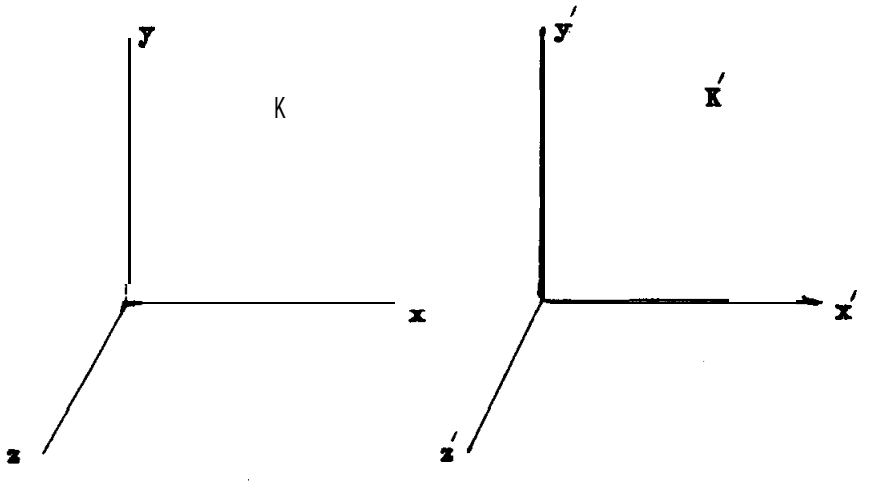
บทที่ 3
การเกิดและคุณสมบัติของเมซอน

3.1 การเกิดเมซอนจากการชนกันระหว่างนิวคลีออน (Nucleon-nucleon encounter)

การที่จะเกิดเมซอนอิสระจากการชนกันระหว่างนิวคลีออนจะต้องมีพลังงานเพียงพอที่จะเปลี่ยนเป็นมวลเมื่ออยู่นิ่ง (rest mass) และถ้าเหลือก็ให้เป็นพลังงานจลน์ของเมซอนไป และถ้าเป็นกรณีที่พลังงานเกิน 140MeV เราจำเป็นต้องใช้ทฤษฎีสัมพันธภาพมาร่วม ในตอนต้นจึงจะทบทวนสมการที่สำคัญ ๆ ทางทฤษฎีสัมพันธภาพที่จำเป็นต้องใช้

พิจารณาระบบ 2 ระบบ คือ K และ K′ โดยให้ K′ เคลื่อนที่ไปด้วยความเร็ว $=\beta c$ (เมื่อ c คือความเร็วแสง) เทียบกับ K ไปในทิศตามแกน x โดยเมื่อเริ่มต้นที่เวลา $t = t' = 0$ แกน y, z ซ้อนกันอยู่ (ดูรูปที่ 3–1)



รูปที่ 3–1 แกนของระบบ K และ K′

การวัดใน K สัมพัทธกับการวัดใน K′ โดยสมการการแปลงกรอบอ้างอิงแบบลอเรนท์ (Lorentz transformation formulae) เป็น

$$x = \gamma (x' + vt')$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$\gamma = (1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} , \quad \beta = v/c \qquad 3.1a$$

และ

$$x' = \delta (x - vt) \qquad 3.1b$$

และ $$t = \gamma (t' + vx'/c^2) \qquad 3.2a$$

$$t' = \gamma (t - vx/c^2) \qquad 3.2b$$

สมการเหล่านี้สอดคล้องกับ

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 \qquad 3.3$$

หมายถึงว่า $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ เป็น an invariant.

ถ้าในระบบ K มีอนุภาคมวลเมื่ออยู่นิ่ง M_o เคลื่อนที่ไปด้วยความเร็ว $v = \beta^* c$ โดยมีพลังงานจลน์ E และโมเมนตัม p พลังงานทั้งหมดของมัน U หาได้โดย

$$U = M_o c^2/(1 - \beta^{*2})^{\frac{1}{2}} = \gamma^* M_o c^2 \qquad 3.4$$

โดยที่ $$\gamma^* = (1 - \beta^{*2})^{-\frac{1}{2}}$$

ส่วนพลังงานจลน์ของอนุภาคนี้มีค่า

$$E = U - M_o c^2 = (\gamma^* - 1) M_o c^2 \qquad 3.5$$

และ

$$p = M_o \beta^* c (1 - \beta^{*2})^{-\frac{1}{2}} = \gamma^* M_o \beta^* c \qquad 3.6$$

สมการต่อไปนี้แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง components ของพลังงานและโมเมนตัมของอนุภาคตัวหนึ่งใน 2 ระบบคือ K และ K' ซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็วสัมพัทธกัน βc

$$cp_x = (cp'_x + \beta U')/\sqrt{(1-\beta^2)} = \gamma(cp'_x + \beta U') \qquad 3.7a$$

$$cp'_x = (cp_x - \beta U)/\sqrt{(1-\beta^2)} = \gamma(cp_x - \beta U) \qquad 3.7b$$

$$cp'_y = cp_y \qquad 3.7c$$

$$cp'_z = cp_z \qquad 3.7d$$

$$U = (U'+\beta cp'_x)/\sqrt{(1-\beta^2)} = \gamma(U' + \beta cp'_x) \qquad 3.8a$$

$$U' = (U-\beta cp_x)/\sqrt{(1-\beta^2)} = \gamma(U - \beta cp_x) \qquad 3.8b$$

โดยสอดคล้องกับ

$$U^2 = (c^2p_x^2 + c^2p_2^2 + c^2p_z^2) \quad . \quad U'^2 = (c^2p'^2_x + c^2p'^2_y + c^2p'^2_z) \qquad 3.9$$

หมายถึงว่า $U^2 - c^2p^2$ เป็น an invariant.

และยังได้ว่าอนุภาคตัวหนึ่งที่มี velocity components u_x, u_y และ u_z ในระบบ K มีความสัมพันธ์กับ K′ ซึ่งเคลื่อนที่สัมพัทธตามที่กล่าวแล้วดังนี้

$$u_x = (u'_x + v)/(1 + vu'_x/c^2)$$

$$u_y = u'_y/(1 + vu'_x/c^2)$$

$$u_z = u'_z/(1 + vu'_x/c^2)$$

ที่นี้เรามาพิจารณาการชนกันระหว่างโปรตอนกับโปรตอน (a proton - Proton collision) โดยที่โปรตอนตัวหนึ่งอยู่นิ่งใน the laboratory system. ถ้าพลังงานของโปรตอนที่มาชน (icident proton) มีค่าสูงพอก็อาจทำให้เกิดเมซอนตัวหนึ่งขึ้นได้ตามสมการ

$$p + p \longrightarrow p + n + \pi^+$$

$$p + p \longrightarrow p + p + \pi^0$$

เมื่อมวลเมื่ออยู่นิ่งของ π^+ และ π^0 – mesons (273.2 และ 264 เท่าของมวลอิเลคตรอนเมื่ออยู่นิ่งตามลำดับ) มีค่าใกล้เคียงกัน ดังนั้นพลังงานที่จะทำให้เกิดจึงประมาณได้ว่าเท่ากัน และเรายังอาจสมมุติใน

ตอนนี้ได้ว่ามวลเมื่ออยู่นิ่งของโปรตอนและนิวตรอนดังกล่าวมีค่าประมาณเท่ากัน (1836.1 และ 1838.6 เท่าของมวลอิเลคตรอนเมื่ออยู่นิ่งตามลำดับ)

ต่อไปนี้เราจะใช้สัญลักษณ์แทนพลังงานของนิวคลีออนในระบบ the centre of mass ของนิวคลีออน 2 ตัวดังกล่าวด้วย E^*. ดังนั้นเมซอนตัวหนึ่งจะเกิดขึ้นได้ถ้ามี $2E^* = m_\pi c^2$ เมื่อ m_π คือมวลเมื่ออยู่นิ่งของ π - meson. ในระบบนี้หลังจากการชนกันแล้วนิวคลีออนทั้งสองและเมซอนที่เกิดขึ้นจะอยู่นิ่ง แต่พิจารณาใน the laboratory system ซึ่งเป้านิวคลีออนตัวหนึ่งเริ่มต้นอยู่ในระบบนี้ อนุภาคทั้งสามจะปรากฏว่าเคลื่อนที่ไปด้วยความเร็วเท่ากันในแนวเดียวกับนิวคลีออนที่เข้ามาชน เราให้ E เป็นพลังงานจลน์ของนิวคลีออนที่เข้ามาชนใน the laboratory system. ดังนั้นพลังงานทั้งหมดของอนุภาคทั้งสองก่อนชนใน the laboratory system จึงมีค่าเป็น $E + 2M_oc^2$ และมีโมเมนตัมเป็น p. ส่วนใน the centre of mass system พลังงานทั้งหมดของอนุภาคทั้งสองจะเป็น $2E^* + 2M_oc^2$ และมีโมเมนตัมเป็น 0.

