บทที่ 5
การทำบูลลีนฟังก์ชันให้ง่ายขึ้น
SIMPLIFICATION OF BOOLEAN FUNCTIONS

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาจบบทนี้แล้ว นักศึกษาสามารถ

1. ทำบูลลีนฟังก์ชันให้ง่ายขึ้นโดยวิธีคาร์นอจ์แม็พ ทั้งในแบบผลบวกของผลคูณและผลคูณของผลบวก
2. ใช้เงื่อนไขไม่สนใจช่วยในการทำบูลลีนฟังก์ชันให้ง่ายขึ้น

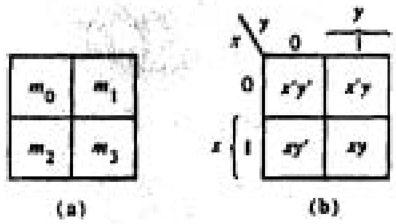
5.1 วิธีแม็พ
The Map Method

แม้ว่าบูลลีนฟังก์ชันจะสามารถทำให้ง่าย โดยใช้พีชคณิตบูลลีนอย่างรายละเอียดในบทที่ 4 ก็ตาม แต่เราก็ไม่อาจแน่ใจได้ว่าบูลลีนฟังก์ชันหนึ่ง ๆ จะลดรูปให้ง่ายได้เพียงใด เพราะไม่มีกฎเกณฑ์ตายตัวที่จะคาดหมายขั้นตอนต่าง ๆ ในขบวนการลดรูปโดยพีชคณิตบูลลีน วิธีแม็พเป็นวิธีที่ง่าย ตรงไปตรงมา สำหรับการลดรูปบูลลีนฟังก์ชัน อาจกล่าวได้ว่าวิธีนี้เป็นภาพของตารางความจริงของบูลลีนฟังก์ชัน วิธีแม็พแรกเริ่มเสนอโดยวิทช์ (Veitch) และดัดแปลงโดยคาร์นอจ์ (Karnaugh) จึงอาจเรียกวิธีแม็พว่า แผนภาพวิทช์ (Veitch diagram) หรือคาร์นอจ์แม็พ (Karnaugh map)

คาร์นอจ์แม็พเป็นแผนภาพประกอบด้วยสี่เหลี่ยมจัตุรัสจำนวนเท่ากับ 2^n ช่อง เมื่อ n คือจำนวนตัวแปรในฟังก์ชัน แต่ละสี่เหลี่ยมแทนมินเทอม 1 เทอม เนื่องจากบูลลีนฟังก์ชันใด ๆ สามารถแสดงได้ด้วยผลบวกของมินเทอม จึงอาจแทนบูลลีนฟังก์ชันในเชิงกราฟในแม็พโดยพื้นที่ที่ถูกล้อมรอบด้วยสี่เหลี่ยมซึ่งแทนมินเทอมในฟังก์ชัน โดยแท้จริงแล้วคาร์นอจ์แม็พเป็นแผนภาพให้เห็นทุกวิถีทางที่จะแสดงฟังก์ชันในรูปแบบมาตรฐาน นิพจน์ที่ได้จากการแม็พอาจมีหลายอัน เราจะเลือกอันที่ง่ายที่สุด นิพจน์ที่ง่ายที่สุดอาจอยู่ในแบบผลบวกของผลคูณ หรือผลคูณของผลบวก ซึ่งประกอบด้วยจำนวนตัวอักษร (ตัวแปร) น้อยที่สุด [นิพจน์นี้ไม่จำเป็นต้องมีหนึ่งเดียว (unique)]

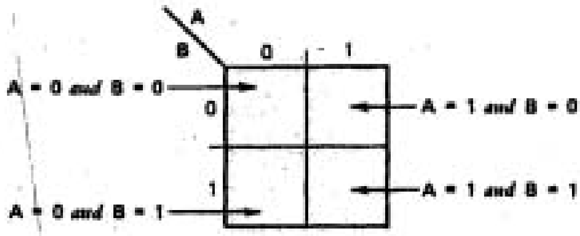
5.2 คาร์นอจ์แม็พ 2 ตัวแปร
Two-Variable Karnaugh Map

คาร์นอจ์แม็พของตัวแปร 2 ตัว แสดงดังรูป 5.1 จำนวนมินเทอมมี 4 เทอม แม็พจึงประกอบด้วยสี่เหลี่ยมจัตุรัส 4 อัน แต่ละอันสำหรับมินเทอม 1 เทอม รูป 5.1 (b) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสและตัวแปรทั้งสอง แต่ละแถว (row) และคอลัมน์ (column) ถูกกำหนดด้วยตรรก 0 และ 1 ให้เป็นค่าของตัวแปรทั้งสอง ในที่นี้คือ x และ y ตามลำดับ สังเกตว่า x จะมีเครื่องหมายพราม (prime :/) กำกับในแถวที่เป็น 0 และไม่มีเครื่องหมายพรามในแถวที่เป็น 1 ทำนองเดียวกับ y ซึ่งมีพรามในคอลัมน์ 0 และไม่มีพรามในคอลัมน์ 1 (พรามหมายถึงคอมพลีเมนต์ของตัวแปร ซึ่งอาจใช้เครื่องหมายบาร์ (‾) ไว้เหนือตัวแปรแทนก็ได้ ดังที่กล่าวแล้วในบทที่ 4)



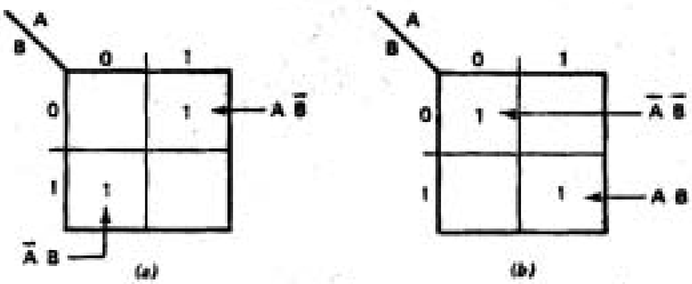
รูป 5.1 คาร์นอจ์แม็พ 2 ตัวแปร

เพื่อให้เห็นชัดเจนว่าแต่ละสี่เหลี่ยมของแม็พแทนมินเทอมของตัวแปรมีค่าอย่างไรบ้าง จะขอยกตัวอย่างตัวแปร A, B ซึ่งเขียนแม็พได้ดังรูป 5.2



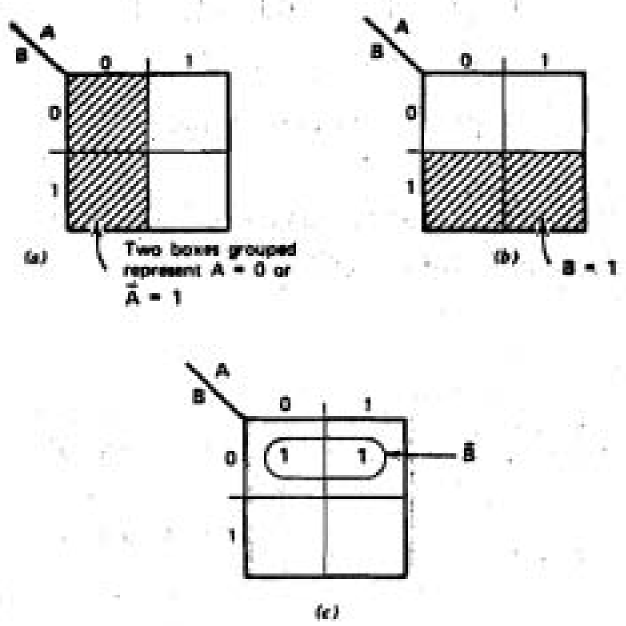
รูป 5.2 คาร์นอจ์แม็พ 2 ตัวแปร ระบุค่าตัวแปรแต่ละช่อง

แม็พของรูป 5.3 แสดงวิธีหานิพจน์บูลลีนจากแม็พ รูป 5.3 (a) แสดงคาร์นอจ์แม็พซึ่งมีตรรก 1 ปรากฏอยู่ 2 ช่องสี่เหลี่ยม ตรรก 1 แต่ละตัวหมายถึงสภาวะสำหรับนิพจน์บูลลีนที่เป็น 1 ดังนั้นนิพจน์บูลลีนทั้งหมดจึงได้จากการบวก (การออ) มินเทอมแต่ละช่องจึงได้เป็น $A\bar{B} + \bar{A}B$ ในทำนองเดียวกัน รูป 5.3 (b) จะได้นิพจน์บูลลีน คือ $AB + \bar{A}\bar{B}$



รูป 5.3 ตัวอย่างการหานิพจน์บูลลีนจากแม็พ

คาร์นอจ์แม็พคือ รูปภาพของตารางความจริงดังได้กล่าวไว้แล้วตอนต้น (หมายความว่าจากตารางความจริงสามารถเขียนลงเป็นคาร์นอจ์แม็พได้) แต่มีข้อแตกต่างคือ เราสามารถจับกลุ่มของแม็พที่มีค่าตรรก 1 ได้ ผลลัพธ์ก็คือ การทำให้เป็นนิพจน์ที่ง่ายขึ้น (simplify)



