

บทที่ 2

อันตรกิริยาของการแผ่รังสีที่มีต่อวัตถุ

วัตถุประสงค์

ในบทนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อให้

1. นักศึกษาเข้าใจความหมายของทฤษฎีการแผ่รังสีวัตถุดำ และสามารถยกตัวอย่างของวัตถุดำที่มีการแผ่รังสีที่นักศึกษาพบเห็นในชีวิตประจำวันได้
2. นักศึกษาสามารถเปรียบเทียบความแตกต่างของการเปล่งแสงโดยการกระตุ้นการเปล่งแสงตามปกติวิสัย และการดูดกลืน
3. นักศึกษาต้องสามารถแก้ปัญหาจากแบบฝึกหัดท้ายบทได้อย่างน้อย 4 ข้อในเวลาหนึ่งสัปดาห์

2.1 ผลของทฤษฎีการแผ่รังสีวัตถุดำ⁽¹⁰⁾

เรามานิยามโพรง ๆ หนึ่ง ซึ่งบรรจุด้วยตัวกลางชนิดเดียวกัน และเป็นสารไดอิเล็กตริกที่มีคุณสมบัติเท่ากัน (isotropic dielectric medium) ถ้าผนังของโพรงรักษาให้มีอุณหภูมิคงที่ T เสมอ มันจะปล่อยพลังงานออกมาอย่างต่อเนื่องในรูปของการแผ่รังสีแม่เหล็กไฟฟ้า ซึ่งทำให้เกิดการกระจายพลังงานอย่างสมดุลทั่วถึงขึ้นภายในสารไดอิเล็กตริก เมื่อเข้าสู่สภาวะสมดุล อัตราของการดูดกลืนและอัตราการปล่อยพลังงานของผนังโพรงจะเท่ากัน เหตุการณ์เช่นนี้สามารถอธิบายได้ด้วยปริมาณความหนาแน่นพลังงาน ซึ่งใช้แทนพลังงานของรังสีแม่เหล็กไฟฟ้าที่บรรจุอยู่ในหนึ่งหน่วยปริมาตรของโพรง ความหนาแน่นพลังงานสามารถเขียนเป็นฟังก์ชันของสนามไฟฟ้า $E(t)$ และสนามแม่เหล็ก $H(t)$ เป็นไปตามสูตรที่รู้จักกันดี คือ

$$\rho = \frac{1}{2}\epsilon E^2(t) + \frac{1}{2}\mu H^2(t) \dots\dots\dots (2.1)$$

ในที่นี้ ϵ และ μ คือ ค่าคงที่ไดอิเล็กตริกและความซาบซึมแม่เหล็ก (magnetic permeability) ของตัวกลางในโพรง

เราจะแทนการแจกแจงพลังงานเป็นส่วน ๆ ของการแผ่รังสีด้วยฟังก์ชัน ρ_ν ซึ่งเป็น

ฟังก์ชันของความถี่ ν ดังต่อไปนี้คือ $\rho_\nu d\nu$ แทนความหนาแน่นพลังงานของการแผ่รังสี มีความถี่อยู่ระหว่าง ν และ $\nu + d\nu$ กำหนดความสัมพันธ์ระหว่าง ρ และ ρ_ν เป็น

$$\rho = \int_0^\infty \rho_\nu d\nu \quad \dots\dots\dots (2.1) \text{ ก}$$

สมการนี้สามารถแสดงว่าการแจกแจงพลังงานเป็นส่วน ๆ ρ_ν เป็นฟังก์ชันทั่วไปที่ไม่ขึ้นกับทั้งธรรมชาติของผนังและรูปร่างของผนัง แต่ขึ้นกับความถี่ ν และอุณหภูมิ T ของโพรง คุณสมบัติข้อนี้ของ ρ_ν สามารถพิสูจน์ได้ด้วยอุณหพลศาสตร์ (Thermodynamics) ธรรมดาเราสมมติว่ามีโพรงสองโพรงที่มีรูปร่างตามต้องการและผนังของโพรงทั้งสองมีอุณหภูมิ T เท่ากัน เพื่อให้อุณหภูมิของผนังที่ตลอดเวลา เราอาจจะให้ผนังของโพรงทั้งสองสัมผัสกับเครื่องควบคุมอุณหภูมิจึงที่อัตโนมัติ (thermostat) สองเครื่องที่อุณหภูมิ T เรายังสมมติให้โพรงแรกมีความหนาแน่นพลังงาน ρ'_ν ความถี่ ν โพรงที่สองมีความหนาแน่นพลังงาน ρ''_ν โดยที่ $\rho'_\nu > \rho''_\nu$ ต่อไปเราทำให้โพรงทั้งสองมีรูเล็ก ๆ รูหนึ่งเชื่อมกันอยู่ให้แสงผ่านถึงกันได้ ให้เป็นระบบทางเดินของแสง และเราได้สอดแผ่นกรองแสงกันอยู่ระหว่างระบบทางเดินของแสงด้วย ซึ่งยอมให้แสงที่มีช่วงความถี่ใกล้เคียง ๆ กับความถี่ ν ผ่านไปได้เท่านั้น เมื่อ $\rho'_\nu > \rho''_\nu$ มันจะมีพลังงานแม่เหล็กไฟฟ้าสุทธิไหลผ่านจากโพรงแรกข้ามไปยังโพรงที่สอง อย่างไรก็ตาม การไหลของพลังงานนี้ขัดกับกฎข้อที่สองของอุณหพลศาสตร์ เมื่อโพรงทั้งสองมีอุณหภูมิเท่ากัน ดังนั้น โพรงทั้งสองต้องมี $\rho'_\nu = \rho''_\nu$ สำหรับทุก ๆ ความถี่

ปัญหาของการคำนวณฟังก์ชัน $\rho(\nu, T)$ เป็นสิ่งที่ท้าทายสำหรับนักฟิสิกส์ อย่างไรก็ตาม นักฟิสิกส์ชื่อ พลังค์ (Planck) ก็สามารถหาคำตอบที่สมบูรณ์ของมันได้ถูกต้อง และได้ตั้งสมมติฐานว่าแสงเป็นห้วง ๆ (quanta) ดังนั้น ทฤษฎีวัตตุดำจึงเป็นพื้นฐานขั้นต้นอย่างหนึ่งของฟิสิกส์ยุคใหม่

เมื่อฟังก์ชัน ρ_ν ไม่ขึ้นกับรูปร่างของโพรงและธรรมชาติของตัวกลางสารไดอิเล็กตริก เรามาพิจารณาโพรงรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากโพรงหนึ่ง ซึ่งผนังของมันเป็นตัวนำอย่างสมบูรณ์และภายในของโพรงมีสารไดอิเล็กตริกบรรจุอยู่เต็ม (ดูรูป 2.1)

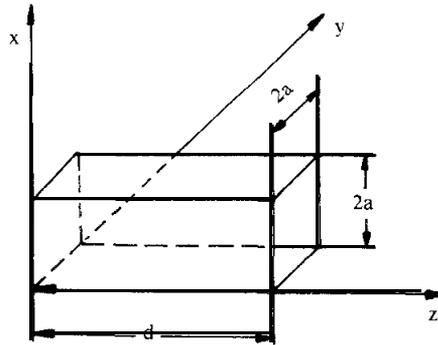
การแก้ปัญหานี้ เราเริ่มต้นด้วยการคำนวณการแจกแจงสนามแม่เหล็กไฟฟ้าคลื่นนิ่งที่สามารถมีอยู่ได้ในโพรงนี้ อาศัยจากสมการของแมกซ์เวลล์ (Maxwell's equations) สนามไฟฟ้าต้องเป็นไปตามสมการคลื่น ดังนี้

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

เมื่อ ∇^2 คือ ตัวดำเนินการลาปลาซ (Laplacian operator) และ c คือ ความเร็วของแสงในตัวกลางที่กำลังพิจารณา นอกจากนี้สนามยังต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของแต่ละผนังด้วย

$$\vec{E} \times \vec{n} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

ในที่นี้ \vec{n} ตั้งฉากกับผนังที่กำลังพิจารณาโดยเฉพาะ เงื่อนไขเหล่านี้แสดงว่าไม่มีองค์ประกอบของเส้นสัมผัสสนามไฟฟ้าบนผนังของโพรง



รูป 2.1 แสดงโพรงสี่เหลี่ยมมุมฉากมีผนังเหนี่ยวนำสมบรูณ์เก็บรักษาไว้ในอุณหภูมิ T

เราสามารถแก้ปัญหาได้ง่ายโดยแยกตัวแปรต่าง ๆ ออกจากกัน กำหนดให้

$$\vec{E} = \vec{u}(x, y, z) A(t) \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

และแทนสมการ (2.4) ลงในสมการ (2.2) เราได้

$$\nabla^2 \vec{u} = -k^2 \vec{u} \quad \dots\dots\dots (2.5 ก)$$

$$\frac{d^2 A}{dt^2} = -(ck)^2 A \quad \dots\dots\dots (2.5 ข)$$

เมื่อ k เป็นค่าคงที่

สมการ (2.5 ข) มีคำตอบทั่วไปเป็น

$$A = A_0 \cos(\omega t + \phi) \quad \dots\dots\dots (2.6)$$

ในที่นี้ A_0 และ ϕ เป็นค่าคงที่ใด ๆ และ

$$\omega = kc \quad \dots\dots\dots (2.7)$$

ต่อไปเราต้องหาคำตอบของสมการ (2.5 ก) ซึ่งเรารู้ว่าเป็นสมการเฮลมโฮลทซ์ (Helmholtz equation) ซึ่งมีเงื่อนไขขอบเขตกำหนดด้วยสมการ (2.3) คำตอบที่มีรูปแบบตามสมการ (2.4) เรียกว่า “โหมด” (mode) ของโพรง มันสอดคล้องกับโครงรูปคลื่นหนึ่งของ

สนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายในโพรง สำหรับคำตอบนี้มีอัมพลิจูดมากที่สุดของการออสซิลเลตที่จุดกำหนดในโพรงเป็นค่าคงที่เสมอ

สำหรับส่วนที่เกี่ยวข้องกับระยะทาง $\vec{u}(x, y, z)$ สามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\begin{aligned} u_x &= e_x \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \\ u_y &= c_y \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z \\ u_z &= e_z \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2.8)$$

สอดคล้องกับสมการ (2.5 ก) สำหรับค่าใด ๆ ของ e_x, e_y, e_z ถ้าหากว่า

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 \quad \dots\dots\dots (2.9)$$

นอกจากนั้น สมการ (2.8) ยังสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของสมการ (2.3) บนสามารถหา $x = 0, y = 0, z = 0$ ด้วย และถ้าเรากำหนดเงื่อนไขว่าสมการ (2.3) จะต้องสอดคล้องกับผนังด้านอื่น ๆ ของโพรงด้วย เราได้

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{\ell\pi}{2a} \\ k_y &= \frac{m\pi}{2a} \\ k_z &= \frac{n\pi}{d} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2.10)$$

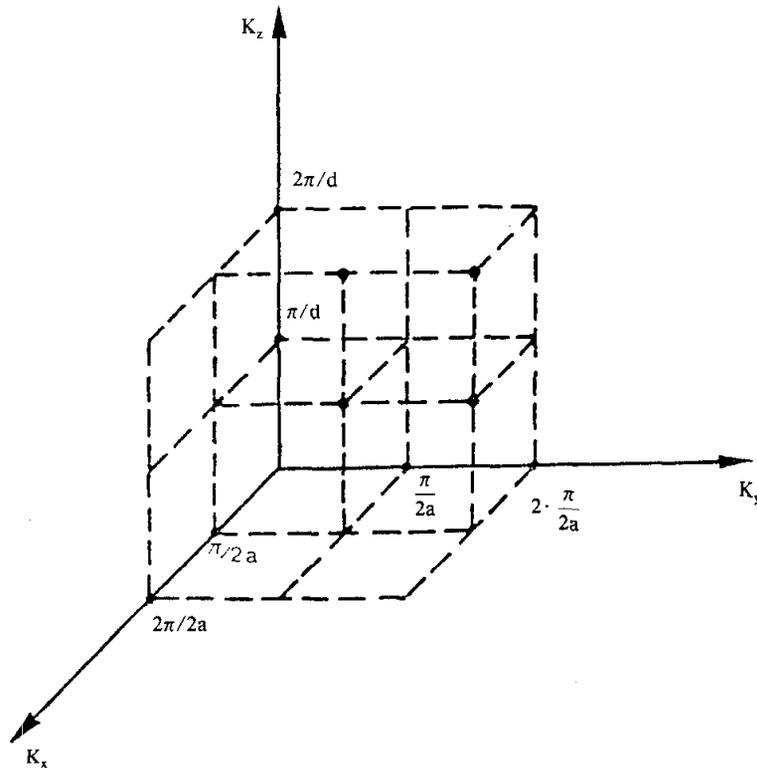
เมื่อ ℓ, m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ความสำคัญทางกายภาพของมันสามารถมองเห็นได้ทันทีทันใด คือ มันแทนเลขจำนวนของบัพ (nodes) ที่หมวดของคลื่นนิ่งตามทิศทาง x, y และ z ตามลำดับ สำหรับค่าแน่นอนของ ℓ, m และ n เป็นไปตามค่าแน่นอนของ k_x, k_y และ k_z และเป็นไปตามสมการ (2.7) และ (2.9) ด้วย ความถี่ ω ของหมวด จะเป็นค่าแน่นอนกำหนดด้วย

$$\omega^2_{\ell, m, n} = c^2 \left[\left(\frac{\ell\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 \right] \quad \dots\dots\dots (2.11)$$

ในที่นี้ เราได้ชัดแจ้งว่าความถี่ของหมวดจะขึ้นกับค่าดัชนี ℓ, m และ n อย่างไรก็ดี หมวดยังไม่ได้พิจารณาอย่างสมบูรณ์ เพราะว่า e_x, e_y และ e_z ยังเป็นค่าใด ๆ ก็ได้ อย่างไรก็ตาม สมการของแมกซ์เวลล์ได้กำหนดเงื่อนไขอื่นอีกที่สนามไฟฟ้าจะต้องสอดคล้องด้วย คือ $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ ซึ่งเมื่อใช้สมการ (2.8) ช่วยเราได้

$$\vec{e} \cdot \vec{k} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.12)$$

ในสมการ (2.12) เราได้กำหนดสองเวกเตอร์ \vec{e} และ \vec{k} มีองค์ประกอบตามแกน x, y และ z เป็น e_x, e_y และ e_z และ k_x, k_y, k_z ตามลำดับ ดังนั้นสมการ (2.12) แสดงปริมาณทั้งสามของ e_x, e_y และ e_z มีเพียงสองปริมาณที่ไม่ขึ้นต่อกัน เมื่อเรายืดค่า l, m, n ไรต์ (คือเมื่อยืด \vec{k} ให้คงที่) เวกเตอร์ \vec{e} วางอยู่ในระนาบที่ตั้งฉากกับ \vec{k} ระนาบนี้มีเพียงสององศาแห่งอิสรภาพ (degree of freedom) ของเวกเตอร์ \vec{e} สำหรับให้เลือก ดังนั้นจะมีเพียงสองหมวดเท่านั้นที่เป็นไปได้ ส่วนเวกเตอร์ \vec{e} อื่นที่วางอยู่ในระนาบนี้ สามารถมีค่าเป็นส่วนประกอบเชิงเส้นของสองเวกเตอร์แรก



รูป 2.2 แสดงภาพประกอบของความหนาแน่นของหมวดออกไซด์ในโพรงของรูป 2.1 แต่ละจุดของโครงผลึกสอดคล้องกับสองหมวดโพรง

ต่อไปเราคำนวณจำนวนของหมวด N_v ที่เกิดกักในโพรงด้วยความถี่อยู่ระหว่าง 0 และ ν ซึ่งเป็นเช่นเดียวกับจำนวนของหมวดที่มีเวกเตอร์คลื่น \vec{k} มีขนาด k อยู่ระหว่าง 0 และ $2\pi\nu/c$ จากสมการ (2.10) เราเห็นได้ว่าในระบบของพิกัด k_x, k_y, k_z ค่าเป็นไปได้อย่างไรต์สำหรับ \vec{k} กำหนดด้วยเวกเตอร์ที่เชื่อมระหว่างจุดกำเนิดกับจุดที่เป็นปมของโครงผลึกสามมิติ ดังแสดงในรูป 2.2 มันมีความสัมพันธ์กันแบบหนึ่งต่อหนึ่งอย่างชัดเจนระหว่างจุดเหล่านี้กับค่าที่เป็นไปได้อย่างไรต์ของ \vec{k} อย่างไรก็ตาม เมื่อ k_x, k_y และ k_z เป็นปริมาณค่าบวก เราต้องนับจุดเหล่านั้นที่วางอยู่ใน

อัฐภาค (octant) บวกเท่านั้น จำนวนของจุดเหล่านั้นที่มีค่า k อยู่ระหว่าง 0 และ $2\pi\nu/c$ เป็น $1/8$ ของอัตราส่วนระหว่างปริมาตรของทรงกลมรัศมี $2\pi\nu/c$ มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดและปริมาตรของเซลล์หนึ่งหน่วย ขนาด $\pi/2a, \pi/2a, \pi/d$ ดังนั้น จำนวนโหมด N_ν ที่มีสองโหมดเป็นไปได้สำหรับแต่ละค่าของ k เป็น

$$N_\nu = 2 \frac{8}{3} \frac{\pi^3 \nu^3}{c^3} \frac{1}{2a \cdot 2a \cdot d} = \frac{8\pi\nu^3}{3c^3} V \quad (2.13)$$

เมื่อ V คือ ปริมาตรทั้งหมดของโพรง ถ้าเรากำหนด $P(\nu)$ เป็นจำนวนของโหมดต่อหน่วยปริมาตรและต่อหน่วยช่วงความถี่ เราจะได้

$$P(\nu) = \frac{1}{V} \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \quad \dots\dots\dots (2.14)$$

ต่อไปคำนวณพลังงานเฉลี่ยที่เกี่ยวข้องกับแต่ละโหมดอภินาของโพรง โดยสมมติว่าอุณหภูมิของผนังโพรงเป็น T อาศัยจากสถิติของโบลทซ์มานน์ ความเป็นไปได้ dP ที่พลังงานของโหมดโพรงอยู่ระหว่าง E และ $E+dE$ เขียนได้เป็น $dP = C \exp[-(E/KT)]dE$ เมื่อ C เป็นค่าคงที่ ดังนั้นพลังงานเฉลี่ยของโหมดโพรง (E) กำหนดด้วย

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^\infty E \exp[-(E/KT)]dE}{\int_0^\infty \exp[-(E/KT)]dE} = KT \quad \dots\dots\dots (2.15)$$

ดังนั้น ความหนาแน่นพลังงาน ρ_ν หาได้โดยคูณจำนวนของโหมดต่อหน่วยปริมาตรต่อหน่วยช่วงความถี่ $P(\nu)$ ด้วยพลังงานเฉลี่ย (E) ของแต่ละโหมด

$$\rho_\nu = \left(\frac{8\pi\nu^2}{c^3} \right) KT \quad (2.16)$$

นี่คือสูตรที่รู้จักกันดี เรียกว่าสูตรของการแผ่รังสีเรย์เลย์-จิ้นส์ (Rayleigh – Jeans) อย่างไรก็ตาม มันขัดกับผลการทดลองอย่างสิ้นเชิง เราเห็นได้ทันทีว่าสมการ (2.16) ต้องผิดพลาดอย่างแน่นอน เพราะว่ามันให้ความหมายว่าความหนาแน่นพลังงานทั้งหมด ρ เป็นค่าอนันต์ |ดูสมการ (2.1 ก)| อย่างไรก็ตาม สมการ (2.16) ใช้แทนเป็นข้อสรุปของเหตุผลเก่าที่ได้กล่าวไปแล้ว

ปัญหายังคงทิ้งไว้ไม่ได้แก้ไขจนกระทั่งในตอนต้นของศตวรรษนี้ พลังค์ได้ตั้งข้อสมมติฐานว่า แสงเป็นห้วง ๆ สมมติฐานขั้นพื้นฐานของพลังค์นี้ก็คือ พลังงานในหมวดของโพรงที่กำหนดไม่สามารถมีค่าใด ๆ ตามใจชอบอยู่ระหว่าง 0 ถึง ∞ เหมือนเช่นที่สมมติในสมการ (2.15) แต่ต้องเป็นค่าที่เป็นไปได้ของพลังงานนี้ และต้องเป็นผลคูณเต็มเม็ดเต็มหน่วยของปริมาณมูลฐานค่าหนึ่งและแปรโดยตรงกับความถี่ของหมวด หรืออีกนัยหนึ่งพลังค์ได้สมมติว่าพลังงานของหมวดสามารถเขียนเป็น $E = nh\nu$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกและ h เป็นค่าคงที่ (ซึ่งภายหลังเรียกว่า ค่าคงที่ของพลังค์) เราสังเกตในที่นี้ว่าข้อสมมติฐานนี้ส่อให้เห็นการแลกเปลี่ยนพลังงานระหว่างภายในโพรงและผนังของมันนำมาซึ่งพลังงาน $h\nu$ แยกออกจากกันเป็นส่วน ๆ ปริมาณค่าต่ำสุดนี้สามารถแลกเปลี่ยนกันได้ เรียกว่า หน่วยพลังงานของแสง (light quantum) หรือโฟตอน (photon) ตามข้อสมมติฐานนี้พลังงานเฉลี่ยของหมวด คือ

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu \exp[-(nh\nu/KT)]}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp[-(nh\nu/KT)]} = \frac{h\nu}{\exp(h\nu/KT) - 1} \dots\dots\dots (2.17)$$

สูตรนี้ต่างจากสมการเดิม (2.15) มากอย่างเห็นได้ชัด สำหรับ $h\nu \rightarrow 0$ สมการ (2.17) ลดรูปกลายเป็นสมการ (2.15) จากสมการ (2.14) และ (2.17) เราได้สูตรของพลังค์ คือ

$$p_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{h\nu}{\exp(h\nu/KT) - 1} \dots\dots\dots (2.18)$$

