บทที่ 5
การทำบูลลีนฟังก์ชันให้ง่ายขึ้น
SIMPLIFICATION OF BOOLEAN FUNCTIONS

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาจบบทนี้แล้ว นักศึกษาสามารถ

1. ทำบูลลีนฟังก์ชันให้ง่ายขึ้นโดยวิธีคาร์นอจ์แม็พ ทั้งในแบบผลบวกของผลคูณและผลคูณของผลบวก
2. ใช้เงื่อนไขไม่สนใจช่วยในการทำบูลลีนฟังก์ชันให้ง่ายขึ้น

5.1 วิธีแม็พ

The Map Method

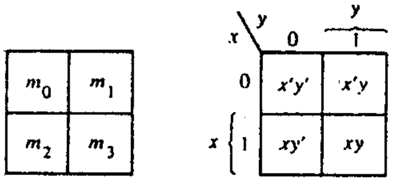
แม้ว่าบูลลีนฟังก์ชันจะสามารถทำให้ง่าย โดยใช้พีชคณิตบูลลีนอย่างรายละเอียดในบทที่ 4 ก็ตาม แต่เราก็ไม่อาจแน่ใจได้ว่าบูลลีนฟังก์ชันหนึ่ง ๆ จะลดรูปให้ง่ายได้เพียงใด เพราะไม่มีกฎเกณฑ์ตายตัวที่จะคาดหมายขั้นตอนต่าง ๆ ในขบวนการลดรูปโดยพีชคณิตบูลลีน วิธีแม็พเป็นวิธีที่ง่าย ตรงไปตรงมา สำหรับการลดรูปบูลลีนฟังก์ชัน อาจกล่าวได้ว่าวิธีนี้เป็นภาพของตารางความจริงของบูลลีนฟังก์ชัน วิธีแม็พแรกเริ่มเสนอโดยวิทช์ (Veitch) และดัดแปลงโดยคาร์นอจ์ (Karnaugh) จึงอาจเรียกวิธีแม็พว่า แผนภาพวิทช์ (Veitch diagram) หรือคาร์นอจ์แม็พ (Karnaugh map)

คาร์นอจ์แม็พเป็นแผนภาพประกอบด้วยสี่เหลี่ยมจัตุรัสจำนวนเท่ากับ 2^n ช่อง เมื่อ n คือจำนวนตัวแปรในฟังก์ชัน แต่ละสี่เหลี่ยมแทนมินเทอม 1 เทอม เนื่องจากบูลลีนฟังก์ชันใด ๆ สามารถแสดงได้ด้วยผลบวกของมินเทอม จึงอาจแทนบูลลีนฟังก์ชันในเชิงกราฟในแม็พโดยพื้นที่ที่ถูกล้อมรอบด้วยสี่เหลี่ยมซึ่งแทนมินเทอมในฟังก์ชัน โดยแท้จริงแล้วคาร์นอจ์แม็พเป็นแผนภาพให้เห็นทุกวิถีทางที่จะแสดงฟังก์ชันในรูปแบบมาตรฐาน นิพจน์ที่ได้จากการแม็พอาจมีหลายอัน เราจะเลือกอันที่ง่ายที่สุด นิพจน์ที่ง่ายที่สุดอาจอยู่ในแบบผลบวกของผลคูณ หรือผลคูณของผลบวก ซึ่งประกอบด้วยจำนวนตัวอักษร (ตัวแปร) น้อยที่สุด [นิพจน์นี้ไม่จำเป็นต้องมีหนึ่งเดียว (unique)]

5.2 คาร์นอจ์แม็พ 2 ตัวแปร

Two-Variable Karnaugh Map

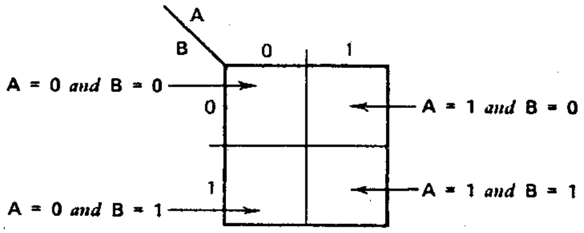
คาร์นอจ์แม็พของตัวแปร 2 ตัว แสดงดังรูป 5.1 จำนวนมินเทอมมี 4 เทอม แม็พจึงประกอบด้วยสี่เหลี่ยมจัตุรัส 4 อัน แต่ละอันสำหรับมินเทอม 1 เทอม รูป 5.1 (b) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสและตัวแปรทั้งสอง แต่ละแถว (row) และคอลัมน์ (column) ถูกกำหนดด้วยตรรก 0 และ 1 ให้เป็นค่าของตัวแปรทั้งสอง ในที่นี้คือ x และ y ตามลำดับ สังเกตว่า x จะมีเครื่องหมายพราม (prime :/) กำกับในแถวที่เป็น 0 และไม่มีเครื่องหมายพรามในแถวที่เป็น 1 ทำนองเดียวกับ y ซึ่งมีพรามในคอลัมน์ 0 และไม่มีพรามในคอลัมน์ 1 (พรามหมายถึงคอมพลีเมนต์ของตัวแปร ซึ่งอาจใช้เครื่องหมายบาร์ (−) ไว้เหนือตัวแปรแทนก็ได้ ดังที่กล่าวแล้วในบทที่ 4)



(a) (b)

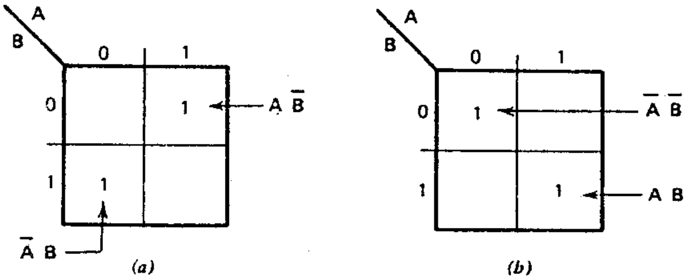
รูป 5.1 คาร์นอจ์แม็พ 2 ตัวแปร

เพื่อให้เห็นชัดเจนว่าแต่ละสี่เหลี่ยมของแม็พแทนมินเทอมของตัวแปรมีค่าอย่างไรบ้าง จะขอยกตัวอย่างตัวแปร A, B ซึ่งเขียนแม็พได้ดังรูป 5.2



รูป 5.2 คาร์นอจ์แม็พ 2 ตัวแปร ระบุค่าตัวแปรแต่ละช่อง

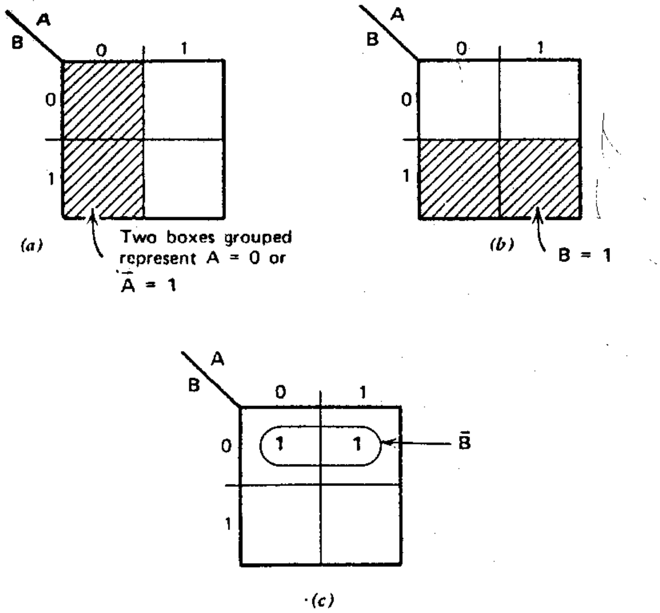
แม็พของรูป 5.3 แสดงวิธีหานิพจน์บูลลีนจากแม็พ รูป 5.3 (a) แสดงคาร์นอจ์แม็พซึ่งมีตรรก 1 ปรากฏอยู่ 2 ช่องสี่เหลี่ยม ตรรก 1 แต่ละตัวหมายถึงสภาวะสำหรับนิพจน์บูลลีนที่เป็น 1 ดังนั้นนิพจน์บูลลีนทั้งหมดจึงได้จากการบวก (การออ) มินเทอมแต่ละช่องจึงได้เป็น $A\overline{B} + \overline{A}B$ ในทำนองเดียวกัน รูป 5.3 (b) จะได้นิพจน์บูลลีน คือ $AB + \overline{A}\overline{B}$



(a) (b)

รูป 5.3 ตัวอย่างการหานิพจน์บูลลีนจากแม็พ

คาร์นอจ์แม็พคือ รูปภาพของตารางความจริงดังได้กล่าวไว้แล้วตอนต้น (หมายความว่าจากตารางความจริงสามารถเขียนลงเป็นคาร์นอจ์แม็พได้) แต่มีข้อแตกต่างคือ เราสามารถจับกลุ่มของแม็พที่มีค่าตรรก 1 ได้ ผลลัพธ์ก็คือ การทำให้เป็นนิพจน์ที่ง่ายขึ้น (simplify)



รูป 5.4 การจับกลุ่มตรรก 1 บนคาร์นอจ์แม็พ

ตัวอย่างเช่น ในรูป 5.4 (a) เป็นการจับกลุ่มของสี่เหลี่ยมภายใต้ค่า A = 0 หรือ $\overline{A}$ = 1 รูป 5.4 (b) แสดงคาร์นอจ์แม็พซึ่งจับกลุ่มตรรก B = 1 สำหรับรูป 5.4 (c) แสดงการพล็อตตรรก 1 ลงในแม็พ 1 สองตัวซึ่งอยู่ติดกันสามารถจับกลุ่มแล้วลดรูปได้นิพจน์คือ $\overline{B}$ ซึ่งอาจวิเคราะห์ได้ดังนี้ แต่ละช่องของคาร์นอจ์แม็พในรูปนี้ให้เทอมคือ