เราใช้ทฤษฎีสัมพันธภาพกรณี the invariant

$$U^2 - c^2p^2 \qquad 3.9$$

ดังนั้นใน 2 ระบบนี้เราจะได้

$$(E + 2M_oc^2)^2 - c^2p^2 = (2E^* + 2M_oc^2)^2 - 0 \qquad 3.10$$

และสำหรับอนุภาคตัวเดียว the invariant $U^2 - c^2p^2$ จะให้

$$(E + M_oc^2)^2 - c^2p^2 = M_o^2c^4 \qquad 3.11$$

เอาสมการ 3.10 และ 3.11 ลบกันจะได้

$$E = 4E^* \{ 1 + E^*/2M_oc^2 \} \qquad 3.12$$

และเมื่อ $E^* = m_\pi c^2/2$ เราจะได้

$$E = 2m_\pi c^2 \{ 1 + m_\pi /4M_o \} \qquad 3.13$$

ดังนั้นถ้าจะให้เกิดเมซอนตัวหนึ่ง ($m_\pi c^2 \sim 140$MeV) เราต้องใช้พลังงานของโปรตอนที่เข้ามาชน

ขนาด 290 MeV ในระบบ the centre of mass ก่อนการชนกันนิวคลีออนแต่ละตัวจะมีพลังงานจลน์ขนาด 70 MeV และหลังการชนกันแล้วใน the laboratory system นิวคลีออนแต่ละตัวจะมีพลังงานจลน์ 70 MeV โดย π - meson ที่เกิดขึ้นมาจะมีความเร็วเท่ากับอนุภาคทั้งสอง และมีพลังงานจลน์ (m_π/M_o) 70 MeV ($\approx$ 10.4 MeV) ดังนั้นเราสรุปเหตุการณ์ที่ทำให้เกิด π - meson ได้ดังกล่าวดังตารางที่ 3-1

ตารางที่ 3-1

ปฏิกิริยาระหว่างนิวคลีออนกับนิวคลีออนที่ทำให้เกิดเมซอน เมื่อ $E^* = 70$ MeV

		Laboratory System			Centre of Mass Syste		
		อนุภาคA	อนุภาคB		อนุภาคA	อนุภาคI	
ก่อนชน	พลังงานจลน์	E	0		E*	E*	
	U	$E+M_oc^2$	M_oc^2		$E^*+M_oc^2$	$E^*+M_oc^2$	
	โมเมนตัม	p	0		p*	-p*	
	พลังงานของระบบทั้งหมด	$E+2M_oc^2$			$2E^*+2M_oc^2$		
	โมเมนตัมของระบบทั้งหมด	p			0		
หลังชน		อนุภาคA	อนุภาคB	Meson	อนุภาคA	อนุภาคB	Meson
	พลังงานจลน์	E*	E*	$\frac{m_\pi E}{M_o}$	0	0	0

โปรตอนตัวหนึ่งที่อยู่นิ่งใน the laboratory system เมื่อพิจารณาใน the centre of mass system จะมีพลังงานจลน์ E* ดังนั้นโปรตอนตัวหนึ่งที่อยู่นิ่งใน the centre of mass system เมื่อพิจารณาใน the laboratory system จะมีพลังงานจลน์ E*

ความเร็วของ the centre of mass system β_c เทียบกับ the laboratory system

อาจคำนวณได้จากโมเมนตัม (p) ของอนุภาคที่ตกกระทบและพลังงานทั้งหมดของอนุภาคทั้งสอง (U_T) ใน the laboratory system โดยใช้ความสัมพันธ์

$$\beta_c = \frac{cp}{U_T} \qquad 3.14$$

พิจารณาอนุภาคสองตัว A และ B ซึ่งมีมวลเมื่ออยู่นิ่งเท่ากัน ใน the laboratory system ให้อนุภาค A มีโมเมนตัม p และพลังงานทั้งหมด U และอนุภาค B อยู่นิ่งเฉย ๆ ใน the centre of mass system อนุภาคแต่ละตัวจะมีพลังงานทั้งหมดเป็น

$$U^* = M_o c^2 / \sqrt{(1 - \beta_c^2)}$$

โดยที่ β_c และ $-\beta_c$ คือความเร็วของอนุภาคทั้งสองในระบบนี้, แต่ละตัวจะมีโมเมนตัมเป็น

$$M_o \beta_c c / \sqrt{(1 - \beta_c^2)} \quad \text{และ} \quad - M_o \beta_c c / \sqrt{(1 - \beta_c^2)}$$

โดยที่ $\beta_c = cp^* / U^*$

โดยใช้สมการ the Lorentz transformation เราได้

$$U = (U^* + \beta_c c p^*) / \sqrt{(1 - \beta_c^2)} \qquad 3.8a$$

ดังนั้นจะได้

$$U = \left\{ M_o c^2 / (1 - \beta_c^2) \right\} \quad (1 + \beta_c^2) \qquad 3.15$$

และ U_T , พลังงานทั้งหมดของอนุภาคทั้งสองใน the laboratory system หาได้จาก

$$U_T = 2 M_o c^2 / (1 - \beta_c^2) = 2 U^{*2} / M_o c^2 \qquad 3.16$$

และยังได้

$$cp_x = (cp_x^* + \beta_c U^*) / \sqrt{(1 - \beta_c^2)} \qquad 3.7a$$

i.e.

$$cp_x = 2 M_o c^2 \beta_c / (1 - \beta_c^2) . \qquad 3.17$$

และดังนั้น

$$\beta_c = \frac{cp}{U_T} \qquad 3.4$$

สมการ 3.14 นี้ยังใช้ได้กับอนุภาคหลาย ๆ ตัวที่มีมวลไม่เท่ากันด้วย โดย cp แทน the resultant momentum component ในทิศทางหนึ่ง , β_c แทน the velocity component ของ the centre of mass ในทิศทางนั้น และ U_T ก็คือพลังงานทั้งหมดของอนุภาคเหล่านั้นใน the laboratory system.

เขียนในอีกรูปหนึ่งได้คือ

$$\beta_c = \sqrt{(E_k/U_T)} \qquad 3.18$$

โดยที่ E_k พลังงานจลน์ของอนุภาค A ใน the laboratory system สมการ 3.18 นี้ได้มาจาก

$$\beta_c^2 = c^2p^2/U_T^2$$

$$= (U^2 - M_o^2c^4)/U_T^2$$

$$= (U - M_oc^2)(U + M_oc^2)/ (U + M_oc^2)^2$$

$$= E_k/U_T$$

ดังนั้นกรณีที่จะเกิดปฏิกิริยาให้เกิดเมซอนขึ้นมา เราต้องใช้ the incident proton มีพลังงานจลน์ 290 MeV ดังกล่าวแล้ว เราจะหาโมเมนตัมของมันได้จาก

$$U^2 - c^2p^2 = M_o^2c^4$$

$$(290 + 940)^2 - c^2p^2 = (940)^2$$

$$cp = 793 \text{ MeV}$$

ความเร็วของ the centre of mass system เทียบกับ the laboratory system (ซึ่งก็คือความเร็วของอนุภาค A ใน the centre of mass system ด้วย) ก็คือ

$$\beta_c = 793/(290 + 1880) = 0.365$$

หลังชนกันแล้วอนุภาคทั้งหมดสามตัวนี้จะมีความเร็วตามที่กล่าวใน the laboratory system และโปรตอนแต่ละตัวจะมีพลังงานจลน์ $\sim$ 70 MeV และเมซอนก็จะมีพลังงานจลน์ประมาณ 10 MeV

ที่กล่าวมานี้เป็นการพิจารณาพลังงานจลน์ของโปรตอนที่เข้ามาชนพอดีทำให้เกิดเมซอนขึ้นได้

ถ้าพลังงานของ the incident nucleon ใน the laboratory system ก่อนชนมีค่ามากกว่า 290 MeV เล็กน้อย เมื่อเกิดมีเมซอนขึ้น เมซอนตัวนี้จะมีพลังงานขนาดหนึ่ง ใน the centre of mass system ไพเมซอน (π - meson) และนิวคลีออน 2 ตัวนั้นจะแบ่งพลังงานส่วนเกินนั้นและกระจายออกไปในทิศทางที่ทำให้ผลรวมของโมเมนตัมของอนุภาคทั้งสามเป็นศูนย์

ใน the center of mass system, the π - meson จะมีพลังงานสูงสุดเมื่อหลังจากการชนกันแล้ว นิวคลีออนทั้ง 2 มีโมเมนตัมขนาดเท่ากันและทิศทางขนานกัน (equal and parallel momenta) และพลังงานจลน์สูงสุดของ the π - meson ใน the laboratory system $(E_\pi)_{max}$ หาได้ดังต่อไปนี้

ก่อนอื่นพิจารณาใน the center of mass system ผลรวมของพลังงานจลน์ของอนุภาคเหล่านั้นจะมีค่า $2E^* - m_\pi c^2$ และถ้าพลังงานนี้มีค่าต่ำเราก็ไม่ต้องใช้ทฤษฎีสัมพันธภาพในกรอบอ้างอิงนี้ ตามกฎการอนุรักษ์โมเมนตัมเราจะได้

$$2M\vec{V}^* + m_\pi \vec{v}^* = 0$$

โดยที่ $\vec{V}^*$ และ $\vec{v}^*$ คือความเร็วของ the nucleons และเมซอน

และ $$2E^* - m_\pi c^2 = MV^{*2} + \tfrac{1}{2} m_\pi v^{*2}$$

และจะได้ว่าพลังงานจลน์สูงสุดของไพเมซอนที่จะมีได้สูงสุดหาได้จาก

$$(E_\pi^*)_{max} = \tfrac{1}{2} m_\pi v^{*2} = \frac{2M}{2M+m_\pi} (2E^* - m_\pi c^2) \qquad 3.19$$