ซึ่งได้ผลตรงกับการทดลองอย่างสมบูรณ์ และกำหนดเงื่อนไขการเลือกสำหรับ h มีค่าเป็น $h = 6.62 \times 10^{-34}$ จูลวินาที (Joule·sec)

เราอาจจะสังเกตว่าอัตราส่วน

$$\langle q \rangle = \frac{\langle E \rangle}{h\nu} = \frac{1}{\exp(h\nu/KT) - 1} \dots\dots\dots (2.19)$$

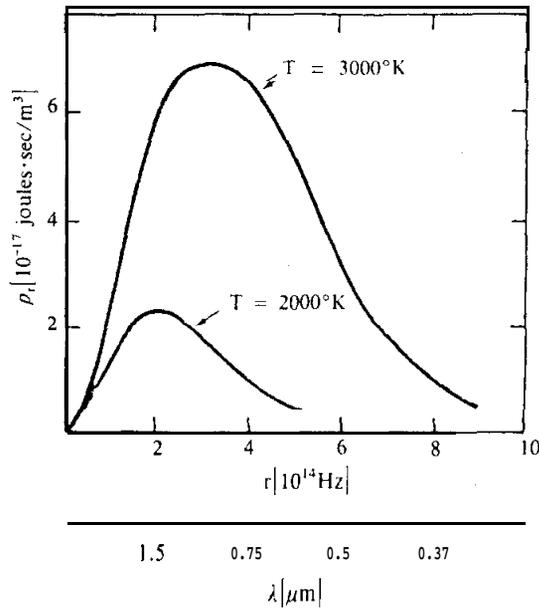
เป็นจำนวนของโฟตอนเฉลี่ย $\langle q \rangle$ สำหรับแต่ละหมวด ถ้าเราพิจารณาความถี่ ν ค่าหนึ่งในช่วงความถี่แสง (4×10^{14} เฮิรตซ์) เราได้ $h\nu = 1$ อิเล็กตรอนโวลต์ สำหรับ $T = 300^\circ\text{K}$ เราได้ $KT = (1/40)$ อิเล็กตรอนโวลต์ จากสมการ (2.19) ให้ $\langle q \rangle = \exp(-40)$ ดังนั้น เราเห็นได้ว่าจำนวนของโฟตอนเฉลี่ยต่อหมวดของการแผ่รังสีวัตถุดำที่อุณหภูมิห้องมีค่าน้อยกว่าหนึ่งมาก ๆ ค่านี้ต้องนำไปเปรียบเทียบกับจำนวนของโฟตอน q_0 ที่หาได้ในโพรงกำหนดของเลเซอร์ในหมวดเดี่ยวหมวดหนึ่ง (ดูตัวอย่างรูป 5.10)

สมการ (2.18) สามารถเขียนเป็นพจน์ของฟังก์ชัน ρ_ω ด้วยวิธีดังนี้ กำหนด $\rho_\omega d\omega$ เป็นความหนาแน่นพลังงานของการแผ่รังสีด้วยความถี่เชิงมุมอยู่ระหว่าง ω และ $\omega + d\omega$ โดยให้ $\rho_\omega d\omega = \rho_\nu d\nu$ จากสมการ (2.18) เราได้

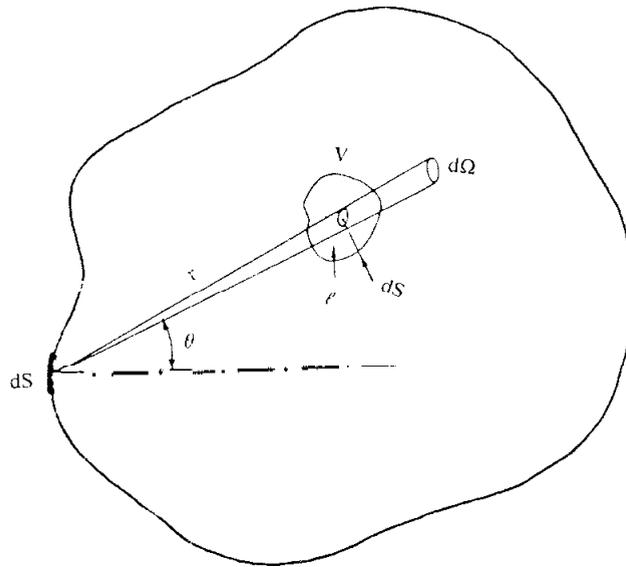
$$\rho_\omega = \frac{\rho_\nu}{2\pi} = \frac{4\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{[\exp(h\nu/KT) - 1]} \quad \dots\dots\dots (2.18 \text{ ก})$$

ในที่นี้เราจัดให้ $h = h/2\pi$ ซึ่งนิยมใช้กัน รูป 2.3 แสดงพฤติกรรมของ ρ_ν เป็นฟังก์ชันของความถี่สำหรับอุณหภูมิ T สองค่า

ต่อไปเราหาความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นพลังงานในโพรงวัตถุดำและความเข้ม I ที่ปล่อยออกจากผนังของมัน จากรูป 2.4 เราคำนวณหาความหนาแน่นพลังงานเนื่องจากการแผ่รังสีของผนังโพรงในปริมาตรเล็ก ๆ V รูปกรวยมุมตัน $d\Omega$ กับยอดกรวยตรงพื้นที่เล็ก ๆ dS ของผิว (เป็นระยะทาง r คัดจาก V) จะตัดกับ V เป็นรูปทรงกระบอกของพื้นที่ภาคตัด dS และยาว r จากสมการ (1.10) พลังงานที่ปล่อยออกมาในหนึ่งหน่วยเวลาจาก dS เข้าไปในมุมตัน $d\Omega$ คือ



รูป 2.3 แสดงเส้นโค้งของฟังก์ชัน $\rho(\nu, T)$ สำหรับอุณหภูมิ T สองค่า



รูป 2.4 การคำนวณของความสัมพันธ์ระหว่างความเข้มการแผ่รังสีที่ผิวของโพรงวัตถุดำและความหนาแน่นพลังงานของมัน

$B \cos \theta \, dS d\Omega$ เมื่อ B เป็นความสว่างของผิววัตถุดำ เนื่องจากพลังงานนี้ อัตราส่วน ℓ/c จะอยู่ภายในของปริมาตร V เมื่อ $d\Omega = dS/r^2$ พลังงานภายในปริมาตร V เป็น $B \cos \theta \, dS (\ell dS/r^2 c)$ การหาปริมาตร V จาก dS ทั้งหมด เราต้องอินทิเกรตตลอดมุมตันทั้งหมด ซึ่งได้ $\int d\Omega = 4\pi$ ต่อไปเราต้องอินทิเกรตการปล่อยพลังงานทั้งหมดของผิววัตถุดำ เราจะได้สมการสำหรับความหนาแน่นพลังงานในปริมาตร V คือ

$$\rho = \frac{B}{c} \int \frac{\cos \theta}{r^2} dS$$

ให้สังเกตว่า $\cos \theta \, dS/r^2$ มีค่าเท่ากับมุมตัน $d\Omega'$ ซึ่งผิว dS มองเห็นได้จากจุดใด ๆ ของปริมาตร V (ซึ่งสมมติว่ามันมีขนาดเล็กมาก) ดังนั้น

$$\rho = (B/c) \int d\Omega' = 4\pi B/c$$

ในทางตรงกันข้ามความเข้มทั้งหมด I ที่ปล่อยออกจาก dS คือ

$$I = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} B \cos \theta \, d\Omega = \pi B \quad (2.19 \text{ ก})$$

สุดท้ายเราได้ผลลัพธ์เป็น

$$\rho = (4/c)I \quad (2.19 \text{ ข})$$

และความหนาแน่นพลังงานของการแผ่รังสีความถี่เชิงมุมเป็น

$$\rho_\omega = (4/c)I_\omega \quad \dots\dots\dots (2.19 \text{ ค})$$

แทนค่าสมการ (2.18 ก) ลงในสมการ (2.19 ค) จะได้สมการสำหรับการแจกแจงความหนาแน่นเป็นส่วน ๆ ของแสงที่ออกจากผิววัตถุดำ

2.2 การดูดกลืนและการเปล่งแสงโดยการกระตุ้น

จุดมุ่งหมายของหัวข้อนี้ คือเพื่อคำนวณอัตราของการดูดกลืน W_{12} และอัตราการเปล่งแสงโดยการกระตุ้น W_{21} เมื่อ W_{12} และ W_{21} กำหนดด้วยสมการ (1.5) และ (1.3) การคำนวณจะทำโดยใช้วิธีที่เรียกว่า วิธีแบบกึ่งดั้งเดิมของอันตรกิริยาของการแผ่รังสีที่มีต่อวัตถุ ในวิธีนี้ระบบอะตอมสมมติเป็นหน่วยพลังงาน (อธิบายได้ด้วยกลศาสตร์ควอนตัม) ขณะที่สนามแม่เหล็กไฟฟ้าของคลื่นตกกระทบใช้เป็นแบบดั้งเดิม (กล่าวคือใช้ด้วยสมการของแมกซ์เวลล์)

ครั้งแรกเราจะศึกษาพฤติกรรมของการดูดกลืนโดยพิจารณาระบบสองระดับพลังงานปกติ และเขียนไอเกนฟังก์ชัน (eigen functions) ของทั้งสองสถานะเป็น $\psi_1 = u_1 \exp[-(iE_1 t/\hbar)]$ และ $\psi_2 = u_2 \exp[-(iE_2 t/\hbar)]$ ตามลำดับ เราสมมติว่าคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าตกกระทบบนอะตอมเมื่อเวลา $t = 0$ ดังนั้นในขณะนี้อะตอมสามารถอธิบายด้วยไอเกนฟังก์ชัน ψ_1 นอกจากนั้นฮามิลโตเนียน (Hamiltonian) H สำหรับอะตอมสามารถเขียนเป็น

$$H = H_0 + H' \quad \dots\dots\dots (2.20)$$

เมื่อ H_0 เป็นฮามิลโตเนียนของอะตอมขณะไม่มีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเข้าไป และ H' เป็นฮามิลโตเนียนซึ่งเกิดจากอันตรกิริยาของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้ากับอะตอม ดังนั้นเราจะได้

$$H_0 u_i = E_i u_i, \quad (i = 1, 2) \quad \dots\dots\dots (2.21)$$

การคำนวณฟังก์ชันคลื่น ψ ของอะตอมเมื่อเวลาใด ๆ เราต้องแก้ปัญหาของสมการชเรอดิงเงอร์ (Schrödinger) ขึ้นกับเวลา คือ

$$H\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (2.22)$$

เนื่องจากอิทธิพลของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าฟังก์ชันคลื่นของอะตอม สามารถเขียนได้เป็น

$$\psi = a_1(t)\psi_1 + a_2(t)\psi_2 \quad \dots\dots\dots (2.23)$$

โดยทั่วไป a_1 และ a_2 จะเป็นจำนวนเชิงซ้อนขึ้นกับเวลา ด้วยวิธีการทางกลศาสตร์ควอนตัมจะได้ว่า สัมประสิทธิ์ $|a_1|^2$ และ $|a_2|^2$ คือ โอกาสที่จะพบอะตอมในสถานะ 1 หรือ 2

ตามลำดับ เมื่อเวลา t โดยใช้ความจริงว่า $\int |\psi|^2 dV = 1$ และเมื่อฟังก์ชันคลื่น u_1 และ u_2 ตั้งฉากซึ่งกันและกัน เราหาจากสมการ (2.23) ได้ว่า

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1 \quad \dots\dots\dots (2.24)$$

ในการคำนวณหาโอกาสของการเปลี่ยนแปลง W_{12} เราต้องคำนวณปริมาณ $|a_2(t)|^2$ (หรือ $|a_1(t)|^2$) ก่อน โดยทั่วไปเราจะเขียนสมการ (2.23) ใหม่เป็น

$$\psi = \sum_1^m a_k \psi_k = \sum_1^m a_k u_k \exp[-i(E_k/\hbar)t] \quad (2.25)$$

เมื่อ m ใช้แทนเป็นสถานะของอะตอม แทนสมการ (2.25) ลงในสมการ (2.22) เราหาได้ว่า

$$\begin{aligned} & \sum_k (H_0 + H') a_k u_k \exp[-i(E_k/\hbar)t] \\ &= \sum_k \{i\hbar \dot{a}_k u_k \exp[-i(E_k/\hbar)t] + a_k u_k E_k \exp[-i(E_k/\hbar)t]\} \quad \dots\dots\dots (2.25 \text{ ก}) \end{aligned}$$

จากสมการนี้เมื่อใช้สมการ (2.21) ช่วย มันจะลดรูปลงเหลือเป็น

$$\sum_k i\hbar \dot{a}_k u_k \exp[-i(E_k/\hbar)t] = \sum_k a_k H' u_k \exp[-i(E_k/\hbar)t] \quad \dots\dots\dots (2.26)$$

ใช้โอเกนฟังก์ชันใด ๆ u_n^* ตามที่เรากำหนดคุณสมบัติสมการ (2.26) ทั้งสองข้างและอินทิเกรตตลอดปริมาตรทั้งหมด เราได้

$$\begin{aligned} & \sum_k i\hbar \dot{a}_k \exp[-i(E_k/\hbar)t] \int u_k u_n^* dV \\ &= \sum_k a_k \exp[-i(E_k/\hbar)t] \int u_n^* H' u_k dV \quad \dots\dots\dots (2.26 \text{ ก}) \end{aligned}$$

เมื่อฟังก์ชันคลื่น u_k ตั้งฉากกับ (นั่นคือ $\int u_n^* u_k dV = \delta_{kn}$) จะได้ว่า

$$H'_{nk}(t) = \int u_n^* H' u_k dV \quad (2.27)$$

สมการ (2.26 ก) กลายเป็น

$$i\dot{a}_n = \frac{1}{i\hbar} \sum_k H'_{nk} a_k \exp(-i \frac{(E_k - E_n)t}{\hbar}) \quad (2.28)$$

เราได้สมการอนุพันธ์ m สมการสำหรับตัวแปร $a_k(t)$ m ค่า และสมการเหล่านี้สามารถแก้ปัญหาได้เมื่อทราบเงื่อนไขสภาวะเริ่มต้น สำหรับระบบสองระดับ ($m = 2$) สมการ (2.28) ให้สมการสองสมการคือ

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= (1/i\hbar) \{H'_{11} a_1 + H'_{12} a_2 \exp[-i(E_2 - E_1)t/\hbar]\} \\ \dot{a}_2 &= (1/i\hbar) \{H'_{21} a_1 \exp[-i(E_1 - E_2)t/\hbar] + H'_{22} a_2\} \quad \dots\dots\dots (2.29) \end{aligned}$$

เราจะต้องแก้ปัญหาสภาวะเริ่มต้น $a_1(0) = 1, a_2(0) = 0$

ต่อไปเราทำให้สมการ (2.29) อยู่ในรูปแบบง่ายขึ้นด้วยวิธีเพอร์เทอร์เบชัน (perturbation method) โดยสมมติว่าด้านขวามือของสมการ (2.29) สามารถใช้การประมาณว่า $a_1(t) = 1$ และ $a_2(t) = 0$ แก้ปัญหสมการ (2.29) ตามข้อสมมตินี้เราจะได้คำตอบอันดับแรก (first-order) สำหรับ $a_1(t)$ และ $a_2(t)$ และทฤษฎีที่ทำตามวิธีนี้เรียกว่าทฤษฎีเพอร์เทอร์เบชันอันดับแรก ดังนั้นคำตอบ $a_1(t)$ และ $a_2(t)$ หาด้วยวิธีนี้ สามารถแทนลงทางด้านขวามือของสมการ (2.29) ก็จะได้คำตอบของการประมาณอันดับสอง (second-order approximation) เมื่อทำต่อ ๆ ไป จะได้อันดับสูงขึ้นไปเรื่อย ๆ ทำนองเดียวกันมันจะสอดคล้องกับทฤษฎีเพอร์เทอร์เบชันอันดับสองและอันดับสูงขึ้นต่อไป ดังนั้น จากอันดับแรกสมการ (2.29) ให้

$$\dot{a}_1 = (1/i\hbar)H'_{11} \dots\dots\dots (2.30 ก)$$

$$\dot{a}_2 = (1/i\hbar)H'_{21}\exp(i\omega_0 t) \dots\dots\dots (2.30 ข)$$

เมื่อ $\omega_0 = (E_2 - E_1)/\hbar$ ในการคำนวณความเป็นไปได้ของการเปลี่ยนแปลง เราเพียงต้องการแก้ปัญหสมการ (2.30 ข) เท่านั้น สมมติว่าคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าตกกระทบเป็นคลื่นรูปไซน์ (sinusoidal wave) มีความถี่ ω ดังนั้น เราสามารถเขียน

$$H'_{21} = H'_{21}{}^0 \sin \omega t = H'_{21}{}^0 \frac{\exp(i\omega t) - \exp(-i\omega t)}{2i} \dots\dots\dots (2.31)$$

เมื่อ $H'_{21}{}^0$ เป็นค่าคงที่อยู่ในรูปเชิงซ้อนทั่วไป

โดยแทนสมการ (2.31) ลงไปในสมการ (2.30 ข) และประกอบกับเงื่อนไขสภาวะเริ่มต้น $a_2(0) = 0$ เราได้

$$a_2(t) = \frac{H'_{21}{}^0}{2i\hbar} \left| \frac{\exp[i(\omega_0 - \omega)t] - 1}{\omega_0 - \omega} - \frac{\exp[i(\omega_0 + \omega)t] - 1}{\omega_0 + \omega} \right| \dots\dots\dots (2.32)$$

ถ้าเราสมมติว่า $\omega \approx \omega_0$ เราจะเห็นว่าพจน์แรกในวงเล็บใหญ่มีค่ามากกว่าพจน์ที่สอง ดังนั้น

$$a_2(t) \approx -\frac{H'_{21}{}^0}{2i} \frac{\exp(i\Delta\omega t) - 1}{\hbar\Delta\omega} \dots\dots\dots (2.33)$$

เมื่อ $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ และ

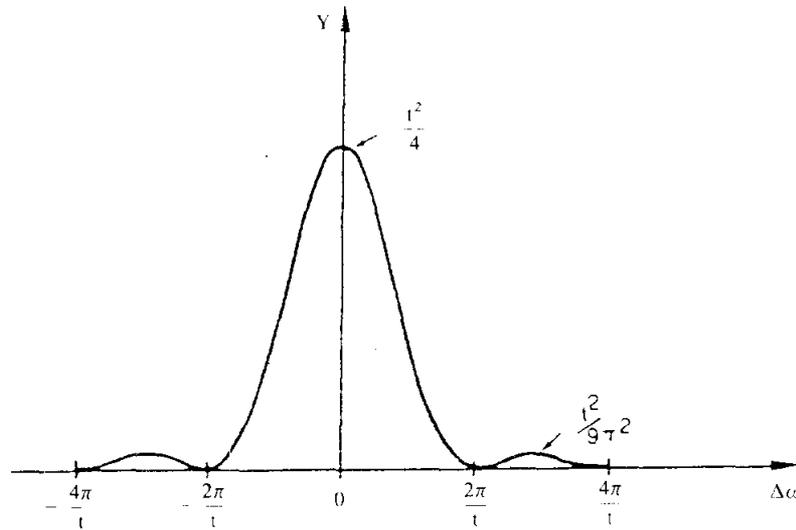
$$|a_2(t)|^2 = \frac{|H'_{21}{}^0|^2}{\hbar^2} \left| \frac{\sin(\Delta\omega t/2)}{\Delta\omega} \right|^2 \dots\dots\dots (2.34)$$

ฟังก์ชัน $y = |\sin(\Delta\omega t/2)/\Delta\omega|^2$ ได้เขียนเป็นเส้นโค้งในรูป 2.5 เทียบกับฟังก์ชันของ $\Delta\omega$ เราเห็นได้ว่าฟังก์ชันมีค่าสูงขึ้นและแคบกว่า ขณะที่ t เพิ่มขึ้น นอกจากนั้น เรายังสามารถแสดงว่า

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\sin(\Delta\omega t/2)}{\Delta\omega} \right|^2 d\Delta\omega = \frac{\pi t}{2} \quad \dots \quad (2.35)$$

สำหรับที่ t มีค่ามากเพียงพอ เราสามารถให้

$$\frac{\sin(\Delta\omega t/2)}{\Delta\omega}^2 = \frac{\pi t}{2} \delta(\Delta\omega) \quad (2.36)$$



รูป 2.5 แสดงเส้นโค้งของฟังก์ชัน $y = |\sin(\Delta\omega t/2)/\Delta\omega|^2$ เปรียบเทียบกับ $\Delta\omega$

เมื่อ δ คือ ไดเรคเดลตาฟังก์ชัน (Dirac δ function) ดังนั้น

$$|a_2(t)|^2 = \frac{|H_{21}^{(0)}|^2}{\hbar^2} \frac{\pi t}{2} \delta(\Delta\omega) \quad \dots \quad (2.37)$$

ซึ่งแสดงว่าสำหรับเวลานานพอเพียงแล้ว โอกาส $|a_2(t)|^2$ ของการหาอะตอมที่เวลา t ในระบบสองระดับจะแปรโดยตรงกับเวลาของมันเอง ดังนั้น โอกาสของการเปลี่ยนแปลง W_{12} จึงกำหนดด้วย

$$W_{12} = \frac{|a_2(t)|^2}{t} = \frac{\pi}{2} \frac{|H_{21}^{(0)}|^2}{\hbar^2} \delta(\Delta\omega) \quad \dots \quad (2.38)$$

ในการคำนวณ W_{12} เราต้องคำนวณปริมาณ $|H_{21}^{(0)}|^2$ ก่อน ถ้าเราสมมติว่าอันตรกิริยาที่สอดคล้องกับการเปลี่ยนแปลงเป็นอันตรกิริยาระหว่างสนามไฟฟ้าของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าและ

โมเมนต์ไดโพลของอะตอม (อันตรกิริยาไดโพลไฟฟ้า) เราสามารถเขียนได้ว่า

$$H' = e\vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{r} \quad \dots\dots\dots (2.39)$$