$\overline{A}\overline{B} + A\overline{B}$

ซึ่งลดรูปได้ดังนี้

$\overline{A}\overline{B} + A\overline{B} = \overline{B}(\overline{A} + A) = \overline{B}(1) = \overline{B}$

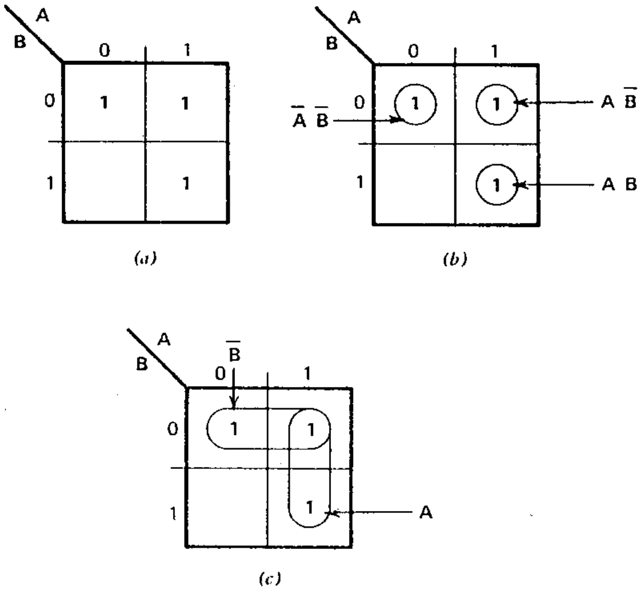
ซึ่งคือสิ่งที่อ่านได้จากการจับกลุ่มตรรก 1 ซึ่งปรากฏอยู่ในช่องสี่เหลี่ยมของคาร์นอจ์แม็พที่ประชิดติดกัน

สรุปกฎสำหรับคาร์นอจ์แม็พ 2 ตัวแปร ได้ว่า

1. ตรรก 1 ที่อยู่ประชิดติดกัน 2 ตัว ในคาร์นอจ์แม็พ จับกลุ่มแล้วจะแทนตัวแปร 1 ตัว
2. ตรรก 1 ที่อยู่โดด ๆ ในคาร์นอจ์แม็พ จะแทนผลคูณ (การแอน) ของ 2 ตัวแปร
3. นิพจน์ทั้งหมดที่สอดคล้องกับตรรก 1 ทั้งหมดของคาร์นอจ์แม็พก็คือ ผลบวก (การออ) ของเทอมต่าง ๆ ในข้อ 1 และ 2

ตัวอย่าง 5.1

จงหานิพจน์จากคาร์นอจ์แม็พในรูป 5.5 (a)



รูป 5.5 โจทย์ตัวอย่าง 5.1

วิธีทำ

1 แต่ละตัวแทนเทอมต่าง ๆ ดังรูป 5.5 (b)

ดังนั้นนิพจน์นี้คือ

$$M = \overline{A}\overline{B} + A\overline{B} + AB$$

ถ้ารวม 1 ที่ประชิดกันจากแม็พในรูป 5.3 (c) จะสามารถอ่านนิพจน์นี้ได้เป็น

$$M = A + \overline{B}$$

ซึ่งเป็นนิพจน์ที่ง่ายกว่านิพจน์ข้างบน **ตอบ**

กฎของการลดรูปนิพจน์บูลลีนโดยคาร์นอจ์แม็พคือ จับกลุ่มตรรก 1 ให้มีขนาดใหญ่ที่สุดที่จะเป็นไปได้ แล้วอ่านเทอมที่ได้ออกมา โดยยึดหลักว่าตัวแปรใดมีค่าทั้งตัวแปรเองและคอมพลีเมนต์ของตัวแปร ตัวแปรนั้นจะถูกลดรูปทิ้งไป นอกจากนี้ 1 ที่ใช้ไปในการจับกลุ่มแล้วอาจมาใช้ในการจับกลุ่มใหม่ได้อีก โดยสรุปแล้วการลดรูปนิพจน์โดยคาร์นอจ์แม็พตั้งอยู่บนกฎเกณฑ์ของพีชคณิตบูลลีนว่า

$$AB + A\overline{B} = A$$

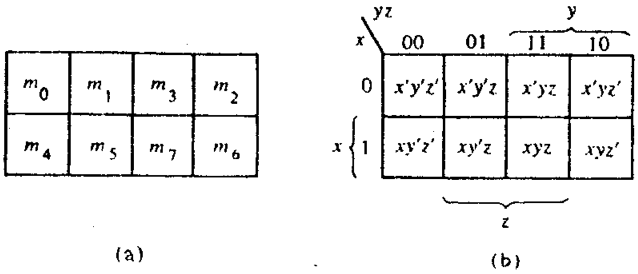
$$A + A = A$$

เมื่อ A เป็นกี่ตัวแปรก็ได้ B ต้องเป็นตัวแปรเดียว

5.3 คาร์นอจ์แม็พ 3 ตัวแปร

Three-Variable Karnaugh Map

คาร์นอจ์แม็พ 3 ตัวแปรประกอบด้วยสี่เหลี่ยม 8 ช่อง ตามจำนวนมินเทอมของ 3 ตัวแปร สังเกตการจัดเรียงมินเทอมว่ามิได้เป็นไปตามลำดับของเลขฐานสอง แต่เป็นในแบบรหัสเกรย์ ซึ่งมีสมบัติว่ารหัสที่อยู่ติดกันจะมีบิทต่างกันเพียงบิทเดียว ในที่นี้คือ 00, 01, 11, 10 เพื่อสามารถจับกลุ่มของ 1 ที่อยู่ประชิดกัน ได้การลดรูปเกิดขึ้น (แม้แต่สี่เหลี่ยมช่องซ้ายสุดก็มีตัวแปรซึ่งค่าต่างกับสี่เหลี่ยมช่องขวาสุดเพียงบิทเดียวเพื่อสามารถม้วนมาลดรูปกันได้)



m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6

(a)

x \ yz	00	01	11	10
0	x'y'z'	x'y'z	x'yz	x'yz'
1	xy'z'	xy'z	xyz	xyz'

(b)

รูป 5.6 คาร์นอจ์แม็พ 3 ตัวแปร

กฎสำหรับคาร์นอจ์แม็พ 3 ตัวแปรมีว่า

1. กลุ่มของ 1 ที่อยู่ในสี่เหลี่ยมประชิดกัน 4 ช่อง เรียกว่าคว้อด (quad) สามารถลดรูปแล้วเหลือเทอมของ 1 ตัวแปร
2. กลุ่มของ 1 ในสี่เหลี่ยมประชิดกัน 2 ช่อง เรียกว่าคู่ (pair) ลดรูปแล้วได้ผลคูณ (การแอน) ของตัวแปร 2 ตัว
3. ช่องสี่เหลี่ยมที่มี 1 อยู่โดด ๆ คือผลคูณของ 3 ตัวแปร

ต่อไปลองพิจารณาสี่เหลี่ยมของ m_0 กับ m_2 หรือคือเทอม x'y'z' และ x'yz' ซึ่งมีตัวอักษรต่างกันเพียง 1 ตัว คือ y ดังนั้นสามารถลดตัวแปรนี้ไปได้ เนื่องจาก มี y และ y' :

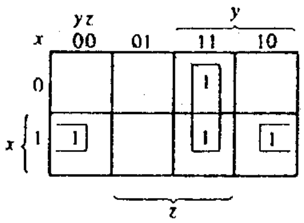
$$x'y'z' + x'yz' = x'z'$$

ตัวอย่าง 5.2

จงทำบูลลีนฟังก์ชัน $F = x'yz + xy'z' + xyz + xyz'$ ให้เป็นฟังก์ชันที่ง่ายขึ้น

วิธีทำ

บรรจุข้อมูลของโจทย์ลงในช่องสี่เหลี่ยมของคาร์นอจ์แม็พ 3 ตัวแปร
แต่ละมินเทอมคือ 1 ของค่าฟังก์ชันในตารางความจริง
มินเทอมที่เหลือนอกเหนือจากนี้คือ ค่าของฟังก์ชันเท่ากับ 0
อาจเขียน 0 ลงในช่องสี่เหลี่ยมของมินเทอมนั้น ๆ หรือไม่ก็ได้
จะได้คาร์นอจ์แม็พดังรูป 5.7



รูป 5.7 คาร์นอจ์แม็พของตัวอย่าง 5.2

เมื่อจับกลุ่มของ 1 ที่ประชิดกันแล้วสามารถลดรูปได้เหลือดังนี้

คู่ของ 1 ในแนวตั้ง ได้เทอม yz 1 ในช่องล่างซ้ายสามารถม้วนมาจับคู่กับ 1 ในช่องล่างขวา ได้เทอม xz′

ดังนั้นจึงได้ฟังก์ชันที่ง่ายขึ้นคือ

$$F = yz + xz'$$

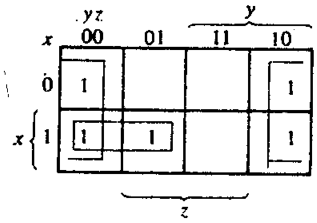
ตอบ

ตัวอย่าง 5.3

จงลดรูปบูลลีนฟังก์ชัน $F(x, y, z) = \Sigma (0, 2, 4, 5, 6)$

วิธีทำ

ในโจทย์ข้อนี้กำหนดมินเทอมมาในรูปเลขฐานสิบ เราก็จัดแจงบรรจุข้อมูลนี้ลงในคาร์นอจ์แม็พได้ดังรูป 5.8



