บทที่ 4
เกทและพีชคณิตบูลลีน
GATES AND BOOLEAN ALGEBRA

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาจบบทนี้แล้ว นักศึกษาสามารถ

1. อธิบาย เขียนสัญลักษณ์ เขียนตารางความจริง เขียนสมการบูลลีนของเกทต่าง ๆ คือ แอนเกท ออเกท นอทเกท แนนเกท นอเกท เอ็กซ์คลูสีฟ-ออเกทได้
2. เขียนวงจรตรรกตามนิพจน์บูลลีนได้
3. เขียนนิพจน์บูลลีนจากวงจรตรรกได้
4. อธิบายสมบัติคู่เสมอกันของพีชคณิตบูลลีน
5. เขียนสมมุติฐาน กฎ และทฤษฎีของพีชคณิตบูลลีนได้
6. เขียนทฤษฎีเดอ มอร์แกนได้
7. นำพีชคณิตบูลลีน ทฤษฎีเดอ มอร์แกนไปใช้ประโยชน์ได้ เช่น ลดรูปนิพจน์บูลลีนให้เหลือง่ายที่สุด
8. แสดงบูลลีนฟังก์ชันในรูปแบบบัญญัติ ทั้งแบบผลบวกของมินเทอม และผลคูณของแมกซ์เทอมได้
9. อธิบายบูลลีนฟังก์ชันในรูปแบบมาตรฐาน ทั้งแบบผลบวกของผลคูณ และผลคูณของผลบวกได้
10. อธิบายพฤติกรรมพลวัต เวลาขึ้น เวลาหน่วงของอุปกรณ์ตรรกได้
11. เขียนแผนภาพจังหวะเวลาของโครงข่ายตรรกได้

4.1 ตรรกฐานสอง
Binary Logic

ตรรกฐานสองเกี่ยวข้องกับตัวแปร (variable) ซึ่งมีค่าแยกจากกัน (discrete) 2 ค่า และด้วยการดำเนินการ (operation) ตามความหมายทางตรรก ค่า (หรือสภาวะ (state)) ทั้งสองของตัวแปร ได้แก่ ถูกและผิด, ใช่และไม่ใช่, สวิตช์ปิด (ON) และสวิตช์เปิด (OFF), เหนือและใต้, สูงและต่ำ, ทำงานและไม่ทำงาน, ขึ้นและลง, มีพัลส์ (pulse) และไม่มีพัลส์ เป็นต้น แต่เพื่อความสะดวกเรานิยมใช้สัญลักษณ์ทางตรรกว่า 1 และ 0 นอกจากนี้เรายังใช้สัญลักษณ์ของตัวแปรเป็น A, B, C, x, y z ฯลฯ โดยที่แต่ละตัวแปรมีค่าที่เป็นไปได้คือ 1 กับ 0 เท่านั้น สำหรับการดำเนินการพื้นฐานมี 3 ชนิดคือ (หรือกล่าวว่าตัวดำเนินการ (operator) มี 3 ชนิด)

1. แอน (AND) ใช้สัญลักษณ์คือ จุด (.) หรืออาจไม่มีจุด เช่น $x \cdot y = z$ อ่านว่า x แอน y เท่ากับ z คุณสมบัติของแอนมีว่า z จะเท่ากับ 1 เมื่อ $x = 1$ และ $y = 1$ เท่านั้น นอกเหนือจากนี้แล้ว z จะเท่ากับ 0

2. ออ (OR) ใช้เครื่องหมายบวก (+) เช่น $x + y = z$ อ่านว่า x ออ y เท่ากับ z มีความหมายว่า $z = 1$ ถ้า $x = 1$ หรือ $y = 1$ หรือ ทั้ง $x = 1$ และ $y = 1$ ถ้าทั้ง $x = 0$ และ $y = 0$ แล้วละก็ $z = 0$

3. นอท (NOT) ใช้สัญลักษณ์พราม (prime : ′) หรือบาร์ (bar : ¯) เช่น $x' = z$ (หรือ $\bar{x} = z$) อ่านว่า x นอทมีค่าเท่ากับ z มีความหมายว่า z คืออะไรที่ไม่ใช่ x หรืออีกนัยหนึ่ง ถ้า $x = 1$ แล้ว $z = 0$ แต่ถ้า $x = 0$ แล้ว $z = 1$

