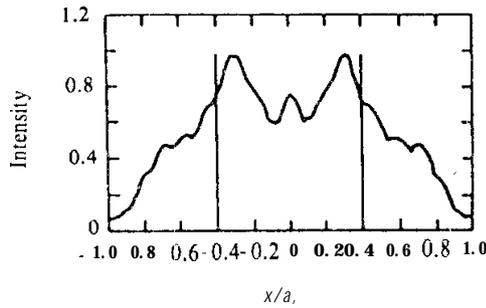
การอธิบายข้างต้นได้อาศัยจากการประมาณด้วยทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิต เพื่อให้ได้รูปภาพของโหมดที่เป็นจริงมากขึ้นของโพรงกำหนดไม่เสถียร เราต้องใช้อินทิกรัลการเลี้ยวเบนของเคอร์ซอพฟ์ ในที่นี้เราจะไม่อธิบายในรายละเอียดใด ๆ แต่จะแสดงและอธิบายผลลัพธ์สองสามอย่างของคำตอบไอเกนดังต่อไปนี้ (1) เฟสของคำตอบสอดคล้องกับแนวหน้าคลื่นเกือบจะเป็นทรงกลมด้วยรัศมีเกือบเท่ากันมากกว่า หาได้จากการทำนายด้วยทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิต (2) อัมพลิจูดของคำตอบแสดงถึงการเปลี่ยนแปลงตามแนวรัศมีซึ่งต่างจากการพิจารณาด้วยทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิต [คือสมการ (4.50ก)] การเปลี่ยนแปลงตามแนวรัศมีแสดงถึงคุณลักษณะของลวดลายรูประฆังซึ่งหาได้จากปรากฏการณ์การเลี้ยวเบน ตัวอย่างของลวดลายแสดงในรูป 4.24 อย่างไรก็ตามจากทฤษฎีคลื่นแสดงว่าโหมดต่างกัน กล่าวคือลวดลายของตำแหน่งที่สร้างขึ้นมาเองต่างกัน ย่อมหาได้ โหมดเหล่านี้ต่างจากโหมดอื่น ๆ ในจำนวนของลวดลายรูประฆังที่มันแสดงออกมา และต่างกันในทางตำแหน่งและความเข้มของมันด้วย จุดตัดแยกแยะความแตกต่างระหว่างโหมดอันดับต่ำสุดและอันดับสูงกว่าเห็นได้อย่างชัดเจน อย่างไรก็ตามความแตกต่างยังคงเป็นไปได้อย่างดีเมื่อพิจารณาค่าไอเกนของสมการการสูญเสียเนื่องจากการเลี้ยวเบน คุณลักษณะที่สำคัญปรากฏออกมาใหม่คือ แต่ละค่าครึ่งจำนวนเต็มของเลขจำนวนเฟรอสเนลที่กำหนดให้เท่ากันอย่างเหมาะสม ( $N_{eq}$ ) โหมดที่ต่างกันและแยกแยะได้กลายเป็นโหมดอันดับต่ำสุด (คือโหมดที่สูญเสียน้อยที่สุด) ซึ่งได้แสดงในรูป 4.25 แสดงขนาดของค่าไอเกน  $\sigma$  เปรียบเทียบกับ  $N_{eq}$  สำหรับสามโหมดเรียงลำดับกัน (การสูญเสียที่กำหนดด้วย  $1 - |\sigma|^2$ ) ให้สังเกตว่าสำหรับแต่ละค่าครึ่งจำนวนเต็มของ  $N_{eq}$  มีความแตกต่างกันมากมายระหว่างการสูญเสียของโหมดอันดับต่ำสุดและโหมดอื่น ๆ นี้แสดงว่าการทำให้โหมดตามขวางแตกต่างกันมาก ๆ สามารถหาได้ภายใต้เงื่อนไขเหล่านี้ สำหรับโพรงกำหนดปลายคู่เหมือนสมมาตร  $N_{eq}$  กำหนดด้วย  $N_{eq} = |(M^2 - 1)/2M|N$  เมื่อ  $N$  โดยปกติกำหนดเป็นเลขจำนวนเฟรอสเนล  $N = a^2/d\lambda$  ให้สังเกตว่าเมื่อ  $M = 1$  (สำหรับโพรงกำหนดที่มีการสูญเสียต่ำ) เราได้  $N_{eq} \ll N$  สำหรับโพรงกำหนดร่วมโฟกัสปลายเดี่ยวสาขาด้านบวก  $N_{eq}$  กำหนดด้วย  $N_{eq} = |(M - 1)/2|(a_2^2/d\lambda)$  ขณะเดียวกันสำหรับสาขาด้านลบมันกำหนดด้วย  $N_{eq} = |(M + 1)/2|(a_2^2/d\lambda)$  ในรูป 4.25 ค่าทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิตของ  $|\sigma|$  สำหรับคำตอบอันดับศูนย์ได้ชี้บอกไว้ จากสมการ (4.47)