รูป 5.8 $F (x, y, z) = \Sigma (0, 2, 4, 5, 6)$

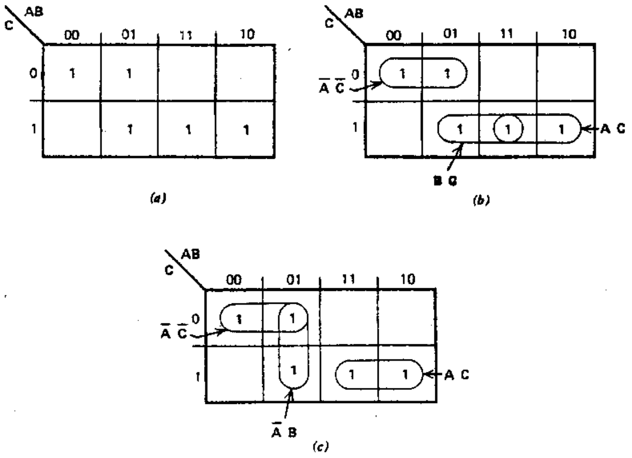
จากรูป 5.8 จะเห็นว่าสามารถจับ 1 ในช่องสี่เหลี่ยมทั้งสองทางซ้ายกับในช่องสี่เหลี่ยมทั้งสองทางขวาเป็นคว้อด ได้เทอม z′ สำหรับ 1 ในช่องของมินเทอม m_4, m_5 จับคู่กันได้เป็น xy′ ดังนั้นฟังก์ชันโจทย์ลดรูปแล้วได้

$$F(x, y, z) = z' + xy'$$

ตอบ

ตัวอย่าง 5.4

จงเขียนนิพจน์บูลลีนที่ง่ายที่สุดจากคาร์นอจ์แม็พในรูป 5.9 (a)



รูป 5.9 โจทย์ตัวอย่าง 5.4

วิธีทำ

โจทย์ดังรูป 5.9 (a) อาจแม็พได้มากกว่า 1 แบบ ดังรูป 5.9 (b) และ (c)

ถ้าแม็พดังรูป 5.9 (b) จะได้นิพจน์คือ

$$M = \overline{A}\,\overline{C} + AC + BC$$

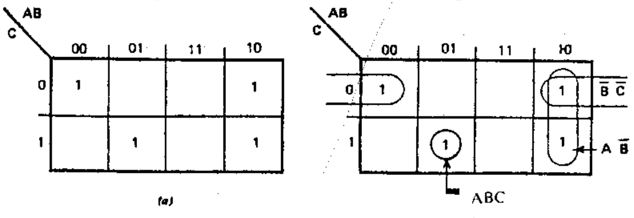
ถ้าแม็พดังรูป 5.9 (c) จะได้นิพจน์คือ

$$M = \overline{A}\,\overline{C} + AC + \overline{A}B$$

อาจใช้ตารางความจริงพิสูจน์ว่านิพจน์ที่ได้ทั้งสองนี้ให้ผลเหมือนกัน **ตอบ**

ตัวอย่าง 5.5

จงเขียนนิพจน์ตรรกที่ง่ายที่สุดสำหรับคาร์นอจ์แม็พในรูป 5.10 (a)



รูป 5.10 โจทย์ตัวอย่าง 5.5

วิธีทำ

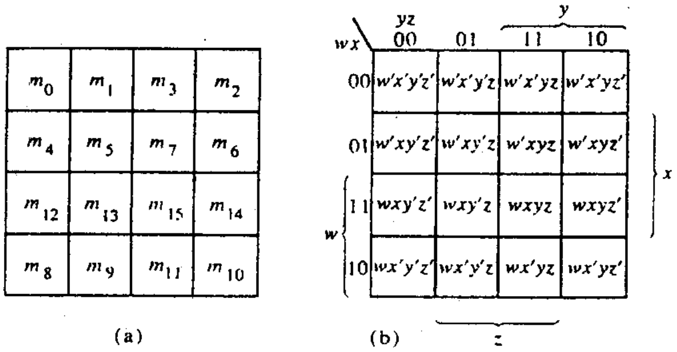
โจทย์รูป 5.10 (a) สามารถแม็พได้ดังรูป 5.10 (b) ดังนั้นนิพจน์ที่ง่ายที่สุดคือ

$$M = \overline{A}BC + A\overline{B} + \overline{B}\,\overline{C}$$ **ตอบ**

5.4 คาร์นอจ์แม็พ 4 ตัวแปร

Four-Variable Karnaugh Map

คาร์นอจ์แม็พสำหรับบูลลีนฟังก์ชัน 4 ตัวแปร เป็นดังรูป 5.11 รูป (a) นั้นแสดงสี่เหลี่ยมสำหรับมินเทอมแต่ละเทอมในจำนวน 16 มินเทอมของ 4 ตัวแปร รูป (b) แสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรทั้งสี่



(a)

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6
m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

(b)

wx \ yz	00	01	11	10
00	$w'x'y'z'$	$w'x'y'z$	$w'x'yz$	$w'x'yz'$
01	$w'xy'z'$	$w'xy'z$	$w'xyz$	$w'xyz'$
11	$wxy'z'$	$wxy'z$	$wxyz$	$wxyz'$
10	$wx'y'z'$	$wx'y'z$	$wx'yz$	$wx'yz'$

รูป 5.11 คาร์นอจ์แม็พ 4 ตัวแปร

สังเกตแถวและคอลัมน์ถึงวิธีการจัดเรียงค่าของตัวแปรว่าเป็นไปตามรหัสเกรย์ เพื่อให้มีบิทต่างกันเพียงหนึ่งในสี่เหลี่ยมที่อยู่ประชิดกัน และในสี่เหลี่ยมซ้ายมือสุดกับขวามือสุดหรือบนสุดกับล่างสุด เพื่อสามารถม้วนมาลดรูปกันได้

กฎสำหรับคาร์นอจ์แม็พ 4 ตัวแปร มีดังนี้

1. ตรรก 1 ที่อยู่ในช่องสี่เหลี่ยมประชิดกัน 16 ช่อง แทนฟังก์ชันค่าคงที่คือ 1

2. ตรรก 1 ในช่องสี่เหลี่ยมประชิดกัน 8 ช่อง เรียกว่าออคเต็ท (octet) จะได้เทอมผลคูณของ 1 ตัวแปร

3. ตรรก 1 ในช่องสี่เหลี่ยมประชิดกัน 4 ช่อง เรียกว่าคว้อดลดรูปแล้วได้เทอมผลคูณของ 2 ตัวแปร

4. ตรรก 1 ในช่องสี่เหลี่ยมประชิดกัน 2 ช่อง เรียกว่าคู่ (pair) จะแทนเทอมผลคูณของ 3 ตัวแปร

5. ตรรก 1 โดด ๆ แทนเทอมผลคูณของ 4 ตัวแปร

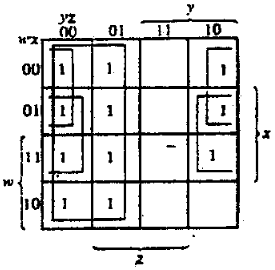
ตัวอย่าง 5.6

จงทำให้บูลลีนฟังก์ชันต่อไปนี้ง่ายที่สุด

$F(w, x, y, z) = \Sigma (0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 14)$

วิธีทำ

โจทย์ข้อนี้มี 4 ตัวแปร จึงใช้คาร์นอจ์แม็พ 4 ตัวแปร แล้วบรรจุมินเทอมลงไปได้ดังรูป 5.12



รูป 5.12 คาร์นอจ์แม็พสำหรับตัวอย่าง 5.6

จากรูป 5.12 จะแม็พได้ดังนี้

ออคเต็ทแทน y'

ควอ็ดอันบนซึ่งประกอบด้วย m_0, m_4, m_2, m_6 แทน $w'z'$

ควอ็ดอันตรงกลางซ้ายม้วนไปจรดขวา ซึ่งประกอบด้วย m_4, m_{12}, m_6, m_{14} แทน xz'

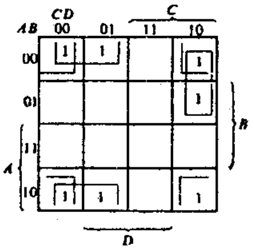
ดังนั้น $F(w,x,y,z) = y' + w'z' + xz'$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 5.7

จงทำให้ $F(A, B, C, D) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{B}C\bar{D} + \bar{A}BC\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}$ เป็นฟังก์ชันที่ง่ายที่สุด

วิธีทำ

พื้นที่ในคาร์นอจ์แม็พซึ่งครอบคลุมฟังก์ชันนี้ประกอบด้วยสี่เหลี่ยมซึ่งมี 1 บรรจุอยู่ ดังรูป 5.13 ฟังก์ชันนี้มี 4 ตัวแปรและมีเทอม 3 ตัวอักษร 3 เทอม เทอม 4 ตัวอักษร 1 เทอม เทอม 3 ตัวอักษรแต่ละเทอมนั้นแทนได้ด้วยสี่เหลี่ยมสองช่องในคาร์นอจ์แม็พ ตัวอย่างเช่น $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ แทนได้ด้วยสี่เหลี่ยมซึ่งมีค่าตัวแปร A, B, C, D เป็น 0000 และ 0001 สำหรับเทอม 4 ตัวอักษรก็ตรงไปตรงมาในการบรรจุตรรกในแม็พ



รูป 5.13 คาร์นอจ์แม็พสำหรับตัวอย่าง 5.7

ฟังก์ชันนี้สามารถทำให้ง่ายขึ้นโดยแม็พดังนี้

1 ในมุมทั้งสี่ของคาร์นอจ์แม็พ ให้เทอม $\bar{B}\bar{D}$ ทั้งนี้เพราะม้วนซ้ายและขวา กับบนและล่างมาแตะกัน ช่องสี่เหลี่ยมทั้งสี่นี้จะเป็นสี่เหลี่ยมประชิดกัน

1 ในช่องซ้ายมือ 2 ช่อง ของแถวบนลดรูปกับ 1 ในช่องซ้ายมือ 2 ช่องของแถวล่าง ให้เทอม $\bar{B}\bar{C}$

1 ตัวที่เหลือลดรูปกับ 1 ที่มุมบนขวาได้อีก ให้เทอม $\bar{A}C\bar{D}$

ดังนั้น $F(A, B, C, D) = \bar{B}\bar{D} + \bar{B}\bar{C} + \bar{A}C\bar{D}$ **ตอบ**