ตาราง 4.1 ตารางความจริงของ แอน ออ และนอท

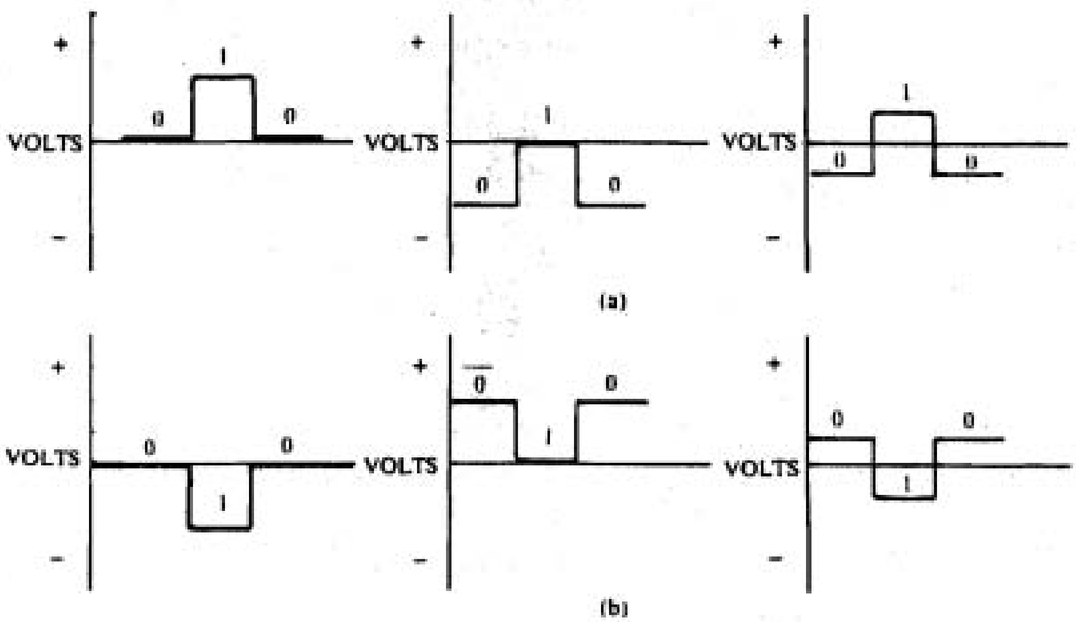
AND			OR			NOT	
x	y	$x \cdot y$	x	y	$x + y$	x	x'
0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1		
1	1	1	1	1	1		

สังเกตว่าตรรกฐานสองแตกต่างกับเลขคณิตฐานสองซึ่งตัวแปรเป็นจำนวนเลขที่ประกอบด้วยหลาย ๆ หลักก็ได้ แต่ในตรรกฐานสองมีตัวแปรซึ่งประกอบด้วยค่า 1 กับ 0 เท่านั้น เช่น ในเลขคณิตฐานสอง 1 + 1 = 10 (อ่านว่า 1 บวก 1 เท่ากับ 2) แต่ในตรรกฐานสอง 1 + 1 = 1 (อ่านว่า 1 ออ 1 เท่ากับ 1)

แต่ละสภาวะประสม (combination) ของค่า x และ y จะได้ค่า z ตามคำนิยามของการดำเนินการต่าง ๆ เราอาจเขียนออกมาเป็นตารางความจริง (truth table) ตารางความจริงคือตารางของสภาวะประสมที่เป็นไปได้ทั้งหมดของตัวแปร โดยแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าของตัวแปรซึ่งให้ผลลัพธ์ตามการดำเนินการ

4.2 ตรรกบวก และ ตรรกลบ
Positive and Negative Logic

ในระบบตรรกอิเล็กทรอนิกส์ เราใช้ระดับของแรงดันไฟฟ้า (voltage level) แทนสภาวะ 2 สภาวะ ระดับหนึ่งแทนตรรก 1 อีกระดับหนึ่งแทนตรรก 0 เมื่อใช้ตรรก 1 แทนแรงดันไฟฟ้าซึ่งเป็นบวกมากกว่า เราก็ใช้ตรรก 0 แทนแรงดันไฟฟ้าซึ่งเป็นบวกน้อยกว่า ระบบเช่นนี้เรียกว่าตรรกบวก (positive logic) รูป 4.1 (a) แสดงตัวอย่างของตรรกบวก ในทางตรงกันข้าม ถ้าใช้ตรรก 1 แทนแรงดันซึ่งเป็นลบมากกว่า เราก็ใช้ตรรก 0 แทนแรงดันซึ่งเป็นลบน้อยกว่า ระบบเช่นนี้เรียกว่าตรรกลบ (negative logic) รูป 4.1 (b) แสดงตัวอย่างของตรรกลบ