รูป 5.4 การจับกลุ่มตรรก 1 บนคาร์นอจ์แม็พ

ตัวอย่างเช่น ในรูป 5.4 (a) เป็นการจับกลุ่มของสี่เหลี่ยมภายใต้ค่า $A = 0$ หรือ $\bar{A} = 1$ รูป 5.4 (b) แสดงคาร์นอจ์แม็พซึ่งจับกลุ่มตรรก $B = 1$ สำหรับรูป 5.4 (c) แสดงการพล็อตตรรก 1 ลงในแม็พ 1 สองตัวซึ่งอยู่ติดกันสามารถจับกลุ่มแล้วลดรูปได้นิพจน์คือ $\bar{B}$ ซึ่งอาจวิเคราะห์ได้ดังนี้ แต่ละช่องของคาร์นอจ์แม็พในรูปนี้ให้เทอมคือ

$$\bar{A}\bar{B} + A\bar{B}$$

ซึ่งลดรูปได้ดังนี้

$$\bar{A}\bar{B} + A\bar{B} = \bar{B}(\bar{A} + A) = \bar{B}(1) = \bar{B}$$

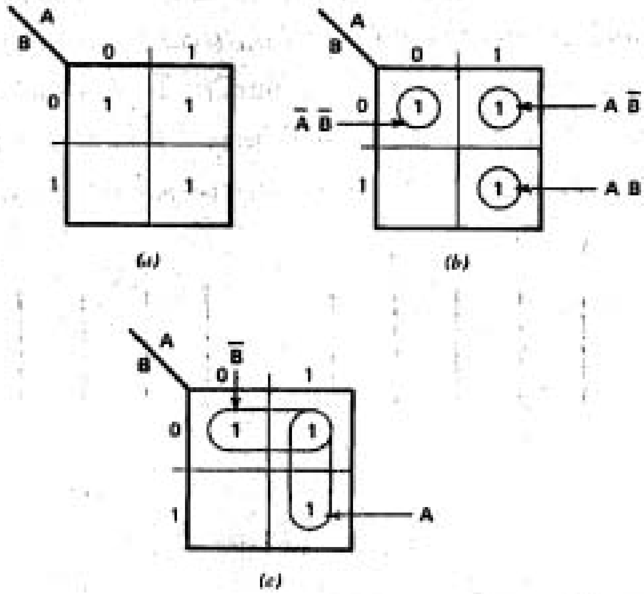
ซึ่งคือสิ่งที่อ่านได้จากการจับกลุ่มตรรก 1 ซึ่งปรากฏอยู่ในช่องสี่เหลี่ยมของคาร์นอจ์แม็พที่ประชิดติดกัน

สรุปกฎสำหรับคาร์นอจ์แม็พ 2 ตัวแปร ได้ว่า

1. ตรรก 1 ที่อยู่ประชิดติดกัน 2 ตัว ในคาร์นอจ์แม็พ จับกลุ่มแล้วจะแทนตัวแปร 1 ตัว
2. ตรรก 1 ที่อยู่โดด ๆ ในคาร์นอจ์แม็พ จะแทนผลคูณ (การแอน) ของ 2 ตัวแปร
3. นิพจน์ทั้งหมดที่สอดคล้องกับตรรก 1 ทั้งหมดของคาร์นอจ์แม็พก็คือ ผลบวก (การออ) ของเทอมต่าง ๆ ในข้อ 1 และ 2

ตัวอย่าง 5.1

จงหานิพจน์จากคาร์นอจ์แม็พในรูป 5.5 (a)



รูป 5.5 โจทย์ตัวอย่าง 5.1

วิธีทำ

1 แต่ละตัวแทนเทอมต่าง ๆ ดังรูป 5.5 (b)

ดังนั้นนิพจน์นี้คือ

$M = \bar{A}\bar{B} + A\bar{B} + AB$

ถ้ารวม 1 ที่ประชิดกันจากแม็พในรูป 5.3 (c) จะสามารถอ่านนิพจน์นี้ได้เป็น

$M = A + \bar{B}$

ซึ่งเป็นนิพจน์ที่ง่ายกว่านิพจน์ข้างบน **ตอบ**

กฎของการลดรูปนิพจน์บูลลีนโดยคาร์นอจ์แม็พคือ จับกลุ่มตรรก 1 ให้มีขนาดใหญ่ที่สุดที่จะเป็นไปได้ แล้วอ่านเทอมที่ได้ออกมา โดยยึดหลักว่าตัวแปรใดมีค่าทั้งตัวแปรเองและคอมพลีเมนต์ของตัวแปร ตัวแปรนั้นจะถูกลดรูปทิ้งไป นอกจากนี้ 1 ที่ใช้ไปในการจับกลุ่มแล้วอาจมาใช้ในการจับกลุ่มใหม่ได้อีก โดยสรุปแล้วการลดรูปนิพจน์โดยคาร์นอจ์แม็พตั้งอยู่บนกฎเกณฑ์ของพีชคณิตบูลลีนว่า

$AB + A\bar{B} = A$

$A + A = A$

เมื่อ A เป็นกี่ตัวแปรก็ได้ B ต้องเป็นตัวแปรเดียว

5.3 คาร์นอจ์แม็พ 3 ตัวแปร

Three-Variable Karnaugh Map

คาร์นอจ์แม็พ 3 ตัวแปรประกอบด้วยสี่เหลี่ยม 8 ช่อง ตามจำนวนมินเทอมของ 3 ตัวแปร สังเกตการจัดเรียงมินเทอมว่ามิได้เป็นไปตามลำดับของเลขฐานสอง แต่เป็นในแบบรหัสเกรย์ ซึ่งมีสมบัติว่ารหัสที่อยู่ติดกันจะมีบิทต่างกันเพียงบิทเดียว ในที่นี้คือ 00, 01, 11, 10 เพื่อสามารถจับกลุ่มของ 1 ที่อยู่ประชิดกัน ได้การลดรูปเกิดขึ้น (แม้แต่สี่เหลี่ยมช่องซ้ายสุดก็มีตัวแปรซึ่งค่าต่างกับสี่เหลี่ยมช่องขวาสุดเพียงบิทเดียวเพื่อสามารถม้วนมาลดรูปกันได้)

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6

(a)

$x \backslash yz$	00	01	11 (y)	10 (y)
0	$x'y'z'$	$x'y'z$	$x'yz$	$x'yz'$
1 (x)	$xy'z'$	$xy'z$	xyz	xyz'

(b)

รูป 5.6 คาร์นอจ์แม็พ 3 ตัวแปร

กฎสำหรับคาร์นอจ์แม็พ 3 ตัวแปรมีว่า

1. กลุ่มของ 1 ที่อยู่ในสี่เหลี่ยมประชิดกัน 4 ช่อง เรียกว่าควอ้ด (quad) สามารถลดรูปแล้วเหลือเทอมของ 1 ตัวแปร

2. กลุ่มของ 1 ในสี่เหลี่ยมประชิดกัน 2 ช่อง เรียกว่าคู่ (pair) ลดรูปแล้วได้ผลคูณ (การแอน) ของตัวแปร 2 ตัว

3. ช่องสี่เหลี่ยมที่มี 1 อยู่โดด ๆ คือผลคูณของ 3 ตัวแปร

ต่อไปลองพิจารณาสี่เหลี่ยมของ m_0 กับ m_2 หรือคือเทอม $x'y'z'$ และ $x'yz'$ ซึ่งมีตัวอักษรต่างกันเพียง 1 ตัว คือ y ดังนั้นสามารถลดตัวแปรนี้ไปได้ เนื่องจาก มี y และ y' :

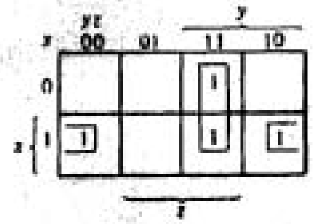
$$x'y'z' + x'yz' = x'z'$$

<u>ตัวอย่าง 5.2</u>

จงทำบูลลีนฟังก์ชัน $F = x'yz + xy'z' + xyz + xyz'$ ให้เป็นฟังก์ชันที่ง่ายขึ้น

<u>วิธีทำ</u>

บรรจุข้อมูลของโจทย์ลงในช่องสี่เหลี่ยมของคาร์นอจ์แม็พ 3 ตัวแปร
แต่ละมินเทอมคือ 1 ของค่าฟังก์ชันในตารางความจริง
มินเทอมที่เหลือนอกเหนือจากนี้คือ ค่าของฟังก์ชันเท่ากับ 0
อาจเขียน 0 ลงในช่องสี่เหลี่ยมของมินเทอมนั้น ๆ หรือไม่ก็ได้
จะได้คาร์นอจ์แม็พดังรูป 5.7



รูป 5.7 คาร์นอจ์แม็พของตัวอย่าง 5.2

เมื่อจับกลุ่มของ 1 ที่ประชิดกันแล้วสามารถลดรูปได้เหลือดังนี้

คู่ของ 1 ในแนวตั้ง ได้เทอม yz 1 ในช่องล่างซ้ายสามารถม้วนมาจับคู่กับ 1 ในช่องล่างขวา ได้เทอม xz′

ดังนั้นจึงได้ฟังก์ชันที่ง่ายขึ้นคือ

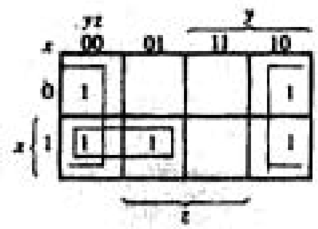
$$F = yz + xz'$$ **ตอบ**

ตัวอย่าง 5.3

จงลดรูปบูลลีนฟังก์ชัน $F(x, y, z) = \Sigma(0, 2, 4, 5, 6)$

วิธีทำ

ในโจทย์ข้อนี้กำหนดมินเทอมมาในรูปเลขฐานสิบ เราก็จัดแจงบรรจุข้อมูลนี้ลงในคาร์นอจ์แม็พได้ดังรูป 5.8