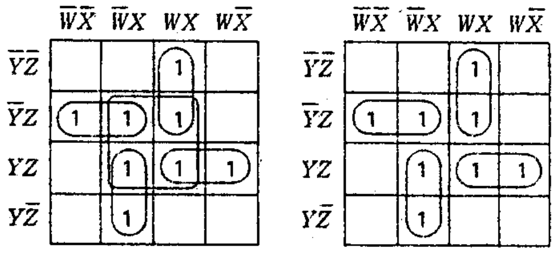
บางครั้งเราจะพบปัญหาการทำฟังก์ชันให้ง่ายขึ้นโดยวิธีคาร์นอจ์แม็พ เช่น คาร์นอจ์แม็พในรูป 5.14 จะเห็นว่าถ้าเราเลือกแม็พตามรูป (a) จะได้ฟังก์ชันคือ

$$F_a(W, X, Y, Z) = XZ + WYZ + \bar{W}\bar{Y}Z + \bar{W}XY + WX\bar{Y}$$

ถ้าเราเลือกแม็พตามรูป (b) จะได้ฟังก์ชันคือ

$$F_b(W, X, Y, Z,) = WYZ + \bar{W}\bar{Y}Z + \bar{W}XY + WX\bar{Y}$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ง่ายกว่า ดังนั้นเราเลือกการแม็พแบบรูป (b) เพราะให้ฟังก์ชันที่ง่ายที่สุด (ทั้ง F_a, F_b ให้ตารางความจริงเหมือนกัน)



(a) (b)

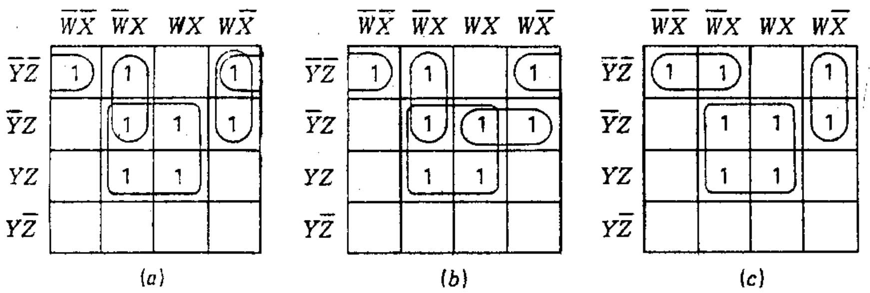
รูป 5.14 การเลือกแม็พที่จะให้ฟังก์ชันง่ายที่สุด

ปัญหาการเลือกแม็พเพื่อให้ได้ฟังก์ชันที่ง่ายที่สุด พอจะค้นหาหลักเกณฑ์จากทักษะประสบการณ์ได้ดังนี้

1. เริ่มด้วยช่องสี่เหลี่ยมทั้งหลายที่ไม่ไปประชิดกับช่องสี่เหลี่ยมอื่น ๆ มินเทอมในช่องสี่เหลี่ยมเหล่านี้ไม่สามารถทำให้สั้นลงได้อีก
2. หาทุก ๆ ช่องสี่เหลี่ยมที่ประชิดกับช่องอื่นอีก 1 ช่อง แบบนี้จะเกิดคู่ (pair) ขึ้น
3. หาทุก ๆ ช่องสี่เหลี่ยมที่ประชิดกับช่องอื่นมากขึ้นเป็น 4 ช่อง (ควอ้ด), 8 ช่อง (ออคเต็ท)

4. ฟังก์ชันที่ง่ายที่สุดเกิดจากการรวมกันของคู่, ควอ้ด, ออคเต็ทจำนวนน้อยที่สุด โดยที่แต่ละอันได้จากการหาสี่เหลี่ยมประชิดที่ใหญ่ที่สุดที่จะใหญ่ได้

ลองดูอีกตัวอย่างหนึ่งสำหรับปัญหาเช่นนี้ ดังรูป 5.15



รูป 5.15 ตัวอย่างอีกอันหนึ่งสำหรับการเลือกแม็พเพื่อให้ได้ฟังก์ชันที่ง่ายที่สุด (เล็กที่สุด)

จากคาร์นอจ์แม็พดังรูป 5.15 ถ้าแม็พตามรูป (a), (b), (c) จะได้ฟังก์ชัน

$F_a = XZ + \bar{X}\bar{Y}\bar{Z} + W\bar{X}\bar{Y} + \bar{W}X\bar{Y}$

$F_b = XZ + \bar{X}\bar{Y}\bar{Z} + \bar{W}X\bar{Y} + W\bar{Y}Z$

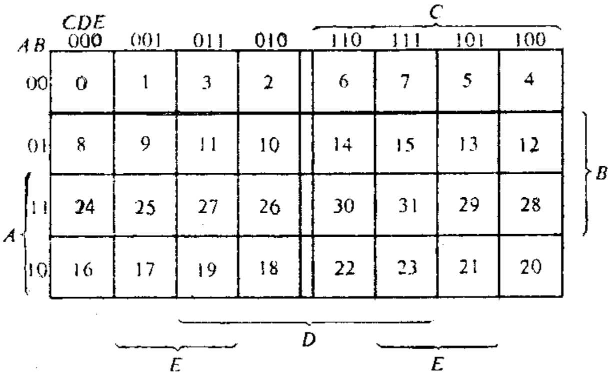
$F_c = XZ + \bar{W}\bar{Y}\bar{Z} + W\bar{X}\bar{Y}$

ซึ่งจะเห็นว่าฟังก์ชัน F_c เป็นฟังก์ชันที่ง่ายที่สุด (เล็กที่สุด)

5.5 คาร์นอจ์แม็พ 5 และ 6 ตัวแปร
Five-and Six-Variable Karnaugh Maps

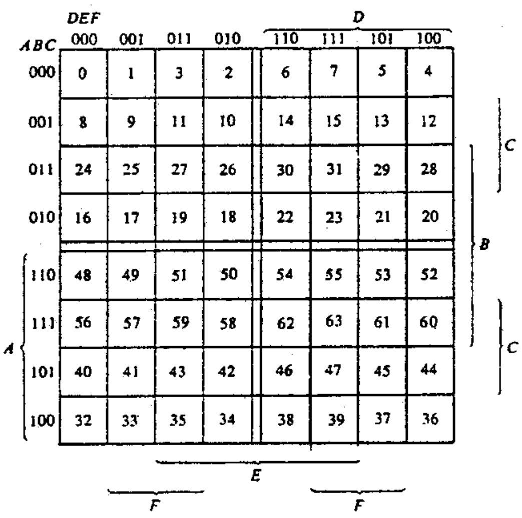
แม็พของตัวแปรที่มากกว่า 4 ตัวแปรนั้นไม่ง่ายต่อการใช้ สำหรับ 5 ตัวแปรคาร์นอจ์แม็พจะมี 2^5 คือ 32 ช่อง และ 6 ตัวแปรมี 2^6 คือ 64 ช่อง ตามจำนวนมินเทอม แม็พของตัวแปรมากกว่า 6 ตัวนั้น ต้องใช้ช่องสี่เหลี่ยมมากมาย จึงไม่สะดวกในทางปฏิบัติ รูป 5.16 และ 5.17 แสดงคาร์นอจ์แม็พของ 5 ตัวแปร และ 6 ตัวแปร ตามลำดับ แถวและคอลัมน์ของแม็พจัดเรียงค่าของตัวแปรตามแบบรหัสเกรย์ มินเทอมของแต่ละช่องสี่เหลี่ยมสามารถอ่านจากตัวเลขเหล่านี้ ซึ่งในรูปแสดงเป็นค่าเทียบเท่าของเลขฐานสิบ เช่น สี่เหลี่ยมในแถวที่ 3 (11) และคอลัมน์ที่สอง (001) ในคาร์นอจ์แม็พ 5 ตัวแปร คือเลข 11001 ซึ่งเทียบค่าเลขฐานสิบเป็น 25 ดังนั้นสี่เหลี่ยมช่องนี้แทนมินเทอม m_{25} ตัวแปร A, B, C, D, E ซึ่งหมายอยู่ประจำช่องสี่เหลี่ยมนั้นจะสอดคล้องกับค่าบิทของตัวแปรเป็น 1 ตัวอย่างเช่น ในคาร์นอจ์แม็พ 5 ตัวแปร A เป็น 1 ที่แถวสุดท้าย 2 แถว B เป็น 1 ที่แถวกลาง 2 แถว C เป็น 1 ที่คอลัมน์ขวามือทั้งสี่คอลัมน์

D เป็น 1 ที่คอลัมน์ตรงกลาง 4 คอลัมน์ และ E เป็น 1 ที่คอลัมน์ดังรูป ซึ่งจะเห็นว่า E ถูกแยกเป็นสองส่วน สำหรับแม็พของ 6 ตัวแปรก็มีค่าตัวแปรในลักษณะคล้ายคลึงกัน



AB	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	1	3	2	6	7	5	4
01	8	9	11	10	14	15	13	12
11	24	25	27	26	30	31	29	28
10	16	17	19	18	22	23	21	20

รูป 5.16 คาร์นอจ์แม็พ 5 ตัวแปร



ABC	000	001	011	010	110	111	101	100
000	0	1	3	2	6	7	5	4
001	8	9	11	10	14	15	13	12
011	24	25	27	26	30	31	29	28
010	16	17	19	18	22	23	21	20
110	48	49	51	50	54	55	53	52
111	56	57	59	58	62	63	61	60
101	40	41	43	42	46	47	45	44
100	32	33	35	34	38	39	37	36

รูป 5.17 คาร์นอจ์แม็พ 6 ตัวแปร

นิยามของสี่เหลี่ยมประชิดสำหรับแม็พอย่างในรูป 5.16 และ 5.17 นี้ ต้องมีการดัดแปลงบ้างเนื่องจากความจริงที่ว่า ตัวแปรบางตัวถูกแยกแบ่งเป็นสองส่วน แม็พของ 5 ตัวแปรต้องนึกอยู่เสมอว่าประกอบด้วยแม็พของ 4 ตัวแปร 2 อัน และคาร์นอจ์แม็พ 6 ตัวแปรประกอบด้วยแม็พ 4 ตัวแปรอยู่ 4 อัน แต่ละแม็พ 4 ตัวแปรแสดงให้เห็นเด่นชัดด้วยเส้นคู่ที่อยู่ตรงกลางของแม็พ โดยที่แต่ละอันมีสี่เหลี่ยมภายในซึ่งจะมีตัวแปรค่าต่างกันเพียง 1 บิทสำหรับสี่เหลี่ยม