ใน the laboratory system พลังงานสูงสุดของ the π - meson คือพลังงานของตัวมันเคลื่อนที่ด้วยความเร็วใน the centre of mass system ไปทางเดียวกันกับทางของ the incident proton อาจคำนวณได้โดยแทนค่าในสมการของ Lorentz transformation (3.8a) โดยใช้

$$U' = (E^*_\pi)_{max} + m_\pi c^2$$

$$cp'_x = \sqrt{\{2 (E^*_\pi)_{max} m_\pi c^2\}}$$

และ

$$\beta_c = cp/U_T$$

โดยที่ p และ U_T คือโมเมนตัมของ the incident proton และพลังงานทั้งหมดใน the laboratory system

ตัวอย่าง ที่พิจารณาตามที่กล่าวมานี้ เช่นปฏิกิริยาที่เกิดจากโปรตอนตัวหนึ่งพลังงานจลน์ 350 MeV ชนกับโปรตอนอีกตัวหนึ่งซึ่งอยู่นิ่งใน the laboratory system ดังนั้นเราจะได้

$$U_T = (2M_oc^2 + E) = 1880 + 350 = 2230 \text{ MeV}$$

และ

$$\begin{aligned} c^2p^2 &= U^2 - M_o^2 c^4 \\ &= (E + M_oc^2)^2 - M_o^2 c^4 \\ &= (350 + 940)^2 - (940)^2 \\ &= (1290)^2 - (940)^2 \end{aligned}$$

หรือ

$$cp = 884 \text{ MeV}$$

และ $U^{*2} = \frac{1}{2} U_T M_oc^2 = \frac{1}{2} \times 2230 \times 940 \text{ MeV}^2$

หรือ $U^* = 1025 \text{ MeV}$

และ $E^* = U^* - M_oc^2 = 1025 - 940 = 85 \text{ MeV}$

ดังนั้น

$$(E^*_\pi)_{max} = \frac{2M\,(2E^* - m_\pi c^2)}{2M + m_\pi}$$

$$= \frac{2 \times 940\,(2 \times 85 - 140)}{2 \times 940 + 140}$$

$$= \frac{2 \times 940\,(170 - 140)}{2020}$$

$$= 28 \text{ MeV}$$

และจะได้

$$U'_\pi = (E^*_\pi)_{max} + m_\pi c^2$$

$$= 28 \text{ MeV} + 140 \text{ MeV} = 168 \text{ MeV}$$

$$cp' = \sqrt{2 \times 28 \times 140} = 88 \text{ MeV}$$

$$\beta'_\pi = cp' / U'_\pi = \frac{88}{168} \simeq 0.525$$

$$\beta_c = cp / U_T$$

$$= 884 / 2230 = 0.396$$

และ $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_c^2}} = 1.09$$

ดังนั้น

$$(U_\pi)_{max} = \gamma\,(U'_\pi + \beta_c\, cp')$$

$$= 1.09\,(168 + 0.396 \times 88)$$

$$= 222 \text{ MeV}$$

หรือ

$$(E_\pi)_{max} = (U_\pi)_{max} - m_\pi c^2 = 222 - 140 = 82 \text{ MeV}$$

ถ้าเมซอนใน the centre of mass system ที่เกิดขึ้นเคลื่อนที่ไปทิศถอยหลัง (backward direction) และนิวคลีออน 2 ตัวเคลื่อนที่ในทิศทรงกันข้าม ดังนั้นพิจารณาใน the laboratory system เมซอนตัวนั้นจะมีพลังงานกำหนดเป็น

$$U_\pi = \gamma (U'_\pi + \beta_0 cp')$$
$$= 1.09 (168 - 0.396 \times 88) = 145 \text{ MeV}$$

หรือ $(E_\pi) \sim$ 5MeV in the backward direction เมื่อ $|\beta'_\pi|$ มากกว่า $|\beta_0|$

ยังมีโอกาสที่จะเป็นอย่างอื่นในปฏิกิริยาเกิดเมซอน คือหลังจากการชนกันแล้ว proton กับ neutron อาจรวมกันเป็น deuteron โดยเป็นไปตาม

$$p + p \longrightarrow d + \pi^+ \qquad 3.20$$

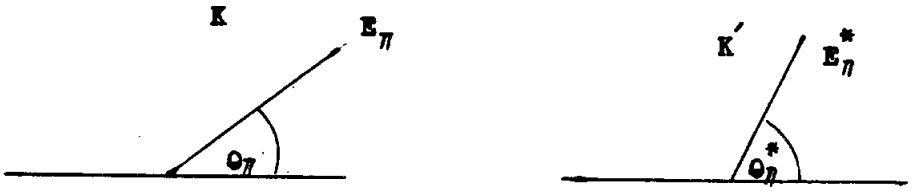
ในกรณีนี้พลังงานของ π - meson จะมีค่าคงที่และมีค่าสูงสุดดังกล่าวมาแล้ว

ใน the laboratory system พลังงานของ π - meson จะขึ้นอยู่กับทิศทางของมันสัมพัทธกับ the primary particle พลังงานของ π - meson ใน the centre of mass system จะมีค่ามากกว่าในสมการ 3.19 เล็กน้อยเนื่องจากthe binding energy ของ the deuteron,Wd ($\sim$ 2.2MeV)

$$(E^*_\pi)_{max} = \frac{2M}{2M+m_\pi} (2E^* - m_\pi c^2 + Wd) \qquad 3.21$$

ที่กล่าวมานี้เป็นการพิจารณากรณีง่าย ๆ คือพิจารณาในแง่ที่ π - meson ที่เกิดขึ้นนั้นมีทิศในทางเดียวกันหรือตรงข้ามกันกับ the primary particleแล้วเราหาพลังงานสูงสุดที่จะเป็นไปได้ ถ้ากรณีทั่ว ๆ ไปเราต้องพิจารณาว่าเมซอนที่เกิดขึ้นถูกปล่อย (emitted) ออกไปในทิศใด ๆ ก็ได้

สมมุติว่ามีเมซอนตัวหนึ่งเกิดขึ้นและมีพลังงานจลน์ E^*_π มีโมเมนตัม p^*_π ในทิศใด ๆ ใน the centre of mass system เราจะหาพลังงานและโมเมนตัมในthe laboratory systemได้ดังนี้ พิจารณารูปที่ 3-2



รูปที่ 3-2 แสดง การเกิด π - meson ในระบบ K และ K'

ให้ β_c คือความเร็วของ the centre of mass system เทียบกับ the laboratory system ถ้าใช้สมการของ Lorentz (3.7) แปลงกรอบอ้างอิงนี้จะได้

$$\tan\theta_\pi = \frac{cp_{\pi y}}{cp_{\pi x}} = \frac{cp^*_{\pi y}}{cp^*_{\pi x} + \beta_c U^*_\pi}\sqrt{(1-\beta_c^2)} \qquad 3.22$$

$$= \frac{cp^*_\pi \sin\theta^*_\pi}{cp^*_\pi \cos\theta^*_\pi + \beta_c U^*_\pi}\sqrt{(1-\beta_c^2)}$$

และยังได้

$$\beta^*_\pi = p^*_\pi c / U^*_\pi$$

$$\tan\theta_\pi = \frac{\beta^*_\pi \sin\theta^*_\pi}{\beta^*_\pi \cos\theta^*_\pi + \beta_c}\sqrt{(1-\beta_c^2)}$$

$$= \frac{\beta^*_x \tan\theta^*_\pi}{\beta^*_x + \beta_c}\sqrt{(1-\beta_c^2)} \qquad 3.24a$$

$$U_\pi = \frac{U^*_\pi + \beta_c \beta^*_\pi \cos\theta^*_\pi U^*_\pi}{\sqrt{(1-\beta_c^2)}}$$

$$= \frac{U^*_\pi (1 + \beta_c \beta^*_x)}{\sqrt{(1-\beta_c^2)}} \qquad 3.23a$$

$$\tan \theta^*_\pi = \frac{\beta_\pi \sin \theta_\pi}{\beta_\pi \cos \theta_\pi - \beta_c} \sqrt{(1 - \beta_c^2)}$$

$$= \frac{\beta_x \tan \theta_\pi}{(\beta_x - \beta_c)} \sqrt{(1 - \beta_c^2)} \qquad 3.24b$$

โดยที่ β_x คือ x component ของ β_π ใน the laboratory system

$$v^*_\pi = \frac{v_\pi - \beta_c \beta_\pi \cos \theta_\pi v_\pi}{\sqrt{(1 - \beta_c^2)}} = \frac{v_\pi (1 - \beta_c \beta_x)}{\sqrt{(1 - \beta_c^2)}} \qquad 3.23b$$

และสิ่งที่น่าสนใจก็คือเมื่อเมซอนตัวหนึ่งถูกปล่อยออกมาเป็นมุมฉากกับทิศ x ใน the centre of mass system i.e. เมื่อ $\theta^*_\pi = \frac{\pi}{2}$ เมซอนตัวนี้จะปรากฏว่าถูกปล่อยออกมาเป็นมุม ϕ ใน the laboratory system