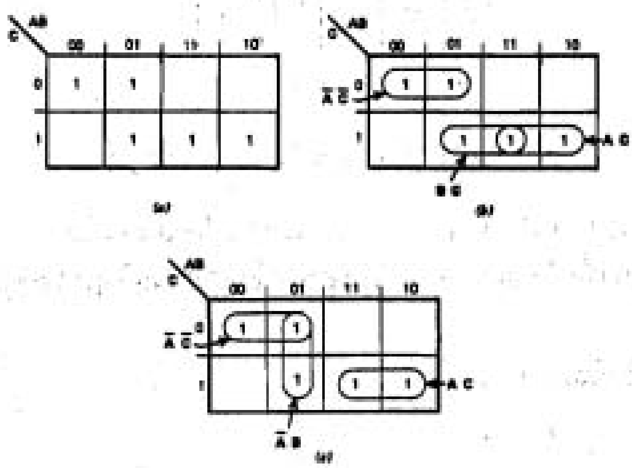
รูป 5.8 $F(x, y, z) = \Sigma(0, 2, 4, 5, 6)$

จากรูป 5.8 จะเห็นว่าสามารถจับ 1 ในช่องสี่เหลี่ยมทั้งสองทางซ้ายกับในช่องสี่เหลี่ยมทั้งสองทางขวาเป็นควอ้ด ได้เทอม z′ สำหรับ 1 ในช่องของมินเทอม m_4, m_5 จับคู่กันได้เป็น xy′ ดังนั้นฟังก์ชันโจทย์ลดรูปแล้วได้

$$F(x, y, z) = z' + xy'$$ **ตอบ**

ตัวอย่าง 5.4

จงเขียนนิพจน์บูลลีนที่ง่ายที่สุดจากคาร์นอจ์แม็พในรูป 5.9 (a)



รูป 5.9 โจทย์ตัวอย่าง 5.4

วิธีทำ

โจทย์ดังรูป 5.9 (a) อาจแม็พได้มากกว่า 1 แบบ ดังรูป 5.9 (b) และ (c)

ถ้าแม็พดังรูป 5.9 (b) จะได้นิพจน์คือ

$M = \overline{A}\overline{C} + AC + BC$

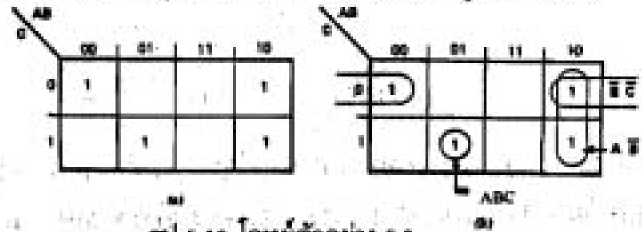
ถ้าแม็พดังรูป 5.9 (c) จะได้นิพจน์คือ

$M = \overline{A}\overline{C} + AC + \overline{A}B$

อาจใช้ตารางความจริงพิสูจน์ว่านิพจน์ที่ได้ทั้งสองนี้ให้ผลเหมือนกัน **ตอบ**

ตัวอย่าง 5.5

จงเขียนนิพจน์ตรรกที่ง่ายที่สุดสำหรับคาร์นอจ์แม็พในรูป 5.10 (a)



รูป 5.10 โจทย์ตัวอย่าง 5.5

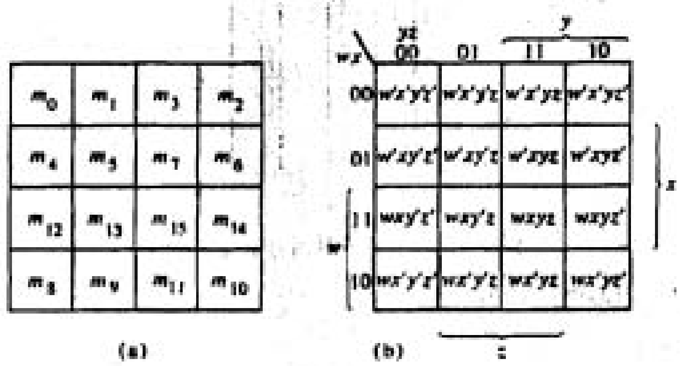
วิธีทำ

โจทย์รูป 5.10 (a) สามารถแม็พได้ดังรูป 5.10 (b) ดังนั้นนิพจน์ที่ง่ายที่สุดคือ

$M = \overline{A}BC + A\overline{B} + \overline{B}\overline{C}$ **ตอบ**

5.4 คาร์นอจ์แม็พ 4 ตัวแปร
Four-Variable Karnaugh Map

คาร์นอจ์แม็พสำหรับบูลลีนฟังก์ชัน 4 ตัวแปร เป็นดังรูป 5.11 รูป (a) นั้นแสดงสี่เหลี่ยมสำหรับมินเทอมแต่ละเทอมในจำนวน 16 มินเทอมของ 4 ตัวแปร รูป (b) แสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรทั้งสี่



รูป 5.11 คาร์นอจ์แม็พ 4 ตัวแปร

สังเกตแถวและคอลัมน์ถึงวิธีการจัดเรียงค่าของตัวแปรว่าเป็นไปตามรหัสเกรย์ เพื่อให้มีบิทต่างกันเพียงหนึ่งในสี่เหลี่ยมที่อยู่ประชิดกัน และในสี่เหลี่ยมซ้ายมือสุดกับขวามือสุด หรือบนสุดกับล่างสุด เพื่อสามารถม้วนมาลดรูปกันได้

กฎสำหรับคาร์นอจ์แม็พ 4 ตัวแปร มีดังนี้

1. ตรรก 1 ที่อยู่ในช่องสี่เหลี่ยมประชิดกัน 16 ช่อง แทนฟังก์ชันค่าคงที่คือ 1

2. ตรรก 1 ในช่องสี่เหลี่ยมประชิดกัน 8 ช่อง เรียกว่าออคเต็ท (octet) จะได้เทอมผลคูณของ 1 ตัวแปร

3. ตรรก 1 ในช่องสี่เหลี่ยมประชิดกัน 4 ช่อง เรียกว่าควัอดลดรูปแล้วได้เทอมผลคูณของ 2 ตัวแปร

4. ตรรก 1 ในช่องสี่เหลี่ยมประชิดกัน 2 ช่อง เรียกว่าคู่ (pair) จะแทนเทอมผลคูณของ 3 ตัวแปร

5. ตรรก 1 โดด ๆ แทนเทอมผลคูณของ 4 ตัวแปร

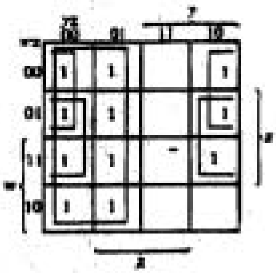
ตัวอย่าง 5.6

จงทำให้บูลลีนฟังก์ชันต่อไปนี้ง่ายที่สุด

$F(w, x, y, z) = \Sigma (0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 14)$

วิธีทำ

โจทย์ข้อนี้มี 4 ตัวแปร จึงใช้คาร์นอจ์แม็พ 4 ตัวแปร แล้วบรรจุมินเทอมลงไปได้ดังรูป 5.12



รูป 5.12 คาร์นอจ์แม็พสำหรับตัวอย่าง 5.6

จากรูป 5.12 จะแม็พได้ดังนี้

ออคเต็ทแทน y'

ควัอดอันบนซึ่งประกอบด้วย m_0, m_4, m_2, m_6 แทน w'z'

ควัอดอันตรงกลางซ้ายม้วนไปจรดขวา ซึ่งประกอบด้วย m_4, m_{12}, m_6, m_{14} แทน xz'

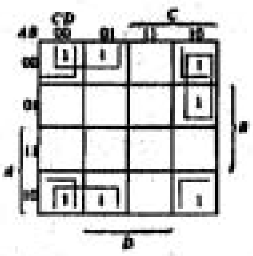
ดังนั้น $F(w,x,y,z) = y' + w'z' + xz'$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 5.7

จงทำให้ $F(A, B, C, D) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{B}C\bar{D} + \bar{A}BC\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}$ เป็นฟังก์ชันที่ง่ายที่สุด

วิธีทำ

พื้นที่ในคาร์นอจ์แม็พซึ่งครอบคลุมฟังก์ชันนี้ประกอบด้วยสี่เหลี่ยมซึ่งมี 1 บรรจุอยู่ ดังรูป 5.13 ฟังก์ชันนี้มี 4 ตัวแปรและมีเทอม 3 ตัวอักษร 3 เทอม เทอม 4 ตัวอักษร 1 เทอม เทอม 3 ตัวอักษรแต่ละเทอมนั้นแทนได้ด้วยสี่เหลี่ยมสองช่องในคาร์นอจ์แม็พ ตัวอย่างเช่น $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ แทนได้ด้วยสี่เหลี่ยมซึ่งมีค่าตัวแปร A, B, C, D เป็น 0000 และ 0001 สำหรับเทอม 4 ตัวอักษรก็ตรงไปตรงมาในการบรรจุตรรกในแม็พ



รูป 5.13 คาร์นอจ์แม็พสำหรับตัวอย่าง 5.7

ฟังก์ชันนี้สามารถทำให้ง่ายขึ้นโดยแม็พดังนี้

1 ในมุมทั้งสี่ของคาร์นอจ์แม็พ ให้เทอม $\bar{B}\bar{D}$ ทั้งนี้เพราะม้วนซ้ายและขวา กับบนและล่างมาแตะกัน ช่องสี่เหลี่ยมทั้งสี่นี้จะเป็นสี่เหลี่ยมประชิดกัน

1 ในช่องซ้ายมือ 2 ช่อง ของแถวบนลดรูปกับ 1 ในช่องซ้ายมือ 2 ช่องของแถวล่าง ให้เทอม $\bar{B}\bar{C}$