ในสมการ (2.39) e คือ ประจุของอิเล็กตรอนซึ่งได้จากการเปลี่ยนแปลง เวกเตอร์ \vec{r} กำหนดตำแหน่งของมัน และ $\vec{E}(\vec{r}, t)$ คือ สนามไฟฟ้าที่จุด \vec{r} เพื่อความสะดวกเราสมมติว่า จุดกำเนิด ($\vec{r} = 0$) ของระบบอ้างอิงอยู่ภายในร่วมกับนิวเคลียส ดังนั้นจากสมการ (2.27) และ (2.39) เราได้

$$H_{21}' = e \int u_2^* \vec{E} \cdot \vec{r} u_1 dV \quad \dots\dots\dots (2.40)$$

ต่อไปเราสมมติว่า ความยาวคลื่นของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้ามีค่ายาวกว่าเส้นผ่าศูนย์กลางกลางของอะตอมมาก ซึ่งเหมาะสมกับคลื่นแสงที่มองเห็นได้ ($\lambda = 5000 \text{ \AA}$ สำหรับแสงสีเขียว ในขณะที่เส้นผ่าศูนย์กลางกลางของอะตอมมีขนาดเพียง 1 \AA) เราสามารถให้ \vec{E} ออกนอกอินทิกราลในสมการ (2.40) ได้ และใช้ค่าของมันที่ $\vec{r} = 0$ เป็นศูนย์กลางของนิวเคลียส ดังนั้น โดยกำหนด

$$\vec{E}(0, t) = \vec{E}_0 \sin \omega t \quad \dots\dots\dots (2.41)$$

จากสมการ (2.31), (2.40) และ (2.41) เราได้

$$H_{21}'^0 = \vec{E}_0 \cdot \vec{\mu}_{21} \quad \dots\dots\dots (2.42)$$

เมื่อ $\vec{\mu}_{21}$ กำหนดด้วย

$$\vec{\mu}_{21} = e \int u_2^* \vec{r} u_1 d\tau \quad \dots\dots\dots (2.43)$$

และเรียกว่าเป็นสมาชิกของเมตริกซ์ (matrix element) ของไดโพลโมเมนต์ทางไฟฟ้า ดังนั้น ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{\mu}_{21}$ และ \vec{E}_0 เราได้

$$|H_{21}'^0|^2 = E_0^2 |\mu_{21}|^2 \cos^2 \theta \quad \dots\dots\dots (2.44)$$

เมื่อ $|\mu_{21}|$ คือขนาดของเลขเชิงซ้อน μ_{21} (μ_{21} เป็นขนาดของเวกเตอร์ $\vec{\mu}_{21}$) ถ้าเราสมมติอีกว่าคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าทำปฏิกิริยากับอะตอมต่าง ๆ ที่มีเวกเตอร์ $\vec{\mu}_{21}$ วางกันอย่างไม่มีระเบียบ เมื่อเทียบกับ \vec{E}_0 ค่าเฉลี่ยของ $|H_{21}'^0|^2$ หาได้โดยการเฉลี่ยสมการ (2.44) ตลอดค่าที่เป็นไปได้ของ $\cos^2 \theta$ ถ้ามุม θ ทั้งหมดมีความเป็นไปได้เท่ากัน เราจะได้ว่าค่าเฉลี่ยของ $\langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{3}$ ดังนั้น

$$\langle |H_{21}'^0|^2 \rangle = \frac{1}{3} E_0^2 |\mu_{21}|^2 \quad \dots\dots\dots (2.45)$$

เราแทน $|H_{21}^{(0)}|^2$ เป็นฟังก์ชันของ E_0 ในบางครั้งมันแสดงเป็นฟังก์ชันของความเข้ม I ของคลื่น แม่เหล็กไฟฟ้าตกกระทบบได้ สำหรับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเรามี

$$I = \eta \epsilon_0 c_0 E_0^2 / 2 \quad \dots\dots\dots (2.46)$$

เมื่อ η เป็นดัชนีหักเหของระบบอะตอม และ c_0 คือความเร็วของแสงในสุญญากาศ จากสมการ (2.38), (2.45) และ (2.46) เราได้

$$W_{12} = \frac{\pi}{3\eta \epsilon_0 c_0 \hbar^2} |\mu_{21}|^2 I \delta(\Delta\omega) \quad \dots\dots\dots (2.47)$$

บางครั้งเราเขียน W_{12} เป็นฟังก์ชันของความหนาแน่นพลังงาน ρ ของการแผ่รังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าตกกระทบบ เมื่อ $\rho = \eta^2 \epsilon_0 E_0^2 / 2$ จากสมการ (2.38) และ (2.45) เราได้

$$W_{12} = \frac{\pi}{3\eta^2 \epsilon_0 \hbar^2} |\mu_{21}|^2 \rho \delta(\Delta\omega) \quad \dots\dots\dots (2.47\text{ก})$$

จากสมการ (2.47) เราเห็นได้ว่าการหาค่า W_{12} จะไม่เป็นที่ยอมรับทางฟิสิกส์ เพราะว่า (เนื่องจากไคเรคเดลตาฟังก์ชัน) มันจะให้ $W_{12} = 0$ เมื่อ $\omega \neq \omega_0$ และให้ $W_{12} = \infty$ เมื่อ $\omega = \omega_0$ คือเมื่อความถี่ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าตรงกับความถี่ของอะตอม เหตุผลก็คือเนื่องจากความจริงที่ว่าเราได้ให้เวลา t ผ่านไปเป็นอนันต์ในสมการ (2.34) ซึ่งหมายถึงว่าเราได้สมมติให้อันตรกิริยาระหว่างคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าและระบบสามารถดำเนินต่อเนื่องกันไปอย่างพร้อมเพรียงเป็นเวลานานันต์ ความเป็นจริงสิ่งเหล่านี้สามารถป้องกันมิให้เกิดขึ้นได้ด้วยปรากฏการณ์ทางฟิสิกส์จำนวนหนึ่งซึ่งเราจะยกตัวอย่างให้เห็นดังนี้ สมมติว่าเรารวบรวมอะตอมในระดับ 1 และระดับ 2 เข้าด้วยกันในรูปของก๊าซ ในกรณีนี้จะมีการชนกันเกิดขึ้นระหว่างอะตอมด้วยกันหลังจากชนกันแล้วฟังก์ชัน $u_1(r)$ และ $u_2(r)$ ของอะตอมจะไม่มีความสัมพันธ์ทางเฟสกับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าตกกระทบบ ดังนั้นอันตรกิริยาที่ได้อธิบายไว้ในสมการก่อนหน้านี้ใช้ได้เพียงช่วงเวลาระหว่างการชนหนึ่งครั้งกับครั้งต่อไป หลังการชนแต่ละครั้งสภาวะเริ่มต้น (โดยเฉพาะฟังก์ชันคลื่น u) จะเปลี่ยนแปลงไปและเราต้องใช้สมการ (2.29) ซ้ำอีกครั้งโดยให้เวลา $t = 0$ ในขณะที่เกิดการชนขึ้นทันที ยังมีวิธีอื่น ๆ ใช้แก้ปัญหานี้ได้ คือ ใช้ระบบอ้างอิงระบบหนึ่งยึดติดแน่นกับอะตอม สำหรับระบบเช่นนี้สนามไฟฟ้าจะไม่ปรากฏเป็นคลื่นรูปไซน์แต่จะปรากฏเหมือนกับคลื่นในรูป 2.6 โดยมีการกระโดดของเฟสเกิดขึ้นเมื่อเวลาอะตอมได้รับการชน ดังนั้นจึงเป็นที่แน่ชัดว่าภายใต้เงื่อนไขอะตอมจะไม่ปรากฏให้เห็นเป็นคลื่นแสงสีเดียว ในกรณีนี้ถ้าเราเขียน $dt = I_{\omega'} d\omega'$ สำหรับความเข้มของคลื่นในช่วงความถี่ระหว่าง ω' และ $\omega' + d\omega'$

ดังนั้นจากสมการ (2.47) เราหาโอกาสของการเปลี่ยนแปลงได้ คือ

$$W_{12} = \frac{\pi}{3\eta\epsilon_0 c_0 \hbar^2} |\mu_{21}|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\omega'} \delta(\omega' - \omega_0) d\omega' \dots\dots\dots (2.48)$$

ในการคำนวณสมการ (2.48) เราต้องทราบค่า $I_{\omega'}$ ก่อนซึ่งแปรโดยตรงกับขนาดยกกำลังสองของฟูเรียร์สเปกตรัม (Fourier spectrum) ของสัญญาณที่แสดงในรูป 2.6 และเราจะใช้สัญลักษณ์ τ สำหรับช่วงเวลาระหว่างการชนกันสองครั้ง ปริมาณนี้แตกต่างจากการชนกันแต่ละครั้งอย่างเห็นได้ชัด เพื่อระบุตัวแปรค่านี้ให้ละเอียดยิ่งขึ้น เราจะสมมติว่าการแจกแจงค่าของ τ สามารถอธิบายได้ด้วยความหนาแน่นโอกาส

$$P(\tau) = \exp(-\tau/T_2) \dots\dots\dots (2.49)$$

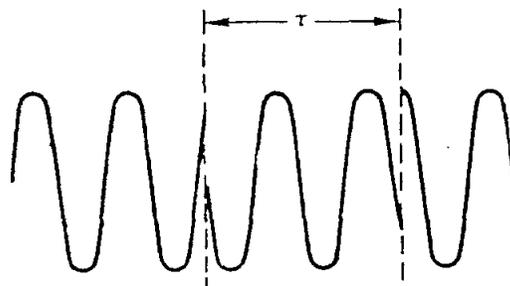
$P(\tau)d\tau$ เป็นโอกาสในช่วงเวลาระหว่างการชนกันสองครั้งวางอยู่ระหว่าง τ และ $\tau + d\tau$ จึงสังเกตว่า T_2 มีความหมายกายภาพ (physical meaning) เหมือนกับเป็นเวลาเฉลี่ย τ_c ระหว่างการชนกันสองครั้ง ซึ่งสามารถเห็นได้จาก

$$\tau_c = \frac{\int \tau P(\tau) d\tau}{\int P(\tau) d\tau} = T_2 \dots\dots\dots (2.50)$$

ดังนั้น เราสามารถแสดงได้ว่าสำหรับสัญญาณที่เหมือนกับในรูป 2.6 มีความหนาแน่นโอกาสเหมือนกับสมการ (2.49) จะได้ความเข้มแสง I_{ω} เขียนได้เป็น

$$I_{\omega} = I_0 \text{sg}(\omega' - \omega) \dots\dots\dots (2.51)$$

เมื่อ I เป็นความเข้มของคลื่น และ



รูป 2.6 แสดงพฤติกรรมเวลาของสนามไฟฟ้าในขณะที่จะตอมถูกชน

$$g(\omega' - \omega) = \frac{\frac{1}{2}}{\pi} \frac{1}{|1 + (\omega' - \omega)^2 T_2^2|} \quad \dots\dots\dots (2.52)$$

ω คือความถี่ของสัญญาณรูปไซน์ของรูป 2.6 เราสามารถกำหนดว่า

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega' - \omega) d\omega' = 1 \quad \dots\dots\dots (2.52ก)$$

มันต้องเป็นไปตามสมการ (2.51) เมื่อ $1 = \int I_{\omega'} d\omega'$ โดยแทนสมการ (2.51) ลงในสมการ (2.48) จะได้

$$W_{12} = \frac{\pi}{3\eta c_0 c_0 h^2} |\mu_{12}|^2 I g(\Delta\omega) \quad \dots\dots\dots (2.53)$$

เมื่อ $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ ดังนั้น เราสามารถหาสมการที่เหมือนกับสมการ (2.47) ได้โดยแทนฟังก์ชัน $g(\Delta\omega)$ ด้วยฟังก์ชัน $\delta(\Delta\omega)$

เขียนฟังก์ชัน $g(\Delta\omega)$ เป็นเส้นโค้งในรูป 2.7 มันมีค่าสูงสุดที่ $\Delta\omega = 0$ (คือที่ $\omega = \omega_0$) เท่ากับ T_2/π ความกว้างเส้นเต็ม (full width) ของเส้นโค้งอยู่ระหว่างจุดที่มีค่าเป็นครึ่งหนึ่งของค่าสูงสุด (FWHM) คือ $\Delta\omega_0 = 2/T_2$ เส้นโค้งนี้เรียกว่า ลอเรนซ์เซียน (Lorentzian)

โดยทั่วไปเราจะพบว่า W_{12} สามารถเขียนด้วยสมการตามแบบอย่างของสมการ (2.53)

$$W_{12} = \frac{\pi}{3\eta c_0 c_0 h^2} |\mu_{21}|^2 I g_1(\Delta\omega) \quad \dots\dots\dots (2.53ก)$$

เมื่อ $g_1(\Delta\omega)$ เป็นฟังก์ชันที่ทำให้เป็นปกติแล้ว โดยเฉพาะรูปลักษณะของมันขึ้นอยู่กับปรากฏการณ์ที่ตอบสนองกับเส้นแผ่ออกได้ ดังนั้น สมการ (2.53ก) จึงเป็นสมการสุดท้ายที่เราคำนวณสำหรับ W_{12} และมันคือโอกาสของการเปลี่ยนแปลงภายใต้การประมาณไดโพลไฟฟ้า สมการนี้สามารถเขียนใหม่ให้เหมือนกับฟังก์ชันของความหนาแน่นพลังงาน ρ ของคลื่น ดังนี้ [ดูสมการ (2.47ก)]

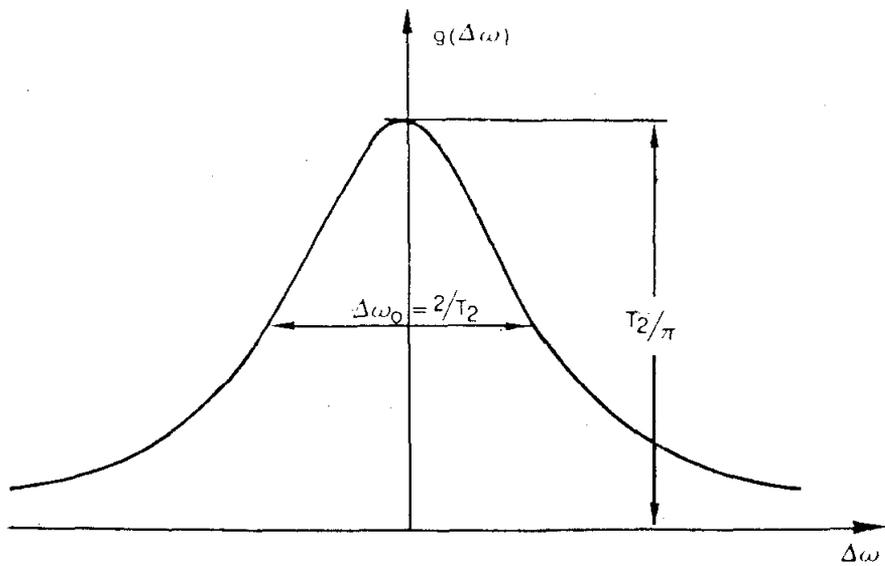
$$W_{12} = \frac{\pi}{3\eta^2 c_0 h^2} |\mu_{21}|^2 \rho g_1(\Delta\omega) \quad \dots\dots\dots (2.53ข)$$

การคำนวณสัมประสิทธิ์ของการเปล่งแสงโดยการกระตุ้น W'_{21} สามารถทำได้ในลักษณะเดียวกันโดยเริ่มต้นจากสมการ (2.29) และมีสภาวะเริ่มต้นเป็น $a_1(0) = 0, a_2(0) = 1$ เราเห็นได้ทันทีว่าสมการในกรณีนี้เราหาได้จากสมการที่สอดคล้องกับสมการ (2.29) ถึงสมการ (2.53) สำหรับกรณีของการดูดกลืนโดยการสับเปลี่ยนดัชนี 1 และ 2 เป็น 2 และ 1

มันสามารถเห็นได้ง่ายจากสมการ (2.43) ว่า $\mu_{12} = \mu_{21}$ และตามด้วยสมการ (2.53ก) จะได้

$$W_{12} = W_{21} \quad \dots\dots\dots (2.54)$$

ซึ่งแสดงว่าโอกาสของการดูดกลืนและการเปล่งแสงโดยการกระตุ้นเท่ากัน ดังนั้น เราให้ $w = W_{12} = W_{21}$ และ $|\mu| = |\mu_{12}| = |\mu_{21}|$



รูป 2.7 แสดงเส้นโค้งลอเรนซ์เขียน $g(\Delta\omega)$ $\Delta\omega_0 = 2/T_2$ T_2/π $\Delta\omega$

สมการ (2.53ก) แสดงว่า $W_{12} = 0$ ถ้า $|\mu_{12}| = 0$ ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อฟังก์ชันไอเกน u_1 และ u_2 ต่างสมมาตรกันหรือทั้งสองไม่สมมาตรกัน (antisymmetric*) ความจริงพจน์ทั้งสองซึ่งหาจากสมการ (2.43) ที่จุด \vec{r} และ $-\vec{r}$ ตามลำดับมีค่าเท่ากันแต่เครื่องหมายตรงกันข้าม ดังนั้นจึงน่าสนใจว่าเมื่อไรฟังก์ชันคลื่น $u(\vec{r})$ ต่างสมมาตรกันหรือไม่สมมาตร สภาวะเช่นนี้จะเกิดขึ้นเมื่อฮามิลโตเนียน $H_0(\vec{r})$ ของระบบไม่เปลี่ยนแปลงในขณะที่ \vec{r} เปลี่ยนไปเป็น $-\vec{r}$ คือเมื่อ*

*ในที่นี้อาจจะเรียกฟังก์ชัน $f(\vec{r})$ เป็นสมมาตร (หรือเป็นคู่) ถ้า $f(-\vec{r}) = f(\vec{r})$ และขณะที่มันไม่สมมาตร (หรือเป็นคี่) ถ้า $f(-\vec{r}) = -f(\vec{r})$
 * ถ้า H_0 เป็นฟังก์ชันหนึ่งของพิกัดที่มีมากกว่าหนึ่งพิกัด $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots$ การกระทำย้อนกลับ (inversion operation) ต้องกระทำต่อพิกัดเหล่านี้ทั้งหมดพร้อมกัน

$$H_0(\vec{r}) = H_0(-\vec{r}) \quad \dots\dots\dots (2.55)$$

ในกรณีนี้สำหรับฟังก์ชันไอเกนใด ๆ $u_n(\vec{r})$ จะมี

$$H_0(\vec{r})u_n(\vec{r}) = E_n u_n(\vec{r}) \quad \dots\dots\dots (2.56)$$

และเปลี่ยน \vec{r} เป็น $-\vec{r}$ และใช้สมการ (2.55) ด้วย จะได้

$$H_0(\vec{r})u_n(-\vec{r}) = E_n u_n(-\vec{r}) \quad \dots\dots\dots (2.57)$$

สมการ (2.56) และ (2.57) ได้แสดงว่า $u_n(\vec{r})$ และ $u_n(-\vec{r})$ ต่างก็เป็นฟังก์ชันไอเกนของตัวกระทำ H_0 ด้วยค่าไอเกน E_n ค่าเดียวกัน สำหรับระดับพลังงานที่ไม่ซ้ำซ้อนกันมีฟังก์ชันไอเกนเพียงหนึ่งฟังก์ชันสำหรับค่าไอเกนหนึ่งค่าเท่านั้น

$$u_n(-\vec{r}) = \pm u_n(\vec{r}) \quad \dots\dots\dots (2.58)$$

ดังนั้น ถ้า $H_0(\vec{r})$ เป็นสมมาตรฟังก์ชันไอเกนต้องเป็นทั้งสมมาตรหรือไม่สมมาตร ในกรณีนี้กล่าวได้ว่าฟังก์ชันไอเกนมีการกำหนดความเป็นคู่ที่แน่นอน (well-defined parity)

เห็นได้ว่าเมื่อฮามิลโตเนียนสอดคล้องกับสมการ (2.55) คือมันไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้การแลกเปลี่ยนสลับกัน นั่นคือ เหตุการณ์เช่นนี้เกิดขึ้นได้เมื่อระบบมีศูนย์กลางของการสมมาตรยังมีกรณีสำคัญคือกรณีของอะตอมที่ถูกปิดล้อม พลังงานศักย์ของอิเล็กตรอนตัวที่ k ของอะตอมกำหนดด้วยผลบวกของพลังงานศักย์ของนิวเคลียส (ซึ่งเป็นสมมาตร) และของอิเล็กตรอนตัวอื่น ๆ สำหรับอิเล็กตรอนตัวที่ i พลังงานศักย์จะขึ้นกับระยะ $|\vec{r}_i - \vec{r}_k|$ เป็นขนาดของระยะทางระหว่างอิเล็กตรอนทั้งสอง ดังนั้นพจน์เหล่านี้จะไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้การสลับกัน กรณีที่สำคัญเมื่อสมการ (2.55) ไม่เป็นจริง คือเมื่ออะตอมวางอยู่ในสนามไฟฟ้าภายนอก (คือสนามไฟฟ้าของผลึก) ซึ่งไม่มีศูนย์กลางของการแลกเปลี่ยนสลับกัน ในกรณีนี้ฟังก์ชันคลื่น u_n จะไม่มีการเป็นคู่ที่แน่นอน

สรุป เราสามารถกล่าวได้ว่าการเปลี่ยนแปลงของไดโพลไฟฟ้าเกิดขึ้นระหว่างสถานะของการเป็นคู่ตรงกันข้ามเท่านั้น และสถานะเหล่านั้นมีการกำหนดที่แน่นอนถ้าฮามิลโตเนียนไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้การสลับกัน