โดยที่

$$\tan \phi = \frac{\beta^*_\pi}{\beta_c} \sqrt{(1 - \beta_c^2)} \qquad 3.24b$$

สมการนี้มาจาก 2.24a เมื่อ $\sin \theta^*_\pi = \sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos 90^\circ = 0$

3.2 <u>ลักษณะของเมซอนเบา</u> (Properties of the light meson - μ - meson)

3.2.1 <u>การสลายตัวของ π - meson ที่มีประจุ</u> (charged π - meson decay)

π^+ - meson ซึ่งเกิดจาก the proton - proton collision จะสลายตัวใช้เวลาเฉลี่ย (mean rest lifetime) ประมาณ 10^{-8} วินาที ถ้าอนุภาคดังกล่าวนี้ (π^+ - meson) เคลื่อนที่ผ่านตัวกลางที่เป็น a diffuse medium เช่น อากาศที่ความกดดันต่ำพลังงานที่สายไปไม่มากพอที่จะทำให้ตัวมันหยุดก่อนที่จะสลายตัวเป็น μ - meson และ neutrino ในทางตรงกันข้ามถ้า π^+ - meson เคลื่อนที่ผ่านตัวกลางที่หนาแน่น (a dense medium) เช่นในนิวเคลียรอิมัลชันหรือถ้าตัวมันเองเกิดมีพลังงานต่ำ พลังงานที่เสียไปเพียงพอที่จะหยุดตัวและ

สลายตัวขณะอยู่นิ่ง เนื่องจากเป็นประจุบวกมันจึงไม่ถูกจับไว้ใน Bohr orbit ซึ่งเกิดกับอนุภาคที่มีประจุลบ โมเมนตัมของ μ - meson ใกล้จุดที่มันเกิดจาก π - meson ที่อยู่นิ่งนี้ทำการวัดได้โดยใช้สนามแม่เหล็กได้ค่า 29.8 MeV/c

อัตราส่วนระหว่างมวลของ π และ μ - mesons ทำการวัดโดยใช้ the range - ionization method โดยอาศัยหลักพวกที่มีประจุเหมือนกันทำให้เกิด ionization ที่เหมือนกัน จะมีความเร็วเหมือนกัน ดังนั้น the residual ranges จะเป็นสัดส่วนกับมวลของอนุภาคเหล่านั้น ตามสมการ

$$R = \frac{M}{z^2}\, \phi(\beta)$$

จากการวัดดังกล่าวนี้ทำให้ได้

$$\frac{m_\pi}{m_\mu} = 1.321 \pm 0.002$$

มวลโดยประมาณของ the μ - meson อาจหาได้จากการเปรียบเทียบกับ proton tracks ซึ่งในตอนนี้สมมุติว่าได้มาแล้วคือ $m_\mu = 107 \text{MeV}$* ส่วน the neutrino จะมีโมเมนตัมเท่ากับ μ^+ - meson(ตามกฎการอนุรักษ์โมเมนตัม) พลังงานทั้งหมดของthe neutrino มีค่า 29.8MeV เมื่อพิจารณาว่ามันมีมวลเป็นศูนย์ (โดย $U^2 - c^2p^2 = 0$)

พลังงานทั้งหมดของ μ - meson (U_μ) หาได้จาก

$$U_\mu^2 = c^2p^2 + m_\mu^2 c^4 = (29.80)^2 + (107)^2 = (111.0 \text{ MeV})^2$$

---

* เมื่ออิเลคตรอนตัวหนึ่งมี rest mass $m_o c^2 = 1\, m_e$

$= 9.4 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^8)^2 = 8.19 \times 10^{-14}$ joule และ

$1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19}$ joule

ดังนั้น

$1\, m_e = 0.511 \times 10^6$ electron volts (eV.)

$= 0.511$ million electron volts (MeV)

ดังนั้นพลังงานทั้งหมดของ the π - meson เมื่อยู่นิ่งมีค่า 111.0 + 29.8 = 140.8 MeV

เมื่อเราคิดประมาณว่า $m_\pi / m_\mu = 1.321$ เราก็ควรจะหาค่าประมาณที่ใกล้ความจริงของ m_μ ได้ (คือ = 106.5MeV) มีการทำซ้ำหลาย ๆ ครั้งจนกระทั่งได้ค่าที่ถูกต้องที่สุด (= 105.5MeV)

ส่วนวิธีการอื่นมีผู้ทำการวัดหาค่าเฉลี่ยของมวลเมื่อยู่นิ่ง ของ μ^+ และ π^+ - meson พบว่ามีค่า 105.8 MeV และ139.6 MeV ตามลำดับ (หรือ 206.9 m_e และ 273.2 m_e) (crown,1957

ความเร็วของ μ - meson ทันทีที่เกิดจากการสลายตัวของ π - meson มีค่า = cp^*_μ / U^*_μ = $29.8 / \sqrt{\{(29.80)^2 + (105.5)^2\}} = \frac{29.8}{109.8} = 0.27c$ ถ้า π^+ - meson นั้นสลายตัวขณะเคลื่อนที่ใน the laboratory system บวนการที่กล่าวมาข้างบนก็ยังคงเกิดขึ้นในระบบที่เคลื่อนที่ไปด้วยความเร็วเท่ากับ π^+ - meson และสามารถที่จะแปลงกลับมายัง the laboratory system ได้ กรณีที่ความเร็วของ π - meson มีค่ามากกว่า 0.27c , μ - meson ดังนั้นจะเคลื่อนที่ไปข้างหน้าเร็วกว่า ๆ ในthe laboratory system และ π - mesons พลังงานสูง ๆ แบบนี้เป็นการยากที่จะวัดการเปลี่ยนจาก π เป็น μ - meson ได้

ถ้าพลังงานของ the π - meson มีค่า U และโมเมนตัม p_π เมื่อให้ a μ - meson เกิดขึ้นมามีโมเมนตัม p^*_μ ในทิศตั้งฉากกับ the π - meson จะเคลื่อนที่ไปเป็นมุม θ กับแกน x ใน the laboratory system นั่น

$$\tan\theta = \frac{(p_\mu)_y}{(p_\mu)_x} = \frac{cp^*_\mu \sqrt{(1-\beta^2_\pi)}}{\beta_\pi U^*_\mu + cp^*_\mu} \qquad 3.25$$

(เปรียบได้กับสมการ 3.22)

จากการคำนวณดังกล่าวพบว่า a high energy μ - meson ที่ระดับน้ำทะเลจะเคลื่อนที่ไปในทิศเดียวกับทิศของ the π - meson ที่เป็นต้นกำเนิดของมัน (ถ้าหากว่ามี scattering เล็กน้อย)

ต่อไปเรามาพิจารณาหาmean lifetime ของ the π - meson สมมุติฐานของเรา มีว่าโอกาสของการสลายตัว (the probability of decay) เป็นสัดส่วนกับช่วงเวลา (time interval) และธรรมชาติของอนุภาคนั้น ๆ (เช่น π - meson หรือ μ meson เป็นต้น) ดังนั้นเราสมมุติว่าโอกาสของการสลายตัวในช่วงเวลา dt คือ kdt โดยที่ k คือค่าคงที่อันหนึ่ง (ซึ่งไม่ขึ้นกับ t) ส่วนโอกาสที่จะไม่สลายตัวในช่วง dt ให้เป็น p(dt) โดยที่

$$p(dt) = (1 - kdt) \qquad 3.26$$

โอกาสที่จะเป็นอยู่ต่อไปในเวลา t โดยไม่มีการสลายตัวและอยู่ต่อไปอีกในเวลาต่อมา dt โดยไม่มีการสลายตัวคือ p(t) p(dt)

i.e
$$p(t + dt) = p(t)\ (1 - kdt)$$

ใช้ Taylor's expansion เอาแค่ 2 เทอม (โดยถือว่า dt มีค่าเล็กน้อย) จะได้

$$p(t) + \frac{dp(t)}{dt}.\ dt = p(t) - kp(t)dt$$

ดังนั้น

$$p(t) = \text{const}\ e^{-kt} \qquad 3.27$$

เมื่อ p(0) = 1 โอกาสของการไม่สลายตัวในเวลา t คือ

$$p(t) = e^{-kt} \qquad 3.28$$

โอกาสที่จะมีอยู่ในเวลา t โดยไม่มีการสลายตัวคือ p(t) และโอกาสของการสลายตัวในช่วงเวลาต่อมา dt คือ kdt ดังนั้นโอกาสของการสลายตัวในเวลา dt หลังจาก t วินาที คือ p(t) k(dt)

เวลาสลายตัวหรือช่วงเวลาในการสลายตัวโดยเฉลี่ย (the mean decay time) = T =

$$\frac{\int_0^\infty t\ p(t)\ kdt}{\int_0^\infty p(t)\ kdt}$$

$$= \frac{\int_0^\infty t\ e^{-kt}\ kdt}{\int_0^\infty e^{-kt}\ kdt}$$

$$= \frac{-(1/k)\left| t\, e^{-kt} \right|_0^\infty + (1/k)\int_0^\infty e^{-kt}\, dt}{\int_0^\infty e^{-kt}\, dt}$$

$$\therefore \quad T = 1/k \qquad 3.29$$

ดังนั้นโอกาสของการสลายตัวในเวลา dt คือ $kdt = \frac{dt}{T}$ และโอกาสที่จะไม่สลายตัวใน เวลา $T = e^{-kt} = e^{-1}$.