1 ตัวที่เหลือลดรูปกับ 1 ที่มุมบนขวาได้อีก ให้เทอม $\bar{A}C\bar{D}$

ดังนั้น $F(A,B,C,D) = \bar{B}\bar{D} + \bar{B}\bar{C} + \bar{A}C\bar{D}$ **ตอบ**

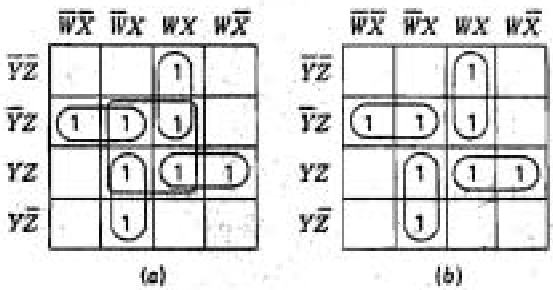
บางครั้งเราจะพบปัญหาการทำฟังก์ชันให้ง่ายขึ้นโดยวิธีคาร์นอจ์แม็พ เช่น คาร์นอจ์แม็พในรูป 5.14 จะเห็นว่าถ้าเราเลือกแม็พตามรูป (a) จะได้ฟังก์ชันคือ

$$F_a(W, X, Y, Z) = XZ + WYZ + \bar{W}\bar{Y}Z + \bar{W}XY + WX\bar{Y}$$

ถ้าเราเลือกแม็พตามรูป (b) จะได้ฟังก์ชันคือ

$$F_b(W, X, Y, Z,) = WYZ + \bar{W}\bar{Y}Z + \bar{W}XY + WX\bar{Y}$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ง่ายกว่า ดังนั้นเราเลือกการแม็พแบบรูป (b) เพราะให้ฟังก์ชันที่ง่ายที่สุด (ทั้ง F_a, F_b ให้ตารางความจริงเหมือนกัน)



รูป 5.14 การเลือกแม็พที่จะให้ฟังก์ชันง่ายที่สุด

ปัญหาการเลือกแม็พเพื่อให้ได้ฟังก์ชันที่ง่ายที่สุด พอจะค้นหาหลักเกณฑ์จากทักษะประสบการณ์ได้ดังนี้

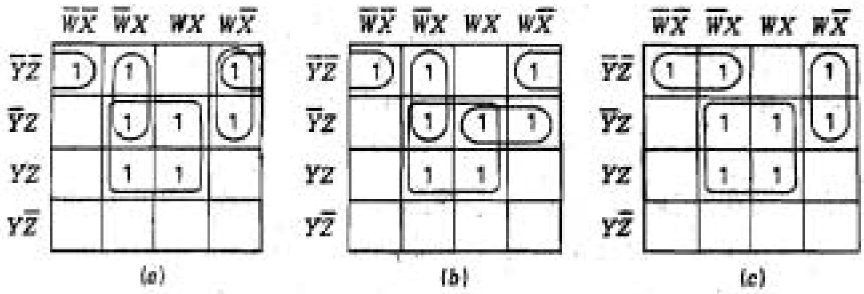
1. เริ่มด้วยช่องสี่เหลี่ยมทั้งหลายที่ไม่ไปประชิดกับช่องสี่เหลี่ยมอื่น ๆ มินเทอมในช่องสี่เหลี่ยมเหล่านี้ไม่สามารถทำให้สั้นลงได้อีก

2. หาทุก ๆ ช่องสี่เหลี่ยมที่ประชิดกับช่องอื่นอีก 1 ช่อง แบบนี้จะเกิดคู่ (pair) ขึ้น

3. หาทุก ๆ ช่องสี่เหลี่ยมที่ประชิดกับช่องอื่นมากขึ้นเป็น 4 ช่อง (ควอ็ด), 8 ช่อง (ออคเต็ท)

4. ฟังก์ชันที่ง่ายที่สุดเกิดจากการรวมกันของคู่, ควอ็ด, ออคเต็ทจำนวนน้อยที่สุด โดยที่แต่ละอันได้จากการหาสี่เหลี่ยมประชิดที่ใหญ่ที่สุดที่จะใหญ่ได้

ลองดูอีกตัวอย่างหนึ่งสำหรับปัญหาเช่นนี้ ดังรูป 5.15



รูป 5.15 ตัวอย่างอีกอันหนึ่งสำหรับการเลือกแม็พเพื่อให้ได้ฟังก์ชันที่ง่ายที่สุด (เล็กที่สุด)

จากคาร์นอจ์แม็พดังรูป 5.15 ถ้าแม็พตามรูป (a), (b), (c) จะได้ฟังก์ชัน

$$F_a = XZ + \bar{X}\bar{Y}\bar{Z} + W\bar{X}\bar{Y} + \bar{W}X\bar{Y}$$

$$F_b = XZ + \bar{X}\bar{Y}\bar{Z} + \bar{W}X\bar{Y} + W\bar{Y}Z$$

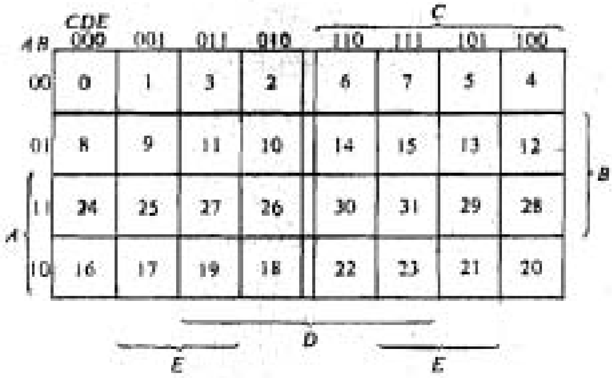
$$F_c = XZ + \bar{W}\bar{Y}\bar{Z} + W\bar{X}\bar{Y}$$

ซึ่งจะเห็นว่าฟังก์ชัน F_c เป็นฟังก์ชันที่ง่ายที่สุด (เล็กที่สุด)

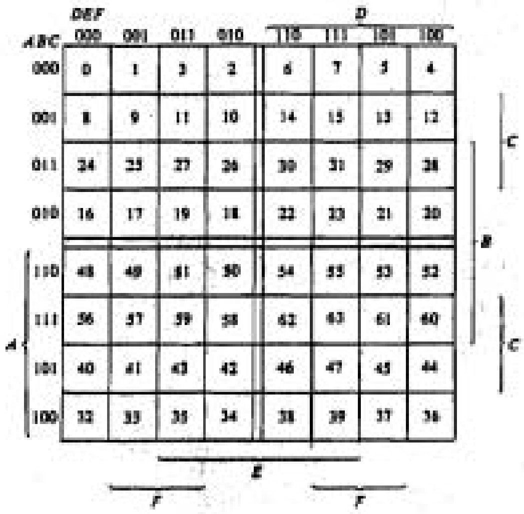
5.5 คาร์นอจ์แม็พ 5 และ 6 ตัวแปร
Five-and Six-Variable Karnaugh Maps

แม็พของตัวแปรที่มากกว่า 4 ตัวแปรนั้นไม่ง่ายต่อการใช้ สำหรับ 5 ตัวแปรคาร์นอจ์แม็พจะมี 2^5 คือ 32 ช่อง และ 6 ตัวแปรมี 2^6 คือ 64 ช่อง ตามจำนวนมินเทอม แม็พของตัวแปรมากกว่า 6 ตัวนั้น ต้องใช้ช่องสี่เหลี่ยมมากมาย จึงไม่สะดวกในทางปฏิบัติ รูป 5.16 และ 5.17 แสดงคาร์นอจ์แม็พของ 5 ตัวแปร และ 6 ตัวแปร ตามลำดับ แถวและคอลัมน์ของแม็พจัดเรียงค่าของตัวแปรตามแบบรหัสเกรย์ มินเทอมของแต่ละช่องสี่เหลี่ยมสามารถอ่านจากตัวเลขเหล่านี้ ซึ่งในรูปแสดงเป็นค่าเทียบเท่าของเลขฐานสิบ เช่น สี่เหลี่ยมในแถวที่ 3 (11) และคอลัมน์ที่สอง (001) ในคาร์นอจ์แม็พ 5 ตัวแปร คือเลข 11001 ซึ่งเทียบค่าเลขฐานสิบเป็น 25 ดังนั้นสี่เหลี่ยมช่องนี้แทนมินเทอม m_{25} ตัวแปร A, B, C, D, E ซึ่งหมายอยู่ประจำช่องสี่เหลี่ยมนั้นจะสอดคล้องกับค่าบิทของตัวแปรเป็น 1 ตัวอย่างเช่น ในคาร์นอจ์แม็พ 5 ตัวแปร A เป็น 1 ที่แถวสุดท้าย 2 แถว B เป็น 1 ที่แถวกลาง 2 แถว C เป็น 1 ที่คอลัมน์ขวามือทั้งสี่คอลัมน์

D เป็น 1 ที่คอลัมน์ตรงกลาง 4 คอลัมน์ และ E เป็น 1 ที่คอลัมน์ดังรูป ซึ่งจะเห็นว่า E ถูกแยกเป็นสองส่วน สำหรับแม็พของ 6 ตัวแปรก็มีค่าตัวแปรในลักษณะคล้ายคลึงกัน



รูป 5.16 คาร์นอจ์แม็พ 5 ตัวแปร



รูป 5.17 คาร์นอจ์แม็พ 6 ตัวแปร

นิยามของสี่เหลี่ยมประชิดสำหรับแม็พอย่างในรูป 5.16 และ 5.17 นี้ ต้องมีการดัดแปลงบ้างเนื่องจากความจริงที่ว่า ตัวแปรบางตัวถูกแยกแบ่งเป็นสองส่วน แม็พของ 5 ตัวแปรต้องนึกอยู่เสมอว่าประกอบด้วยแม็พของ 4 ตัวแปร 2 อัน และคาร์นอจ์แม็พ 6 ตัวแปรประกอบด้วยแม็พ 4 ตัวแปรอยู่ 4 อัน แต่ละแม็พ 4 ตัวแปรแสดงให้เห็นเด่นชัดด้วยเส้นคู่ที่อยู่ตรงกลางของแม็พ โดยที่แต่ละอันมีสี่เหลี่ยมภายในซึ่งจะมีตัวแปรค่าต่างกันเพียง 1 บิทสำหรับสี่เหลี่ยม