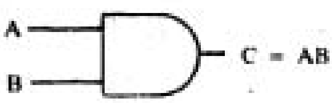
รูป 4.1 ตัวอย่างของตรรกบวก (a) และตรรกลบ (b)

4.3 เกทตรรกอิเล็กทรอนิก
ELECTRONIC LOGIC GATES

เกทตรรกอิเล็กทรอนิกซึ่งใช้ในดิจิตอลคอมพิวเตอร์นั้นผลิตออกมาในรูปของวงจรเบ็ดเสร็จ (integrated circuit : IC) เรียกสั้น ๆ ว่า ไอซี ไอซีประกอบด้วยทรานซิสเตอร์ (transistor) ไดโอด (diode) และอุปกรณ์โซลิดสเตท (solid-state component) อื่น ๆ เกทตรรกอิเล็กทรอนิกเรียกสั้น ๆ ว่าเกท คืออุปกรณ์ตรรก ซึ่งผลิตเอาท์พุทเป็นตรรก 1 หรือตรรก 0 ขึ้นอยู่กับสภาวะประสมของอินพุทและชนิดของเกท เกทพื้นฐานมี 3 ชนิด ทำหน้าที่ดำเนินการพื้นฐาน 3 ชนิดดังได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 4.1

4.3.1 แอนเกท (AND gate)

รูป 4.2 แสดงสัญลักษณ์และตารางความจริงของแอนเกท 2 อินพุท ในอุดมคตินั้นเกทที่มีอยู่ในตลาดปัจจุบันนิยามว่า ระดับแรงดันไฟฟ้า 0 เทียบเท่ากับตรรก 0 และระดับแรงดันไฟฟ้า +5V เป็นตรรก 1 แต่ในทางปฏิบัติเราถือว่าแรงดันไฟฟ้าสูงกว่าค่า ๆ หนึ่งขึ้นไป (เช่น 3V เป็นต้น) เป็นตรรก 1 และแรงดันไฟฟ้าต่ำกว่าค่า ๆ หนึ่งลงมา (เช่น 1V เป็นต้น) เป็นตรรก 0



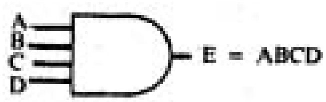
Symbol

	0	1	2	3
A	0	0	1	1
B	0	1	0	1
C	0	0	0	1

Truth Table

รูป 4.2 สัญลักษณ์ และตารางความจริงของแอนเกท

แอนเกทอาจนิยามได้ว่า คือเกทที่จะให้เอาท์พุทมีค่าเป็น 1 ก็ต่อเมื่อทุก ๆ อินพุทต้องเป็น 1 หมดเท่านั้น อันนี้ขยายไปสู่แอนเกทที่มีมากกว่า 2 อินพุทได้ ดังรูป 4.3



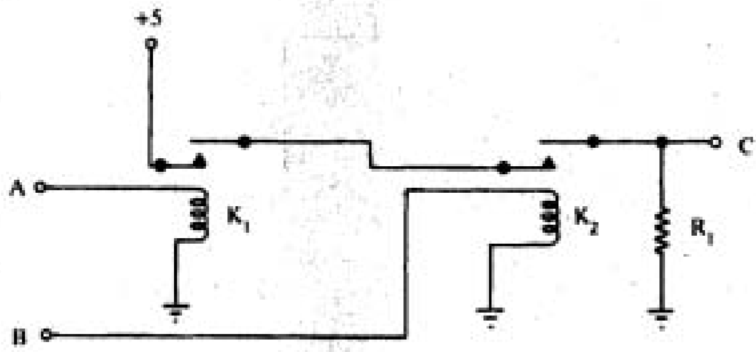
Symbol

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
B	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
C	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
D	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
E	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Truth Table