T ที่วัดนั้นวัดในกรอบอ้างอิงของอนุภาคนั้น ถ้าอนุภาคนั้นเคลื่อนที่สัมพัทธกับผู้สังเกตอายุของมันจะปรากฏว่ามากกว่าอายุของมันเมื่อวัดในกรอบอ้างอิงที่เคลื่อนที่ไปกับมัน ถ้าอนุภาคนั้นเคลื่อนที่ไปด้วยความเร็ว β เทียบกับ the laboratory system ดังนั้นการวัดใน the laboratory system สัมพัทธกับการวัดในthe particle system ดังสมการ (3.2a)

$$t = \gamma (t' + c\, x'/c^2)$$

ถ้าเราสมมุติว่าเมื่อเวลา $t' = 0$ และ $t' = 10^{-8}$ วินาทีคือ เวลาที่เริ่มต้นวัดพบและเวลาสิ้นสุดการพบเมซอนในกรอบอ้างอิงของเมซอนเอง และตำแหน่งของเมซอนตัวนั้นในระบบของมันมีค่า x_1' (คงที่) ดังนั้น

$$(t' = 0,\ x_1') \qquad t_1 = \gamma (0 + \beta\, cx_1'/c^2)$$

$$(t' = 10\text{-}8,\ x_1') \qquad t_2 = \gamma (10^{-8} + \beta\, cx_1'/c^2)$$

และ

$$t_2 - t_1 = \gamma\, 10^{-8} \text{ sec.}$$

$$t = \gamma\, t_o$$

ในระบบของเมซอนเอง the meson mean decay time มีค่าประมาณ 10^{-8} sec. แต่ถ้าวัดใน the laboratory system จะได้ค่ามากกว่านี้ ตัวอย่างเช่น ถ้า π^+-meson มี pc = 2.1 BeV ใน the laboratory system และอายุ (lifetime) 10^{-8} sec ในระบบของมัน

ดังนั้นอายุใน the laboratory system จะมีค่า

$$\frac{2.104}{0.14} \times 10^{-8} \text{ sec}$$

และความเร็วของมันจะมีค่าเข้าใกล้ c (= 0.98 c)
มันจะเคลื่อนที่ไปได้ประมาณ 45 เมตร ในสูญญากาศก่อนที่จะสลายตัว

μ - meson ที่เกิดจาก π - meson จะสลายตัวให้อิเลคตรอนตัวหนึ่ง และจากการทดลองพบว่าอิเลคตรอนตัวนี้จะมีพลังงานในช่วงตั้งแต่ 0 ถึงประมาณ 53 MeV แสดงให้เห็นว่าในปฏิกิริยานี้จะต้องมีอนุภาคมากกว่า 1 ตัว ปฏิกิริยาที่จะทำให้สอดคล้องกับผลการทดลองดังกล่าวคือ

$$\mu^+ \longrightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu \qquad 3.30$$

โดยที่ ν_e และ $\bar{\nu}_\mu$ คือ the neutrino และ antineutrino ตามลำดับ

ส่วนในกรณีของ μ^- - meson นั้น พลังงานของมันจะถูกรบกวน เนื่องจากมีประจุเป็นลบอาจถูกจับไว้ใน Bohr orbit ของอะตอม โดยที่ μ^- - meson อาจแทนที่อิเลคตรอนตัวใดตัวหนึ่งในอะตอมนั้น รัศมีของ Bohr orbit วงใน ๆ จะมีค่าลดลง เนื่องจากว่าเมซอน มีมวลมากกว่าอิเลคตรอน การที่ meson ถูกยึดให้อยู่ใกล้ ๆ อะตอมได้เป็นไปตามปฏิกิริยา

$$p + \mu^- \longrightarrow n + \nu_\mu \qquad 2.31$$

นิวเคลียสนี้จะไม่คืนตัวมากนักจากปฏิกิริยานี้ เมื่อ neutrino ที่เกิดขึ้นเอาพลังงานของ μ^- - meson ไปเกือบหมด

อายุเฉลี่ย (mean lifetime) ของ μ^+-meson มีค่า 2.2×10^{-6} sec แต่อย่างไรก็ตามถ้าหาก μ^+-meson สลายตัวขณะเคลื่อนที่อายุเฉลี่ยของมันจะยืดออกเป็น $\gamma \times 2.2 \times 10^{-6}$ sec โดยที่ $\gamma = 1/\sqrt{(1 - \beta^2)}$ กรณี a meson ที่มีพลังงาน 5000 MeV ค่า γ จะมีค่าประมาณ 50 และทำให้อายุเฉลี่ยของมันอยู่ใน order ของ 10^{-14} sec. ดังนั้นอนุภาคดังกล่าวสามารถเคลื่อนที่ไปในสูญญากาศได้เป็นระยะทางถึง 30 km. ก่อนที่จะสลายตัว ดังนั้นกล่าวได้ว่า π- mesons ที่เกิดในระยะสูงประมาณ 20 km. มีพลังงานขนาด 1 - 2 BeV ที่มุมใกล้ ๆ Zenith angle

จะให้ μ - mesons ที่สามารถมาถึงผิวโลกได้ และ μ - mesons นี้มี cross section ในการเกิดปฏิกิริยาต่ำ ดังนั้นพลังงานส่วนใหญ่ของมันจึงเสียไปเนื่องจาก ionization, δ - ray production และ pair production.

3.2.2 Neutral π - mesons (π^0 - mesons)

The proton proton collision นอกจากจะให้ π^+- mesons แล้วบางทีเกิด π^0 - mesons ตามปฏิกิริยา

$$p + p \longrightarrow p + p + \pi^0 \qquad 3.32$$

ในปี 1947 Oppenheimer ได้เสนอว่ามี neutral mesons ซึ่งจะทำให้มี electron component ในรังสีคอสมิค การทดลองที่ทำให้พบครั้งแรกมีในปี 1950 เมื่อ Bjorkland, Crandall, Moyer และ York ใช้ protons ขนาด 350 MeV ยิงไปยังเป้า (bombarded targets) และได้วัดพลังงานของโฟตอน (photons) ที่เกิดขึ้น เมื่อมวลของ π^0 - meson มีค่าใกล้เคียงกับมวลของ π^+- meson ดังนั้นพลังงานของ the incident proton ที่จะทำให้เกิด π^0 - meson นั้นต้องมีค่าประมาณเดียวกันกับที่ทำให้เกิด π^+- meson
สมมุติฐานที่ว่ามี π^0 - mesons นั้นมีว่ามันจะสลายตัวให้โฟตอน 2 ตัว ดังนั้นผลบวกของพลังงานของโฟตอนทั้งสองในระบบของ π^0 - meson ดังกล่าวจะต้องมีค่าเท่ากับมวลเมื่ออยู่นิ่งของ π^0 - meson

ปฏิกิริยาตามสมมุติฐานใน the rest system ของ π^0 - meson ดังกล่าวก็คือ

$$M_{\pi_0} c^2 \longrightarrow h\nu'_1 + h\nu'_2$$

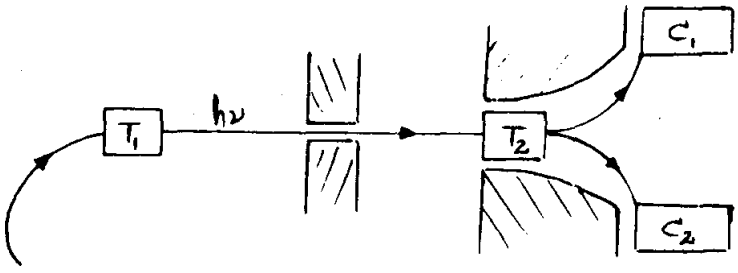
โดยที่ทำให้พลังงานและโมเมนตัมสมดุลย์โดย

$$h\nu'_1 = h\nu'_2 = \frac{m_{\pi_0} c^2}{2}$$

(มี alternative mode ของการสลายตัวที่จะเป็นไปได้อีกนอกจาก normal mode ที่กล่าวแล้ว คือ $\pi^0 \longrightarrow \gamma + e^+ + e^-$ มีโอกาสประมาณ 1 % และยังมีแบบที่สามที่จะเป็นไปได้คือ $\pi^0 \longrightarrow e^+ + e^- + e^+ + e^-$ มีโอกาสจะเป็นไปได้น้อยมาก ประมาณ 1 ใน 10^4)