ที่อยู่ประชิดกัน อาจพิจารณาได้ว่าเส้นคู่ตรงกลางนั้นเป็นตรงกลางหนังสือ โดยมีแต่ละครึ่งของแม็พเป็นหน้ากระดาษ เมื่อปิดหนังสือสี่เหลี่ยมประชิด 2 ช่องจะซ้อนทับกัน กล่าวอีกนัยหนึ่งคือ เส้นคู่ตรงกลางเปรียบเสมือนกระจกโดยมีแต่ละสี่เหลี่ยมประชิดกัน ไม่เพียงสี่ช่องที่อยู่ติดกันเท่านั้น แต่ยังมีภาพเงาในกระจกอีกด้วยที่นับเข้าเป็นสี่เหลี่ยมประชิดด้วย ตัวอย่างเช่น มินเทอม 31 ในคาร์นอจ์แม็พ 5 ตัวแปร มีมินเทอมที่ประชิดกับมัน คือมินเทอม 30, 15, 29, 23 และ 27 เช่นเดียวกันกับในคาร์นอจ์แม็พ 6 ตัวแปร แล้วยังเพิ่มมินเทอม 63 เป็นมินเทอมประชิดอีกด้วย

จากการตรวจสอบและเฝ้าสังเกตบวกกับนิยามใหม่ของสี่เหลี่ยมประชิดได้ข้อสรุปว่า สี่เหลี่ยมประชิด 2^k ช่อง โดย $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ ในคาร์นอจ์แม็พ n ตัวแปร จะแทนพื้นที่ซึ่งให้เทอมที่มี $n - k$ ตัวอักษร (ตัวแปร) โดยที่ n ต้องใหญ่กว่า k เมื่อ $n = k$ พื้นที่ทั้งหมดของแม็พจะถูกรวบให้เกิดเป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ (identity function) ตาราง 5.1 แสดงความสัมพันธ์นี้ระหว่างสี่เหลี่ยมประชิดและจำนวนตัวอักษร (ตัวแปร) ในเทอม ตัวอย่างเช่น สี่เหลี่ยมประชิด 8 ช่อง รวมพื้นที่ในแม็พ 5 ตัวแปร ให้เทอมที่มี 2 ตัวอักษร

ตาราง 5.1 ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนสี่เหลี่ยมประชิดและจำนวนตัวอักษรในเทอม

	Number of adjacent squares	Number of literals in a term in an n-variable map					
k	2^k	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7
0	1	2	3	4	5	6	7
1	2	1	2	3	4	5	6
2	4	0	1	2	3	4	5
3	8		0	1	2	3	4
4	16			0	1	2	3
5	32				0	1	2
6	64					0	1

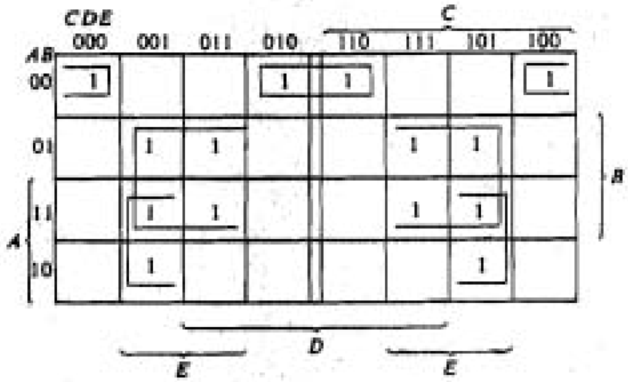
<u>ตัวอย่าง 5.8</u>

จงทำบูลลีนฟังก์ชันต่อไปนี้ให้ง่ายขึ้น

$F(A, B, C, D, E) = \Sigma (0, 2, 4, 6, 9, 11, 13, 15, 17, 21, 25, 27, 29, 31)$

วิธีทำ

คาร์นอจ์แม็พ 5 ตัวแปรของฟังก์ชันนี้แสดงดังรูป 5.18 แต่ละมินเทอมถูกแปลงให้เป็นเลขฐานสองที่เทียบเท่ากันและหมาย 1 ไว้ในสี่เหลี่ยมที่สอดคล้อง



รูป 5.18 แม็พของตัวอย่าง 5.8; $F(A, B, C, D, E) = \Sigma(0, 2, 4, 6, 9, 11, 13, 15, 17, 21, 25, 27, 29, 31)$

ต่อไปหาสี่เหลี่ยมประชิดที่ให้พื้นที่ใหญ่ที่สุด :

สี่เหลี่ยม 4 ช่องตรงกลางของแม็พขวามือจับกลุ่มได้กับสี่เหลี่ยม 4 ช่องตรงกลางของแม็พซ้ายมือ (โดยมีเส้นคู่ตรงกลางเสมือนกระจกเงาสะท้อนภาพ) ได้เป็นสี่เหลี่ยมประชิด 8 ช่อง ซึ่งแทนเทอม BE

ตรรก 1 ใน 2 แถวล่างได้ภาพสะท้อนผ่านเส้นคู่ตรงกลางคาร์นอจ์แม็พเกิดเป็นสี่เหลี่ยมประชิด 4 ช่อง แทนเทอม AD'E

ตรรก 1 ทั้งสี่ในแถวบนสุดรวมเป็นสี่เหลี่ยมประชิด 4 ช่อง แทนเทอม A'B'E'

ขณะนี้ตรรก 1 ทุกตัวถูกรวมไว้หมดแล้ว ดังนั้นจะได้

$F = BE + AD'E + A'B'E'$ **ตอบ**

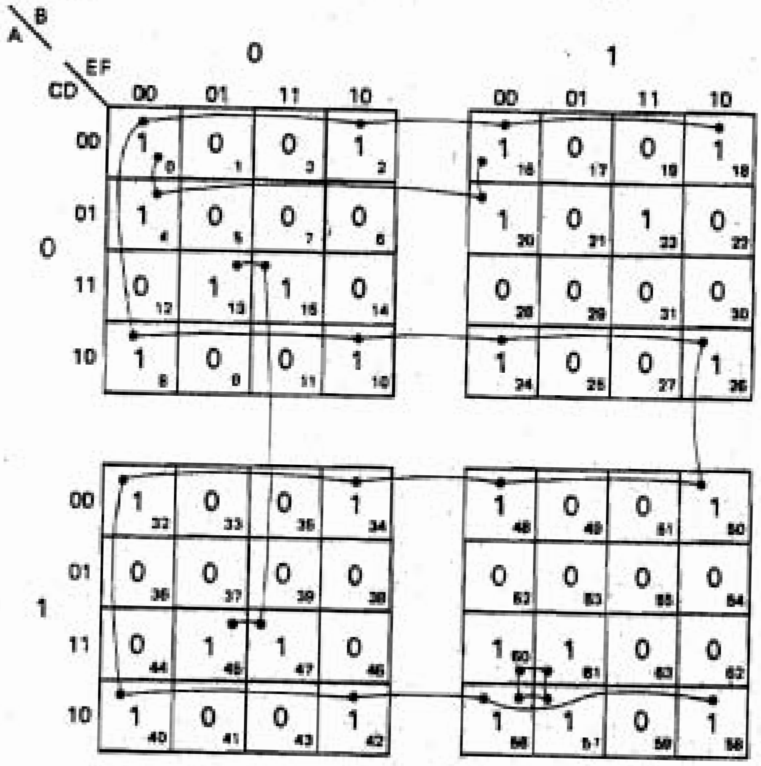
ตัวอย่าง 5.9

จงลดรูปสมการต่อไปนี้โดยวิธีแม็พ

$Y = \Sigma\,(0, 2, 4, 8, 10, 13, 15, 16, 18, 20, 23, 24, 26, 32, 34, 40, 42, 45, 47, 48, 50, 56, 57, 58, 60, 61)$

วิธีทำ

บรรจุข้อมูลลงในคาร์นอจ์แม็พ 6 ตัวแปร และแม็พได้ดังรูป 5.19



$Y = \bar{A}B\bar{C}DEF + \overline{A}\overline{C}\overline{E}\overline{F} + \bar{B}CDF + ABC\bar{E} + \overline{D}\overline{F}$

รูป 5.19 ตัวอย่าง 5.9

จะเห็นว่าทุก ๆ มินเทอมมีสี่เหลี่ยมประชิดทั้งสิ้น ยกเว้นมินเทอม m_{23}
ต่อไปนี้เป็นเทอมที่ได้จากการแม็พ

$m_{23} = \bar{A}B\bar{C}DEF$

$m_0, m_4, m_{16}, m_{20} = \overline{A}\overline{C}\overline{E}\overline{F}$

$m_{13}, m_{15}, m_{45}, m_{47} = \bar{B}CDF$

$m_{56}, m_{57}, m_{60}, m_{61} = ABC\bar{E}$

$m_0, m_2, m_8, m_{10}, m_{16}, m_{18}, m_{24}, m_{26}, m_{32}, m_{34}, m_{40}, m_{42}, m_{48}, m_{50}, m_{56}, m_{58} = \overline{D}\overline{F}$

ดังนั้นได้ผลลัพธ์คือ

$Y = \bar{A}B\bar{C}DEF + \overline{A}\overline{C}\overline{E}\overline{F} + \bar{B}CDF + ABC\bar{E} + \overline{D}\overline{F}$ **ตอบ**