ถ้า $w = 0$ กล่าวได้ว่าการเปลี่ยนแปลงเป็นสิ่งต้องห้ามภายใต้การประมาณไดโพลไฟฟ้า นี่ไม่ได้หมายความว่าอะตอมไม่สามารถผ่านจากระดับ 1 ขึ้นไประดับ 2 ได้ ภายใต้อิทธิพลของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ในกรณีนี้การเปลี่ยนแปลงไม่สามารถเกิดขึ้นได้ ยกตัวอย่างเช่น ผลลัพธ์อันตรกิริยาระหว่างสนามแม่เหล็กของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าและไดโพลโมเมนต์

แม่เหล็กของอะตอม ให้สังเกตว่าการวิเคราะห์สามารถทำได้มีลักษณะเดียวกับที่ได้จากการใช้สมการ (2.38) เป็นที่แน่ชัดว่าค่าของ $|H_{ij}|^2$ จะเป็นค่าที่ต่างกัน เราอาจจะบ่งบอกได้ว่าการเปลี่ยนแปลงไดโพลแม่เหล็กยอมให้เกิดขึ้นได้ระหว่างสถานะของการเป็นคู่ตรงกัน (คือ การเปลี่ยนแปลงระหว่าง คู่-คู่ หรือ คี-คี) ดังนั้น การเปลี่ยนแปลงที่เป็นสิ่งต้องห้ามสำหรับอันตรกิริยาของไดโพลไฟฟ้าแต่ยอมให้เกิดขึ้นได้สำหรับอันตรกิริยาของไดโพลแม่เหล็ก หรือในทางกลับกัน มันยังใช้คำนวณขนาดของอัตราส่วนระหว่างโอกาสของการเปลี่ยนแปลงไดโพลไฟฟ้า W_c กับโอกาสของการเปลี่ยนแปลงไดโพลแม่เหล็ก W_m อีกด้วย การคำนวณอ้างอิงถึงการเปลี่ยนแปลงที่ต่างกันของทั้งสอง คือ โอกาสอย่างหนึ่งยอมให้เกิดอันตรกิริยา สำหรับไดโพลไฟฟ้า และอีกโอกาสหนึ่งสำหรับอันตรกิริยาของไดโพลแม่เหล็ก เรายังสมมติด้วยว่าความเข้มของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้ามี่ค่าเดียวกันสำหรับกรณีทั้งสอง สำหรับการเปลี่ยนแปลงไดโพลที่เกิดขึ้นตามสมการ (2.38) และ (2.39) เราสามารถเขียน $W_c \propto (\mu_c E_0)^2 = (eaE_0)^2$ เมื่อ E_0 เป็นแอมพลิจูดของสนามไฟฟ้าและไดโพลโมเมนต์ไฟฟ้าของอะตอม μ_c ประมาณเป็นผลคูณของประจุไฟฟ้าและรัศมี a ของอะตอม ในทำนองเดียวกันเราสามารถเขียน $W_m \propto (\mu_m B_0)^2 = (\beta B_0)^2$ ในที่นี้ B_0 เป็นแอมพลิจูดของสนามแม่เหล็กและไดโพลโมเมนต์แม่เหล็กของอะตอม คือ μ_m มีการประมาณ (สำหรับการเปลี่ยนแปลงที่เป็นไปได้) เป็นบอร์ แมกเนตอน (Bohr magneton) β ($\beta = 9.27 \times 10^{-24}$ Am²)

$$\left(\frac{W_c}{W_m}\right) = \left(\frac{eaE_0}{\beta B_0}\right)^2 = \left(\frac{eac}{\beta}\right)^2 = 10^5 \dots\dots\dots (2.59)$$

ให้ผลลัพธ์เป็นตัวเลขของสมการ (2.59) สำหรับคลื่นระนาบ $E_0 = B_0 c$ (เมื่อ c คือความเร็วแสง) และสมมติให้ $a_0 \approx 0.5 \text{ \AA}$ เห็นได้ว่าโอกาสของการเปลี่ยนแปลงไดโพลไฟฟ้ามี่ค่ามากกว่าของไดโพลแม่เหล็กมากมาย ทั้งนี้เนื่องจากว่าพลังงานอันตรกิริยาของไดโพลไฟฟ้า ($\mu_c E_0$) มีค่ามากกว่าของไดโพลแม่เหล็ก ($\mu_m B_0$) มาก

ต่อไปเราพิจารณาวัตถุชิ้นหนึ่งซึ่งให้รังสีแม่เหล็กไฟฟ้ามี่แสงสีเดียวด้วยความถี่ ω และความเข้ม I ผ่านตัวมัน เราจะเรียกจำนวนประชากรอะตอมในระดับ 1 และระดับ 2 ของวัตถุเป็น N_1 และ N_2 (เป็นจำนวนของอะตอมต่อหน่วยปริมาตร) จากรูป 1.2 เราสามารถเขียน

$$dI = -W(N_1 - N_2) \hbar \omega dz \dots\dots\dots (2.60)$$

เมื่อ dI เป็นความเข้มที่เพิ่มขึ้นของคลื่นแสงหลังจากเคลื่อนผ่านวัตถุหนา dz แทนสมการ(2.53 ก)ลงในสมการ (2.60) dI สามารถเขียนใหม่เป็น

$$dI = -\alpha I dz \dots\dots\dots (2.61)$$

$$\text{ในที่นี้} \quad \alpha = \frac{\pi}{3\eta\epsilon_0 c_0 \hbar} |\mu|^2 \omega (N_1 - N_2) g_i(\Delta\omega) \quad \dots\dots\dots (2.62)$$

ปริมาณ α มีมิติเป็นส่วนกลับของความยาว เรียกว่า สัมประสิทธิ์การดูดกลืนของวัตถุ ความสัมพันธ์ $I(t) = I(0) \exp(-\alpha t)$ ซึ่งหาได้จากสมการ (2.61) ตลอดความหนา l ของวัตถุ แสดงความหมายทางกายภาพของสัมประสิทธิ์การดูดกลืน และแสดงถึงการวัดค่าของมัน เราอาจสังเกตว่าสำหรับเส้นตรงแคบ ๆ พอเหมาะ α มีค่าขึ้นกับความถี่โดยผ่านพจน์ $g_i(\Delta\omega)$ เท่านั้น เราจะตีความหมายทางกายภาพของ $g_i(\Delta\omega)$ ใหม่ คือ มันใช้แทนพฤติกรรมทางความถี่ของ สัมประสิทธิ์การดูดกลืน นั่นคือ เราสามารถกำหนดสัมประสิทธิ์การดูดกลืนต่อหนึ่งอะตอม ด้วย ดังนี้

$$\sigma = \frac{\alpha}{N_1 - N_2} = \frac{\pi}{3\eta\epsilon_0 c_0 \hbar} |\mu|^2 \omega g_i(\Delta\omega) \quad (2.63)$$

ปริมาณนี้เรียกว่า ภาคตัดขวางการดูดกลืนของการเปลี่ยนแปลง ความหมายทางกายภาพของมันสามารถหาได้ง่ายโดยพิจารณากรณีอะตอมทั้งหมดอยู่ในระดับ 1 ($N_1 = N_1 ; N_2 = 0$) และแทนสมการ (2.63) ลงในสมการ (2.61) เราได้

$$dF = -\sigma N_1 F dz \quad (2.64)$$

ในที่นี้แทนที่จะเป็นความเข้ม I เรากลับใช้เป็นฟลักซ์โฟตอน F (โฟตอน/เมตร²·วินาที) แสดงว่า สมการ (2.64) สามารถรวมตัวได้กับแต่ละอะตอมที่มีภาคตัดขวางยังผล (effective cross section) ของการดูดกลืนโฟตอนเท่ากับ σ ถ้าเราให้ S เป็นภาคตัดขวางของวัตถุที่คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าวิ่งผ่าน สมการ (2.64) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{dF}{F} = -\frac{\sigma N_1 S dz}{S} \quad (2.65)$$

เมื่อ $N_1 S dz$ คือจำนวนของอะตอมในปริมาตรเล็ก ๆ ที่กำลังพิจารณา ถ้าเราสมมติว่า σ เป็นภาคตัดขวางต่อหนึ่งอะตอมจะได้ว่า $\sigma N_1 S dz$ คือภาคตัดขวางการดูดกลืนทั้งหมด ดังนั้น เราจึงคาดหมายว่าอัตราส่วนของการดูดกลืนโฟตอน (dF/F) เท่ากับอัตราส่วนระหว่างภาคตัดขวางการดูดกลืนทั้งหมดต่อภาคตัดขวาง S ตามสมการ (2.65) ดังนั้น จึงเป็นการเหมาะสมแล้วที่จะตีความหมายของ σ เป็นภาคตัดขวางของการดูดกลืน

ข้อสรุปของหัวข้อนี้ คือ เราได้พิจารณาสัมประสิทธิ์สามตัว คือ w , α และ σ มีเพียง σ |ดูสมการ (2.63)| เท่านั้นที่ขึ้นกับคุณลักษณะของวัตถุอย่างเดียว ในขณะที่ w และ α ขึ้นกับความเข้ม I และความหนาแน่นอะตอม $N_1 - N_2$ ตามลำดับ

สัมประสิทธิ์ทั้งสามนี้ใช้อธิบายปรากฏการณ์ของการดูดกลืนและการเปล่งแสง โดยการกระตุ้นด้วยสามวิธีที่แตกต่างกันอย่างง่าย

2.3 การเปล่งแสงตามปกติวิสัย

จุดมุ่งหมายของหัวข้อนี้ คือ จำนวนโอกาส A ของการเปล่งแสงตามปกติวิสัย ซึ่ง A กำหนดเหมือนสมการ (1.2) เป็นการโชคไม่ดีที่ไม่สามารถใช้การปฏิบัติแบบกึ่งดั้งเดิม (semiclassical treatment) ของอันตรกิริยาระหว่างการแผ่รังสีมีต่อวัตถุทำนายได้อย่างถูกต้อง และเข้าใจปรากฏการณ์ของการเปล่งแสงตามปกติวิสัย ถึงแม้ว่าได้พัฒนาวิธีการปฏิบัติต่อปรากฏการณ์ขึ้นบนฐานของการพิจารณาแบบกึ่งดั้งเดิมก็ตาม การคำนวณนี้จะใช้ความคล้ายคลึงกันระหว่างระบบอะตอมสองระดับที่มีความถี่ของการเปลี่ยนแปลง ω_0 และไดโพลไฟฟ้าแบบดั้งเดิม ซึ่งออสซิลเลตที่ความถี่ ω_0 เดียวกันด้วย

เรามาศึกษาจากจุดมองแบบดั้งเดิมจริง ๆ จุดหนึ่ง ไดโพลไฟฟ้าจะออสซิลเลตที่ความถี่ ω_0 ถ้าสมมติให้ประจุบวกหยุดนิ่งกับที่จุดหนึ่ง ประจุลบในขณะใด ๆ อยู่ที่ตำแหน่ง \vec{r} ด้วยระบบพิกัดอ้างอิงซึ่งมีจุดกำเนิดอยู่ที่ศูนย์กลางของประจุบวก เราสามารถเขียนได้ว่า

$$\vec{r} = \vec{r}_0 \cos(\omega_0 t + \phi) = \text{Re}[\vec{r}'_0 \exp(i\omega_0 t)] \quad \dots\dots\dots (2.66)$$

เมื่อ Re แทนสำหรับส่วนเป็นจริง และ $\vec{r}'_0 = r'_0 \exp(i\phi)$ จากสมการของแมกซ์เวลล์ เรารู้ว่าประจุไฟฟ้าที่มีความเร่งได้แผ่รังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีกำลังแปรโดยตรงกับความเร่งยกกำลังสอง เพราะฉะนั้นจึงสามารถแสดงว่าอิเล็กตรอนขณะกำลังออสซิลเลตได้แผ่รังสีเข้าไปยังที่ว่างรอบตัวของมันด้วยกำลัง P_r ที่กำหนดด้วย

$$P_r = \frac{\mu^2 \omega_0^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} \quad \dots\dots\dots (2.67)$$

เมื่อ $\mu = e r_0 = e |\vec{r}'_0|$ เป็นอัมพลิจูดของไดโพลโมเมนต์ไฟฟ้า η เป็นค่าดัชนีหักเหของตัวกลางรอบ ๆ ไดโพล และ c_0 คือ ความเร็วแสงในสุญญากาศ พลังงานเฉลี่ยทั้งหมดของอิเล็กตรอนที่กำลังออสซิลเลตกำหนดด้วยผลรวมของพลังงานจลน์เฉลี่ยและพลังงานศักย์เฉลี่ย และเราทราบว่าปริมาณทั้งสองนี้เท่ากันด้วย ดังนั้นเราเขียนได้ว่า

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \langle \text{พลังงานจลน์} \rangle + \langle \text{พลังงานศักย์} \rangle \\ &= 2 \langle \text{พลังงานจลน์} \rangle \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \langle E \rangle = 2 \cdot \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} m \left(\frac{\mu \omega_0}{e} \right)^2 \quad (2 . 6 8)$$

เมื่อ m เป็นมวลของอิเล็กตรอนและ $\langle v^2 \rangle$ เป็นความเร็วกำลังสองเฉลี่ย ในช่วงเวลาสั้น ๆ dt ตัวออสซิลเลตจะสูญเสียพลังงานไปเป็น dE ซึ่งกำหนดด้วย $dE = P_1 dt$ ดังนั้นอาศัยจากสมการ (2.67) และ (2.68) จะได้ว่า

$$dE = \frac{E}{\tau_{cl}} dt \quad (2.69)$$

เมื่อ
$$\tau_{cl} = \frac{E}{P_1} = \frac{6\pi\epsilon_0 mc^3}{\eta e^2 \omega_0^2} \quad (2.70)$$

เนื่องจากการแผ่รังสีของไดโพล ดังนั้นอัมพลิจูด r_0 ของการออสซิลเลต และ μ จะมีค่าลดลงตามเวลา อย่างไรก็ตามเมื่อ τ_{cl} ไม่ขึ้นกับ μ มันจะไม่ขึ้นกับเวลาด้วย ดังนั้นสมการ (2.69) แสดงว่าพลังงาน E จะลดค่าลงอย่างเอกซ์โปเนนเชียล (exponential) ตามเวลาด้วยค่าคงที่เท่ากับ τ_{cl} เรียกพจน์นี้แบบดั้งเดิมว่าเป็นอายุขัย (lifetime) ของไดโพลที่กำลังออสซิลเลต

เราย้อนกลับมาที่ปัญหาของเราอีกครั้ง และเขียน $\psi_1(\vec{r}, t)$ และ $\psi_2(\vec{r}, t)$ สำหรับฟังก์ชันคลื่นที่สัมพันธ์กับระดับ 1 และระดับ 2 ตามลำดับ เมื่อ $\vec{r} = PO$ เป็นเวกเตอร์ที่เชื่อมระหว่างจุด P ใด ๆ ของอะตอมกับจุดกำเนิด O เราเขียนใหม่เป็น $\psi_1(\vec{r}, t) = u_1(\vec{r}) \exp(-iE_1 t/\hbar)$ ต่อไปเราสมมติว่าอะตอมอยู่ในระดับ 2 ได้ลดลงสู่ระดับ 1 ระดับพื้น โดยใช้วิธีเดียวกันกับการวิเคราะห์ในกรณีของการดูดกลืน ฟังก์ชันคลื่น $\psi(\vec{r}, t)$ เกิดขึ้นระหว่างการเปลี่ยนแปลงสามารถเขียนได้ด้วยสมการ (2.23) เมื่อไดโพลโมเมนต์ไฟฟ้ากำหนดด้วย

$$\vec{M} = \int \vec{r} e |\psi|^2 dV \quad \dots\dots\dots (2.71)$$

แทนสมการ (2.23) ลงในสมการ (2.71) จะได้

$$\begin{aligned} \vec{M} = & \int e \vec{r} |a_1|^2 |u_1|^2 dV + \int e \vec{r} |a_2|^2 |u_2|^2 dV + \int e \vec{r} |a_1 a_2^* u_1 u_2^* \exp(i\omega_0 t) \\ & + a_1^* a_2 u_1^* u_2 \exp(-i\omega_0 t)| dV \quad \dots\dots\dots (2.72) \end{aligned}$$

ในที่นี้เครื่องหมาย $*$ ใช้แทนสำหรับพจน์สังยุคเชิงซ้อน (complex conjugate) และ $\omega_0 = (E_2 - E_1)/\hbar$ สมการ (2.72) แสดงว่า \vec{M} มีพจน์ \vec{M}_{21} ออสซิลเลตที่ความถี่ ω_0 ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

$$\vec{M}_{21} = \text{Re} \{ \exp(i\omega_0 t) \int e \vec{r} (2a_1 a_2^* u_1 u_2^*) dV \} \quad \dots\dots\dots (2.73)$$

โดยความคล้ายคลึงกับกรณีที่ได้พิจารณาตอนต้นของตัวออสซิลเลตแบบดั้งเดิม ดังนั้นจึงคาดหมายพจน์นี้กำลังออสซิลเลตที่ความถี่ ω_0 ว่า สามารถตอบสนองสำหรับกำลังที่แผ่เข้าไปบริเวณรอบ ๆ ตัวและสามารถตอบสนองสำหรับขั้นตอนของการเปล่งแสงตามปกติวิสัย อัตรา

ของการเปลี่ยนแปลงต่อหน่วยเวลาของ $|a_2|^2$ สามารถหาได้จากการปรับพลังงานให้สมดุล หรือกล่าวอีกนัยหนึ่ง คือ

$$(\hbar\omega_0) \cdot \frac{d|a_2|^2}{dt} = -P_r \quad \dots\dots\dots (2.74)$$

ในที่นี้กำลังการแผ่รังสี P_r สามารถหาได้จากสมการ (2.67) โดยอาศัยจากสมการ (2.73) เราจะได้ $\mu = 2|a_1 a_2 \mu_{21}|$ ดังนั้นสมการ (2.74) สามารถเขียนเป็น

$$\frac{d|a_2|^2}{dt} = -\frac{1}{\tau_{sp}} |a_1|^2 |a_2|^2 = -\frac{1}{\tau_{sp}} (1 - |a_2|^2) |a_2|^2 \quad \dots\dots\dots (2.75)$$

ในที่นี้เราสามารถใช้สมการ (2.24) ช่วยและเรากำหนด τ_{sp} เป็น

$$\tau_{sp} = \frac{3\pi \hbar \epsilon_0 c^3}{\omega_0^3 \eta |\mu|^2} \quad \dots\dots\dots (2.76)$$

ซึ่งเรียกว่าอายุขัยของการเปล่งแสงตามปกติวิสัย (หรือการแผ่รังสี) ของระดับ 2 คำตอบของสมการ (2.75) คือ

$$|a_2|^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \tanh\left(\frac{t-t_0}{2\tau_{sp}}\right) \right] \quad \dots\dots\dots (2.75ก)$$

t_0 หาได้จากเงื่อนไขของสภาวะเริ่มต้น (หาค่าของ $|a_2(0)|^2$) ตัวอย่างเช่น รูป 2.8 แสดงพฤติกรรมทางเวลาของ $|a_2(t)|^2$ สำหรับ $|a_2(0)|^2 = 0.96$ ในภาพเดียวกันยังได้แสดงพฤติกรรมทางเวลาที่ทำให้เป็นปกติแล้วของกำลังการแผ่รังสี P_r ด้วย

ให้สังเกตว่าพฤติกรรมทางเวลาของ $|a_2(t)|^2$ สามารถประมาณได้ด้วยกฎเอกซ์โปเนนเชียล เมื่อ $|a_2(0)|^2 \ll 1$ เท่านั้น คือ

$$|a_2(t)|^2 = |a_2(0)|^2 \exp[-(t/\tau_{sp})] \quad \dots\dots\dots (2.75ข)$$

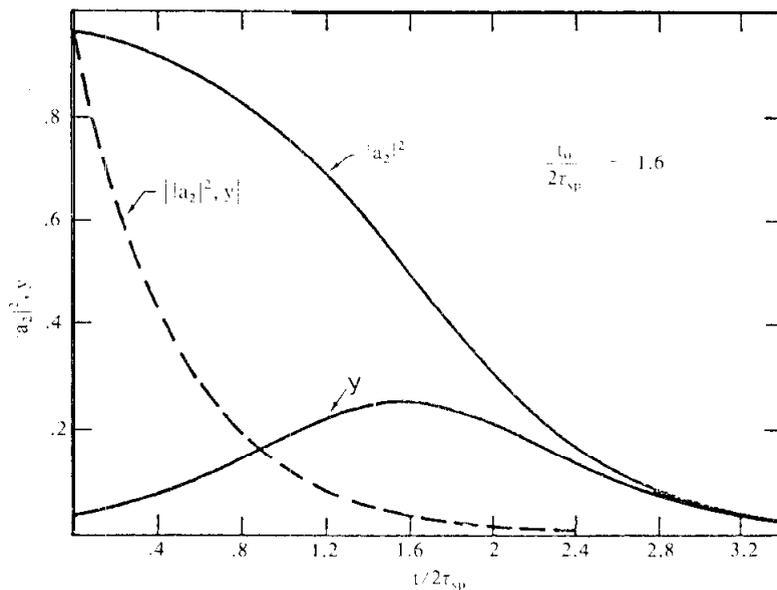
ความจริงเราสามารถให้ $|a_1|^2 = 1$ แทนลงในสมการ (2.75) จะได้สมการ (2.75ข)

กรณีที่สำคัญโดยเฉพาะเกิดขึ้นเมื่อเรามี $|a_2(0)|^2 = 1$ ในกรณีนี้อาศัยจากทฤษฎีที่ดั้งเดิมจะได้ $t_0 = \infty$ และอะตอมไม่ได้ลดระดับลงไป ที่จริงแล้วเมื่อ $|a_2(0)|^2 = 1$ จะได้ $|a_1(0)|^2 = 0$ และจากสมการ (2.75) จะได้ $d|a_2|^2/dt = 0$ มีวิธีอื่นที่พิจารณากรณีนี้ได้คือ คอยสังเกตว่าเมื่อ $|a_1(0)|^2 = 0$ ค่า \vec{M} ในสมการ (2.72) จะเปลี่ยนไปเป็น $\vec{M}_{22} = \int e\vec{r}|a_2|^2|u_2|^2 dV$ ซึ่งเป็นค่าคงที่เทียบกับเวลา (\vec{M}_{22} มีค่าเป็นศูนย์สำหรับสถานะของความเป็นคู่ที่ได้กำหนดแน่นอน) เมื่ออะตอมที่กำลังออกสซิลเลตไม่มีไดโพลโมเมนต์มันจะไม่แผ่รังสีและจะอยู่ในสถานะสมดุล