ในการทดลองที่กล่าวมาข้างบนนั้นพลังงานของโฟตอนหาได้โดยการวัดพลังงานของอีเลคตรอนคู่ที่เกิดขึ้นจากโฟตอนดังกล่าวไปชนกับแผ่นเป้าบาง ๆ รูปแบบจำลองแสดงการทดลองคู่ในรูปที่ 3–3 ลำอนุภาคจากเครื่อง cyclotron ไปกระทบกับเป้า T_1 และมีพลังงานสูงพอที่จะทำให้เกิด π^0 - meson ขึ้น เมื่อเราใช้เป้าที่มีอะตอมหนักมากกว่าอะตอมของไฮโดรเจนดังนั้น threshold energy จึงมีค่าลดลง หลังจากที่เกิด π^0 - mesons แล้ว (จากการทดลองพบว่าน้อยกว่า 10^{-16} sec) แต่ละตัวจะสลายตัวให้โฟตอนคู่หนึ่งโฟตอนเหล่านี้จะ เข้าไปยังเป้าอันที่สอง (T_2) จากนั้นก็จะสลายกลายเป็นอีเลคตรอนคู่ขึ้นมาแทนตามความสัมพันธ์

$$h\nu \longrightarrow e^+ + e^- + \text{third body}$$



รูปที่ 3–3 การทดลองแบบแรกที่พบว่ามี π^0 - mesons ซึ่งเกิดขึ้นจากโปรตอนยิงไปยังเป้า (Bjorkland 1950) ลำของ cyclotron ไปกระทบกับเป้า T_1 ทำให้เกิด π^0 - mesons ขึ้นมาแล้วสลายตัวให้โฟตอนซึ่งวัดได้โดยอาศัยผลจากการชนกับเป้า T_2 ทำให้เกิดอีเลคตรอนคู่ขึ้นมาซึ่งวัดได้โดยใช้เครื่องวัด C_1 และ C_2

ตัวที่สาม (the third body) เกิดขึ้นมาเพื่อให้พลังงานและโมเมนตัมมีค่าอนุรักษ์ พลังงานของอีเลคตรอนหาได้จากการวัดการเบี่ยงเบน (deflection) ในสนามแม่เหล็ก

ถ้าข้อสมมุติฐานเกี่ยวกับ π^0 - meson เป็นจริงโฟตอนที่เกิดขึ้นจะมีพลังงานสูงสุด $h\nu_1$

และพลังงานต่ำสุด $h\nu_2$ โดยที่ตัวที่มีพลังงานสูงสุดจะเคลื่อนที่ไปทางทิศของ π^0 - meson ส่วนตัวที่มีพลังงานต่ำสุดจะเคลื่อนสวนทาง ดังนั้นถ้าเราสมมุติว่า U คือพลังงานของ π^0 - meson ใน the laboratory system จะได้

$$U = h\nu_1 + h\nu_2 \qquad 3.33$$

$$cp = h\nu_1 - h\nu_2 \qquad 3.34$$

ดังนั้นความเร็วของ the meson คือ

$$\beta = \frac{cp}{U} = \frac{h\nu_1 - h\nu_2}{h\nu_1 + h\nu_2} \qquad 3.35$$

และเมื่อ $U^2 - c^2p^2 = m_o^2 c^4$

ดังนั้น $m_o^2 c^4 = (h\nu_1 + h\nu_2)^2 - (h\nu_1 - h\nu_2)^2$

$$= 4\, h\nu_1 h\nu_2 \qquad 3.36$$

และจากสมการ 3.33 และ 3.34

$$2h\nu_1 = U + cp = \frac{m_o c^2}{\sqrt{(1-\beta^2)}} \quad \frac{\beta\, m_o c^2}{\sqrt{(1-\beta^2)}}$$

$$= \frac{m_o c^2 (1+\beta)}{\sqrt{(1-\beta^2)}} = \gamma m_o c^2 (1+\beta) \qquad 3.37$$

$$2h\nu_2 = U - cp$$

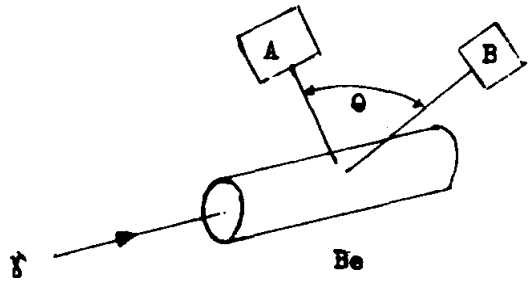
$$= \frac{m_o c^2 (1 - \beta\, m_o c^2}{\sqrt{(1-\beta^2)}} \qquad (1-\beta) \qquad 3.38$$

ได้มีการพิสูจน์ว่าเกิดมีโฟตอน 2 ตัวขึ้นพร้อม ๆ กัน โดยการทดลองของSteinberger (1950) ในการทดลองดังกล่าวนี้ π^0 - mesons เกิดขึ้นจากการใช้รังสีแกมม่ายิงไปยัง berryllium ได้ผลตามสมการ

$$\gamma + p \longrightarrow p + \pi^0 \qquad 3.39$$

$$\gamma + n \longrightarrow n + \pi^0 \qquad 3.40$$

ปฏิกิริยาเกิดกับโปรตอนและนิวคลีออน (nucleons) ในนิวเคลียส เมซอนจะหลุดออกมา เราจะศึกษาเมซอนที่เกิดออกมาในแนวตั้งฉาก (right angles) กับลำของรังสีแกมม่า การจัดการทดลองดูรูปที่ 3-4



รูปที่ 3-4 เป้า Be ถูกยิงด้วยรังสีแกมม่าทำให้เกิด π^0 - mesons ซึ่งจะสลายตัวให้โฟตอนคู่หนึ่งซึ่งจะวัดได้โดยใช้counters A และB

counters A และ B ใช้วัดโฟตอนทั้งสองที่เกิดจาก π^0 - mesons ซึ่งออกมาจากเป้า ดังกล่าว ต่อ counters ให้วัดแบบcoincidence (คือเมื่อ A และB จึงบันทึกการวัด) ให้เป็นฟังก์ชันของมุมระหว่างเครื่องนับทั้งสอง (θ)

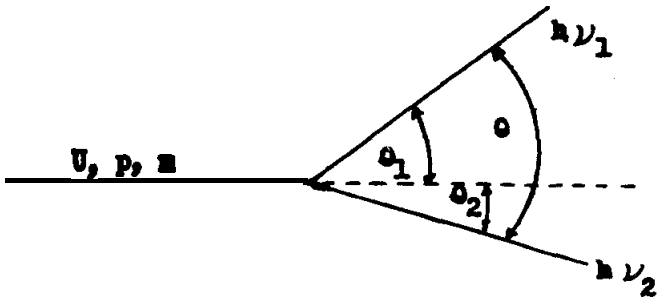
สมมุติว่าการสลายตัวของ π^0 - meson นี้เป็นไปตามรูปที่ 3-5

เราจะได้

$$h\nu_1 \sin\theta_1 - h\nu_2 \sin\theta_2 = 0 \qquad 3.41$$

$$h\nu_1 \cos\theta_1 + h\nu_2 \cos\theta_2 = cp \qquad 3.42$$

$$U = h\nu_1 + h\nu_2 \qquad 3.43$$



รูปที่ 3-5 การสลายตัวของ π^0 - mesons เป็นโฟตอนพลังงาน $h\nu_1$ และ $h\nu_2$ ที่มุม θ_1 และ θ_2

และ

$$c^2p^2 + m_o^2 c^4 = (h\nu_1 + h\nu_2)^2$$

ซึ่งจะให้

$$m_o^2 c^4 = 2 h\nu_1 h\nu_2 \left\{1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)\right\}$$

หรือ

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{m_o c^2}{2\sqrt{(h\nu_1 h\nu_2)}} \qquad 3.44$$

(โดยการใช้ $\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$)

โดยที่ $\theta = \theta_1 + \theta_2$ คือมุมระหว่างโฟตอนทั้งสองตัว และเมื่อ $U = h\nu_1 + h\nu_2$ เรา ยังจะได้

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{m_o c^2}{2\sqrt{\left\{h\nu_1 (U - h\nu_1)\right\}}} \qquad 3.45$$

ตามสมการ 3.45 มุม θ จะมีค่าน้อยที่สุดค่าหนึ่งเมื่อ

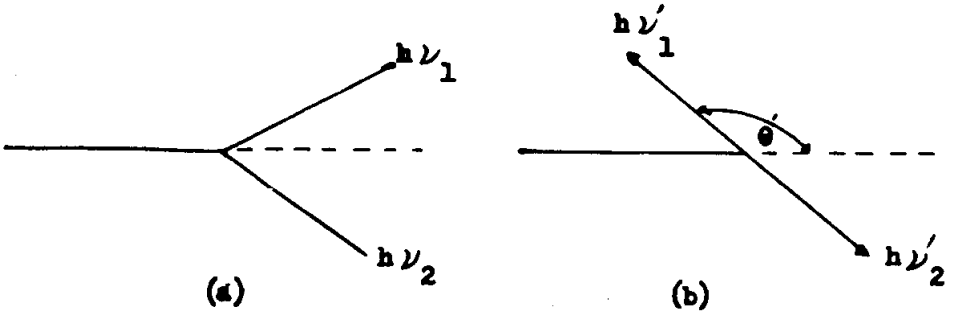
$$h\nu_1 = h\nu_2 = \frac{U}{2}$$

ซึ่งจะได้

$$\left\{\sin\frac{\theta}{2}\right\}_{min} = \frac{m_o c^2}{U} \qquad 3.46$$

สิ่งที่น่าสนใจอีกอย่างก็คือการกระจายของมุมการเกิดโฟตอนเทียบกับ π^o - meson ที่ตกกระทบ สมมุติฐานมีว่าใน the centre of mass system จะมีการกระจายของการเกิดโฟตอนในทุกทิศทุกทางเท่า ๆ กันหมด