5.6 การลดรูปในแบบผลคูณของผลบวก
Product of Sums Simplification

ที่กล่าวมาแล้วเป็นการแม็พโดยใช้ผลบวกของผลคูณ ถ้าเราดัดแปลงเล็กน้อยจะได้เป็นผลคูณของผลบวก

วิธีที่จะให้ได้ฟังก์ชันที่เล็กที่สุดในแบบผลคูณของผลบวกอาศัยสมบัติพื้นฐานของบูลลีนฟังก์ชัน ตรรก 1 ที่อยู่ในช่องสี่เหลี่ยมของคาร์นอจ์แม็พแทนมินเทอมของฟังก์ชัน มินเทอมไม่อยู่ในฟังก์ชันที่บ่งแสดงคอมพลีเมนต์ของฟังก์ชัน จากหลักการนี้เราจะเห็นว่าคอมพลีเมนต์ของฟังก์ชันจะถูกแทนอยู่ในคาร์นอจ์แม็พตรงช่องสี่เหลี่ยมที่ไม่มีตรรก 1 ถ้าเราใส่ 0 ไว้ในช่องสี่เหลี่ยมเหล่านี้แล้วรวมกลุ่มสี่เหลี่ยมประชิด ก็จะได้นิพจน์ที่ลดรูปแล้วของคอมพลีเมนต์ของฟังก์ชัน (นั่นคือคอมพลีเมนต์ของ F) คอมพลีเมนต์ของ F' ได้เป็นฟังก์ชัน F กลับคืนมา โดยทฤษฎีเดอมอร์แกนฟังก์ชันที่ได้จะอยู่ในรูปแบบผลคูณของผลบวกโดยอัตโนมัติ

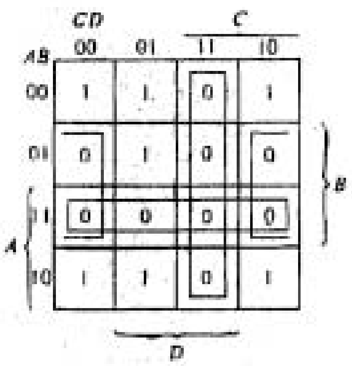
<u>ตัวอย่าง 5.10</u>

จงลดรูปบูลลีนฟังก์ชันต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปแบบผลบวกของผลคูณ และผลคูณของผลบวก $F(A, B, C, D) = \Sigma(0, 1, 2, 5, 8, 9, 10)$

<u>วิธีทำ</u>

ตรรก 1 ในสี่เหลี่ยมของแม็พดังรูป 5.20 แทนมินเทอมของฟังก์ชันโจทย์ ตรรก 0 ในสี่เหลี่ยมของแม็พแทนคอมพลีเมนต์ของ F (แทนมินเทอมที่ไม่อยู่ใน F) โดยการรวมสี่เหลี่ยมประชิดที่มีตรรก 1 ในแม็พจะได้ฟังก์ชันในรูปแบบผลบวกของผลคูณ :

$$F(A, B, C, D) = B'D' + B'C' + A'C'D$$ <u>ตอบ</u>



รูป 5.20 ตัวอย่าง 5.10

ถ้ารวมสี่เหลี่ยมประชิดที่มีตรรก 0 บรรจุอยู่ เราจะได้คอมพลีเมนต์ของฟังก์ชันลดรูป :

$$F' = AB + CD + BD'$$

ใช้ทฤษฎีเดอ มอร์แกน (โดยการใช้สมบัติคู่เสมอกัน และคอมพลีเมนต์แต่ละตัวแปร) เราจะได้ฟังก์ชันลดรูปในรูปแบบผลคูณของผลบวก :

$$F = (A' + B')(C' + D')(B' + D)$$ **ตอบ**

ตัวอย่าง 5.10 แสดงขบวนการได้มาซึ่งการลดรูปในแบบผลคูณของผลบวกเมื่อฟังก์ชันเริ่มต้นอยู่ในรูปแบบบัญญัติชนิดผลบวกของมินเทอม ขบวนดังกล่าวนี้ยังคงเป็นจริงด้วยหากฟังก์ชันเริ่มต้นอยู่ในรูปแบบบัญญัติชนิดผลคูณของแม็กซ์เทอม พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตาราง 5.2 ตารางความจริงของฟังก์ชัน F

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

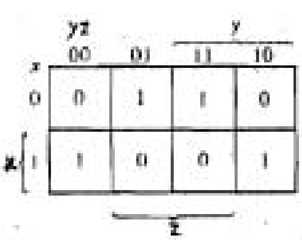
ฟังก์ชัน F มีตารางความจริงดังตาราง 5.2 ในรูปแบบผลบวกของมินเทอมแล้วฟังก์ชัน F เขียนแทนได้ด้วย

$$F(x, y, z) = \Sigma (1, 3, 4, 6)$$

ในรูปแบบผลคูณของแม็กซ์เทอม ฟังก์ชัน F แทนได้ด้วย

$$F(x, y, z) = \pi (0, 2, 5, 7)$$

กล่าวอีกนัยหนึ่งคือ ตรรก 1 ของฟังก์ชันแทนมินเทอม และตรรก 0 แทนแม็กซ์เทอม แม็พของฟังก์ชันนี้ได้ดังรูป 5.21



รูป 5.21 แม็พของฟังก์ชันในตาราง 5.2

เราอาจเริ่มต้นบรรจุข้อมูลจากตารางความจริงของ F ในตาราง 5.2 ลงในแม็พรูป 5.21 ด้วยตรรก 1 ซึ่งแทนมินเทอม จากนั้นสี่เหลี่ยมช่องที่เหลือเราจึงใส่ตรรก 0 ซึ่งแทนแม็กซ์เทอมลงไป หรือในทางกลับกันอาจเริ่มต้นใส่ตรรก 0 ซึ่งแทนแม็กซ์เทอมตามตารางความจริงของ F ลงไปในแม็พก่อนแล้วจึงใส่ตรรก 1 ซึ่งแทนมินเทอมลงในสี่เหลี่ยมที่เหลือก็ได้

เมื่อบรรจุข้อมูลจากตารางความจริงของฟังก์ชัน F ลงในคาร์นอจ์แม็พเรียบร้อยแล้ว จึงลดรูปฟังก์ชันให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานหนึ่งในสองชนิดต่อไปนี้ คือ

ในแบบผลบวกของผลคูณ เรารวมตรรก 1 ในการลดรูปโดยคาร์นอจ์แม็พจะได้

$F = x'z + xz'$ (ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเอ็กซ์คลูสีฟ – ออ)

ในแบบผลคูณของผลบวก เรารวมตรรก 0 ในการลดรูปโดยคาร์นอจ์แม็พ จะได้ฟังก์ชันที่ถูกคอมพลีเมนต์ซึ่งลดรูปแล้ว (simplified complemented Function)

$F' = xz + x'z'$ (ซึ่งเป็นฟังก์ชันของอีควิเวเลนซ์ (equivalence function))

ทำคอมพลีเมนต์กับ F' จะได้ฟังก์ชันที่ลดรูปแล้วในแบบผลคูณของผลบวก :

$F = (x' + z')(x + z)$

สำหรับการพล็อตฟังก์ชันซึ่งแสดงอยู่ในแบบผลคูณของผลบวกลงในคาร์นอจ์แม็พ ให้ทำคอมพลีเมนต์ของฟังก์ชันนั้น แล้วจึงใส่ตรรก 0 ลงในสี่เหลี่ยมของคาร์นอจ์แม็พ จากนั้นใส่ตรรก 1 ลงในสี่เหลี่ยมที่เหลือ เช่นตัวอย่างมีฟังก์ชัน :

$F = (A' + B' + C)(B + D)$

สามารถพล็อตลงในคาร์นอจ์แม็พโดยเริ่มด้วยการหาคอมพลีเมนต์ของฟังก์ชัน :

$F' = ABC' + B'D'$

แล้วจึงใส่ตรรก 0 ลงในสี่เหลี่ยม (ของคาร์นอจ์แม็พ) ซึ่งแทนมินเทอมของ F' จากนั้นใส่ตรรก 1 ลงในสี่เหลี่ยมที่เหลือ

5.7 เงื่อนไขไม่สนใจ
Don't Care Conditions

ตรรก 1 และ 0 ในแม็พแสดงถึงสภาวะประสมของตัวแปรที่ทำให้ฟังก์ชันมีค่าเท่ากับ 1 หรือ 0 ตามลำดับ สภาวะประสมนั้นได้จากตารางความจริงซึ่งพรรณนาเงื่อนไขต่าง ๆ ที่ทำให้ฟังก์ชันมีค่าเป็น 1 และภายใต้เงื่อนไขอื่น ๆ นอกเหนือจากนี้ ฟังก์ชันถูกสมมติว่ามีค่าเป็น 0 ข้อสมมตินี้ไม่เป็นจริงเสมอไป เนื่องจากมีบางกรณีที่สภาวะประสมของตัวแปรอินพุทจะไม่เกิดขึ้น ตัวอย่างได้แก่ ในรหัส BCD 4 บิท เช่น รหัส 8421 รหัสเกิน 3 ซึ่งจะมี 6 สภาวะประสมที่ไม่มีใช้ดังได้กล่าวไปแล้วในบทที่ 3 วงจรตรรกใด ๆ ซึ่งใช้รหัสเหล่านี้ จะทำงานภายใต้สมมติฐานที่ว่าสภาวะประสม 6 อันนี้จะไม่เกิดขึ้นและไม่ได้ใช้ตราบเท่าที่ระบบวงจรยังคงทำงานได้เหมาะสม ผลลัพธ์ก็คือ เราไม่สนใจว่าเอาท์พุทของฟังก์ชันจะเป็นเช่นไรสำหรับ