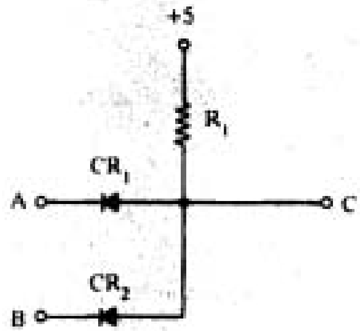
รูป 4.3 แอนเกท 4 อินพุท

วงจรแอนเกทอาจสร้างขึ้นได้จากสวิตช์ รีเลย์ ไดโอด หรือทรานซิสเตอร์ ในที่นี้จะขอยกตัวอย่างบางอัน



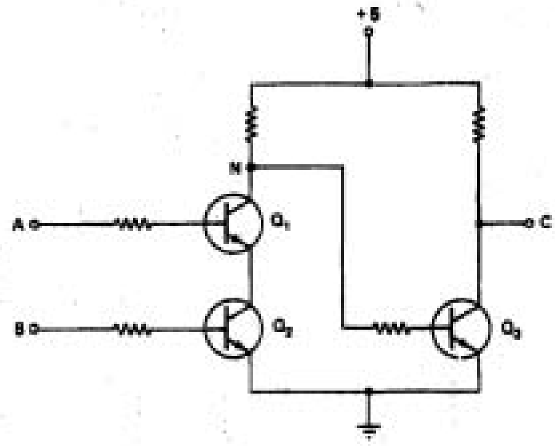
รูป 4.4 แอนเกทสร้างขึ้นจากรีเลย์

จากรูป 4.4 ถ้าป้อนแรงดันไฟฟ้า +5V แก่อินพุท A และ B จะทำให้รีเลย์ K_1 และ K_2 ได้พลังงาน จึงส่ง +5V ไปยังจุด C โดยผ่าน K_1 และ K_2 ซึ่งสัมผัส



รูป 4.5 แอนเกทสร้างขึ้นจากไดโอด

จากรูป 4.5 ถ้า A เป็น 0 และ B เป็น 0 A, B เหมือนเป็นวงจรปิด ไดโอดทั้งสองได้รับไบแอสตรง (forward bias) จาก +5V ที่ป้อน ไดโอดทำตัวเป็นวงจรปิด กระแสไหลผ่านไดโอดในทิศทางตามสัญลักษณ์ของไดโอด จึงได้เอาท์พุทเป็น 0 เพราะจุด C เสมือนต่อลงดิน (ground) ผ่านไดโอดและแรงดัน A, B ซึ่งเหมือนเป็นวงจรปิด ถ้า A เป็น 5V หรือ B เป็น 5V (อันใดอันหนึ่ง) สถานการณ์เหมือนกรณี A = B = 0V ต่อเมื่อ ทั้ง A และ B ต่างมี + 5V ก็จะไม่มีกระแสไหลในวงจร จึงไม่มีแรงดันตกคร่อม R ดังนั้นเอาท์พุทจึงเป็น +5V

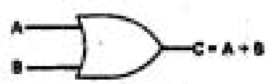


รูป 4.6 แอนเกทสร้างขึ้นจากทรานซิสเตอร์

รูป 4.6 แสดงแอนเกทสร้างโดยทรานซิสเตอร์ เมื่อทั้ง A และ B เป็น +5 ทำให้ทรานซิสเตอร์ Q_1 และ Q_2 นำกระแส (conduct) และจุด N สู่จุดดิน เป็นผลให้ Q_3 คัทออฟ (cut off) ขับให้จุด C เป็น +5V ถ้า A หรือ B มีแรงดันอยู่ที่ระดับดิน ทำให้ Q_1 หรือ Q_2 คัทออฟ ส่งผลให้จุด N เป็นบวก จึงมีกระแสเบสของ Q_3 ดังนั้นจุด C จะลงสู่จุดดิน

4.3.2 ออเกท (OR gate)

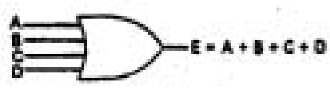
ออเกทมีสัญลักษณ์และตารางความจริงดังแสดงในรูป 4.7 ออเกทคือเกทที่ให้เอาท์พุทเป็น 1 เมื่ออินพุทหนึ่ง หรือทุกอินพุทเป็น 1