ค่านี้คือ  $|\sigma| = 1/M$  ซึ่งไม่ขึ้นกับความกว้างของกระจกและค่าของ  $N_{c,q}$  ให้สังเกตด้วยว่าที่แต่ละค่าครึ่งจำนวนเต็มของ  $N_{c,q}$  หมวดอันดับต่ำสุด (คือหมวดที่เส้นโค้งแสดงค่าสูงสุดของ  $N_{c,q}$ ) มีการสูญเสีย  $\gamma = (1 - |\sigma|^2)$  น้อยกว่าที่ทำนายด้วยทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิต สิ่งเหล่านี้ได้ปรากฏในรูป 4.26 ด้วย เมื่อการสูญเสียเขียนเป็นเส้นโค้งเปรียบเทียบกับตัวร่วมการขยายภาพ  $M$  ในรูปนี้เส้นโค้งทึบ (ซึ่งใช้กับค่าครึ่งจำนวนเต็มของ  $N_{c,q}$ ) หาได้ด้วยทฤษฎีของการเลี้ยวเบน ขณะเดียวกันเส้นโค้งประจก้องคล้องกับผลลัพธ์ทางทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิต ความจริงการสูญเสียที่แท้จริงมีค่าน้อยกว่าที่หาได้จากการทำนายด้วยทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิตซึ่งเป็นผลเกิดจากการเลี้ยวเบน กล่าวคือผลของการเลี้ยวเบนได้สร้างสนามขึ้นด้วยอัมพลิจูดมีโครงสร้างเป็นรูประฆังที่มีการสูญเสียน้อยที่สุด



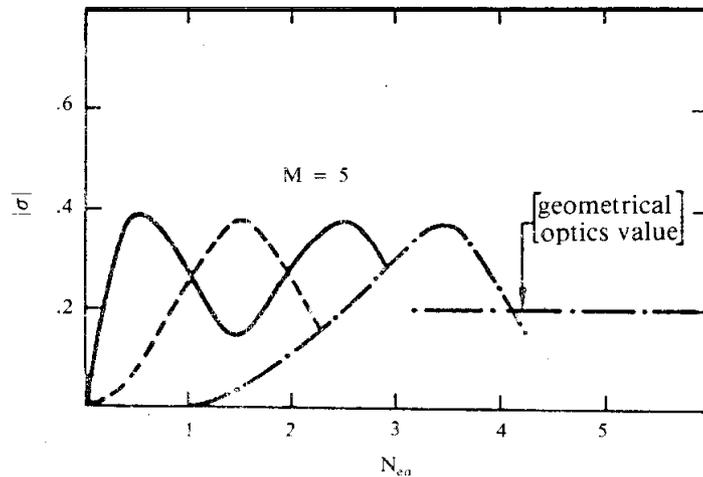
รูป 4.23 (a) โพรงกำทอนร่วมโฟกัสไม่เสถียรสาขาด้านลบ และ (b) สาขาด้านบวก

การสรุปในหัวข้อนี้เราได้พูดถึงข้อได้เปรียบและเสียเปรียบที่สำคัญของโพรงกำทอนไม่เสถียรเปรียบเทียบกับโพรงกำทอนเสถียร ข้อเสียเปรียบมีดังนี้ (1) ภาคตัดขวางของลำแสงที่พุ่งออกมาเป็นรูปแบบของวงแหวน (คือมันมีหลุมมืดอยู่ที่ศูนย์กลาง) ตัวอย่างเช่น ในโพรงกำทอนร่วมโฟกัส (รูป 4.23) เส้นผ่าศูนย์กลางในของวงแหวนเป็น  $2a_2$  ในขณะที่เส้นผ่าศูนย์กลางวงนอกของมันเป็น  $2Ma_2$  อย่างไรก็ตามมันสามารถแสดงว่าหลุมมืดนี้หายไปได้เมื่อใช้เลนส์จัดให้ลำแสงอยู่ในระนาบโฟกัสของมัน (ลวดลายสนามไกล) (2) การแจกแจงความเข้มในลำแสง