สภาวะประสมเหล่านี้ของตัวแปร เนื่องจากเราแน่ใจอยู่แล้วว่าจะไม่เกิดขึ้นแน่นอน เงื่อนไขไม่สนใจทั้งหลายนี้สามารถนำไปใช้ช่วยในการทำให้ฟังก์ชันง่ายขึ้น

เราจะใช้สัญลักษณ์ X หรือ d แทนเงื่อนไขไม่สนใจลงในคาร์นอจ์แม็พ จะไม่ใช้ 1 หรือ 0 เพราะถ้าใช้ 1 หรือ 0 ย่อมหมายความว่าฟังก์ชันมีค่าเฉพาะลงไปว่าเป็น 1 หรือ 0 ในสภาวะเงื่อนไขนั้น ๆ ของอินพุท

เมื่อเลือกสี่เหลี่ยมประชิดในการทำฟังก์ชันให้ง่ายขึ้น X หรือ d จะถูกสมมติว่าเป็น 1 หรือ 0 แล้วแต่ว่าเราต้องการนิพจน์ที่ลดรูปในแบบใด เราจะไม่จำเป็นต้องใช้ X หรือ d ถ้ามันไม่ได้มีส่วนอยู่ในพื้นที่ที่ใหญ่กว่าในการเลือกแม็พ การเลือกใช้ X (หรือ d) หรือไม่นั้นขึ้นอยู่กับรูปแบบที่เราต้องการลดรูป

<u>ตัวอย่าง 5.11</u>

จงลดรูปบูลลีนฟังก์ชัน :

$$F(w, x, y, z) = \Sigma\,(1, 3, 7, 11, 15)$$

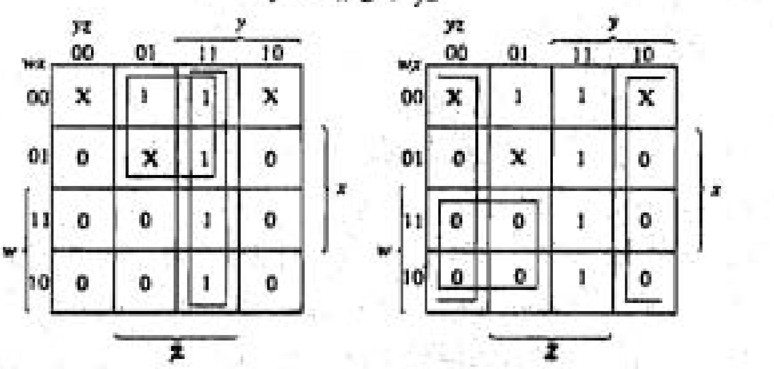
และเงื่อนไขไม่สนใจ :

$$d(w, x, y, z) = \Sigma\,(0, 2, 5)$$

<u>วิธีทำ</u>

มินเทอมของฟังก์ชัน F เป็นสภาวะประสมของตัวแปรซึ่งทำให้ฟังก์ชันเป็น 1 มินเทอมของ d เป็นสภาวะประสมที่ไม่สนใจ และจะไม่เกิดขึ้น เราแทน 1 และ X สำหรับมินเทอมทั้งสองแบบที่กล่าวข้างต้นตามลำดับ ดังรูป 5.22 สำหรับสี่เหลี่ยมที่เหลือเราแทนด้วย 0 รูป (a) นั้น 1 และ X รวมกันในลักษณะที่จะให้ได้สี่เหลี่ยมประชิดมีขนาดโตที่สุด ไม่จำเป็นต้องใช้ X ทุกอันที่มี แต่ใช้เฉพาะบางอันที่จำเป็นแก่การลดรูปเท่านั้น ดังนั้น ในแบบผลบวกของผลคูณจะได้ฟังก์ชันที่ลดรูปแล้ว คือ

$$F = w'z + yz$$



(a) Combining 1's and X's $F = w'z + yz$ (b) Combining 0's and X's $F = z(w' + y)$

รูป 5.22 ตัวอย่างการใช้เงื่อนไขไม่สนใจในการลดรูปฟังก์ชัน

ในรูป (b) นั้น 0 รวมกับ X เพื่อลดรูปคอมพลีเมนต์ของฟังก์ชัน ได้คอมพลีเมนต์ฟังก์ชันซึ่งลดรูปแล้วเป็น :

$$F' = z' + wy'$$

คอมพลีเมนต์อีกครั้ง จะได้ฟังก์ชันในแบบผลคูณของผลบวกที่ลดรูปแล้ว คือ

$$F = z(w' + y)$$

ตอบ

นิพจน์ที่ได้ทั้งสองรูปแบบจากตัวอย่าง 5.11 เป็นฟังก์ชันซึ่งอาจแสดงได้ว่าเท่ากันเชิงพีชคณิต เหตุการณ์เช่นนี้มิได้เกิดขึ้นเสมอทุกครั้งที่ใช้เงื่อนไขไม่สนใจช่วยในการลดรูป โดยแท้จริงแล้วเมื่อใช้ X ให้มีค่าเป็น 1 เพื่อรวมกับ 1 ทั้งหลายในการแม็พ แล้วใช้ X ให้มีค่าเป็น 0 เพื่อรวมกับ 0 ทั้งหลายในการแม็พ ฟังก์ชันผลลัพธ์ที่ได้จะไม่เท่ากันเชิงพีชคณิต การเลือกใช้ X ตัวเดียวกันให้มีค่าเป็น 1 ครั้งหนึ่ง และเป็น 0 อีกครั้งหนึ่ง ให้ผลลัพธ์เป็นนิพจน์ของมินเทอมที่แตกต่างกัน ดังนั้นฟังก์ชันจึงแตกต่างกัน ซึ่งจะเห็นได้จากตัวอย่าง 5.11 ในตัวอย่างนี้ X ซึ่งถูกเลือกให้เป็น 1 ไม่ได้ถูกเลือกให้เป็น 0 ถ้าในรูป 5.22 (a) เราเลือกเทอม $w'x'$ แทนเทอม $w'z$ เราจะได้ฟังก์ชันเป็น :

$$F = w'x' + yz$$

ซึ่งไม่เท่ากันเชิงพีชคณิตกับฟังก์ชันในรูปแบบผลคูณของผลบวกที่ได้จากรูป 5.22 (b) ทั้งนี้เพราะ X ถูกใช้ให้มีค่าเป็น 1 และเป็น 0 ด้วย ในการลดรูปแบบผลบวกของผลคูณ และผลคูณของผลบวกตามลำดับ

ตัวอย่าง 5.11 นี้ ยังแสดงให้เห็นอีกว่านิพจน์ที่มีจำนวนตัวอักษรน้อยที่สุดไม่จำเป็นต้องเป็นหนึ่งเดียว (unique) บางครั้งผู้ออกแบบอาจต้องเผชิญกับปัญหาการเลือกเทอม 2 เทอมที่ให้จำนวนตัวอักษรน้อยเท่าเทียมกัน ซึ่งส่งผลเป็นฟังก์ชันที่น้อยที่สุด (ง่ายที่สุด)

5.8 วิธีตีตาราง
The Tabulation Method

การลดรูปฟังก์ชันโดยวิธีแม็พนั้นสะดวกสำหรับตัวแปรจำนวนไม่เกิน 5 หรือ 6 ตัว เมื่อจำนวนตัวแปรเพิ่มขึ้นจำนวนสี่เหลี่ยมที่มากขึ้นตามไปด้วยนั้น ทำให้การเลือกสี่เหลี่ยมประชิดไม่สมเหตุสมผล ข้อเสียของวิธีแม็พคือการจัดกลุ่มสี่เหลี่ยมประชิดกลายเป็นขบวนการลองผิดลองถูก (trial – and – error) ทั้งนี้เพราะความสามารถของมนุษย์มีขีดจำกัด สำหรับฟังก์ชัน 5 หรือ 6 ตัวแปร จึงยากที่จะแน่ใจได้ว่าการเลือกนั้น ๆ ให้ผลที่ดีที่สุด

วิธีตีตารางเอาชนะความยากลำบากนี้ได้ เพราะเป็นวิธีที่ทำเป็นขั้นเป็นตอน จึงเป็นหลักประกันได้ว่าจะให้นิพจน์ที่ลดรูปแล้วในรูปแบบมาตรฐาน วิธีการนี้สามารถประยุกต์กับปัญหาหลาย ๆ ตัวแปร และมีข้อดีคือเหมาะสมที่จะใช้สำหรับการคำนวณด้วยเครื่อง อย่างไร

ก็ตามวิธีการนี้ออกจะเป็นงานหนักสำหรับมนุษย์ใช้ ทั้งยังอาจเกิดความผิดพลาดได้ง่าย เพราะเป็นขบวนการที่จำเจซ้ำซาก

วิธีตีตารางถูกคิดค้นครั้งแรกโดยควิน (Quine) และได้รับการปรับปรุงต่อมาโดยแม็กคลูสกี (McCluskey) จึงรู้จักกันว่าวิธีควิน–แม็กคลูสกี (Quine – McCluskey method)