พิจารณาใน the laboratory system และ the meson rest mass system ดังแสดงในรูปที่ 3-6



รูปที่ 3-6 การสลายตัวของ π^o - mesons ให้โฟตอน 2 ตัว โดยที่
(a) สังเกตใน the laboratory system
และ (b) สังเกตใน the rest system ของ π^o - meson ดังกล่าว

จากการแปลงกรอบอ้างอิงแบบลอเรนท์ พิจารณาว่าเมื่อ $U' = h\nu'$ และ $p'c = h\nu'$ แล้วเราจะได้

$$h\nu_1 = \frac{h\nu'_1 + \beta h\nu'_1 \cos\theta'_1}{\sqrt{(1-\beta^2)}}$$

$$= h\nu'_1\left\{\frac{U}{m_o c^2} + \frac{p}{m_o c}\cos\theta'_1\right\}$$

ในกรอบอ้างอิงของเมซอนค่าเฉลี่ยของ $\cos\theta'$ มีค่าเป็นศูนย์ และค่าเฉลี่ยของ $h\nu_1$ คือ $(U/m_o c^2)\, h\nu_1'$

ค่าพลังงานสูงสุดของโฟตอนดังกล่าวใน the laboratory system คือ

$$h\nu_{1\,max} = h\nu_1' \left\{ \frac{U}{m_o c^2} + \frac{p}{m_o c} \right\}$$

และค่าต่ำสุดคือ

$$h\nu_{1\,min} = h\nu_1' \left\{ \frac{U}{m_o c^2} - \frac{p}{m_o c} \right\}$$

3.3 <u>การเกิดอิเลคตรอนคู่</u> (Electron pair production)

โฟตอนที่เกิดจากการสลายตัวของ π^o - mesons อาจทำให้เกิดอิเลคตรอนคู่ขึ้นได้และอิเลคตรอนคู่นั้นยังสามารถรวมตัวกันเป็นโฟตอนได้อีก ดังนั้นในส่วนของรังสีคอสมิคจึงมี electron shower เกิดขึ้น การเกิดอิเลคตรอนคู่ได้นี้โฟตอนที่เข้าไปใกล้นิวเคลียสต้องมีพลังงานอย่างน้อย 1.02 MeV

ถ้าหากโฟตอนมีพลังงานสูงกว่า 1.02 MeV อิเลคตรอนและโปซิตรอนก็จะแบ่งพลังงานส่วนเกินเป็นพลังงานจลน์ เมื่อพิจารณาตามกฎการอนุรักษ์พลังงานจะได้สมการ

$$h\nu = m_o^+ c^2 + m_o^- c^2 + E_k^+ + E_k^-$$

เมื่อ m_o^+ และ m_o^- คือมวลของโปซิตรอนและอิเลคตรอนตามลำดับ (มีค่าเท่ากันคือ .51 MeV)
และ E_k^+ และ E_k^- คือพลังงานจลน์ของโปซิตรอนและอิเลคตรอนตามลำดับ
สำหรับสมการแสดงการเกิดอิเลคตรอนคู่ ตัวอย่างได้จากการสลายตัวของ K^+ - mesons คือ

$$K^+ \longrightarrow \pi^+ + \pi^o$$
$$\pi^o \longrightarrow \gamma + e^- + e^+$$
$$\longrightarrow \gamma + \gamma$$

3.4 การเกิดเมซอนจากรังสีแกมมา (Meson production by γ- rays)

ปฏิกิริยาของรังสีแกมมากับไฮโดรเจนจะทำให้เกิดเมซอน ซึ่งจะเป็นไปได้ตามปฏิกิริยาดังนี้

$$\gamma + p \longrightarrow n + \pi^{+}$$
$$\gamma + p \longrightarrow p + \pi^{o}$$

เราจะหาพลังงานของรังสีแกมมาขั้นต่ำ (threshold) ที่จะทำให้เกิดปฏิกิริยาดังกล่าวพิจารณาใน the laboratory system พลังงานของโฟตอนนั้นมีค่า $h\nu$ ชนกับโปรตอนตัวหนึ่งซึ่งอยู่นิ่งเมื่อพิจารณาในthe centre of mass system ซึ่งเคลื่อนที่ไปด้วยความเร็วเทียบกับ the laboratory system เป็นผลมาจากพิจารณาว่าโปรตอนและโฟตอนเคลื่อนที่เข้าหากันกล่าวคือมีโมเมนตัมเท่ากันแต่ทิศทางกันข้าม กรณี the threshold of meson production เราจะได้ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 3-2 ค่าของพลังงานในปฏิกิริยา γ - p

	Laboratory system		Centre of mass system	
	photon	proton	photon	proton
(ก่อนชน)				
พลังงาน	$U = h\nu$	$m_o c^2$	$h\nu'$	U'
โมเมนตัม	$p_o = h\nu$	0	$h\nu'$	p'_o
(หลังชน)	proton	meson	proton	meson
พลังงาน	U_2	U_{π_2}	$m_o c^2$	$m_\pi c^2$

ดังนั้น

$$(h\nu + m_0c^2)^2 - (h\nu)^2 = (m_\pi c^2 + m_0c^2)^2$$

ซึ่งให้

$$h\nu = m_\pi c^2 \left\{1 + \frac{1}{2}\frac{m_\pi}{m_0}\right\} \qquad 3.47$$

แทนค่า

$$m_\pi c^2 = 140 \text{ MeV}$$

$$m_0c^2 = 940 \text{ MeV}$$

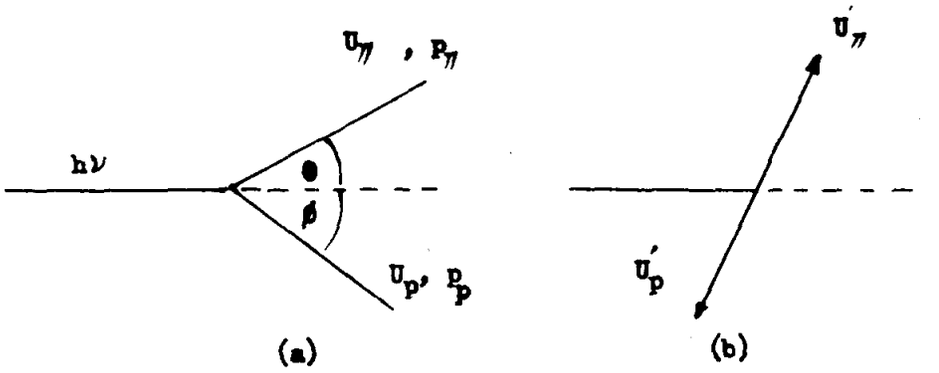
จะได้ $h\nu = 150$ MeV

เมื่อ the rest mass energy ของ π^0 - meson มีค่าน้อยกว่าของ π^+ - meson เล็กน้อย ($\pi^+/\pi^0 = 1.030$) ดังนั้นพลังงานของโฟตอน (γ - radiation) ที่จะทำให้เกิด π^0 - meson จึงมีค่าน้อยกว่าที่ทำให้เกิด π^+ - meson ประมาณ 8 MeV

การเกิด π - meson โดยใช้โฟตอนขนาด threshold energy ดังกล่าว π - meson จะเกิดและอยู่นิ่งใน the centre of mass system แต่ใน the laboratory system มันจะเคลื่อนที่ไปในทิศเดียวกับ the incident photon ด้วยความเร็วเท่ากับนิวคลีออนอื่น ๆ พลังงานจลน์นี้มีค่า $(h\nu - m_\pi c^2) = 10$ MeV ซึ่งจะแบ่งกัน (shared) ระหว่างนิวคลีออนเหล่านั้นกับ the neutral meson ในอัตราส่วนระหว่างมวลของมันทั้งหมด ดังนั้น

$$E_{\pi^0} = \frac{140}{940} \times 10 = 1.5 \text{ MeV}$$

กรณีโฟตอนมีพลังงานมากกว่าค่า threshold, π^0 - meson จะมีพลังงานขึ้นอยู่กับมุมของการเกิด (angles of emission) กับ the primary photon สมมุติให้พลังงานของโฟตอนนี้มีค่า $h\nu$ และถ้าเกิดเหตุการณ์ตามรูปที่ 3-7



รูปที่ 3-7 การเกิดเมซอนจากโฟตอนตามความสัมพันธ์ $\gamma + p \longrightarrow p + \pi^0$

(a) สังเกตใน the laboratory system

(b) สังเกตใน the centre of mass system;

(โมเมนตัมของโปรตอนและโฟตอนก่อนชนมีค่าเท่ากันแต่ทิศตรงข้าม)