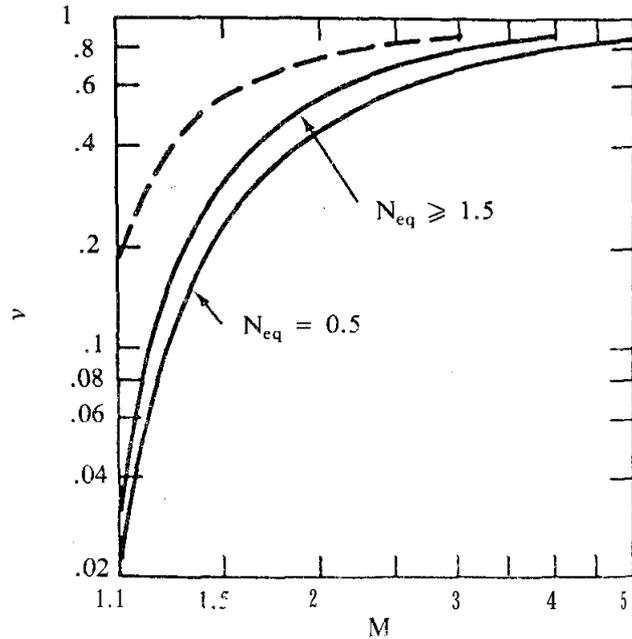


รูป 4.24 ตัวอย่างของพฤติกรรมตามรัศมีของการแจกแจงความเข้มของโหมดในโพรงไม่เสถียรหาได้โดยใช้ อินทิกราลของเคอร์ชอฟฟ์ การคำนวณโพรงกำหนดร่วมโฟกัสสาขาคำนวณโดยใช้  $M = 25$  และ  $N_{eq} = 0.6$  เส้นในแนวตั้งหมายถึงปลายขอบเขตของกระจกที่ให้แสงออกมา [จากเรนซ์และเชสเตอร์ (Rensch and Chester)]

ไม่สม่ำเสมอ แต่แสดงวงแหวนการเลี้ยวเบนบางวง คุณสมบัติหลักที่มีประโยชน์ของโพรง กำหนดไม่เสถียรสามารถรวบรวมได้ดังนี้ (ก) ปริมาตรโหมดมีขนาดใหญ่สามารถควบคุมได้ (ข) แยกแยะความแตกต่างของโหมดตามขวางได้ดี และ (ค) แสงสะท้อนได้ทั้งหมด ซึ่งโดยเฉพาะ สำหรับคลื่นได้แดงที่น่าสนใจเพราะสามารถใช้กับกระจกโลหะได้ เนื่องจากข้อได้เปรียบ เหล่านี้โพรงกำหนดไม่เสถียรจึงกลับกลายเป็นมีความสำคัญมากขึ้นสำหรับโพรงเลเซอร์ (โดยเฉพาะคลื่นได้แดง) เมื่อเราต้องการลำแสงกำลังสูงที่มีการเลี้ยวเบนจำกัด



รูป 4.25 ตัวอย่างของพฤติกรรมการออสซิลเลตของขนาดของค่าไอเกน  $\sigma$  เปรียบเทียบกับเลขจำนวนเฟอร์ลีนอล สมมูลสำหรับสามโหมดเรียงตามลำดับ



รูป 4.26 การสูญเสียเนื่องจากการคู่ควบของโพรงำทอนไม่เสถียรเปรียบเทียบกับตัวร่วมการขยายภาพ M เส้นโค้งประเป็นผลลัพธ์ทางทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิต เส้นโค้งทึบเป็นผลลัพธ์จากทฤษฎีคลื่น [จากชีกมาน (Seigman)]

#### 4.6 สรุป

1. โพรงำทอนแบ่งออกเป็นชนิดต่าง ๆ ตามลักษณะของกระจกและการจัดวางของมัน
2. โพรงำทอนระนาบขนานสามารถปฏิบัติได้ตามแบบของฟอกซ์และลี
3. บอยด์และกอร์ดอนได้พัฒนาการปฏิบัติของฟอกซ์และลีให้ใช้กับโพรงำทอนร่วมโฟกัสได้อย่างสมบูรณ์
4. โพรงำทอนทรงกลมทั่วไปสามารถแบ่งออกเป็นโพรงำทอนเสถียรและไม่เสถียรโดยพิจารณาจากเงื่อนไขของโพรงำทอนเสถียรคือ