Symbol

	0	1	2	3
A	0	0	1	1
B	0	1	0	1
C	0	1	1	1

Truth Table



Symbol

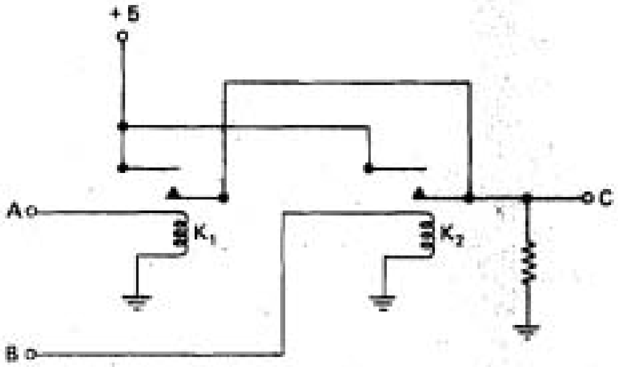
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
B	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
C	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
D	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
E	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Truth Table

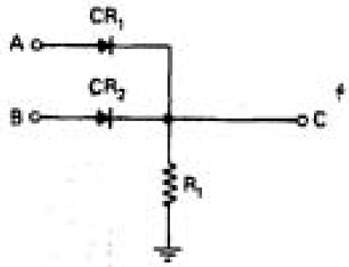
รูป 4.7 สัญลักษณ์ทางตรรกและตารางความจริงของออเกท 2 อินพุท (รูปบน) และ 4 อินพุท (รูปล่าง)

วงจรสำหรับสร้างออเกทมีหลายอย่าง ตัวอย่างเช่นข้างล่างนี้

ในรูป 4.8 เป็นออกเกทที่สร้างขึ้นด้วยรีเลย์ เมื่อ A หรือ B เป็น +5V หนึ่งในหน้าสัมผัสของรีเลย์ (ซึ่งต่อกันอยู่แบบขนาน) จะปิด (close) ส่งผลให้จุด C ซึ่งเป็นเอาท์พุทเป็น +5V

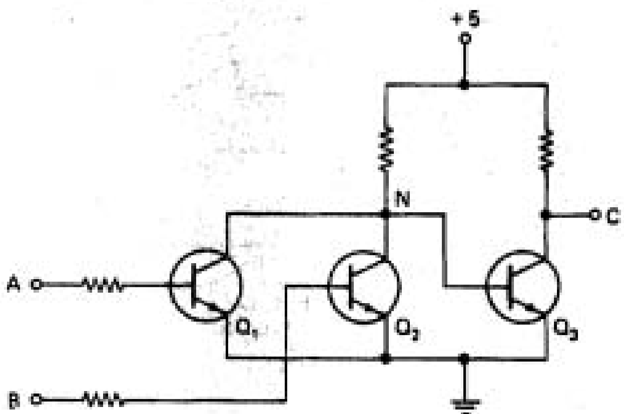


รูป 4.8 ออเกทสร้างจากรีเลย์



รูป 4.9 ออเกทสร้างจากไดโอด

ออเกทที่สร้างขึ้นจากไดโอดดังรูป 4.9 ถ้าให้ +5V แก่อินพุท A ก็จะไปไบแอสตรงให้ไดโอด CR_1 เป็นผลให้ C เป็น +5 ในทำนองเดียวกับให้ +5V แก่อินพุท B และให้ +5V ทั้ง A และ B



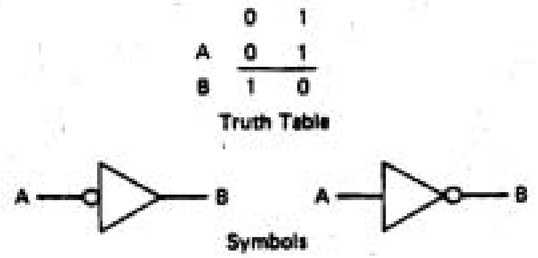
รูป 4.10 ออเกทสร้างขึ้นจากทรานซิสเตอร์

เมื่อป้อนแรงดัน +5V แก่อินพุท A ของวงจรทรานซิสเตอร์ที่สร้างเป็นออเกทในรูป 4.10 จะทำให้ Q_1 นำกระแส เป็นผลให้จุด N ไปสู่ดิน สถานการณ์เช่นนี้ทำให้ Q_3 คัทออฟ ดังนั้นจุดเอาท์พุท C ไปสู่ +5V ถ้าป้อนแรงดัน +5V แก่อินพุท B จะทำให้ Q_2 นำกระแส เป็นผลให้เอาท์พุท C เป็น +5V อีก ถ้าทั้ง A และ B เป็น +5V สถานกาณณ์เหมือน 2 กรณีข้างต้น ถ้าทั้งอินพุท A และ B ต่อลงดิน (OV) Q_1 และ Q_2 จะคัทออฟ ทำให้จุด N ไปสู่ค่าบวก เป็นการป้อนกระแสไฟฟ้าไปยังเบสของ Q_3 จึงเป็นผลให้เอาท์พุท C ไปสู่ดิน