อันหนึ่ง ต่อไปเราต้องการทดสอบเสถียรภาพของสถานะสมดุลนี้โดยสมมติว่าอะตอมถูกรบกวนจนได้ $|a_1| \neq 0$ ที่ $t = 0$ มันมีความหมายว่าเรามีโอกาส $|a_1|^2$ พบอะตอมในระดับ 1 แนนอน ดังนั้น สมการ (2.72) แสดงว่าได้สร้างโดโพลโมเมนต์ขึ้นออสซิลเลตที่ความถี่ ω_0 โดยที่โมเมนต์นี้จะแผ่รังสีเข้าไปในที่ว่างรอบตัวของมัน และอะตอมจะลดระดับลงไปยังระดับ 1 นี้ ส่อให้เห็นว่า $|a_2|^2$ มีค่าลดลง ดังนั้น อะตอมจะอยู่ในสถานะสมดุลที่ไม่มั่นคง

สรุปผลลัพธ์ที่หาได้จากการเข้าสู่แบบกึ่งดั้งเดิม คือ (1) พฤติกรรมทางเวลาของ $|a_2|^2$ โดยทั่วไปสามารถอธิบายในพจน์ของไฮเพอร์บอลิกแทนเจนต์ (hyperbolic tangent) ตามสมการ (2.75ก) แต่ในสภาวะต้นตัว (คือเมื่อ $|a_2(0)|^2 \ll 1$) มันจะเป็นไปตามกฎเอกซ์โปเนนเชียลอย่างประมาณตามสมการ (2.75ข) (2) เมื่ออะตอมเริ่มต้นอยู่ในสถานะบน (คือเมื่อ $|a_2(0)|^2 = 1$) อะตอมจะอยู่ในสถานะสมดุลที่ไม่มั่นคงและไม่มีการแผ่รังสี

ผลลัพธ์เหล่านี้ต่างจากผลลัพธ์ที่หาได้จากการเข้าสู่แบบควอนตัมไฟฟ้าพลศาสตร์ (quantum electrodynamic approach) |ซึ่งทั้งวัตถุและการแผ่รังสีแม่เหล็กไฟฟ้าต่างเป็นส่วนย่อยพลังงาน (quantized)| ซึ่งเราจะบ่งบอกผลลัพธ์ที่หาได้จากกรณีนี้ได้ดังต่อไปนี้



รูป 2.8 แสดงพฤติกรรมทางเวลาของสถานะบนแปรสภาพด้วยโอกาส $|a_2|^2$ และกำลังแผ่รังสีที่ทำให้ปกติแล้ว y ($y = \tau_{sp} P_r / \hbar \omega_0$) เส้นโค้งที่หาได้คือ เกทฤษฎีกึ่งดั้งเดิม ส่วนเส้นโค้งประพาดได้คือ เกทฤษฎีควอนตัมไฟฟ้าพลศาสตร์

(1) พฤติกรรมทางเวลาของ $|a_2|^2$ สามารถอธิบายได้ด้วยวิธีการประมาณวิกเนอร์-ไวส์สคอปฟ์ (Wigner-Weisskopf approximation) เสมอโดยใช้กฎเอกซ์โปเนนเชียล ซึ่งไม่เหมือนกับกรณีกึ่งดั้งเดิม นี่หมายความว่าสมการ (2.75 ข) เป็นจริงเสมอ และค่าของ $|a_2(0)|^2$ ไม่เกี่ยวกับวัตถุ

(2) อายุขัยของการแผ่รังสีในกรณีนี้กำหนดด้วยสมการ (2.76) จากผลลัพธ์เหล่านี้หมายถึงว่า อะตอมในระดับบนไม่ได้อยู่ในสถานะสมดุลที่ไม่มั่นคง เราเห็นได้ว่าการเข้าสู่แบบกึ่งดั้งเดิมและแบบควอนตัมไฟฟ้าพลศาสตร์ ให้การทำนายสำหรับปรากฏการณ์ของการเปล่งแสงตามปกติวิสัยแตกต่างกันอย่างสิ้นเชิง (ดูรูป 2.8) อย่างไรก็ตามบนพื้นฐานของผลลัพธ์จากการทดลองที่สามารถหาได้ เราสามารถกล่าวได้ว่าการเข้าสู่ด้วยควอนตัมไฟฟ้าพลศาสตร์ให้คำตอบของปัญหาได้ถูกต้อง ดังนั้นวิธีการเข้าสู่วิธีนี้เป็นวิธีที่ถูกต้อง และเราได้ใช้มาแล้วในตอนต้นสำหรับปรากฏการณ์ของการเปล่งแสงโดยการกระตุ้นและการดูดกลืน อย่างไรก็ตามการเข้าสู่แบบกึ่งดั้งเดิมและแบบควอนตัมไฟฟ้าพลศาสตร์ให้ผลลัพธ์เช่นเดียวกับในกรณีการเปล่งแสงโดยการกระตุ้นและการดูดกลืน ดังนั้นสิ่งที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อก่อน ๆ ยังคงถูกต้องอยู่

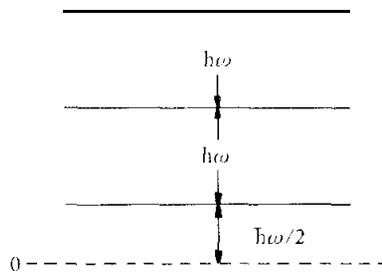
เหตุผลสำหรับการย้ายการพิจารณาสถานะสมดุลที่ไม่มั่นคงด้วยวิธีการเข้าสู่แบบกึ่งดั้งเดิมไปเป็นแบบควอนตัมไฟฟ้าพลศาสตร์ สมควรจะพิจารณามากยิ่งขึ้นกว่านี้ ในกรณีแบบกึ่งดั้งเดิมเมื่ออะตอมอยู่ในระดับบน คืออยู่ในระดับสมดุลที่ไม่มั่นคงและมีการรบกวนเพียงเล็กน้อยพอทำให้อะตอมเคลื่อนย้ายไปจากระดับนี้ ครั้งแรกเราอาจจะคิดว่ามีการแผ่รังสีหลงเข้าไปรอบ ๆ วัตถุเพื่อทำให้ความสมดุลเสียไป เพื่อให้ชัดเจนยิ่งขึ้น เราสมมติว่ามีวัตถุบรรจุอยู่ในโพรงวัตถุดำ ซึ่งผนังของมันมีอุณหภูมิคงที่ที่ T ดังนั้น เราอาจจะคิดว่าความสมดุลเสียไป (คือเกิดการเปล่งแสงตามปกติวิสัย) เนื่องจากการแผ่รังสีภายในโพรงวัตถุดำ อย่างไรก็ตามความคิดนี้อาจจะผิดพลาดได้ เมื่อการแผ่รังสีที่เกิดขึ้น ความจริงเกิดจากปรากฏการณ์ของการเปล่งแสงโดยการกระตุ้น คือกระตุ้นด้วยการแผ่รังสีของวัตถุดำ การรบกวนซึ่งเป็นสิ่งจำเป็นสำหรับการเปล่งแสงตามปกติวิสัย หาได้จากการเข้าสู่แบบควอนตัมไฟฟ้าพลศาสตร์ ซึ่งสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในโพรงไม่ได้ปฏิบัติเป็นแบบดั้งเดิม (คือใช้สมการของแมกซ์เวลล์) แต่ปฏิบัติเป็นหน่วยย่อยพลังงานมากกว่า เราจะพิจารณาผลลัพธ์ที่สำคัญมากค่าหนึ่งโดยพิจารณาหมวดของโพรงหมวดหนึ่งที่มีความถี่ ω ถ้าโพรงประพฤติเป็นแบบดั้งเดิม เราทราบได้ทันทีว่าผลลัพธ์คือพลังงานของหมวด สามารถมีค่าเท่าไรก็ได้ จาก 0 ถึง ∞ อย่างไรก็ตามถ้าหมวดเป็นหน่วยย่อยพลังงานแล้ว พลังงานของตัวออกซิลเลตมีพฤติกรรมคล้ายกับตัวออกซิลเลตฮาร์โมนิค ดังนี้คือ

(1) พลังงานไม่สามารถเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่อง แต่เปลี่ยนแปลงเป็นค่ากระโดดของ $h\omega$ ดังนั้นเราสามารถกล่าวได้ว่า ระดับพลังงานของหมวดนี้มีช่วงกว้างเท่ากับจำนวน $h\omega$

(2) ระดับพลังงานต่ำสุดไม่ใช่เป็น 0 แต่เป็น $h\omega/2$ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่าระดับพลังงานของหมวดนี้ สามารถเขียนแทนได้ดังในรูป 2.9 พลังงาน $h\omega/2$ ซึ่งเป็นพลังงานหมวดที่ $T = 0$ เรียกว่า พลังงานจุดศูนย์ (zero-point energy) ในทฤษฎีที่เป็นหน่วยย่อยพลังงานของอันตรกิริยาการแผ่รังสี-วัตถุ ก็ใช้พลังงานนี้สร้างการเปล่งแสงตามปกติวิสัย ดังนั้นการเปล่งแสงตามปกติวิสัยสามารถพิจารณาได้ว่ามันถูกกระตุ้นด้วยพลังงานจุดศูนย์นี้

ต่อไปเราแทนอายุขัยการแผ่รังสีของสถานะบนด้วย τ_{sp} ความหมายของมัน คือ ประชากรอะตอมในสถานะบน ($|a_2|^2$) จะลดลงตามสมการ (2.75 ข) ดังนั้น โอกาสของการเปล่งแสงตามปกติวิสัย A กำหนดด้วย

$$A = \frac{1}{\tau_{sp}} = \frac{\eta\omega_0^3|\mu|^2}{3\pi\hbar\epsilon_0c^3} \quad \dots \quad (2.77)$$



รูป 2.9 แสดงระดับพลังงานของหมวดโพรงหมวดหนึ่งมีความถี่ ω กำหนดได้ด้วยสมมาตรแม่เหล็กไฟฟ้าหน่วยย่อยพลังงาน

ให้สังเกตว่า A มีค่าเพิ่มขึ้นด้วยความถี่กำลังสาม นั่นคือ การเปล่งแสงตามปกติวิสัยได้เพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วตามความถี่เป็นขั้นตอนที่สำคัญสำหรับเลเซอร์ แต่เป็นสิ่งไม่สำคัญสำหรับเมเซอร์ที่ความถี่แสงขนาดของ A สามารถหาได้โดยใช้ $\lambda = 2\pi c/\omega = 5 \times 10^{-5}$ ซม. และ $|\mu| = ea$ เมื่อ a เป็นรัศมีของอะตอม ($a = 10^{-8}$ ซม.) ดังนั้น เราได้ $A \approx 10^8$ วินาที⁻¹ ซึ่งเป็นขนาดที่ถูกต้องของ A สำหรับการเปลี่ยนแปลงไดโพลไฟฟ้าที่เป็นไปได้ ส่วนการเปลี่ยนแปลงไดโพลแม่เหล็ก A มีค่าน้อยกว่าประมาณ 10^5 เท่า คือ $A \approx 10^3$ วินาที⁻¹

ต่อไปเรามาศึกษาการคำนวณของ A (จากของไอน์สไตน์) ซึ่งใช้เหตุผลทางอุณหพลศาสตร์มาอธิบาย คือให้เราสมมติว่าวัตถุวางอยู่ในโพรงวัตถุดำซึ่งผนังของมันให้มีอุณหภูมิ T

คงที่ค่าหนึ่ง เมื่อถึงสภาวะสมดุลความหนาแน่นพลังงานแม่เหล็กไฟฟ้าที่แจจออกเป็นส่วนย่อย ρ_{ω} กำหนดด้วยสมการ (2.18 ก) ถูกสร้างขึ้นล้อมรอบวัตถุ ในก้อนวัตถุจะมีทั้งขั้นตอนของการเปล่งแสงโดยการกระตุ้นและการดูดกลืนเกิดขึ้นพร้อมกับการเปล่งแสงตามปกติวิสัย เมื่อระบบอยู่ในสภาวะสมดุลทางอุณหพลศาสตร์ จำนวนของการเปลี่ยนแปลงจากระดับ 1 ไประดับ 2 จะต้องเท่ากับจำนวนการเปลี่ยนแปลงจากระดับ 2 ไประดับ 1 ดังนั้นเราให้

$$W_{21} = B_{21}\rho_{\omega_0} \quad \dots\dots\dots(2.78)$$

$$W_{12} = B_{12}\rho_{\omega_0} \quad \dots\dots\dots (2.79)$$

เมื่อ B_{21} และ B_{12} เป็นสัมประสิทธิ์ค่าคงที่ (เรียกว่าสัมประสิทธิ์ B ไอน์สไตน์) ถ้าเราเขียน N_1^c และ N_2^c เป็นจำนวนประชากรอะตอมสมดุลของระดับ 1 และระดับ 2 ตามลำดับ เราจะได้ว่า

$$AN_2^c + B_{21}\rho_{\omega_0}N_2^c = B_{12}\rho_{\omega_0}N_1^c \quad \dots\dots\dots (2.80)$$

จากสถิติโบลทซ์มานน์เรารู้ว่า

$$N_2^c/N_1^c = \exp(-\hbar\omega_0/KT) \quad \dots\dots\dots(2.81)$$

จากสมการ (2.80) และ (2.81) จะได้ว่า

$$\rho_{\omega_0} = \frac{A}{B_{12}\exp(\hbar\omega_0/KT) - B_{21}} \quad \dots\dots\dots (2.82)$$

เปรียบเทียบสมการ (2.82) กับสมการ (2.18 ก) ได้ความสัมพันธ์ว่า

$$B_{12} = B_{21} = B \quad \dots\dots\dots (2.83)$$

$$\frac{A}{B} = \frac{\hbar\omega_0^3\eta^3}{\pi^2c_0^3} \quad \dots\dots\dots (2.84)$$

สมการ (2.83) แสดงว่าโอกาสของการดูดกลืนและการเปล่งแสงโดยการกระตุ้น เนื่องจากการแผ่รังสีของวัตถุดำเท่ากัน ดังนั้นความสัมพันธ์นี้จึงคล้ายคลึงกับที่หาได้ด้วยวิธีต่างจากกรณีของการแผ่รังสีแสงสีเดียว [ดูสมการ (2.54)]

เราสามารถคำนวณค่า A จากสมการ (2.84) เมื่อทราบค่า B ซึ่งเป็นสัมประสิทธิ์ของการเปล่งแสงโดยการกระตุ้นเนื่องจากการแผ่รังสีวัตถุดำ สัมประสิทธิ์นี้สามารถหาได้ง่ายจากสมการ (2.53 ข) สมการนี้ถูกต้องเป็นจริงสำหรับการแผ่รังสีแสงสีเดียวอย่างแท้จริง (สมบูรณ์) สำหรับการแผ่รังสีของวัตถุดำเราเขียน $\rho_{\omega}d\omega'$ เป็นความหนาแน่นพลังงานของ

การแผ่รังสีซึ่งมีความถี่อยู่ระหว่าง ω' และ $\omega' + d\omega'$ ถ้าเรากระตุ้นการแผ่รังสีนี้ด้วยคลื่นแสงสีเดียวที่มีกำลังเท่ากัน โอกาสของการเปลี่ยนแปลงขึ้นพื้นฐานสอดคล้องกับ $d\omega$ หาได้จากสมการ (2.53 ข) โดยแทน ρ ด้วย $\rho_{\omega'} d\omega'$ และอินทิเกรตสมการนี้โดยสมมติว่า $g(\Delta\omega)$ สามารถประมาณได้ด้วยฟังก์ชันเดลตาไครเรคเมื่อเปรียบเทียบกับ $\rho_{\omega'}$ เราได้

$$W = \frac{\pi}{3\eta^2 \epsilon_0 \hbar^2} |\mu|^2 \rho_{\omega_0} \dots\dots\dots (2.85)$$

เปรียบเทียบสมการ (2.85) กับสมการ (2.78) หรือเทียบกับสมการ (2.79) ได้ว่า

$$B = \frac{\pi |\mu|^2}{3\eta^2 \epsilon_0 \hbar^2} \dots\dots\dots (2.86)$$

จากสมการ (2.84) และ (2.86) สุดท้ายเราได้ $A = \eta \omega_0^3 |\mu|^2 / 3\pi \hbar \epsilon_0 c^3$ ซึ่งคือสมการ (2.77) นั้นเอง ให้สังเกตว่าการคำนวณนี้ถูกต้องตามทฤษฎีทางไฟฟ้าพลศาสตร์ควอนตัม ซึ่งเราใช้เพียงเหตุผลทางอุณหพลศาสตร์ [ดูสมการ (2.80)] และสมการของพลังค์สำหรับ ρ_{ω} แนนอนสมการหลังสุดสามารถหาได้ด้วยสนามควอนไทเซชันเท่านั้น

ต่อไปเราตรวจสอบสเปกตรัมของรังสี ที่ออกมาโดยกำหนดสัมประสิทธิ์ A_{ω} ค่าหนึ่งซึ่ง $N_2 A_{\omega} d\omega$ เป็นจำนวนอะตอมต่อหน่วยเวลา ซึ่งให้โฟตอนในขณะละระดับมีความถี่อยู่ระหว่าง ω และ $\omega + d\omega$ เราได้ว่า

$$A = \int A_{\omega} d\omega \dots\dots\dots (2.87)$$

ทำนองเดียวกันเรากำหนดสัมประสิทธิ์ B_{ω} ด้วยวิธีดังนี้ ให้ $B_{\omega} \rho_{\omega} d\omega$ เป็นจำนวนการเปลี่ยนแปลงต่อหน่วยเวลา (ของการดูดกลืนหรือการเปล่งแสงโดยการกระตุ้น) ที่เกิดจากการแผ่รังสีวัดดูด้วยความถี่อยู่ระหว่าง ω และ $\omega + d\omega$ เราสามารถเห็นได้ว่า $A_{\omega}/B_{\omega} = A/B$ ความจริงเราสมมติว่าระหว่างสสารที่เราจะพิจารณาและผนังของโพรงวัดดูดำมีแผ่นกรองแสงวางกันอยู่ จะยอมให้ความถี่ระหว่าง ω และ $\omega + d\omega$ ผ่านไปได้เท่านั้น ในกรณีนี้เราสามารถใช้อุณหพลศาสตร์อ้างอิงได้ ดังนั้น

$$A_{\omega} N_2^0 d\omega + B_{\omega} \rho_{\omega} N_2^0 d\omega = B_{\omega} \rho_{\omega} N_1^0 d\omega \dots\dots\dots (2.88)$$

โดยใช้วิธีการคำนวณแบบเดียวกับสมการ (2.81) และ (2.18 ก) เราได้

$$\frac{A_{\omega}}{B_{\omega}} = \frac{A}{B} \dots\dots\dots (2.89)$$

หรืออีกนัยหนึ่ง สัมประสิทธิ์ B_ω สามารถคำนวณได้ง่ายดายจากสมการ (2.53 ข) เมื่อเราสังเกตได้ว่า $B_\omega \rho_\omega d\omega$ สามารถใช้แทนเป็นสัมประสิทธิ์ของการเปล่งแสงโดยการกระตุ้น สำหรับการแผ่รังสีแสงสีเดียว จากสมการ (2.53 ข) และ (2.86) เราได้

$$B_\omega = B_{g_1}(\Delta\omega) \quad \dots\dots\dots (2.90)$$

และจากสมการ (2.89) ได้ว่า

$$A_\omega = A_{g_1}(\Delta\omega) \quad \dots\dots\dots (2.91)$$

สมการ (2.91) แสดงว่าสเปกตรัมของคลื่นรังสีอธิบายด้วย $g_1(\Delta\omega)$ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า มันเป็นเช่นเดียวกับการดูดกลืนหรือการเปล่งแสงโดยการกระตุ้น ดังนั้นจากสมการ (2.91) เราได้ความหมายใหม่ของ $g_1(\Delta\omega)$ คือ $g_1(\Delta\omega)d\omega$ คือโอกาสที่โฟตอนปล่อยออกมาตามปกติวิสัย มีความถี่ระหว่าง ω และ $\omega + d\omega$

2.4 การลดระดับโดยไม่แผ่รังสี

ในวิธีของการแผ่รังสีเนื่องจากการลดระดับอะตอม ยังสามารถลดระดับจากระดับ 2 ไปยังระดับ 1 โดยไม่มีการแผ่รังสีได้ ในกรณีนี้ความแตกต่างพลังงาน $E_2 - E_1$ สามารถอยู่ในรูปของพลังงานแปรรูป พลังงานสั่นสะเทือนหรือพลังงานการหมุนควง ในกรณีของก๊าซ การเปลี่ยนแปลงโดยไม่มีการแผ่รังสีเกิดขึ้นเหมือนเป็นผลลัพธ์ของการชนกันแบบไม่ยืดหยุ่น ในทางตรงกันข้ามกับกรณีของของแข็ง มันเกิดเนื่องจากอันตรกิริยากับการสั่นสะเทือนของโครงผลึก (lattice)

ปรากฏการณ์นี้สามารถอธิบายได้ด้วยคุณลักษณะอายุขัย ซึ่งเรียกเป็นอายุขัยการไม่แผ่รังสี τ_{nr} โดยปกติการคำนวณของมันยุ่งยากมาก คือมันจำเป็นต้องเกี่ยวข้องกับธรรมชาติและพฤติกรรมของวัตถุรอบข้าง จากผลของการกระตุ้นทำให้เกิดทั้งการแผ่รังสีและไม่แผ่รังสี การเปลี่ยนแปลงตามเวลาของจำนวนประชากรอะตอม N_2 ในสถานะบนสามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{dN_2}{dt} = -\left(\frac{N_2}{\tau_{sp}} + \frac{N_2}{\tau_{nr}}\right) \quad \dots\dots\dots(2.92)$$