ดังนั้น

$$h\nu + m_o c^2 \;.\; U_\pi + U_p$$

$$\frac{h\nu}{0} \;.\; p_\pi \cos\theta + p_p \cos\phi \qquad \text{(โมเมนตัมในแนวแกน x)}$$

$$p_\pi \sin\theta = p_p \sin\phi \qquad \text{(โมเมนตัมในแนวแกน y)}$$

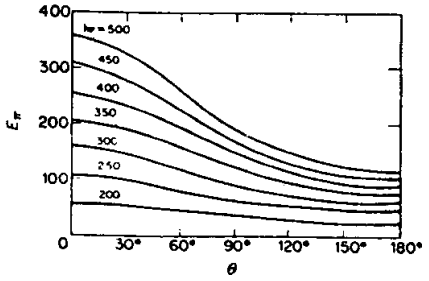
กรณีพิจารณาตัวเดียว

$$U_p^2 - p_p^2 c^2 = m_o^2 c^4$$

ขจัดค่า ϕ, U_p และ p_p จะได้

$$h\nu = \frac{U_\pi - m_\pi^2 c^2 / 2 m_o}{(1 - U_\pi / m_o c^2) + (cp_\pi \cos\theta / m_o c^2)} \qquad 3.48$$

พลังงานของ π - meson มีค่าต่าง ๆ สอดคล้องเป็นไปตามพลังงานของโฟตอนที่ตกกระทบ และมุมการกระจาย ดังแสดงในรูปที่ 3-8



รูปที่ 3-8 พลังงานจลน์ของ π - meson กับมุมของการเกิดใน the laboratory system สำหรับปฏิกิริยา

$$\gamma + p \longrightarrow n + \pi^+$$

$$\gamma + p \longrightarrow p + \pi^0$$

ดังนั้นที่มุมใด ๆ จะมีค่าพลังงานของ π - meson ค่าหนึ่งที่สอดคล้องกับพลังงานค่าหนึ่งของโฟตอนที่ตกกระทบ หรืออาจกล่าวได้อีกว่าถ้าเราเลือกเมซอนที่มุมใด ๆ กับทิศทางของโฟตอนที่มาตกกระทบ (the primary photon) และถ้าเมซอนเหล่านี้มีค่าของพลังงาน $E + \delta E$ โดยที่ δE มีค่าน้อย ๆ เราก็สามารถหาค่าพลังงานของโฟตอนที่ตกกระทบที่ทำให้เกิดเมซอนเหล่านี้ได้ ในการทดลองหา cross section ค่าต่าง ๆ กรณีจะให้เกิดเมซอนขึ้นก็พิจารณาจากใช้โฟตอนที่มีพลังงานแตกต่างกัน (non - homogeneous photon beams) แล้วเราสามารถเลือกพลังงานของโฟตอนได้จากการวัดพลังงานเมซอนที่มุมต่าง ๆ เทียบกับทิศของโฟตอนที่มากระทบ

จากการทดลองวัดดังกล่าวทำให้ทราบว่า cross section ของปฏิกิริยาขึ้นกับพลังงาน และมุม cross section รวมสำหรับการเกิดเมซอน (รวมทั้งหมดทุก cross section ที่มุมต่าง ๆ ใน solid angles) จากโฟตอน (มีค่า $\sim 10^{-28}$ cm^2) มีค่าประมาณ 1/10 ของที่ทำให้เกิดจากโปรตอน (protons) และยังทำให้ทราบว่า cross section ที่จะทำให้เกิด π^0 เมื่อเปรียบเทียบกับการให้เกิด π^+ ตามสมการ

$$\gamma + p \longrightarrow p + \pi^0$$

และ $$\gamma + p \longrightarrow n + \pi^+$$

ประมาณได้ว่ามีค่าเกือบเท่ากัน

3.5 <u>การเกิดเมซอนจากอิเลคตรอน</u> (Production of mesons by electrons)

เมซอนอาจเกิดได้จากการยิงไฮโดรเจนด้วยอิเลคตรอนพลังงานสูง ๆ เป็นไปได้ตามสมการ

$$e + \square \longrightarrow p + \pi^0 + e$$

หรือ $$e + p \longrightarrow n + \pi^+ + e$$

ถ้านิวเคลียสของเป้าใหญ่กว่านี้อีก (heavier nuclei) เราอาจได้ปฏิกิริยาอย่างอื่นเข้ามาอีก คือ

$$e + n \longrightarrow p + \pi^0 + e \quad \text{และ} \quad e + n \longrightarrow n + \pi^0 + e$$

พลังงานต่ำสุด (threshold energy) ที่จะทำให้เกิดเมซอนตามที่ว่ามานี้หาได้จากใช้รูปแบบเหมือนกรณี nuclear production of mesons ซึ่งในกรณีนี้เราจะได้

$$(U + m_0c^2)^2 - c^2p^2 = (m_\pi c^2 + m_0c^2 + m_ec^2)^2$$

โดยที่ U คือพลังงานของอิเลคตรอนดังกล่าวและ cp ก็คือโมเมนตัมของมัน และยังได้

$$U^2 - c^2p^2 = m_e^2c^4$$

จะได้

$$U - m_e c^2 = K_{kin} = m_\pi c^2 \left\{ 1 + \frac{m_e}{m_o} + \frac{m_\pi}{2m_o} \right\} \qquad 349$$

$$= 150 \text{ MeV}$$

ซึ่งมีค่าใกล้เคียงกับพลังงานที่จะทำให้เกิดจากโฟตอน และมีค่าประมาณครึ่งหนึ่งที่จำเป็นต้องใช้การที่จะเกิดจากปฏิกิริยาระหว่างนิวคลีออนกับนิวคลีออน สำหรับ cross section ที่จะทำให้เกิดเมซอนจากอิเลคตรอนตามปฏิกิริยาที่ว่ามานี้มีค่าลดลงด้วยตัวรวมขนาด the fine structure constant (1/137) เมื่อเปรียบเทียบกับที่จะเกิดโฟตอน (photoproduction) (Kaphon 1951) ดังนั้นการเกิดเมซอนจากอิเลคตรอนมักไม่ค่อยมี (หายาก)

3.6 <u>การเกิดเมซอนจากเมซอนช้า</u> (Meson production by slow mesons)

โปรตอนอิสระตัวหนึ่ง เมื่อจับเมซอนช้าที่มีประจุลบไว้และทำให้เกิดมีนิวตรอนตัวหนึ่งขึ้นมาจะต้องเกิดมีอนุภาคตัวอื่นขึ้นมาด้วยทั้งนี้เพื่อให้เป็นไปตามกฎการอนุรักษ์พลังงานและโมเมนตัมและยังรวมทั้ง isotopic spin

ปฏิกิริยาที่เป็นไปได้คือ

$$p + \pi^- \longrightarrow n + \gamma$$

และ $$p + \pi^- \longrightarrow n + \pi^o \longrightarrow n + 2\gamma$$

จากปฏิกิริยาแรกเราจะได้

$$(m_\pi c^2 + m_o c^2)^2 = (U_n + h\nu)^2$$

$$(140 + 940)^2 = (U_n + h\nu)^2$$

$$(1080) = U_n + h\nu$$

$$\frac{h\nu}{c} = P_n$$

และ

$$U_n^2 - P_n^2 c^2 = m_n^2 c^4$$

$$U_n^2 - h^2\nu^2 = 940^2$$

$$(U_n - h\nu)(U_n + h\nu) = 940^2 \qquad 3.51$$

แทนค่า

$m_\eta c^2 = 140$ MeV , $m_n c^2 = m_o c^2 = 940$ MeV แล้วพิจารณาสมการ 3.50 และ 3.51 จะได้

$$U_n = 949 \text{ MeV}$$

ดังนั้นพลังงานจลน์ของนิวตรอนมีค่าประมาณ 9 MeV

และพลังงานของโฟตอน $= h\nu = 1080 - U_n = 131$ MeV

โอกาสที่ π^- - meson จะทำให้เกิด π^0 - meson โดยถูกจับดังกล่าวขึ้นอยู่กับอายุเฉลี่ยของมันซึ่งมันเคลื่อนที่ด้วยความเร็วพอ ๆ กับ valence electron ในอะตอมที่จะทำให้เกิดปฏิกิริยาด้วยและชนิดของอะตอม (medium) นั้น ๆ ด้วย

3.7 <u>การเกิดเมซอนจากเมซอนเร็ว</u> (Meson production by fast mesons)

กรณีที่พลังงานของ π^- - meson อยู่ในช่วง 400 - 1500 MeV ปฏิกิริยาแบบ inelastic ที่จะเป็นไปได้คือ

$$\pi^- + p \longrightarrow \pi^+ + \pi^- + n$$

หรือ $$\longrightarrow \pi^0 + \pi^- + p$$

หรือ $$\longrightarrow \pi^0 + \pi^0 + n$$

ปฏิกิริยาเหล่านี้ถือว่าเป็น the elastic charge exchange reaction

ในการศึกษาปฏิกิริยาอันสุดท้าย มีการทดลองวัดหาค่า total production cross section สำหรับ neutrals ในปี 1960 โดย Devlin พบว่าพลังงาน 890 MeV ค่าของ the cross section เฉพาะส่วนที่เกิดเรโซแนนซ์มีค่า

$$\sigma_{tot} = 40 - 45 \text{ mb}^{*}$$

$$\sigma_{el} = 30 - 35 \text{ mb}$$

$$\sigma_{inel} = \text{between 5 and 15 mb}$$

the total cross section สำหรับพลังงานมากกว่า 2 BeV ปรากฏว่ามีค่าค่อนข้างคงที่ 28 mb.

---

* the barn ($1\,0^{-24}$ ตารางเซนติเมตร) คือหน่วยหนึ่งของ collision cross