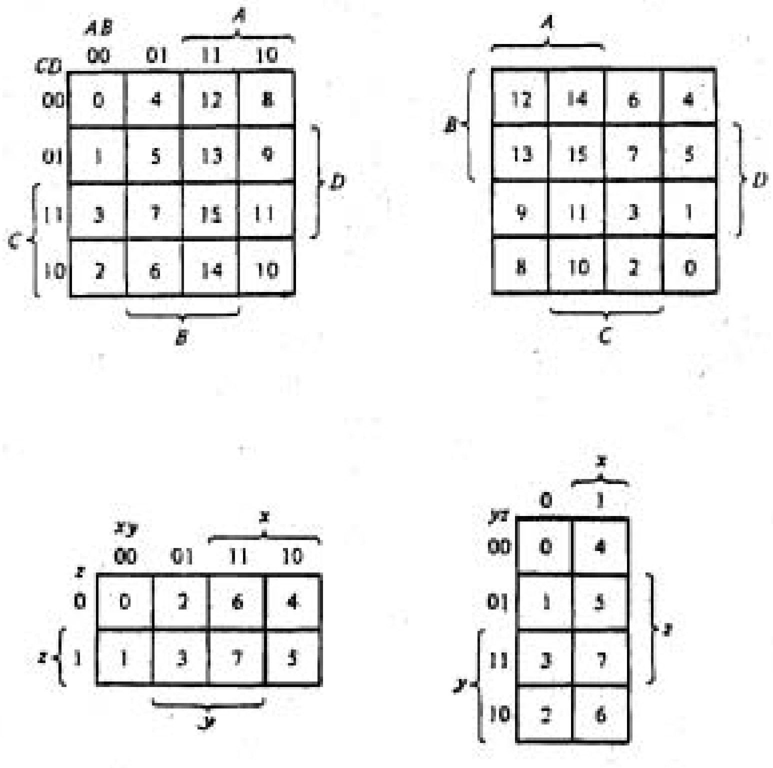
การทำให้ฟังก์ชันง่ายขึ้นโดยวิธีตีตารางประกอบด้วย 2 ส่วน ส่วนแรกเป็นการค้นหา (ซึ่งเหน็ดเหนื่อย) ทุก ๆ เทอมที่อาจถูกคัดเลือกให้ร่วมอยู่ในฟังก์ชันที่ลดรูปแล้ว เรียกเทอมเหล่านี้ว่า พราม–อินพลิแคนท์ (prime-implicants) ส่วนที่สองเป็นการคัดเลือก พราม–อิมพลิแคนท์ที่จะทำให้นิพจน์ที่ได้มีจำนวนตัวอักษร (ตัวแปร) น้อยที่สุด

วิธีตีตารางอาจให้ผลลัพธ์เป็นฟังก์ชันในแบบผลบวกของผลคูณ หรือผลคูณของผลบวกก็ได้เช่นเดียวกับวิธีแม็พ

สรุป

เกณฑ์สำหรับการทำฟังก์ชันให้ง่ายขึ้นอยู่ที่การลดรูปตัวแปรในแบบผลบวกของผลคูณ หรือผลคูณของผลบวกให้มีจำนวนตัวแปรน้อยลง การลดรูปนั้นอาจใช้วิธีคาร์นอจ์แม็พ หรือ ควิน-แม็กคลูสกี

วิธีลดรูปฟังก์ชันโดยคาร์นอจ์แม็พ n ตัวแปร จะได้จำนวนสี่เหลี่ยม 2^n ช่อง แต่ละช่องแทนมินเทอม หรือแมกซ์เทอมของฟังก์ชันซึ่งมีจำนวน 2^n เทอม การวางตัวแปรในคาร์นอจ์แม็พนั้นจะให้แถวหรือคอลัมน์แทนตัวแปรอย่างไรก็ได้ (ดูรูป 5.23 ประกอบ) ข้อสำคัญคือการจัดเรียงค่าของตัวแปร จะต้องยึดหลักการของรหัสเกรย์ที่ว่า ช่องสี่เหลี่ยมที่อยู่ประชิดติดกันจะมีบิทของค่าตัวแปรในแบบเลขฐานสองต่างกันเพียงบิทเดียว ช่องสี่เหลี่ยมประชิดนั้นรวมครอบคลุมไปถึงสี่เหลี่ยมในคอลัมน์ซ้ายสุดและขวาสุด หรือสี่เหลี่ยมในแถวบนสุดและล่างสุดสามารถเป็นสี่เหลี่ยมประชิด เพราะเราสามารถม้วนคาร์นอจ์แม็พให้พื้นผิวซ้ายและขวาแตะกัน ทำนองเดียวกับพื้นผิวบนแตะพื้นผิวล่างได้ สิ่งที่ช่วยในการลดรูปฟังก์ชันอีกอย่างหนึ่งคือ เงื่อนไขไม่สนใจ



รูป 5.23 การแปรผันของแม็พ

ถ้ามีสี่เหลี่ยมประชิด 2^k ช่อง จะลดรูปให้เทอมที่มี $n - k$ ตัวแปร เมื่อ $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ และ n เป็นจำนวนตัวแปร ตรรก 1 ในสี่เหลี่ยมประชิดจับกลุ่มกันได้เทอมผลคูณของตัวแปรโดยตัวแปรที่มีค่า 0 จะเป็นคอมพลีเมนต์ของตัวแปรนั้น และตัวแปรที่มีค่าเป็น 1 จะเป็นตัวแปรนั้นเอง สำหรับตัวแปรที่มีค่าทั้ง 0 และ 1 จะถูกลดรูปทิ้งไป เมื่อนำเทอมผลคูณที่ได้ทั้งหมดจากการแม็พมาออกัน จะได้ฟังก์ชันในแบบผลบวกของผลคูณ

ตรรก 0 ในสี่เหลี่ยมประชิดจับกลุ่มกันได้เทอมผลบวกของตัวแปร โดยตัวแปรที่มีค่า 0 จะเป็นตัวแปรนั้นเอง ตัวแปรที่มีค่าเป็น 1 จะเป็นคอมพลีเมนต์ของตัวแปร สำหรับตัวแปรที่มีค่าทั้ง 0 และ 1 จะถูกลดรูปทิ้งไป เมื่อนำเทอมผลบวกที่ได้ทั้งหมดจากการแม็พมาแอนกัน ก็จะได้ฟังก์ชันในแบบผลคูณของผลบวก

ฟังก์ชันที่ลดรูปแล้วเป็นฟังก์ชันในรูปแบบมาตรฐานแบบใดแบบหนึ่งข้างบนนี้

การทำบูลลีนฟังก์ชันให้ง่ายขึ้นโดยวิธีควิน-แม็กคลูสกีขจัดปัญหาอุปสรรคความยุ่งยากในการแม็พกรณีตัวแปรตั้งแต่ 5, 6 ตัวขึ้นไป เพราะเป็นวิธีที่มีขบวนการเป็นขั้นเป็นตอน อย่างไรก็ดีวิธีควิน-แม็กคลูสกีอาจก่อความผิดพลาดได้ง่ายในการหาพราม-อิมพลิแคนท์ เพราะเป็นงานที่ซ้ำซาก วิธีนี้เหมาะสำหรับการลดรูปฟังก์ชันในคอมพิวเตอร์

แบบฝึกหัด

5.1 จงลดรูปฟังก์ชันต่อไปนี้โดยวิธีแม็พ

$W = \Sigma(1, 5, 6, 7, 14, 15)$

5.2 จงเขียนตารางความจริง, คาร์นอจ์แม็พ แล้วลดรูปสำหรับวงจรตรรกวงจรหนึ่งซึ่งจะให้เอาท์พุทเมื่ออินพุทหนึ่งอัน หรือทั้งสามอันมีค่าเป็น 1 วงจรนี้มี 3 อินพุท

5.3 กำหนดตารางความจริงดังนี้

A	B	C	F_1	F_2
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

(ก) จงแสดงฟังก์ชัน F_1, F_2 ในรูปแบบผลบวกของมินเทอม และผลคูณของแม็กซ์เทอม

(ข) จงลดรูปฟังก์ชัน F_1, F_2 ในแบบผลบวกของผลคูณ และผลคูณของผลบวก

5.4 จงลดรูปฟังก์ชันต่อไปนี้ แล้วแสดงฟังก์ชันในแบบผลบวกของผลคูณและผลคูณของผลบวก

$F(A, B, C, D) = \pi(0, 1, 2, 3, 4, 10, 11)$

5.5 จงใช้คาร์นอจ์แม็พลดรูปนิพจน์ต่อไปนี้ แล้วแสดงในแบบผลบวกของผลคูณ และผลคูณของผลบวก

(ก) $x'z' + y'z' + yz' + xyz$

(ข) $(A' + B' + D')(A + B' + C')(A' + B + D')(B + C' + D')$

(ค) $(A' + B' + D)(A' + D')(A + B + D')(A + B' + C + D)$

5.6 จงลดรูปบูลลีนฟังก์ชัน F ใช้เงื่อนไขไม่สนใจ d ให้อยู่ทั้งในแบบผลบวกของผลคูณ และผลคูณของผลบวก

(ก) $F = A'B'D' + A'CD + A'BC$

$d = A'BC'D + ACD + AB'D'$

(ข) $F = B'DE' + A'BE + B'C'E' + A'BC'D'$

$d = BDE' + CD'E'$

(ค) $F = w'(x'y + x'y' + xyz) + x'z'(y + w)$

$d = w'x(y'z + yz') + wyz$

5.7 จงหานิพจน์ที่น้อยที่สุดสำหรับสมการ

$Y = \Sigma(2, 3, 4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 28, 29, 30, 31)$

ให้แสดงทั้งแบบผลบวกของผลคูณ และผลคูณของผลบวก

5.8 จงลดรูปของนิพจน์ :

$(\bar{W} + \bar{X} + Y + Z)(\bar{W} + X + \bar{Y} + Z)(\bar{W} + X + Y + Z)$

$$\overbrace{(W + X + \bar{Y} + Z)(W + \bar{X} + Y + Z)(\bar{W} + \bar{X} + Y + \bar{Z})(W + X + Y + Z)}^{\text{DON'T - CARE}}$$