แสดงว่าเราสามารถกำหนดอายุขัยทั้งหมด τ เป็น

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_{sp}} + \frac{1}{\tau_{nr}} \quad \dots\dots\dots (2.93)$$

เราจะเรียกปริมาณนี้เป็นอายุขัยของสถานะบน 2 และสามารถวัดค่ามันได้ง่ายโดยการตรวจจับพฤติกรรมเวลาของแสงตามปกติวิสัย เราสมมติว่าที่เวลา $t = 0$ ในระดับบนมี $N_2(0)$ อะตอม และให้ V เป็นปริมาตรของวัตถุ จากสมการ (2.92) กำลังส่งออกด้วยการเปล่งแสงตามปกติวิสัยจะเป็น

$$P(t) = \frac{N_2(t) \hbar \omega_0 V}{\tau_{sp}} \quad \dots\dots\dots (2.94)$$

ประชากรอะตอม $N_2(t)$ ที่เวลา t ใดๆ หาได้จากการอินทิเกรตสมการ (2.92) คือ $N_2(t) = N_2(0) \exp(-t/\tau)$ ดังนั้น

$$P(t) = \frac{N_2(0) \hbar \omega_0 V}{\tau_{sp}} \exp(-t/\tau) \quad \dots\dots\dots (2.95)$$

ให้สังเกตว่าแสงที่ออกมาเป็นผลลัพ์ของการเปล่งแสงตามปกติวิสัย มีค่าลดลงอย่างเอกซ์โปเนนเชียลตามเวลากับค่าคงที่ τ ซึ่งมากกว่า τ_{sp}

กำหนดหน่วยพลังงานของการเรืองแสง ϕ เป็นอัตราส่วนของจำนวนโฟตอนที่ออกมากับจำนวนอะตอมที่ขึ้นไปในระดับ 2 ตอนเริ่มต้น ดังนั้นจากสมการ (2.95) เราได้

$$\phi = \frac{\int P(t) dt}{N_2(0) V \hbar \omega_0} = \frac{\tau}{\tau_{sp}} \quad \dots\dots\dots (2.96)$$

จากการหาหน่วยพลังงาน ϕ และอายุขัย τ ทางควอนตัม มันเป็นไปได้ที่จะพบทั้ง τ_{sp} และ τ_{nr}

เราสามารถพิจารณากรณีที่แตกต่างกันกรณีของสมการ (2.92) เล็กน้อยได้ โดยสมมติว่าการลดระดับโดยการแผ่รังสีของระดับ 2 เกิดขึ้นได้ทั้งผ่านการเปลี่ยนแปลงไปยังระดับ 1 และยังสามารถเปลี่ยนแปลงไปยังระดับอื่น ๆ ได้อีกด้วย เพื่อความสะดวกเราจะพิจารณาเฉพาะระดับที่ 3 และเรียก $(\tau_{21})_{sp}$ และ $(\tau_{23})_{sp}$ เป็นอายุขัยการแผ่รังสีของการเปลี่ยนแปลง $2 \rightarrow 1$ และ $2 \rightarrow 3$ ตามลำดับ แทนลงในสมการ (2.93) เราได้

$$\frac{1}{\tau} = \left(\frac{1}{\tau_{21}}\right)_{sp} + \left(\frac{1}{\tau_{23}}\right)_{sp} + \frac{1}{\tau_{nr}} \quad (2.93 ก)$$

และจากสมการ (2.96)

$$(\phi)_{21} = \tau / (\tau_{21})_{sp} \quad (2.96 ก)$$

ในที่นี้หน่วยพลังงาน $(\phi)_{21}$ กำหนดเป็นอัตราส่วนของจำนวนโฟตอนที่ออกมาจากการเปลี่ยนแปลง $2 \rightarrow 1$ กับจำนวนอะตอมที่ขึ้นไปยังระดับ 2 ตอนเริ่มต้น

2.5 กลไกการแผ่อกของเส้น (Line Broadening Mechanism)

ในหัวข้อนี้เราต้องการพิจารณาการกลไกการแผ่อกของเส้นหลายรูปแบบและพฤติกรรมที่สอดคล้องกับฟังก์ชัน $g(\Delta\omega)$ ให้สังเกตว่าจากความถี่ของสเปกตรัม [และ $g(\Delta\omega)$] ของชั้นตอนการเปล่งแสงตามปกติวิสัย การเปล่งแสงโดยการกระตุ้นและการดูดกลืนมีค่าเท่ากัน ดังนั้นในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาฟังก์ชันรูปร่างของเส้น (line-shape functions) แบบต่าง ๆ ด้วยชั้นตอนทั้งสามชั้นตอนไหนก็ได้ที่วิเคราะห์ได้สะดวกที่สุด

กลไกการแผ่อกของเส้นมีสองแบบ คือ แบบเอกพันธ์และแบบไม่เอกพันธ์ กลไกการแผ่อกของเส้นที่เรียกเป็นแบบเอกพันธ์ เมื่อมันทำให้เส้น $[g(\Delta\omega)]$ ของแต่ละอะตอมหรือของอะตอมทั้งระบบแผ่อกอย่างเดียวกัน ในทางกลับกันกลไกการแผ่อกของเส้นที่เรียกเป็นแบบไม่เอกพันธ์ เมื่อมันกระจายความถี่อภินาของอะตอมตลอดแถบกว้างความถี่ และทำให้เส้นทั้งหมดของอะตอมทั้งระบบแผ่อกโดยไม่ทำให้เส้นของแต่ละอะตอมแผ่อกแต่อย่างใด

2.5.1 การแผ่อกแบบเอกพันธ์

กลไกการแผ่อกของเส้นแบบเอกพันธ์อย่างหนึ่ง เรียกว่าการแผ่อกโดยการชนกัน ในก๊าซ มันเกิดขึ้นเนื่องจากการชนกันของอะตอมกับอะตอม อะตอมกับไอออน อะตอมกับอิเล็กตรอนอิสระ หรืออะตอมชนกับผนังของภาชนะบรรจุ ในของแข็งมันเกิดขึ้นเนื่องจากอันตรกิริยาระหว่างอะตอมกับโครงผลึก การชนกันเหล่านี้รบกวนชั้นตอนของอันตรกิริยาสมาเสมอระหว่างอะตอมกับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าตกกระทบ เหมือนกับกลไกที่ได้พิจารณาไปแล้ว [ดูสมการ (2.52)] กลไกนี้ให้ฟังก์ชันรูปร่างของเส้นเป็นแบบลอเรนซ์เซียน ซึ่งช่วงกว้างของมันขึ้นกับเวลาของการชนกันเฉลี่ย $(\Delta\omega_0 = 2/\tau_c)$

เรามาดูว่าสมการ (2.52) ได้มาอย่างไร ฟังก์ชันเส้นนี้ $[g(\Delta\omega)]$ กำหนดด้วยกำลังของสเปกตรัม $w(\omega)$ ของสัญญาณ $E(t)$ ดังแสดงในรูป 2.6 โดยแยกต่างหากออกจากตัวร่วมที่เหมาะสม สำหรับตัวร่วมที่เหมาะสมนี้มีค่าเป็นหนึ่ง นั่นคือเราต้องการให้ $w(\omega)$ เป็นไปตาม $\int w(\omega)d\omega = 1$ ซึ่งเงื่อนไขนี้หาได้ง่ายจากทฤษฎีของพาร์เซวอล (Parseval's theorem) ซึ่งให้

$$\int w(\omega)d\omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\pi}{T} \int_{-T}^{+T} E^2(t)dt = \pi E_0^2 \dots \dots \dots (2.97)$$

ในที่นี้ E_0 เป็นอัมพลิจูดของสัญญาณในรูป 2.6 เพื่อให้ $\int Wd\omega = 1$ เราต้องให้ $E_0^2 = 1/\pi$ ดังนั้นฟังก์ชัน $g(\omega' - \omega)$ กำหนดด้วยกำลังของสเปกตรัมสัญญาณ $E(t)$ ในรูป 2.6 และมีอัมพลิจูด $E_0 = 1/\sqrt{\pi}$ แถบรู้งี้สามารถหาได้ด้วยการแปลงฟูเรียร์ (Fourier transform) ของสัญญาณฟังก์ชันสหสัมพันธ์ (signal autocorrelation function) ถ้าฟังก์ชันในรูป 2.6 เป็นคลื่นรูปไซน์สมบูรณ์ของหนึ่งความถี่ ω ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ของมันจะเป็น $(E_0^2/2)\cos \omega\tau = (1/2\pi)\cos\omega\tau$ อย่างไรก็ตาม คลื่นในรูป 2.6 ถูกครอบงวนด้วยโอกาส $P(\tau)$ กำหนดด้วยสมการ (2.49) ให้สังเกตว่า $P(\tau)$ ใช้แทนโอกาสที่มีการชนกันหลังจากการชนก่อนหน้านี้เป็นเวลา τ ฉะนั้น ถ้าเราพิจารณาจุดสองจุดในรูป 2.6 อยู่ห่างกันเป็นเวลา τ โอกาสที่สัมพันธ์กับจุดทั้งสองเป็น $P(\tau)$ ขณะเดียวกัน โอกาสที่ไม่สัมพันธ์กับจุดทั้งสองเนื่องจากการรบกวนระหว่างกลางเป็น $1 - P(\tau)$ ดังนั้นฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่ต้องการ คือ $[P(\tau)\cos \omega\tau]/2\pi$ การหาฟังก์ชันสหสัมพันธ์สำหรับเวลา $\tau < 0$ เนื่องจากว่าฟังก์ชันสหสัมพันธ์เป็นค่าสมมาตร $[G(-\tau) = G(\tau)]$ ดังนั้นฟังก์ชันสหสัมพันธ์สำหรับเวลา $\tau < 0$ คือ

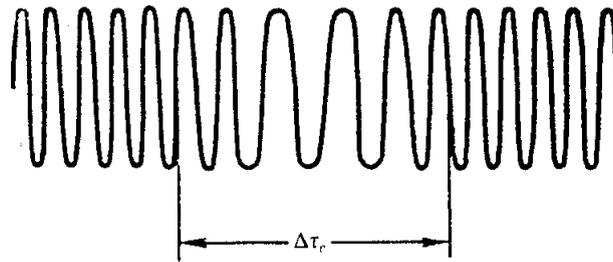
$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi} \exp(-|\tau|/\tau_c)\cos \omega\tau \quad \dots\dots\dots (2.98)$$

จากทฤษฎีของไวเนอร์-คินท์ไชน์ (Wiener-Kintchine) ของสัญญาณฟังก์ชันสหสัมพันธ์ได้ว่า

$$g(\omega' - \omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\tau_c}{1 + (\omega' - \omega)^2\tau_c^2} + \frac{\tau_c}{1 + (\omega' + \omega)^2 + \tau_c^2} \right] \quad (2.99)$$

สองพจน์ในวงเล็บมีศูนย์กลางสองจุดแยกจากกันรอบ $\omega + \omega$ และ $-\omega$ ตามลำดับ ถ้าเราพิจารณาเพียงค่าบวกของ ω เราสามารถละทิ้งพจน์ที่สองในสมการ (2.99) และเมื่อเราคูณพจน์แรกด้วย 2 จะได้สมการ (2.52) ความจริงรูป 2.6 ใช้แทนรูปพรรณอย่างหายาบ ๆ ของปรากฏการณ์ทางฟิสิกส์ที่เกิดขึ้นโดยสมมติการกระโดดของเฟสเกิดขึ้นอย่างทันทีทันใด ซึ่งหมายความว่า มันเกิดการชนกันทันทีทันใด เหมือนกับว่า $(\Delta\tau_c = 0)$ ที่จริง เวลาของการชนกัน $\Delta\tau_c$ มีค่าแน่นอนค่าหนึ่งระหว่างความถี่ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเปลี่ยนแปลงตามเวลาซึ่งมองเห็นได้จากอะตอมดังตัวอย่างในรูป 2.10 เหตุการณ์ที่เกิดขึ้นจริง ๆ ก็คือว่าในขณะที่อะตอม (หรือโมเลกุล) ชนกับอะตอมตัวอื่นจะได้รับพลังงานศักย์ที่เป็นทั้งเสริมกัน หรือหักล้างกัน เนื่องจากพลังงานศักย์นี้ทำให้ระดับพลังงาน 1 และ 2 ของอะตอมย้ายจากตำแหน่งเดิมไปด้วย $\Delta V_1(t)$ และ $\Delta V_2(t)$ ตามลำดับ ในที่นี้ r เป็นระยะทางระหว่างอะตอมทั้งสอง การเปลี่ยนแปลงความถี่กำหนดด้วย

$$\Delta\omega(t) = \frac{\Delta V_2(r) - \Delta V_1(r)}{\hbar} \dots (2.100)$$



รูป 2.10 แสดงพฤติกรรมเวลาของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเมื่อมองเห็นจากอะตอมระหว่างเวลาของการชนกัน $\Delta\tau_c$

ในที่นี้ $\Delta\omega$ เป็นฟังก์ชันของเวลาเนื่องจากระยะทาง r เป็นฟังก์ชันของเวลา ดังนั้น ทฤษฎีที่เป็นจริงของการแผ่อกโดยการชนกัน จะนับว่าเวลาของการชนกัน $\Delta\tau_c$ เป็นค่าแน่นอน ค่าหนึ่ง และพฤติกรรมได้เกิดขึ้นในช่วงเวลานี้ด้วยเช่นกัน อย่างไรก็ตามสามารถแสดงได้ว่า สำหรับกรณี $\Delta\tau_c \ll \tau_c$ ฟังก์ชัน $g(\omega' - \omega)$ อธิบายได้ด้วยเส้นโค้งลอเรนเซียนอย่างถูกต้อง ที่ความถี่ต่ำสุดจนถึงความถี่ $|\omega' - \omega| \leq 1/\Delta\tau_c$ ขนาดโดยประมาณของ $\Delta\tau_c$ สามารถหาได้จากความสัมพันธ์

$$A\tau_c = \frac{a}{v_{th}} \dots (2.101)$$

a เป็นระยะทางระหว่างอะตอมด้วยกัน ซึ่งอะตอม (หรือโมเลกุล) มีอิทธิพลต่อกัน และ v_{th} เป็นความเร็วเฉลี่ยของโมเลกุลที่เคลื่อนไหวเนื่องจากความร้อน ในทางปฏิบัติ a มีค่าประมาณเท่ากับขนาดของโมเลกุล ดังนั้นจึงมีขนาด 1 \AA ความเร็วเฉลี่ยสามารถหาได้จากความสัมพันธ์

$$v_{th} = \left(\frac{8KT}{\pi M} \right)^{\frac{1}{2}} \dots (2.102)$$

M เป็นมวลของโมเลกุล ยกตัวอย่างเช่น ถ้าเราพิจารณาอะตอม Ne (นีออน) ที่อุณหภูมิห้อง จากสมการ (2.102) และ (2.101) เราได้

$$\Delta\tau_c = 10^{-13} \text{ วินาที} \dots (2.103)$$

ให้สังเกตว่าสำหรับคลื่นแสง ($\nu = 5 \times 10^{14}$ เฮิรตซ์) ช่วงเวลานี้มันจะเกิดขึ้นหลาย ๆ รอบ ในอีกนัยหนึ่งขนาดประมาณของช่วงเวลา τ_c ระหว่างการชนกันสองครั้งกำหนดด้วย อัตราส่วนของเส้นทางอิสระเฉลี่ย (mean free path) กับความเร็วเฉลี่ย v_{th} ดังนั้นเราได้

$$\frac{(MKT)^2}{16\sqrt{\pi}pa^2} \quad (2.104)$$

p คือ ความดันของก๊าซ และ a เป็นรัศมีของโมเลกุล สำหรับอะตอม Ne ที่ความดัน $p = 0.5$ ทอร์รี่ (Torr) (เป็นความดันในเลเซอร์ก๊าซ He—Ne คูบที่ 6) ที่อุณหภูมิห้อง เราได้

$$\tau_c \approx 0.5 \times 10^{-6} \quad \text{วินาที} \quad \dots\dots\dots (2.105)$$

แสดงว่า $\Delta\tau_c \ll \tau_c$ ความกว้างเส้น (linewidth) เป็น (ดูรูป 2.7)

$$\Delta\nu = \frac{1}{\pi\tau_c} = 0.64 \quad \text{เมกะเฮิรตซ์ (MHz)} \quad \dots\dots\dots (2.105 \text{ ก})$$

ให้สังเกตว่า τ_c แปรผกผันกับความดัน ดังนั้นความกว้างเส้น $\Delta\nu_c$ จะแปรโดยตรงกับ p

กลไกการแผ่อกของเส้นแบบเอกพจน์ชนิดที่สองคือ เกิดเนื่องจากการเปล่งแสงตามปกติวิสัย และเรียกว่าการแผ่อกตามปกติวิสัยหรือตามเนื้อแท้ (intrinsic) เมื่อพลังงานที่อะตอมปล่อยออกในระหว่างการลดระดับพลังงานจากการเปล่งแสงตามปกติวิสัย เป็นไปตาม $\exp(-t/\tau_{sp})^*$ คือว่าสเปกตรัมฟูเรียร์ของมันได้ครอบคลุมช่วงความถี่ของขนาด $1/\tau_{sp}$ ยิ่งไปกว่านั้นมันยังสามารถแสดงว่าฟังก์ชันรูปร่างของเส้น $g(\Delta\omega)$ สัมพันธ์กับพฤติกรรมนี้ ซึ่งเป็นลอเรนซ์เซียนและสามารถหาได้จากสมการ (2.52) โดยแทน $2\tau_{sp}$ สำหรับ T_2 อย่างไรก็ตาม เราเห็นได้ชัดว่า เมื่อพฤติกรรมของการเปล่งแสงตามปกติวิสัยไม่สามารถอธิบายด้วยการเข้าสู่แบบกึ่งดั้งเดิม และนี่เป็นจริงสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของเส้น $g(\Delta\omega)$ ด้วย อย่างไรก็ตาม เราสามารถใช้เหตุผลมาอ้างโดยสมมติว่า สนามไฟฟ้าที่เกิดจากการลดระดับโดยการเปล่งแสงตามปกติวิสัยเป็นไปตามความสัมพันธ์ $E(t) = \exp(-t/2\tau_{sp})\cos \omega t$ ความจริงการลดระดับโดยปล่อยความเข้มแสงออกมา [ซึ่งแปรโดยตรงกับ $\langle E^2(t) \rangle$] จะแสดงพฤติกรรมทางเวลาที่ต้องการ คือ $\exp(-t/\tau_{sp})$ เราสามารถคำนวณหาค่ากลางของสเปกตรัมสอดคล้องกับสนาม $E(t)$ ได้ง่าย และพิสูจน์ผลลัพธ์ของ $g(\Delta\omega)$ ที่ได้กล่าวถึงในครั้งก่อน ๆ สำหรับเส้นโค้งใด ๆ จะปรากฏเป็นการแผ่อกตามธรรมชาติเสมอ แต่ตามปกติมันมีความสำคัญน้อยกว่ากลไกอื่น ๆ มาก [คือการแผ่อกแบบดอปเปลอร์ (Doppler broadening)] ตัวอย่างเช่น สำหรับการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นเราเห็นได้ว่า $\tau_{sp} = 10^{-8}$ วินาที ดังนั้น (ดูรูป 2.7)

* การลดระดับโดยไม่แผ่รังสีไม่ได้พิจารณาในที่นี้ เนื่องจากผลของมันรวมอยู่ในการแผ่อกโดยการชนกันที่พิจารณาไปแล้ว

$$\Delta\nu = \frac{\Delta\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\tau_{sp}} \approx 20 \text{ เมกะเฮิรตซ์ (MHz)} \dots\dots\dots(2.106)$$

การแผ่อกนี้สังเกตได้ในวัตถุซึ่งอะตอมของมันถูกยึดแน่นและไม่ทำปฏิกิริยากับอะตอมอื่น

2.5.2 การแผ่อกแบบไม่เอกพันธ์

ให้เราสมมติว่ากลไกการแผ่อกของเส้นได้แจกแจงความถี่ของอะตอมออกตลอดแถบความถี่มีศูนย์กลางแถบที่ความถี่ ω_0 และเรียก $g^*(\omega'_0 - \omega_0)$ ว่า ความหนาแน่นการแจกแจงสัมพัทธ์ หมายความว่า $g^*(\omega'_0 - \omega_0)d\omega'_0$ คือ โอกาสที่อะตอมมีความถี่กินาอยู่ระหว่าง ω'_0 และ $\omega'_0 + d\omega'_0$ ค่าเฉลี่ยของสัมประสิทธิ์การเปล่งแสงโดยการกระตุ้น หรือสัมประสิทธิ์การดูดกลืนสามารถหาได้จากสมการ (2.47) หรือหาได้จากสมการ (2.53) ถ้ามีกลไกการแผ่อกแบบอื่นปรากฏอยู่ด้วย (คือการแผ่อกโดยการชนกัน) เราได้

$$\begin{aligned} W &= \frac{\pi}{3\eta\epsilon_0 c_0 \hbar^2} |\mu|^2 I \int_{-\infty}^{+\infty} g^*(\omega'_0 - \omega_0) g(\omega - \omega_0) d\omega'_0 \\ &= \frac{\pi}{3\eta\epsilon_0 c_0 \hbar^2} |\mu|^2 I g_l(\omega - \omega_0) \dots\dots\dots(2.107) \end{aligned}$$

ในที่นี้เราใช้ $g_l(\omega - \omega_0)$ แทนสำหรับฟังก์ชัน

$$g_l = \int_{-\infty}^{+\infty} g^*(x) g[(\omega - \omega_0) - x] dx \dots\dots\dots(2.107 \text{ ก})$$