ที่อยู่ประชิดกัน อาจพิจารณาได้ว่าเส้นคู่ตรงกลางนั้นเป็นตรงกลางหนังสือ โดยมีแต่ละครึ่งของแม็พเป็นหน้ากระดาษ เมื่อปิดหนังสือสี่เหลี่ยมประชิด 2 ช่องจะซ้อนทับกัน กล่าวอีกนัยหนึ่งคือ เส้นคู่ตรงกลางเปรียบเสมือนกระจกโดยมีแต่ละสี่เหลี่ยมประชิดกัน ไม่เพียงสี่ช่องที่อยู่ติดกันเท่านั้น แต่ยังมีภาพเงาในกระจกอีกด้วยที่นับเข้าเป็นสี่เหลี่ยมประชิดด้วย ตัวอย่างเช่น มินเทอม 31 ในคาร์นอจ์แม็พ 5 ตัวแปร มีมินเทอมที่ประชิดกับมัน คือมินเทอม 30, 15, 29, 23 และ 27 เช่นเดียวกันกับในคาร์นอจ์แม็พ 6 ตัวแปร แล้วยังเพิ่มมินเทอม 63 เป็นมินเทอมประชิดอีกด้วย

จากการตรวจสอบและเฝ้าสังเกตบวกกับนิยามใหม่ของสี่เหลี่ยมประชิดได้ข้อสรุปว่า สี่เหลี่ยมประชิด 2^k ช่อง โดย $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ในคาร์นอจ์แม็พ n ตัวแปร จะแทนพื้นที่ซึ่งให้เทอมที่มี $n - k$ ตัวอักษร (ตัวแปร) โดยที่ n ต้องใหญ่กว่า k เมื่อ $n = k$ พื้นที่ทั้งหมดของแม็พจะถูกรวบให้เกิดเป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ (identity function) ตาราง 5.1 แสดงความสัมพันธ์นี้ระหว่างสี่เหลี่ยมประชิดและจำนวนตัวอักษร (ตัวแปร) ในเทอม ตัวอย่างเช่น สี่เหลี่ยมประชิด 8 ช่อง รวมพื้นที่ในแม็พ 5 ตัวแปร ให้เทอมที่มี 2 ตัวอักษร

ตาราง 5.1 ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนสี่เหลี่ยมประชิดและจำนวนตัวอักษรในเทอม

	Number of adjacent squares	Number of literals in a term in an n-variable map					
k	2^k	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7
0	1	2	3	4	5	6	7
1	2	1	2	3	4	5	6
2	4	0	1	2	3	4	5
3	8		0	1	2	3	4
4	16			0	1	2	3
5	32				0	1	2
6	64					0	1

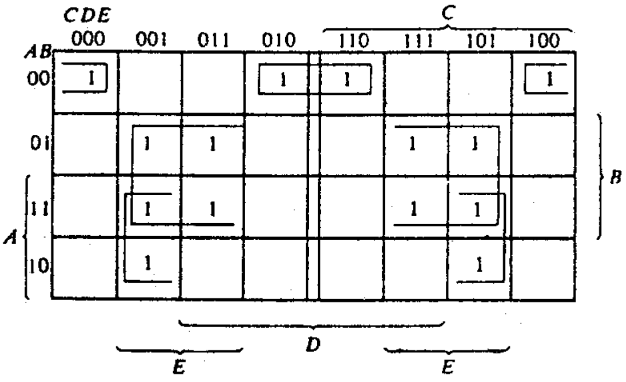
<u>ตัวอย่าง 5.8</u>

จงทำบูลลีนฟังก์ชันต่อไปนี้ให้ง่ายขึ้น

$$F(A, B, C, D, E) = \Sigma\,(0, 2, 4, 6, 9, 11, 13, 15, 17, 21, 25, 27, 29, 31)$$

วิธีทำ

คาร์นอจ์แม็พ 5 ตัวแปรของฟังก์ชันนี้แสดงดังรูป 5.18 แต่ละมินเทอมถูกแปลงให้เป็นเลขฐานสองที่เทียบเท่ากันและหมาย 1 ไว้ในสี่เหลี่ยมที่สอดคล้อง



รูป 5.18 แม็พของตัวอย่าง 5.8; F(A, B, C, D, E) = Σ (0, 2, 4, 6, 9, 11, 13, 15, 17, 21, 25, 27, 29, 31)

ต่อไปหาสี่เหลี่ยมประชิดที่ให้พื้นที่ใหญ่ที่สุด :

สี่เหลี่ยม 4 ช่องตรงกลางของแม็พขวามือจับกลุ่มได้กับสี่เหลี่ยม 4 ช่องตรงกลางของแม็พซ้ายมือ (โดยมีเส้นคู่ตรงกลางเสมือนกระจกเงาสะท้อนภาพ) ได้เป็นสี่เหลี่ยมประชิด 8 ช่อง ซึ่งแทนเทอม BE

ตรรก 1 ใน 2 แถวล่างได้ภาพสะท้อนผ่านเส้นคู่ตรงกลางคาร์นอจ์แม็พเกิดเป็นสี่เหลี่ยมประชิด 4 ช่อง แทนเทอม AD′E

ตรรก 1 ทั้งสี่ในแถวบนสุดรวมเป็นสี่เหลี่ยมประชิด 4 ช่อง แทนเทอม A′B′E′

ขณะนี้ตรรก 1 ทุกตัวถูกรวมไว้หมดแล้ว ดังนั้นจะได้

$$F = BE + AD'E + A'B'E'$$ **ตอบ**

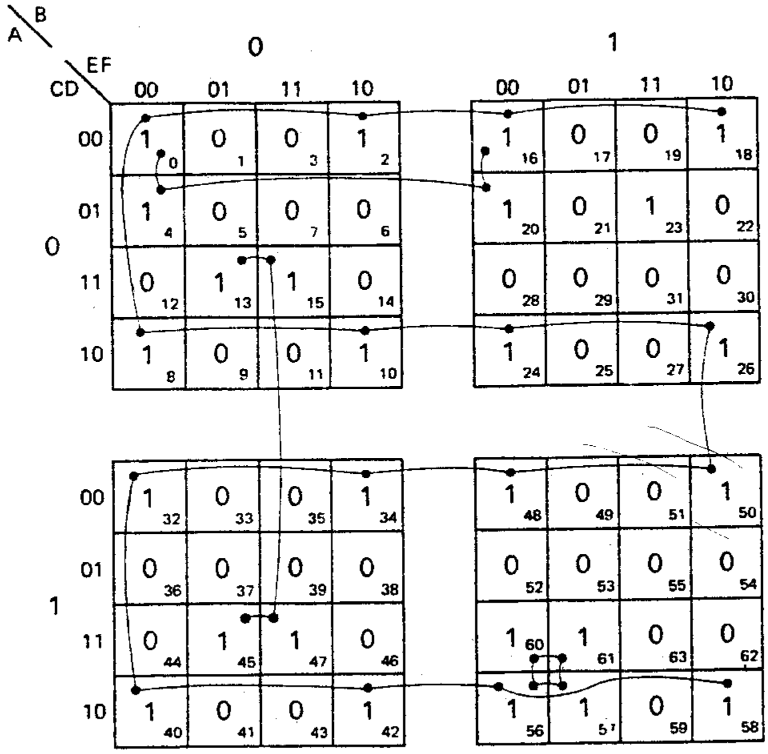
ตัวอย่าง 5.9

จงลดรูปสมการต่อไปนี้โดยวิธีแม็พ

$Y = \Sigma$ (0, 2, 4, 8, 10, 13, 15, 16, 18, 20, 23, 24, 26, 32, 34, 40, 42, 45, 47, 48, 50, 56, 57, 58, 60, 61)

วิธีทำ

บรรจุข้อมูลลงในคาร์นอจ์แม็พ 6 ตัวแปร และแม็พได้ดังรูป 5.19



A	CD	B=0, EF 00	01	11	10	B=1, EF 00	01	11	10
0	00	1_{0}	0_{1}	0_{3}	1_{2}	1_{16}	0_{17}	0_{19}	1_{18}
	01	1_{4}	0_{5}	0_{7}	0_{6}	1_{20}	0_{21}	1_{23}	0_{22}
	11	0_{12}	1_{13}	1_{15}	0_{14}	0_{28}	0_{29}	0_{31}	0_{30}
	10	1_{8}	0_{9}	0_{11}	1_{10}	1_{24}	0_{25}	0_{27}	1_{26}
1	00	1_{32}	0_{33}	0_{35}	1_{34}	1_{48}	0_{49}	0_{51}	1_{50}
	01	0_{36}	0_{37}	0_{39}	0_{38}	0_{52}	0_{53}	0_{55}	0_{54}
	11	0_{44}	1_{45}	1_{47}	0_{46}	1_{60}	1_{61}	0_{63}	0_{62}
	10	1_{40}	0_{41}	0_{43}	1_{42}	1_{56}	1_{57}	0_{59}	1_{58}

$Y = \bar{A}B\bar{C}DEF + \bar{A}\bar{C}\bar{E}\bar{F} + \bar{B}CDF + ABC\bar{E} + \bar{D}\bar{F}$

รูป 5.19 ตัวอย่าง 5.9

จะเห็นว่าทุก ๆ มินเทอมมีสี่เหลี่ยมประชิดทั้งสิ้น ยกเว้นมินเทอม m_{23}
ต่อไปนี้เป็นเทอมที่ได้จากการแม็พ