$$0 < g_1 g_2 < 1$$

เมื่อ

$$g_1 = 1 - d/R_1$$

$$g_2 = 1 - d/R_2$$

$R_1$  และ  $R_2$  คือรัศมีความโค้งของกระจกทรงกลมทั้งสอง

## แบบฝึกหัดที่ 4

- 4.1 พฤติกรรมตามแนวรัศมีของความหนาแน่นพลังงานในโพรง (หรือความเข้มของลำแสงส่งออก) สำหรับโหมด  $TEM_{00}$  เป็นอย่างไร? และค่าความเข้มของจุดสว่างขนาด  $W_0$  เป็นเท่าไร?
- 4.2 ให้แสดงว่ากำลังทั้งหมดในลำแสงเกาส์เซียนเป็น  $P = I_0(\pi W_0^2)$  เมื่อ  $I_0$  คือ ยอดของความเข้มลำแสง
- 4.3 โพรงก้ำทอนหนึ่งโพรงประกอบด้วยกระจกทรงกลมสองแผ่นมีรัศมีความโค้ง 4 เมตร และวางห่างกันเป็นระยะ  $d' = 1$  เมตร ให้คำนวณขนาดจุดสว่างของโหมด  $TEM_{00}$  ที่ศูนย์กลางของโพรงและบนกระจก
- 4.4 ให้แสดงว่าเราสามารถหาโพรงก้ำทอนร่วมโฟกัสสมมูลได้เมื่อพารามิเตอร์  $g_1, g_2$  ของโพรงก้ำทอนทรงกลมทั่วไปสอดคล้องกับสมการ (4.38)
- 4.5 จงคำนวณรังสีตัวแปลงเมตริกซ์ (A, B, C, D) สำหรับการเคลื่อนที่ในระวางที่อิสระของรังสีลำหนึ่ง ระหว่างสองระนาบ  $\beta$  และ  $\beta'$  ห่างกันด้วยระยะ  $d$
- 4.6 จงคำนวณเมตริกซ์ (A, B, C, D) สำหรับรังสีลำหนึ่งซึ่งสะท้อนจากกระจกทรงกลมเมื่อระนาบ  $\beta$  และ  $\beta'$  เกิดขึ้นพร้อมกัน และอยู่ระหว่างกลางของกระจกทั้งสอง
- 4.7 ให้แสดงว่าเมื่อระนาบของปัญหาในข้อ 4.5 และ 4.6 อยู่ร่วมกัน และอยู่ห่างจากกระจกทรงกลมเป็น  $d$  เมตริกซ์ สามารถหาได้เป็นผลคูณของเมตริกซ์ที่คำนวณได้ในปัญหาข้อ 4.5 และ 4.6
- 4.8 ให้ใช้ผลลัพธ์ของปัญหาข้อ 4.5, 4.6 และ 4.7 จงพิสูจน์เงื่อนไขเสถียรภาพสมการ (4.38)
- 4.9 จงแสดงว่าสมการ (4.25) มีคำตอบไอเกน  $U = \exp(-\pi\xi^2)$  เมื่อ  $N = \infty$  (โดยแทนค่าโดยตรง) และให้หาค่าไอเกน  $\sigma_\xi^*$
- 4.10 เลเซอร์ชนิดหนึ่งซึ่งทำงานที่  $\lambda = 0.6$  ไมครอน มีกำลังขยาย  $2 \times 10^{-2}$  ต่อการผ่านหนึ่งครั้ง และมีโพรงก้ำทอนร่วมโฟกัสยาว  $d = 1$  เมตร โดยใช้รูป 4.18 เลือกขนาดช่องเปิดของกระจกเพื่อกักโหมด  $TEM_{01}$  ไว้ และปล่อยโหมด  $TEM_{00}$  ผ่านออกไปได้

- 4.11 โพรงำทอนโพรงหนึ่งประกอบด้วยกระจกเว้าทรงกลมรัศมี  $R_1 = -1$  เมตร และกระจกนูนทรงกลมรัศมี  $R_2 = 1.5$  เมตร ระยะห่างระหว่างกระจกมากที่สุดเป็นเท่าไรที่ทำให้กระจกยังคงมีเสถียรภาพ
- 4.12 จากสมการ (4.45) จงแสดงว่าตัวร่วมขยายของโพรงำทอนสมมาตรกำหนดด้วยสมการ (4.46)
- 4.13 จงแสดงว่าความสัมพันธ์ระหว่าง  $g_1$  และ  $g_2$  สำหรับโพรงำทอนร่วมโฟกัสทั่ว ๆ ไป คือ

$$(2g_1 - 1)(2g_2 - 1) = 1$$