และเราให้ $x = \omega'_0 - \omega_0$ ดังนั้น เราเห็นได้ว่าเมื่อกลไกการแผ่อกทั้งสองแบบคือทั้งแบบเอกพันธ์ (g) และแบบไม่เอกพันธ์ (g^*) ปรากฏพร้อมกันกับค่า g_l ที่กำหนดด้วยการขดของสองฟังก์ชันรูปร่างของเส้น สมการ (2.53 ก) ยังคงถูกต้องอยู่ ถ้าการแผ่อกแบบเอกพันธ์ $g(\omega - \omega_0)$ มีค่าน้อยกว่าการแผ่อกไปแบบไม่เอกพันธ์ $g^*(\omega'_0 - \omega_0)$ มาก ดังนั้น $g(\omega - \omega_0)$ สามารถประมาณด้วยฟังก์ชันเดลตาได้แรก

$$W = \frac{\pi}{3\eta\epsilon_0 c_0 \hbar^2} |\mu|^2 I g^*(\omega - \omega_0) \dots\dots\dots(2.108)$$

กรณีนี้บางครั้งใช้อธิบายการแผ่อกไม่เอกพันธ์บริสุทธิ์ได้

กลไกการแผ่อกอย่างหนึ่งซึ่งนิยมใช้กับก๊าซ เรียกว่าการแผ่อกแบบดอปเปลอร์ ซึ่งเกิดเนื่องจากการเคลื่อนที่ของอะตอม เรามาพิจารณากรณีของโมเลกุลกำลังเคลื่อนที่เมื่อมัน

ได้รับรังสีความถี่ ω (คือเป็นความถี่ที่วัดในระบบพิกัดแน่นอนเทียบกับห้องปฏิบัติการ) ถ้าเราเรียก v เป็นองค์ประกอบความเร็วของโมเลกุล (เทียบกับแกนพิกัดในห้องปฏิบัติการ) ในทิศทางการแพร่ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ความถี่ของคลื่นนี้ในขณะที่มองจากอะตอมคือ (ปรากฏการณ์ดอปเปลอร์)

$$\omega' = \omega |1 \pm (v/c)| \quad \dots\dots\dots (2.109)$$

ในที่นี้เครื่องหมาย + และ - ใช้ตามทิศทางของความเร็วที่เคลื่อนไปในทิศทางเดียวกัน หรือทิศทางตรงกันข้ามกับทิศทางของคลื่น กล่าวคือ ถ้าโมเลกุลกำลังเคลื่อนที่ไปในทิศทางตรงกันข้ามกับทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่นแล้ว เป็นที่รู้กันว่า ความถี่ ω' ที่มองเห็นได้จากอะตอมมีค่ามากกว่าความถี่ ω ที่สังเกตได้จากระบบแกนพิกัดในห้องปฏิบัติการ

สมการ (2.109) สามารถอธิบายด้วยวิธีแตกต่างกัน คือ ถ้าอะตอมไม่ได้เคลื่อนที่ในขณะที่เรามองอันตรกิริยาของการแผ่รังสีมีต่อวัตถุ ผลลัพธ์จะเป็นเช่นเดียวกัน แต่มีความถี่อิทธิพล ω_0 กำหนดด้วย

$$\omega_0' = \frac{\omega_0}{1 \pm v/c} \quad \dots\dots\dots (2.109 \text{ ก})$$

ω_0 คือ ความถี่เปลี่ยนแปลงของอะตอม เมื่อเรามองด้วยวิธีนี้ เราสามารถกล่าวได้ว่า กลไกการแผ่ออกนี้กลายเป็นแบบไม่เอกพันธ์ตามที่กำหนดในตอนเริ่มต้นของหัวข้อนี้ ในการคำนวณฟังก์ชันรูปร่างของเส้น $g^*(\omega_0' - \omega_0)$ เราคงจำได้ว่า โอกาส $P(v)$ ของอะตอมมวล M ในก๊าซที่อุณหภูมิ T มีองค์ประกอบความเร็วระหว่าง v และ $v + dv$ กำหนดด้วยการแจกแจงแมกซ์เวลล์

$$P(v)dv = \left(\frac{M}{2\pi KT} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{Mv^2}{2KT} \right) dv \quad \dots (2.110)$$

จากสมการ (2.109 ก) จะได้ว่า

$$v = \frac{c(\omega_0' - \omega_0)}{\omega_0'} \approx \frac{c(\omega_0' - \omega_0)}{\omega_0} \quad \dots (2.111)$$

และจากทั้งสมการ (2.110) และ (2.111) เรากำหนดการแจกแจงขึ้นโดยสร้างเงื่อนไขว่า $g^*(\omega_0' - \omega_0)d\omega_0' = P(v)dv$ ดังนั้น เราได้

$$g^*(\omega_0' - \omega_0) = \frac{c}{\omega_0} \left(\frac{M}{2\pi KT} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{Mc^2}{2KT} \frac{(\omega_0' - \omega_0)^2}{\omega_0^2} \right) \quad \dots\dots\dots (2.112)$$

ลักษณะของเส้นโค้งที่สอดคล้องกับสมการนี้เรียกว่า เกาส์เซียน (Gaussian) ความกว้างทั้งหมดที่ครึ่งหนึ่งของค่ามากที่สุด (full width at half-maximum) หรือชื่อย่อ (FWHM) ของมันเป็น

$$\Delta\omega_0^* = 2\omega_0 \left(\frac{2KT}{Mc^2} \ln 2 \right)^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (2.113)$$

ความกว้างเส้นดอปเปลอร์ $\Delta\nu_0^* = \Delta\omega_0^*/2\pi$ สำหรับเส้นโค้งของนีออนที่ความยาวคลื่น $\lambda = 0.6328$ ไมครอน (μm) (เป็นเส้นโค้งเส้นหนึ่งของทั้งหมดที่แสดงกิริยาเลเซอร์ใน Ne ดูบทที่ 6) เป็น (ที่อุณหภูมิ $T = 300$ °K)

$$\Delta\nu^* = 1.7 \text{ จิกะเฮิรตซ์ (GHz)} \dots\dots\dots (2.114)$$

เปรียบเทียบสมการ (2.114) กับสมการ (2.106) และ (2.105 ก) แสดงว่าในตัวอย่างที่เราพิจารณาการแผ่อกดอปเปลอร์มีค่ามากกว่าการแผ่อกตามธรรมชาติมาก และมีค่ามากกว่าการแผ่อกเนื่องจากการชนกันมากมายด้วย แต่อย่างไรก็ตาม มันจะไม่เป็นจริงเสมอไป เมื่อความดันของก๊าซมีค่าสูงมากเพียงพอ การแผ่อกโดยการชนกันมีอิทธิพลเหนือกว่าการแผ่อกดอปเปลอร์

ดังเช่นในปรากฏการณ์ดอปเปลอร์ กลไกใด ๆ ที่สร้างความถี่การเปลี่ยนแปลงของอะตอมแจกแจงอย่างไม่สม่ำเสมอ จะให้ผลลัพธ์ทั่วไปเป็นการแผ่อกแบบเกาส์เซียน ตัวอย่างเช่น ถ้าสนามไฟฟ้าของผลึกของแข็งมีความไม่เหมือนกันทางตำแหน่ง เนื่องจากความไม่สมบูรณ์ของโครงผลึก ดังนั้น มันจะสร้างระดับพลังงานของอะตอมที่ตำแหน่งต่าง ๆ ไม่เหมือนกัน เนื่องจากปรากฏการณ์สตาร์ค (Stark effect) ทำให้เกิดการแผ่อกของเส้นซึ่งส่วนมากเป็นแบบเกาส์เซียน ในกรณีนี้ $\Delta\omega_0^*$ จะขึ้นกับค่าเฉลี่ยของสนามไฟฟ้าของผลึกไม่เอกพันธ์

สรุป เราเห็นได้ว่าฟังก์ชัน $g(\omega - \omega_0)$ สามารถเป็นได้ทั้งแบบลอเรนซ์เซียน ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

$$g(\omega - \omega_0) = \frac{2}{\pi\Delta\omega_0} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega_0/2} \right)^2} \dots\dots\dots (2.115)$$

หรือแบบเกาส์เซียน ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

$$g(\omega - \omega_0) = \frac{2}{\Delta\omega_0} \left(\frac{\ln 2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ - \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega_0/2} \right)^2 \ln 2 \right\} \dots\dots\dots (2.116)$$

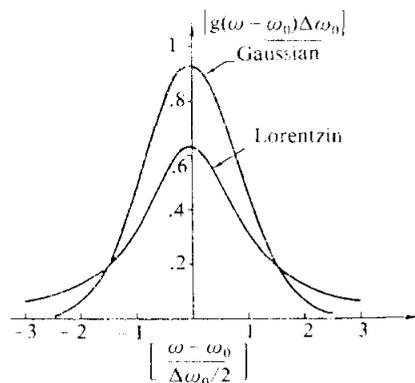
ทั้งสองสมการ (2.115) และ (2.116) $\Delta\omega_0$ ใช้แทนเป็นความกว้างทั้งหมดที่ครึ่งหนึ่งของค่ามากที่สุด และเป็นสมการเฉพาะสำหรับกรณีต่าง ๆ ที่กำหนดตามเงื่อนไขนี้ รูป 2.11 แสดงพฤติกรรมทั่วไปของเส้นโค้งสองเส้น ให้สังเกตว่าเส้นโค้งเกาส์เซียนสูงแหลมกว่าเส้นโค้งลอเรนซ์เซียน ตรงยอดของเส้นโค้งมีค่าของ $g(\omega - \omega_0)$ เป็น

$$g(0) = \frac{2}{\pi\Delta\omega_0} = \frac{0.637}{\Delta\omega_0} \quad (2.117)$$

สำหรับยอดของลอเรนซ์เซียน และสำหรับยอดของเกาส์เซียนเป็น

$$g(0) = \frac{2}{\Delta\omega_0} \left(\frac{\ln 2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{0.939}{\Delta\omega_0} \quad \dots\dots\dots (2.118)$$

เราเห็นได้ว่า โดยทั่วไปเส้นโค้งลอเรนซ์เซียนก็เป็นเส้นเอกพันธ์ด้วย ขณะที่เส้นโค้งเกาส์เซียนเป็นเส้นไม่เอกพันธ์ ในทางปฏิบัติส่วนมากการแผ่อกตลอดทั้งหมดของเส้นเกิดจากผลการรวมกันของกลไกการแผ่อกมากกว่าหนึ่งแบบ ดังนั้น การแผ่อกจึงไม่เป็นทั้งแบบเอกพันธ์หรือแบบไม่เอกพันธ์อย่างใดอย่างหนึ่ง ตามธรรมชาติรูปร่างของเส้นทั้งหมดกำหนดด้วยรูปลักษณะตามสมการ (2.107 ก) ระหว่างขั้นตอนต่าง ๆ มันสามารถแสดงว่าการขดของเส้นลอเรนซ์เซียนกว้าง $\Delta\omega_1$ กับเส้นลอเรนซ์เซียนอื่นกว้าง $\Delta\omega_2$ ให้เส้นลอเรนซ์เซียนกว้างเท่ากับ $\Delta\omega = \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2$ ทำนองเดียวกันการขดของเส้นโค้งเกาส์เซียนกว้าง $\Delta\omega_1$ กับเส้นเกาส์เซียนอื่นกว้าง $\Delta\omega_2$ ให้เส้นเกาส์เซียนกว้าง $\Delta\omega = (\Delta\omega_1^2 + \Delta\omega_2^2)^{\frac{1}{2}}$ ดังนั้นเราจึงต้องการลดปัญหาลงให้เหลือเพียงการขดของเส้นลอเรนซ์เซียนเส้นเดียวกับเส้นโค้งเกาส์เซียนเส้นเดียว และรวมเส้นเดี่ยวทั้งสองเข้าเป็นเส้นเดียวกัน อย่างไรก็ตามในบางครั้งกลไกอย่างหนึ่งจะมีอิทธิพลมากกว่ากลไกอีกอย่างหนึ่ง (ดังเช่นกรณีของ Ne) ในกรณีนี้จำเป็นต้องพิจารณาทั้งเส้นโค้งลอเรนซ์เซียนและเส้นโค้งเกาส์เซียน



รูป 2.11 เปรียบเทียบรูปลักษณะของเส้นลอเรนซ์เซียนและเกาส์เซียน ทั้งสองเส้นโค้งมีความกว้างเส้นที่จุดครึ่งหนึ่งของกำลังมากที่สุดเท่ากัน

ความจริงการบวกกันของความกว้างเส้นในเส้นโค้งลอเรนซ์เขียนขดตัวสองเส้นเป็นแบบเดียวกับการรวมกันของช่วงเวลาที่ทำในสมการ (2.93) อย่างไรก็ตามมันมีข้อแตกต่างอย่างเห็นได้ชัดระหว่างเวลาของการลดระดับโดยไม่แผ่รังสี τ_{nr} ในหัวข้อ 2.4 กับเวลาการชนกัน τ_c ที่กำหนดในหัวข้อนี้ สำหรับก๊าซเวลาทั้งสองต่างเกิดจากการชนกัน อย่างไรก็ตามการลดระดับโดยไม่แผ่รังสีต้องการการชนกันแบบไม่ยืดหยุ่น และอะตอมลดระดับโดยปล่อยพลังงานของมันออกไปรอบ ๆ โมเลกุล ในทางกลับกันการแผ่ออกของเส้นอาจจะเกิดจากทั้งการชนแบบไม่ยืดหยุ่นและแบบยืดหยุ่น ซึ่งทำให้เฟสของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าตกกระทบกระโดดเมื่อเทียบกับเฟสของฟังก์ชันคลื่นของอะตอม

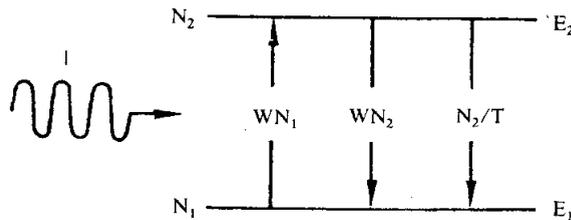
2.6 การอิ่มตัว (Saturation)

จุดมุ่งหมายของหัวข้อนี้ คือศึกษาการคำนวณการเปลี่ยนแปลงตามเวลาของประชากรอะตอมในระบบสองระดับเมื่อมีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าแสงสีเดียวความเข้ม I และมีความถี่ ω ตกกระทบ (รูป 2.12)

ครั้งแรกเราสมมติว่ามีเส้นโค้งแผ่ออกด้วยกลไกแบบเอกพันธ์เท่านั้น (เส้นเอกพันธ์) และให้ N_1 และ N_2 เป็นจำนวนประชากรอะตอมของระดับ 1 และ 2 ตามลำดับ ถ้าสมมติว่าจำนวนประชากรทั้งหมด N_1 ของสองระดับมีค่าคงที่เสมอ เราสามารถเขียนสมการสำหรับการเปลี่ยนแปลง N_1 และ N_2 ได้ดังต่อไปนี้ คือ

$$N_1 + N_2 = N, \quad \dots\dots\dots (2.119ก)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = -W(N_2 - N_1) - \frac{N_2}{\tau} \quad (2.119ข)$$



รูป 2.12 แสดงระบบสองระดับพลังงานทำอันตรกิริยากับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าความเข้ม I

สมการแรกได้จากการสมมติข้างต้น สมการที่สอง (2.119 ข) ให้อัตราของการเปลี่ยนแปลง N_2 ต่อเวลาเท่ากับผลต่างระหว่างอัตรา WN_1 ของการเปลี่ยนแปลงโดยการกระตุ้นขึ้นไประดับ 2 และอัตราของการเปลี่ยนแปลงลดระดับลงมาระดับ 1 (เป็นทั้งการเปล่งแสงตามปกติวิสัย N_2/τ และโดยการกระตุ้น WN_2) ให้สังเกตว่า τ เป็นค่าทั่วไปในสมการ (2.93 ก)

และถ้าเราเขียน

$$\Delta N = N_1 - N_2 \quad \dots\dots\dots (2.120)$$

สมการ (2.119 ก) และ (2.119 ข) สามารถกำจัดให้เหลือเป็นสมการอนุพันธ์สมการเดียว คือ

$$\Delta \dot{N} = -\Delta N \left(\frac{1}{\tau} + 2W \right) + \frac{1}{\tau} N_i \quad \dots\dots\dots (2.121)$$

เมื่อ $\Delta \dot{N} = 0$ คือ ที่สถานะคงตัว เราได้

$$\Delta N = \frac{N_i}{1 + 2W\tau} \quad (2.122)$$

ความแตกต่างประชากรระดม ΔN ระหว่างทั้งสองระดับขึ้นกับ τ และ W กล่าวคือขึ้นกับเวลาที่สถานะบนลดระดับ (ซึ่งเป็นคุณลักษณะของวัตถุ) และขึ้นกับความเข้ม I ของรังสีตกกระทบ เมื่อ I เพิ่มขึ้น W ก็จะเพิ่มขึ้นตามแต่ความแตกต่างประชากร ΔN กลับมีค่าลดลง และในช่วงจำกัดสำหรับ $I \rightarrow \infty$ เราได้ $\Delta N \rightarrow 0$ คือ เมื่อ $N_1 = N_2 = N_i/2$ ในกรณีนี้ประชากรระดมของทั้งสองระดับมีจำนวนเท่ากัน ปรากฏการณ์นี้เรียกว่า การอิมิตัว

เพื่อให้ความแตกต่างประชากร ΔN ยังคงมีอยู่ วัตถุจำเป็นต้องดูดกลืนรังสีด้วยกำลังต่อหน่วยปริมาตร กำหนดด้วย

$$\frac{dP}{dV} = (\hbar\omega)W\Delta N = (\hbar\omega) \frac{N_i W}{1 + 2W\tau} \quad (2.123)$$

ซึ่งที่ภาวะอิมิตัว คือสำหรับ $W\tau \gg 1$ สมการ (2.123) กลายเป็น

$$\left(\frac{dP}{dV} \right) = \frac{(\hbar\omega)N_i}{2\tau} \quad \dots\dots\dots (2.124)$$

แสดงว่ากำลัง (dP/dV) ที่ระบบดูดกลืนเพื่อให้คงอยู่ในสภาวะอิมิตัวมีค่าเท่ากับกำลังของวัตถุที่สูญเสียไปเนื่องจากการลดระดับของสถานะบน

เขียนสมการ (2.122) และ (2.123) ใหม่ ให้อยู่ในรูปที่ง่ายกว่านี้ โดยสังเกตว่าจากสมการ (2.60), (2.61) และ (2.63) เราสามารถเขียนได้ว่า

$$W = \sigma I / \hbar\omega \quad \dots\dots\dots (2.125)$$

เมื่อ σ เป็นภาคตัดขวางการดูดกลืนของการเปลี่ยนแปลง ดังนั้นสมการ (2.122) และ (2.123) พร้อมกับใช้สมการ (2.125) ช่วย สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{I}{1 + (I/I_s)} \quad \dots\dots\dots (2.126)$$

$$\frac{dP/dV}{(dP/dV)_s} = \frac{I/I_s}{1 + I/I_s} \quad \dots\dots\dots (2.127)$$

ในที่นี้

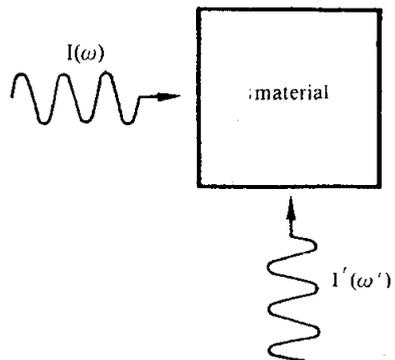
$$I_s = \frac{\hbar\omega}{2\sigma\tau} \quad \dots\dots\dots (2.128)$$

เป็นพารามิเตอร์ตัวหนึ่งซึ่งขึ้นกับวัตถุที่ใช้และยังขึ้นกับความถี่ของคลื่นตกกระทบ ความหมายทางกายภาพของมันเห็นได้จากสมการ (2.126) ความจริงสำหรับ $I = I_s$ เราได้ $\Delta N = N_1/2$ เมื่อ $\omega = \omega_0$ ปริมาณ I_s มีค่า ๆ หนึ่งซึ่งขึ้นกับพารามิเตอร์ของการเปลี่ยนแปลงเท่านั้น ปริมาณนี้เรียกว่าความเข้มของการอิมิตัว

เรามาดูว่ารูปร่างของเส้นโค้งการดูดกลืนเปลี่ยนแปลงเทียบกับความเข้ม I ของรังสีแสงสีเดียวตกกระทบอย่างไร โดยพิจารณาการทดลองที่คิดว่าดีเลิศ ดังแสดงในรูป 2.13 ในที่นี้เราวัดการดูดกลืนโดยตรวจสอบสัญญาณที่มีความถี่ ω' และความเข้ม I' ซึ่งอ่อนพอเหมาะจนไม่รบกวนต่อระบบให้เกิดความเสียหาย

ถ้าเส้นแฉ่ออกเป็นแบบเอกพันธ์ สัมประสิทธิ์การดูดกลืนกำหนดได้ด้วยสมการ (2.62) เมื่อ $g(\Delta\omega) = g(\Delta\omega)$ และ $N_1 - N_2 = \Delta N$ ดังนั้น เราสามารถเขียน

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + (I/I_s)} \quad \dots\dots\dots (2.129)$$

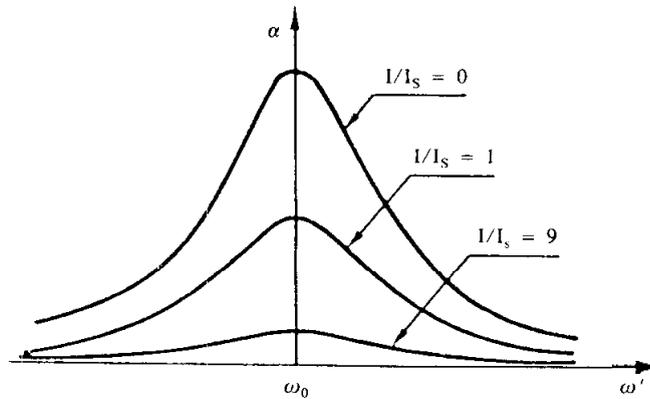


รูป 2.13 แสดงการวัดสัมประสิทธิ์การดูดกลืนที่ความถี่ ω' [$I(\omega) \gg I'(\omega')$]