$m_{23} = \bar{A}B\bar{C}DEF$
$m_{0}, m_{4}, m_{16}, m_{20} = \bar{A}\bar{C}\bar{E}\bar{F}$
$m_{13}, m_{15}, m_{45}, m_{47} = \bar{B}CDF$
$m_{56}, m_{57}, m_{60}, m_{61} = ABC\bar{E}$
$m_{0}, m_{2}, m_{8}, m_{10}, m_{16}, m_{18}, m_{24}, m_{26}, m_{32}, m_{34}, m_{40}, m_{42}, m_{48}, m_{50}, m_{56}, m_{58} = \bar{D}\bar{F}$

ดังนั้นได้ผลลัพธ์คือ

$Y = \bar{A}B\bar{C}DEF + \bar{A}\bar{C}\bar{E}\bar{F} + \bar{B}CDF + ABC\bar{E} + \bar{D}\bar{F}$ **ตอบ**

5.6 การลดรูปในแบบผลคูณของผลบวก

Product of Sums Simplification

ที่กล่าวมาแล้วเป็นการแม็พโดยใช้ผลบวกของผลคูณ ถ้าเราดัดแปลงเล็กน้อยจะได้เป็นผลคูณของผลบวก

วิธีที่จะให้ได้ฟังก์ชันที่เล็กที่สุดในแบบผลคูณของผลบวกอาศัยสมบัติพื้นฐานของบูลลีนฟังก์ชัน ตรรก 1 ที่อยู่ในช่องสี่เหลี่ยมของคาร์นอจ์แม็พแทนมินเทอมของฟังก์ชัน มินเทอมไม่อยู่ในฟังก์ชันที่บ่งแสดงคอมพลีเมนต์ของฟังก์ชัน จากหลักการนี้เราจะเห็นว่า คอมพลีเมนต์ของฟังก์ชันจะถูกแทนอยู่ในคาร์นอจ์แม็พตรงช่องสี่เหลี่ยมที่ไม่มีตรรก 1 ถ้าเราใส่ 0 ไว้ในช่องสี่เหลี่ยมเหล่านี้แล้วรวมกลุ่มสี่เหลี่ยมประชิด ก็จะได้นิพจน์ที่ลดรูปแล้วของคอมพลีเมนต์ของฟังก์ชัน (นั่นคือคอมพลีเมนต์ของ F) คอมพลีเมนต์ของ F′ ได้เป็นฟังก์ชัน F กลับคืนมา โดยทฤษฎีเดอมอร์แกนฟังก์ชันที่ได้จะอยู่ในรูปแบบผลคูณของผลบวกโดยอัตโนมัติ

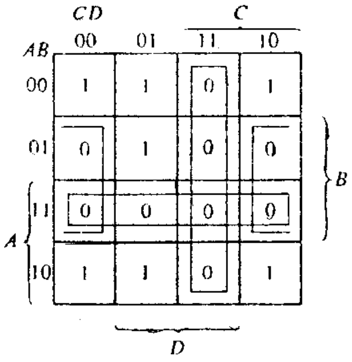
ตัวอย่าง 5.10

จงลดรูปบูลลีนฟังก์ชันต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปแบบผลบวกของผลคูณ และผลคูณของผลบวก $F(A, B, C, D) = \Sigma(0, 1, 2, 5, 8, 9, 10)$

วิธีทำ

ตรรก 1 ในสี่เหลี่ยมของแม็พดังรูป 5.20 แทนมินเทอมของฟังก์ชันโจทย์ ตรรก 0 ในสี่เหลี่ยมของแม็พแทนคอมพลีเมนต์ของ F (แทนมินเทอมที่ไม่อยู่ใน F) โดยการรวมสี่เหลี่ยมประชิดที่มีตรรก 1 ในแม็พจะได้ฟังก์ชันในรูปแบบผลบวกของผลคูณ :

$F(A, B, C, D) = B'D' + B'C' + A'C'D$ **ตอบ**



AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	0	0
11	0	0	0	0
10	1	1	0	1

รูป 5.20 ตัวอย่าง 5.10

ถ้ารวมสี่เหลี่ยมประชิดที่มีตรรก 0 บรรจุอยู่ เราจะได้คอมพลีเมนต์ของฟังก์ชันลดรูป :

$F' = AB + CD + BD'$

ใช้ทฤษฎีเดอ มอร์แกน (โดยการใช้สมบัติคู่เสมอกัน และคอมพลีเมนต์แต่ละตัวแปร) เราจะได้ฟังก์ชันลดรูปในรูปแบบผลคูณของผลบวก :

$$F = (A' + B')(C' + D')(B' + D)$$ **ตอบ**

ตัวอย่าง 5.10 แสดงขบวนการได้มาซึ่งการลดรูปในแบบผลคูณของผลบวกเมื่อฟังก์ชันเริ่มต้นอยู่ในรูปแบบบัญญัติชนิดผลบวกของมินเทอม ขบวนดังกล่าวนี้ยังคงเป็นจริงด้วยหากฟังก์ชันเริ่มต้นอยู่ในรูปแบบบัญญัติชนิดผลคูณของแม็กซ์เทอม พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตาราง 5.2 ตารางความจริงของฟังก์ชัน F

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

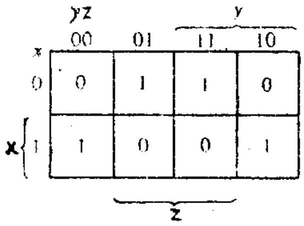
ฟังก์ชัน F มีตารางความจริงดังตาราง 5.2 ในรูปแบบผลบวกของมินเทอมแล้วฟังก์ชัน F เขียนแทนได้ด้วย

$$F(x, y, z) = \Sigma (1, 3, 4, 6)$$

ในรูปแบบผลคูณของแม็กซ์เทอม ฟังก์ชัน F แทนได้ด้วย

$$F(x, y, z) = \pi (0, 2, 5, 7)$$

กล่าวอีกนัยหนึ่งคือ ตรรก 1 ของฟังก์ชันแทนมินเทอม และตรรก 0 แทนแม็กซ์เทอม แม็พของฟังก์ชันนี้ได้ดังรูป 5.21



	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	0	0	1

รูป 5.21 แม็พของฟังก์ชันในตาราง 5.2

เราอาจเริ่มต้นบรรจุข้อมูลจากตารางความจริงของ F ในตาราง 5.2 ลงในแม็พรูป 5.21 ด้วยตรรก 1 ซึ่งแทนมินเทอม จากนั้นสี่เหลี่ยมช่องที่เหลือเราจึงใส่ตรรก 0 ซึ่งแทนแม็กซ์เทอมลงไป หรือในทางกลับกันอาจเริ่มต้นใส่ตรรก 0 ซึ่งแทนแม็กซ์เทอมตามตารางความจริงของ F ลงไปในแม็พก่อนแล้วจึงใส่ตรรก 1 ซึ่งแทนมินเทอมลงในสี่เหลี่ยมที่เหลือก็ได้

เมื่อบรรจุข้อมูลจากตารางความจริงของฟังก์ชัน F ลงในคาร์นอจ์แม็พเรียบร้อยแล้ว จึงลดรูปฟังก์ชันให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานหนึ่งในสองชนิดต่อไปนี้ คือ

ในแบบผลบวกของผลคูณ เรารวมตรรก 1 ในการลดรูปโดยคาร์นอจ์แม็พจะได้

$F = x'z + xz'$ (ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเอ็กซ์คลูสีฟ – ออ)

ในแบบผลคูณของผลบวก เรารวมตรรก 0 ในการลดรูปโดยคาร์นอจ์แม็พ จะได้ฟังก์ชันที่ถูกคอมพลีเมนต์ซึ่งลดรูปแล้ว (simplified complemented Function)

$F' = xz + x'z'$ (ซึ่งเป็นฟังก์ชันของอีควิเวเลนซ์ (equivalence function))

ทำคอมพลีเมนต์กับ F' จะได้ฟังก์ชันที่ลดรูปแล้วในแบบผลคูณของผลบวก :

$F = (x' + z')(x + z)$

สำหรับการพล้อตฟังก์ชันซึ่งแสดงอยู่ในแบบผลคูณของผลบวกลงในคาร์นอจ์แม็พ ให้ทำคอมพลีเมนต์ของฟังก์ชันนั้น แล้วจึงใส่ตรรก 0 ลงในสี่เหลี่ยมของคาร์นอจ์แม็พ จากนั้นใส่ตรรก 1 ลงในสี่เหลี่ยมที่เหลือ เช่นตัวอย่างมีฟังก์ชัน :

$F = (A' + B' + C)(B + D)$

สามารถพล้อตลงในคาร์นอจ์แม็พโดยเริ่มด้วยการหาคอมพลีเมนต์ของฟังก์ชัน :

$F' = ABC' + B'D'$

แล้วจึงใส่ตรรก 0 ลงในสี่เหลี่ยม (ของคาร์นอจ์แม็พ) ซึ่งแทนมินเทอมของ F' จากนั้นใส่ตรรก 1 ลงในสี่เหลี่ยมที่เหลือ

5.7 เงื่อนไขไม่สนใจ

Don't Care Conditions

ตรรก 1 และ 0 ในแม็พแสดงถึงสภาวะประสมของตัวแปรที่ทำให้ฟังก์ชันมีค่าเท่ากับ 1 หรือ 0 ตามลำดับ สภาวะประสมนั้นได้จากตารางความจริงซึ่งพรรณนาเงื่อนไขต่าง ๆ ที่ทำให้ฟังก์ชันมีค่าเป็น 1 และภายใต้เงื่อนไขอื่น ๆ นอกเหนือจากนี้ ฟังก์ชันถูกสมมติว่ามีค่าเป็น 0 ข้อสมมตินี้ไม่เป็นจริงเสมอไป เนื่องจากมีบางกรณีที่สภาวะประสมของตัวแปรอินพุทจะไม่เกิดขึ้น ตัวอย่างได้แก่ ในรหัส BCD 4 บิท เช่น รหัส 8421 รหัสเกิน 3 ซึ่งจะมี 6 สภาวะประสมที่ไม่มีใช้ดังได้กล่าวไปแล้วในบทที่ 3 วงจรตรรกใด ๆ ซึ่งใช้รหัสเหล่านี้ จะทำงานภายใต้สมมติฐานที่ว่าสภาวะประสม 6 อันนี้จะไม่เกิดขึ้นและไม่ได้ใช้ตราบเท่าที่ระบบวงจรยังคงทำงานได้เหมาะสม ผลลัพธ์ก็คือ เราไม่สนใจว่าเอาท์พุทของฟังก์ชันจะเป็นเช่นไรสำหรับ

สภาวะประสมเหล่านี้ของตัวแปร เนื่องจากเราแน่ใจอยู่แล้วว่าจะไม่เกิดขึ้นแน่นอน เงื่อนไขไม่สนใจทั้งหลายนี้สามารถนำไปใช้ช่วยในการทำให้ฟังก์ชันง่ายขึ้น

เราจะใช้สัญลักษณ์ X หรือ d แทนเงื่อนไขไม่สนใจลงในคาร์นอจ์แม็พ จะไม่ใช้ 1 หรือ 0 เพราะถ้าใช้ 1 หรือ 0 ย่อมหมายความว่าฟังก์ชันมีค่าเฉพาะลงไปว่าเป็น 1 หรือ 0 ในสภาวะเงื่อนไขนั้น ๆ ของอินพุท

เมื่อเลือกสี่เหลี่ยมประชิดในการทำฟังก์ชันให้ง่ายขึ้น X หรือ d จะถูกสมมติว่าเป็น 1 หรือ 0 แล้วแต่ว่าเราต้องการนิพจน์ที่ลดรูปในแบบใด เราจะไม่จำเป็นต้องใช้ X หรือ d ถ้ามันไม่ได้มีส่วนอยู่ในพื้นที่ที่ใหญ่กว่าในการเลือกแม็พ การเลือกใช้ X (หรือ d) หรือไม่นั้นขึ้นอยู่กับรูปแบบที่เราต้องการลดรูป

ตัวอย่าง 5.11

จงลดรูปบูลลีนฟังก์ชัน :

$$F(w, x, y, z) = \Sigma (1, 3, 7, 11, 15)$$

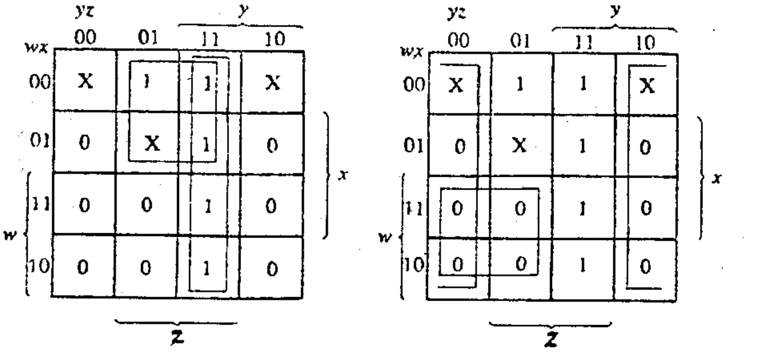
และเงื่อนไขไม่สนใจ :

$$d(w, x, y, z) = \Sigma (0, 2, 5)$$

วิธีทำ

มินเทอมของฟังก์ชัน F เป็นสภาวะประสมของตัวแปรซึ่งทำให้ฟังก์ชันเป็น 1 มินเทอมของ d เป็นสภาวะประสมที่ไม่สนใจ และจะไม่เกิดขึ้น เราแทน 1 และ X สำหรับมินเทอมทั้งสองแบบที่กล่าวข้างต้นตามลำดับ ดังรูป 5.22 สำหรับสี่เหลี่ยมที่เหลือเราแทนด้วย 0 รูป (a) นั้น 1 และ X รวมกันในลักษณะที่จะให้ได้สี่เหลี่ยมประชิดมีขนาดโตที่สุด ไม่จำเป็นต้องใช้ X ทุกอันที่มี แต่ใช้เฉพาะบางอันที่จำเป็นแก่การลดรูปเท่านั้น ดังนั้น ในแบบผลบวกของผลคูณจะได้ฟังก์ชันที่ลดรูปแล้ว คือ

$$F = w'z + yz$$



wx \ yz	00	01	11	10
00	X	1	1	X
01	0	X	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	1	0

(a) Combining 1's and X's F = w'z + yz

wx \ yz	00	01	11	10
00	X	1	1	X
01	0	X	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	1	0

(b) Combining 0's and X's F = z(w' + y)

รูป 5.22 ตัวอย่างการใช้เงื่อนไขไม่สนใจในการลดรูปฟังก์ชัน

ในรูป (b) นั้น 0 รวมกับ X เพื่อลดรูปคอมพลีเมนต์ของฟังก์ชัน ได้คอมพลีเมนต์ฟังก์ชันซึ่งลดรูปแล้วเป็น :

$$F' = z' + wy'$$

คอมพลีเมนต์อีกครั้ง จะได้ฟังก์ชันในแบบผลคูณของผลบวกที่ลดรูปแล้ว คือ

$$F = z(w' + y)$$ **ตอบ**

นิพจน์ที่ได้ทั้งสองรูปแบบจากตัวอย่าง 5.11 เป็นฟังก์ชันซึ่งอาจแสดงได้ว่าเท่ากันเชิงพีชคณิต เหตุการณ์เช่นนี้มิได้เกิดขึ้นเสมอทุกครั้งที่ใช้เงื่อนไขไม่สนใจช่วยในการลดรูป โดยแท้จริงแล้วเมื่อใช้ X ให้มีค่าเป็น 1 เพื่อรวมกับ 1 ทั้งหลายในการแม็พ แล้วใช้ X ให้มีค่าเป็น 0 เพื่อรวมกับ 0 ทั้งหลายในการแม็พ ฟังก์ชันผลลัพธ์ที่ได้จะไม่เท่ากันเชิงพีชคณิต การเลือกใช้ X ตัวเดียวกันให้มีค่าเป็น 1 ครั้งหนึ่ง และเป็น 0 อีกครั้งหนึ่ง ให้ผลลัพธ์เป็นนิพจน์ของมินเทอมที่แตกต่างกัน ดังนั้นฟังก์ชันจึงแตกต่างกัน ซึ่งจะเห็นได้จากตัวอย่าง 5.11 ในตัวอย่างนี้ X ซึ่งถูกเลือกให้เป็น 1 ไม่ได้ถูกเลือกให้เป็น 0 ถ้าในรูป 5.22 (a) เราเลือกเทอม $w'x'$ แทนเทอม $w'z$ เราจะได้ฟังก์ชันเป็น :

$$F = w'x' + yz$$

ซึ่งไม่เท่ากันเชิงพีชคณิตกับฟังก์ชันในรูปแบบผลคูณของผลบวกที่ได้จากรูป 5.22 (b) ทั้งนี้เพราะ X ถูกใช้ให้มีค่าเป็น 1 และเป็น 0 ด้วย ในการลดรูปแบบผลบวกของผลคูณ และผลคูณของผลบวกตามลำดับ

ตัวอย่าง 5.11 นี้ ยังแสดงให้เห็นอีกว่านิพจน์ที่มีจำนวนตัวอักษรน้อยที่สุดไม่จำเป็นต้องเป็นหนึ่งเดียว (unique) บางครั้งผู้ออกแบบอาจต้องเผชิญกับปัญหาการเลือกเทอม 2 เทอมที่ให้จำนวนตัวอักษรน้อยเท่าเทียมกัน ซึ่งส่งผลเป็นฟังก์ชันที่น้อยที่สุด (ง่ายที่สุด)

5.8 วิธีตีตาราง
The Tabulation Method

การลดรูปฟังก์ชันโดยวิธีแม็พนั้นสะดวกสำหรับตัวแปรจำนวนไม่เกิน 5 หรือ 6 ตัว เมื่อจำนวนตัวแปรเพิ่มขึ้นจำนวนสี่เหลี่ยมที่มากขึ้นตามไปด้วยนั้น ทำให้การเลือกสี่เหลี่ยมประชิดไม่สมเหตุสมผล ข้อเสียของวิธีแม็พคือการจัดกลุ่มสี่เหลี่ยมประชิดกลายเป็นขบวนการลองผิดลองถูก (trial – and – error) ทั้งนี้เพราะความสามารถของมนุษย์มีขีดจำกัด สำหรับฟังก์ชัน 5 หรือ 6 ตัวแปร จึงยากที่จะแน่ใจได้ว่าการเลือกนั้น ๆ ให้ผลที่ดีที่สุด

วิธีตีตารางเอาชนะความยากลำบากนี้ได้ เพราะเป็นวิธีที่ทำเป็นขั้นเป็นตอน จึงเป็นหลักประกันได้ว่าจะให้นิพจน์ที่ลดรูปแล้วในรูปแบบมาตรฐาน วิธีการนี้สามารถประยุกต์กับปัญหาหลาย ๆ ตัวแปร และมีข้อดีคือเหมาะสมที่จะใช้สำหรับการคำนวณด้วยเครื่อง อย่างไร

ก็ตามวิธีการนี้ออกจะเป็นงานหนักสำหรับมนุษย์ใช้ ทั้งยังอาจเกิดความผิดพลาดได้ง่าย เพราะเป็นขบวนการที่จำเจซ้ำซาก

วิธีตีตารางถูกคิดค้นครั้งแรกโดยควิน (Quine) และได้รับการปรับปรุงต่อมาโดยแม็กคลูสกี (McCluskey) จึงรู้จักกันว่าวิธีควิน-แม็กคลูสกี (Quine – McCluskey method)