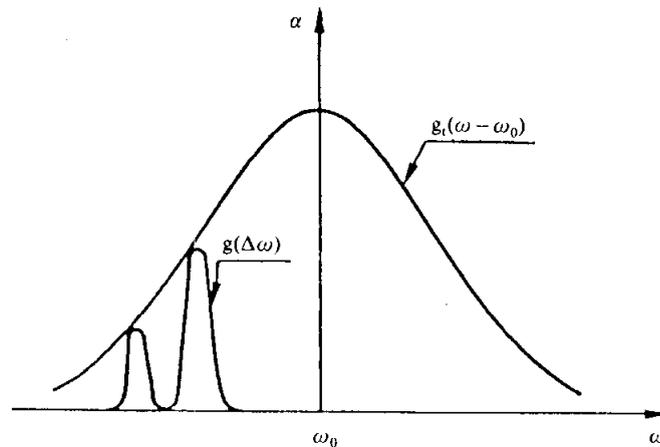
$\alpha_0 = \alpha_0(\omega' - \omega_0)$ เป็นสัมประสิทธิ์การดูดกลืนเมื่อคลื่นอิมิตัวที่ความถี่ ω หายไป (คือ $I = 0$) เป็นไปตาม

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{3\eta\epsilon_0 c_0 \hbar} |\mu|^2 \omega' N_i g(\omega' - \omega_0) \quad \dots\dots\dots (2.130)$$

สมการ (2.129) และ (2.130) ได้แสดงว่า เมื่อ I มีค่าเพิ่มขึ้น สัมประสิทธิ์การดูดกลืนจะมีค่าลดลง แต่รูปร่างของเส้นยังคงเหมือนเดิมและยังอธิบายได้ด้วยฟังก์ชัน $g(\omega' - \omega_0)$



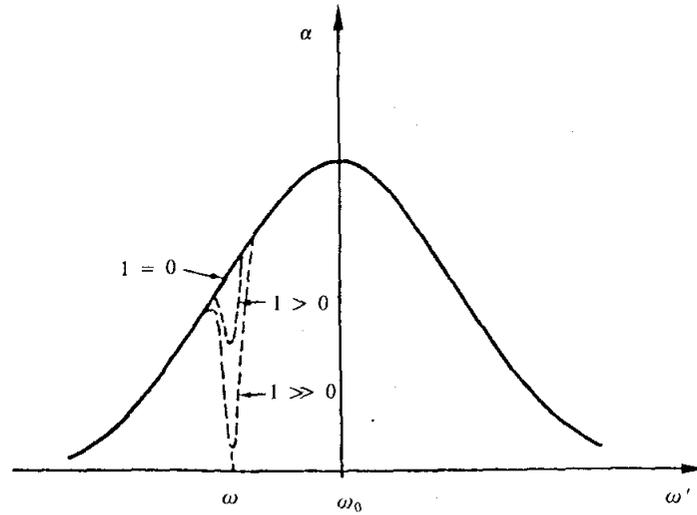
รูป 2.14 แสดงพฤติกรรมการอิมตัวของเส้นเอกพันธ์สัมประสิทธิ์การดูดกลืนเปรียบเทียบกับความถี่ ω' โดยเพิ่มค่าความเข้ม I/I_s สามค่า



รูป 2.15 แสดงเส้นแผ่อกทั้งแบบเอกพันธ์และไม่เอกพันธ์ $g_c(\omega - \omega_0)$ แสดงเป็นเส้นขีดของแต่ละอะตอม

เมื่อเส้นโค้งไม่ได้แผ่อกแบบเอกพันธ์ ปรากฏการณ์ของการอิมตัวยุ่งยากมาก เพื่อความสะดวกเราจะสมมติว่าเส้นโค้งแผ่อกเป็นทั้งแบบเอกพันธ์และไม่เอกพันธ์ ดังนั้นรูปร่างของมันจะเหมือนกับสมการ (2.107 ก) เส้นโค้ง $g_c(\omega - \omega_0)$ ตลอดเส้น ซึ่งกำหนดด้วยเส้นขีดตัวแบบเอกพันธ์ $g(\Delta\omega)$ ของอะตอมต่าง ๆ ให้ผลลัพธ์สัมประสิทธิ์การดูดกลืนดังแสดงในรูป 2.15 ในกรณีนี้ซึ่งทำการทดลองเช่นเดียวกับในรูป 2.13 ความเข้ม $I(\omega)$ จะทำอันตรกิริยากับอะตอม

เหล่านั้นที่มีความถี่ใกล้เคียงกับ ω เท่านั้น และอะตอมเหล่านี้จะอึดตัวเมื่อ $I(\omega)$ มีค่าเข้มเพิ่มขึ้นเพียงพอ รูปลักษณะของเส้นดูดกลืนสำหรับค่าต่าง ๆ ของ $I(\omega)$ ได้แสดงในรูป 2.16

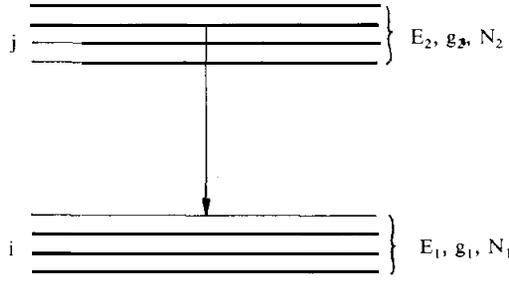


รูป 2.16 แสดงพฤติกรรมการอึดตัวของเส้นแผ่ออกอย่างไม่เอกพันธ์ เปรียบเทียบสัมพันธ์การดูดกลืนกับความถี่ซึ่งแสดงหลุมลึกมากขึ้นเมื่อความเข้ม $I(\omega)$ เพิ่มขึ้น

ในกรณีนี้ เมื่อ $I(\omega)$ มีค่าเพิ่มขึ้น มันจะสร้างหลุมในเส้นการดูดกลืนที่ความถี่ ω ความกว้างของหลุมมีขนาดเท่ากับความกว้างของเส้น $g(\Delta\omega)$ ที่แสดงในรูป 2.15 และมันจะเท่ากับความกว้างเส้นเอกพันธ์ของการเปลี่ยนแปลง

2.7 ระดับดีเจนเนอเรต (Degenerate levels)

เราได้พิจารณากรณีง่ายที่สุดไปแล้ว ซึ่งในระดับ 1 และ 2 ต่างไม่เป็นระดับซ้ำซ้อนต่อไปเรามาดูว่าเกิดอะไรขึ้นเมื่อระดับเหล่านั้นซ้ำซ้อนกัน ซึ่งในทางปฏิบัติมักเกิดขึ้นบ่อยมาก ในรูป 2.17 สมมติว่าระดับ 1 มี g_1 ชั้น ซ้ำซ้อนกัน (g_1 -fold) และระดับ 2 มี g_2 ชั้น (g_2 -fold) ซ้ำซ้อนกัน การวิเคราะห์กระทำให้ใช้ได้กับกรณีระดับซ้ำซ้อนและไม่ซ้ำซ้อนด้วย ความถี่ของชั้นที่แยกจากกันมีค่าต่างกันน้อยกว่า KT มากและการคลายตัว (relaxation) ระหว่างระดับสามารถพิจารณาได้ทันทีทันใด กำหนดให้ N_i เป็นจำนวนประชากรทั้งหมดของชั้นต่าง ๆ ในระดับซ้ำซ้อนล่างและ N_2 เป็นของระดับซ้ำซ้อนบน เราจะใช้ N_{2j} และ N_{1i} แทนจำนวนประชากรของแต่ละชั้นในระดับบนและในระดับล่างตามลำดับ



รูป 2.17 แสดงระบบสองระดับที่ข้าม

ต่อไปเรามาดูว่าสมการ (2.119 ก) และ (2.119 ข) แสดงการลดระดับในกรณีของระดับข้ามได้อย่างไร จะเห็นได้ว่าสมการ (2.119 ก) ยังคงเป็นจริง อัตราการเปลี่ยนแปลงจำนวนประชากรทั้งหมด N_2 ของระดับบนต้องรวมถึงการเปลี่ยนแปลงที่เป็นไปได้ทั้งหมดระหว่างอะตอม i และ j ด้วย ดังนั้น

$$\left(\frac{dN_2}{dt} \right) = - \sum_{i=1}^{g_1} \sum_{j=1}^{g_2} (W_{ji}N_{2j} - W_{ij}N_{1i} + \frac{N_{2j}}{\tau_{ij}}) \quad \dots \dots \dots (2.131)$$

ในทางตรงกันข้าม จากการสมมติในครั้งก่อนว่าระดับบนทั้งหมดจะมีจำนวนประชากรเท่ากัน และเช่นเดียวกันสำหรับระดับล่าง i ทั้งหมดมีจำนวนประชากรเท่ากัน ดังนั้น

$$N_{2j} = N_2/g_2 \quad \dots \dots \dots (2.132 \text{ ก})$$

$$N_{1i} = N_1/g_1 \quad \dots \dots \dots (2.132 \text{ ข})$$

แทนสมการ (2.132) ลงในสมการ (2.131) เราจะได้

$$\dot{N}_2 = -W' \left(\frac{N_2}{g_2} - \frac{N_1}{g_1} \right) - \frac{N_2}{\tau} \quad \dots \dots \dots (2.133)$$

ในกรณีนี้เราได้กำหนดให้

$$W' = \sum_{i=1}^{g_1} \sum_{j=1}^{g_2} W_{ij} = \sum_{i=1}^{g_1} \sum_{j=1}^{g_2} W_{ji} \quad \dots \dots \dots (2.134)$$

และ
$$\frac{1}{\tau} = \frac{\sum_{i=1}^{g_1} \sum_{j=1}^{g_2} \frac{1}{\tau_{ji}}}{g_2} \quad \dots \dots \dots (2.135)$$

มีกรณีที่น่าสนใจคือ เมื่อระดับทั้งสองมีความข้ามเหมือนกัน ($g_1 = g_2 = g$) ในกรณีนี้สมการ (2.133) สามารถใช้เป็นแบบเดียวกับสมการ (2.119 ข) ทำให้เรากำหนดสัมประ-

สิทธิ์ยังผล (effective coefficient) W ได้เป็น

$$W = \frac{W'}{g} \quad \dots\dots\dots (2.136)$$

สุดท้ายเราให้ความสนใจหาอัตราส่วนระหว่างจำนวนประชากรของระดับซ้ำซ้อนทั้งสองในขณะที่อยู่ณภูมิสมดุล ซึ่งเรามี

$$N_2^c = N_1^c \exp[-(E_2 - E_1)/KT] \quad \dots\dots\dots (2.137)$$

และใช้สมการ (2.132) เราได้

$$\frac{N_2^c}{g_2} = \frac{N_1^c}{g_1} \exp[-(E_2 - E_1)/KT] \quad \dots\dots\dots(2.138)$$

2.8 สรุป

เราพบในหัวข้อก่อนแล้วว่า การเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นสามารถบ่งบอกคุณลักษณะที่จำเป็นด้วยสองปริมาณคือ

- (1) อายุขัย τ (เป็นผลบวกของอายุขัยการแผ่รังสี τ_{sp} และอายุขัยไม่แผ่รังสี τ_{nr}) และ
- (2) ภาคตัดขวางการดูดกลืน $\sigma(\Delta\omega)$ ดังนั้นจึงเป็นสิ่งสำคัญในการพิจารณาวิธีที่สามารถใช้และวัดพารามิเตอร์เหล่านี้

ค่าของ τ_{sp} และ τ_{nr} สามารถหาได้จากการวัดเวลาลดระดับของขั้นตอนการเปล่งแสงตามปกติวิสัยพร้อม ๆ กับการวัดหน่วยพลังงาน ϕ ตามที่ได้กล่าวในหัวข้อ 2.4

ส่วนการวัดภาคตัดขวางของการดูดกลืน $\sigma(\Delta\omega)$ สถานการณ์ขึ้นกับระดับ 1 ซึ่งไม่ว่าจะเป็นสถานะพื้นของอะตอมหรือไม่ก็ตาม ในกรณีที่เป็นสถานะพื้น การวัด $\sigma(\Delta\omega)$ ไม่ค่อยสำคัญ เพราะว่ามันสามารถหาค่าได้ทันทีจากการวัดสัมประสิทธิ์การดูดกลืน $\alpha = \alpha(\Delta\omega)$ จากความสัมพันธ์

$$\sigma = \alpha/N_1$$

ซึ่งหาได้จากสมการ (2.63) โดยให้ $N_1 = N_1$ และ $N_2 = 0$ (เป็นจริงสำหรับการเปลี่ยนของแสงภายในวัตถุที่อยู่ณภูมิสมดุล) ถ้าระดับ 1 อยู่สูงกว่าสถานะพื้น วิธีที่กล่าวมาแล้วใช้ไม่ได้ ความจริงเมื่ออยู่ณภูมิสมดุลระดับ 1 จะเป็นระดับว่างเปล่าและการเปลี่ยนแปลงจาก 1 \rightarrow 2 ไม่สามารถหาได้โดยวัดการดูดกลืน อย่างไรก็ตามการเปลี่ยนแปลงนี้ยังคงสังเกตได้จากการเปล่งแสงตามปกติวิสัย เมื่อเราพบว่ารูปร่างของเส้นสำหรับการเปล่งแสงตามปกติ-

วิสัยและการดูดกลืนมีลักษณะเดียวกัน พังก์ชัน $g_i(\Delta\omega)$ ในสมการ (2.63) สามารถหาได้จากการวัดรูปร่าง $S(\Delta\omega)$ ของเส้นการเปล่งแสงของการทดลอง [เมื่อทำให้มันเป็นปกติแล้ว คือ $\int S(\Delta\omega)d\omega = 1$] ในการคำนวณ σ เราต้องวัด $|\mu|^2$ จากสมการ (2.76) เราพบว่า $|\mu|^2$ หาได้จากการวัด τ_{sp} ดังนั้นจากสมการ (2.63), (2.76) และ (2.96 ก) เราพบว่า

$$\sigma = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 g_i(\Delta\omega) \left(\frac{(\phi)_{21}}{\tau}\right)$$

เมื่อ $\lambda = 2\pi c_0/\eta\omega_0$ เป็นความยาวคลื่น (ในตัวกลาง) ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ซึ่งความถี่ของมันสอดคล้องกับศูนย์กลางของเส้นโค้ง สมการนี้สามารถวัด $\sigma(\Delta\omega)$ ได้ เมื่อได้วัด $g_i(\Delta\omega)$, $(\phi)_{21}$ และ τ แล้ว

แบบฝึกหัดที่ 2

- 2.1 เราแทน ρ_ν ด้วยความหนาแน่นพลังงาน ρ_λ ซึ่งสามารถกำหนดให้ $\rho_\lambda d\lambda$ เป็นความหนาแน่นพลังงานสำหรับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีความยาวคลื่นอยู่ระหว่าง λ และ $\lambda + d\lambda$ จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง ρ_λ และ ρ_ν
- 2.2 สำหรับการแผ่รังสีวัตถุดำให้หาค่ามากที่สุดของ ρ_ν เมื่อเทียบกับ λ แสดงว่าความยาวคลื่น λ_m ซึ่งเป็นค่ามากที่สุดที่สอดคล้องกับความสัมพันธ์ $\lambda_m T = hc/ky$ [กฎของวิน (Wien's law)] ในที่นี้ปริมาณ y เป็นไปตามสมการ $5[1 - \exp(-y)] = y$ จากสมการนี้ จงหาค่าอย่างประมาณของ y ($y = 4.965$)
- 2.3 โดยใช้กฎของวินคำนวณความยาวคลื่น λ_m สำหรับ $T = 6000^\circ\text{K}$ จงหาว่าความยาวคลื่นนี้สอดคล้องกับคลื่นแสงสีอะไร ?
- 2.4 จงหาความสัมพันธ์ระหว่างความเข้ม I และความหนาแน่นพลังงานสำหรับคลื่นระนาบแม่เหล็กไฟฟ้า [เปรียบเทียบกับสมการ (2.19 ข)]
- 2.5 จากสมการ (2.19 ค) ให้คำนวณความเข้มทั้งหมด I ที่แผ่ออกจากโพรงวัตถุดำในหนึ่งหน่วยพื้นที่ จงแสดงว่า $I = \sigma_{\text{SB}} T^4$ (กฎของสตีเฟน-โบลทซ์มานน์) และใช้สูตรคณิตศาสตร์ว่า

$$\int_0^\infty [x^3/(e^x - 1)] dx = \pi^4/15$$

หาสมการสำหรับค่าคงที่สตีเฟน-โบลทซ์มานน์ σ_{SB} เป็นฟังก์ชันของค่าคงที่ของพลังค์และค่าคงที่ของโบลทซ์มานน์ โดยใช้ค่าเป็นตัวเลขของ h และ k คำนวณค่าของ σ_{SB}

- 2.6 ตัวกลางกิริยาหักเหเป็นผลึกของ Al_2O_3 ซึ่งไอออนของ Al^{3+} บางตัวถูกแทนที่ด้วยไอออน Cr^{3+} (ดูบทที่ 6) ความเข้มข้นของ Cr^{3+} ที่ใช้คือ 0.05 เปอร์เซ็นต์ (หักเหชมพู) ผลึกหักเหนี้หาได้จากการหลอมละลายของผงผสมของ Cr_2O_3 (0.05 เปอร์เซ็นต์โดยน้ำหนัก) และ Al_2O_3 ความหนาแน่นของหักเหเป็น 3.98 กรัม/ซม.³ สำหรับผลึกหักเหนี้มีสัมประสิทธิ์การดูดกลืนตรงยอดของการเปลี่ยนแปลง (การเปลี่ยนแปลง R_1 ดูรูป 5.3) เป็น $\alpha = 0.4$ ซม.⁻¹ ภาคตัดขวางของยอดเป็นเท่าไร? นอกจากนี้รูปร่างของเส้น R_1 ประมาณเป็นเส้นลอเรนซ์เขียนด้วย FWHM ของ 330 จิกะเฮิรตซ์ (ที่ $T = 300^\circ\text{K}$ ดูรูป 5.4) จงคำนวณ $|\mu|$

- 2.7 จากปัญหาข้อ 2.6 การเปลี่ยนแปลง R_1 ของทับทิมมีความกว้างเส้นรูปลอเรนซ์เขียน (FWHM) ~ 330 จิกะเฮิรตซ์ที่อุณหภูมิห้อง และภาคตัดขวางของยอดวัดได้ตามข้อ 2.6 จงคำนวณอายุขัยการแผ่รังสี (ค่าดัชนีหักเหเป็น $n = 1.76$) อายุขัยที่วัดได้เมื่ออุณหภูมิห้องเป็น ~ 3 มิลลิวินาที
- 2.8 ผลผลิตทางควอนตัมของการเปลี่ยนแปลง $S_1 \rightarrow S_0$ (ดูรูป 6.27) สำหรับโรห์ดามีน 6 จี คือ 0.87 และมีอายุขัย ~ 5 นาโนวินาที จงคำนวณอายุขัยการแผ่รังสีและอายุขัยไม่แผ่รังสี (τ_{sp} และ τ_{nr} ตามลำดับ) ของระดับ S_1
- 2.9 จากอายุขัยการแผ่รังสี τ_{sp} ของโรห์ดามีน 6 จี ให้คำนวณ $|\mu|$ ($\lambda = 0.59$ ไมครอน ที่ค่ามากที่สุดของเส้นโค้งการเปล่งแสง) โดยใช้ $|\mu| = ea$ เมื่อ a คือ ขนาดของอะตอม จงคำนวณหา a
- 2.10 จงคำนวณหาความกว้างเส้นเอกพันธ์ทั้งหมดของการเปลี่ยนแปลง 0.633 ไมครอนของ นีออน เมื่อรู้ว่า $\Delta\nu_{nat} = 20$ เมกะเฮิรตซ์ และ $\Delta\nu_c = 0.64$ เมกะเฮิรตซ์ |ดูสมการ (2.105 ก)| รูปร่างตลอดเส้นทั้งหมดเป็นอย่างไร ?
- 2.11 สารละลายของคริปโตไซยานีน (cryptocyanine) (1, 1'-diethyl-4, 4'-carbocyanine iodide) ในมีธานอล (methanol) ใช้เป็นควิสวิตช์และยัดหมวด (ดูบทที่ 5) ของเลเซอร์ทับทิม ภาคตัดขวางการดูดกลืนของคริปโตไซยานีนสำหรับการแผ่รังสีของเลเซอร์ทับทิม (0.6943 ไมครอน) เป็น 8.1×10^{-16} ซม² อายุขัยของสถานะบนคือ $\tau = 22 \times 10^{-12}$ วินาที จงคำนวณความเข้มอิมพัลส์ที่ความยาวคลื่นนี้
- 2.12 แทนที่เราจะสังเกตการอิมพัลส์ดังในรูป 2.13 เราสามารถหามันได้สำเร็จ โดยใช้เพียง ลำแสง $I(\omega)$ และวัดสัมประสิทธิ์การดูดกลืนสำหรับลำแสงนี้ สำหรับเส้นโค้งเอกพันธ์ ให้แสดงว่าสัมประสิทธิ์การดูดกลืนในกรณีนี้คือ

$$\alpha(\omega - \omega_0) = \frac{\alpha_0(0)}{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2 + I/I_0}$$

เมื่อ $\alpha_0(0)$ คือสัมประสิทธิ์การดูดกลืนสัญญาณอ่อน ($I \ll I_0$) ที่ $\omega = \omega_0$ และ I_{S0} คือความเข้มอิมพัลส์กำหนดด้วยสมการ (2.128) ที่ $\omega = \omega_0$

ข้อแนะนำ: โดยแสดงว่า

$$\begin{aligned} a &= \frac{\alpha_0(0)}{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2} \frac{1}{1 + I/I_s} \\ &= \frac{\alpha_0(0)}{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2} \frac{1}{1 + \frac{I}{I_{s0}} \frac{1}{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2}} \end{aligned}$$