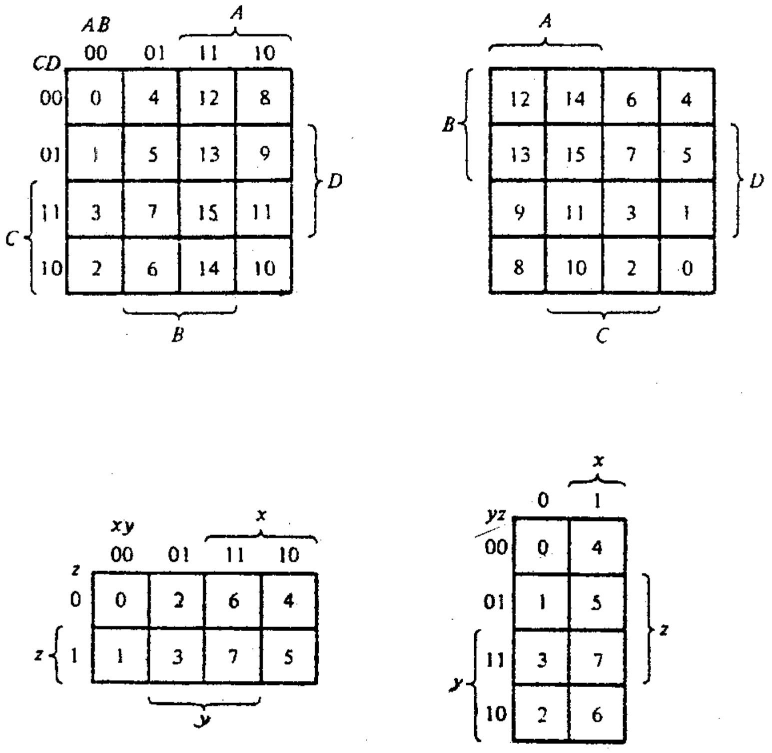
การทำให้ฟังก์ชันง่ายขึ้นโดยวิธีตีตารางประกอบด้วย 2 ส่วน ส่วนแรกเป็นการค้นหา (ซึ่งเหน็ดเหนื่อย) ทุก ๆ เทอมที่อาจถูกคัดเลือกให้ร่วมอยู่ในฟังก์ชันที่ลดรูปแล้ว เรียกเทอมเหล่านี้ว่า พราม-อินพลิแคนท์ (prime-implicants) ส่วนที่สองเป็นการคัดเลือก พราม-อิมพลิแคนท์ที่จะทำให้นิพจน์ที่ได้มีจำนวนตัวอักษร (ตัวแปร) น้อยที่สุด

วิธีตีตารางอาจให้ผลลัพธ์เป็นฟังก์ชันในแบบผลบวกของผลคูณ หรือผลคูณของผลบวกก็ได้เช่นเดียวกับวิธีแม็พ

สรุป

เกณฑ์สำหรับการทำฟังก์ชันให้ง่ายขึ้นอยู่ที่การลดรูปตัวแปรในแบบผลบวกของผลคูณหรือผลคูณของผลบวกให้มีจำนวนตัวแปรน้อยลง การลดรูปนั้นอาจใช้วิธีคาร์นอจ์แม็พ หรือควิน-แม็กคลูสกี

วิธีลดรูปฟังก์ชันโดยคาร์นอจ์แม็พ n ตัวแปร จะได้จำนวนสี่เหลี่ยม 2^n ช่อง แต่ละช่องแทนมินเทอม หรือแมกซ์เทอมของฟังก์ชันซึ่งมีจำนวน 2^n เทอม การวางตัวแปรในคาร์นอจ์แม็พนั้นจะให้แถวหรือคอลัมน์แทนตัวแปรอย่างไรก็ได้ (ดูรูป 5.23 ประกอบ) ข้อสำคัญคือการจัดเรียงค่าของตัวแปร จะต้องยึดหลักการของรหัสเกรย์ที่ว่า ช่องสี่เหลี่ยมที่อยู่ประชิดติดกันจะมีบิทของค่าตัวแปรในแบบเลขฐานสองต่างกันเพียงบิทเดียว ช่องสี่เหลี่ยมประชิดนั้นรวมครอบคลุมไปถึงสี่เหลี่ยมในคอลัมน์ซ้ายสุดและขวาสุด หรือสี่เหลี่ยมในแถวบนสุดและล่างสุดสามารถเป็นสี่เหลี่ยมประชิด เพราะเราสามารถม้วนคาร์นอจ์แม็พให้พื้นผิวซ้ายและขวาแตะกัน ทำนองเดียวกับพื้นผิวบนแตะพื้นผิวล่างได้ สิ่งที่ช่วยในการลดรูปฟังก์ชันอีกอย่างหนึ่งคือ เงื่อนไขไม่สนใจ



CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

12	14	6	4
13	15	7	5
9	11	3	1
8	10	2	0

z \ xy	00	01	11	10
0	0	2	6	4
1	1	3	7	5

yz \ x	0	1
00	0	4
01	1	5
11	3	7
10	2	6

รูป 5.23 การแปรผันของแม็พ

ถ้ามีสี่เหลี่ยมประชิด 2^k ช่อง จะลดรูปให้เทอมที่มี $n - k$ ตัวแปร เมื่อ $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ และ n เป็นจำนวนตัวแปร ตรรก 1 ในสี่เหลี่ยมประชิดจับกลุ่มกันได้เทอมผลคูณของตัวแปรโดยตัวแปรที่มีค่า 0 จะเป็นคอมพลีเมนต์ของตัวแปรนั้น และตัวแปรที่มีค่าเป็น 1 จะเป็นตัวแปรนั้นเอง สำหรับตัวแปรที่มีค่าทั้ง 0 และ 1 จะถูกลดรูปทิ้งไป เมื่อนำเทอมผลคูณที่ได้ทั้งหมดจากการแม็พมาออกัน จะได้ฟังก์ชันในแบบผลบวกของผลคูณ

ตรรก 0 ในสี่เหลี่ยมประชิดจับกลุ่มกันได้เทอมผลบวกของตัวแปร โดยตัวแปรที่มีค่า 0 จะเป็นตัวแปรนั้นเอง ตัวแปรที่มีค่าเป็น 1 จะเป็นคอมพลีเมนต์ของตัวแปร สำหรับตัวแปรที่มีค่าทั้ง 0 และ 1 จะถูกลดรูปทิ้งไป เมื่อนำเทอมผลบวกที่ได้ทั้งหมดจากการแม็พมาแอนกัน ก็จะได้ฟังก์ชันในแบบผลคูณของผลบวก

ฟังก์ชันที่ลดรูปแล้วเป็นฟังก์ชันในรูปแบบมาตรฐานแบบใดแบบหนึ่งข้างบนนี้

การทำบูลลีนฟังก์ชันให้ง่ายขึ้นโดยวิธีควิน-แม็กคลูสกีขจัดปัญหาอุปสรรคความยุ่งยากในการแม็พกรณีตัวแปรตั้งแต่ 5, 6 ตัวขึ้นไป เพราะเป็นวิธีที่มีขบวนการเป็นขั้นเป็นตอน อย่างไรก็ดีวิธีควิน-แม็กคลูสกีอาจก่อความผิดพลาดได้ง่ายในการหาพราม-อิมพลิแคนท์ เพราะเป็นงานที่ซ้ำซาก วิธีนี้เหมาะสำหรับการลดรูปฟังก์ชันในคอมพิวเตอร์

แบบฝึกหัด

5.1 จงลดรูปฟังก์ชันต่อไปนี้โดยวิธีแม็พ

$W = \Sigma(1, 5, 6, 7, 14, 15)$

5.2 จงเขียนตารางความจริง, คาร์นอจ์แม็พ แล้วลดรูปสำหรับวงจรตรรกวงจรหนึ่งซึ่งจะให้เอาท์พุทเมื่ออินพุทหนึ่งอัน หรือทั้งสามอันมีค่าเป็น 1 วงจรนี้มี 3 อินพุท

5.3 กำหนดตารางความจริงดังนี้

A	B	C	F_1	F_2
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

(ก) จงแสดงฟังก์ชัน F_1, F_2 ในรูปแบบผลบวกของมินเทอม และผลคูณของแม็กซ์เทอม

(ข) จงลดรูปฟังก์ชัน F_1, F_2 ในแบบผลบวกของผลคูณ และผลคูณของผลบวก

5.4 จงลดรูปฟังก์ชันต่อไปนี้ แล้วแสดงฟังก์ชันในแบบผลบวกของผลคูณและผลคูณของผลบวก

$F(A, B, C, D) = \pi(0, 1, 2, 3, 4, 10, 11)$

5.5 จงใช้คาร์นอจ์แม็พลดรูปนิพจน์ต่อไปนี้ แล้วแสดงในแบบผลบวกของผลคูณ และผลคูณของผลบวก

(ก) $x'z' + y'z' + yz' + xyz$

(ข) $(A' + B' + D')(A + B' + C')(A' + B + D')(B + C' + D')$

(ค) $(A' + B' + D)(A' + D')(A + B + D')(A + B' + C + D)$

5.6 จงลดรูปบูลลีนฟังก์ชัน F ใช้เงื่อนไขไม่สนใจ d ให้อยู่ทั้งในแบบผลบวกของผลคูณ และผลคูณของผลบวก

(ก) $F = A'B'D' + A'CD + A'BC$

$d = A'BC'D + ACD + AB'D'$

(ข) $F = B'DE' + A'BE + B'C'E' + A'BC'D'$

$d = BDE' + CD'E'$

(ค) $F = w'(x'y + x'y' + xyz) + x'z'(y + w)$

$d = w'x(y'z + yz') + wyz$

5.7 จงหานิพจน์ที่น้อยที่สุดสำหรับสมการ

$Y = \Sigma(2, 3, 4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 28, 29, 30, 31)$

ให้แสดงทั้งแบบผลบวกของผลคูณ และผลคูณของผลบวก

5.8 จงลดรูปของนิพจน์ :

$(\overline{W} + \overline{X} + Y + Z)(\overline{W} + X + \overline{Y} + Z)(\overline{W} + X + Y + Z)$

$$\overbrace{(W + X + \overline{Y} + Z)(W + \overline{X} + Y + Z)(\overline{W} + \overline{X} + Y + \overline{Z})(W + X + Y + Z)}^{\text{DON'T - CARE}}$$