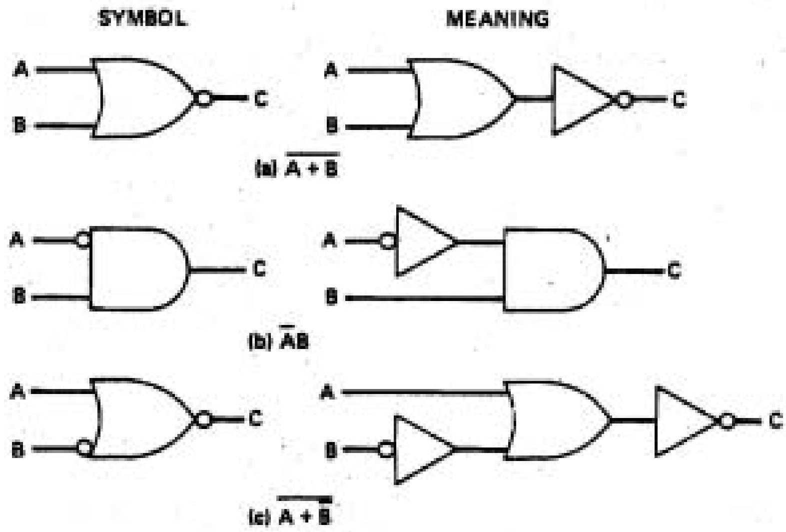
4.3.3 นอทเกท (NOT gate) หรืออินเวิตเตอร์ (INVERTER)

เกทสำหรับตัวดำเนินการนอท เรียกว่า นอทเกท หรือ อินเวิตเตอร์ แสดงดังรูป 4.11 เครื่องหมายวงกลมเล็ก ๆ ก็ใช้ในความหมายว่าอินเวิตเช่นกัน ซึ่งแสดงตัวอย่างดังรูป 4.12

นอทเกท คือเกทที่ใช้เปลี่ยนอินพุทให้เป็นคอมพลีเมนต์จาก 1 เป็น 0 หรือในทางสลับกันจาก 0 เป็น 1

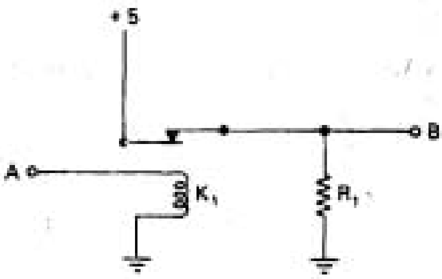


รูป 4.11 อินเวิตเตอร์

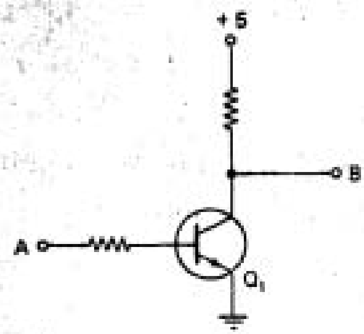


รูป 4.12 ตัวอย่างการใช้วงกลมเล็ก ๆ ร่วมกับเกท เพื่อให้หมายถึงอินเวิต

วงจรอินเวิตเตอร์อาจสร้างโดยรีเลย์ ดังรูป 4.13 หรือโดยทรานซิสเตอร์ ดังรูป 4.14 เมื่อป้อนแรงดัน +5V ให้กับอินพุท A ของวงจรรีเลย์ รีเลย์จะได้พลังงาน ไปเปิด (open) หน้าสัมผัสซึ่งแตะอยู่ก่อนแล้ว ทำให้เกิดแรงดัน 0V ไปปรากฏที่เอาท์พุท B สำหรับวงจรทรานซิสเตอร์นั้น แรงดัน +5V ที่ป้อนแก่อินพุท A จะไปทำให้ทรานซิสเตอร์ทำงาน นำกระแส เป็นผลให้เกิดระดับแรงดันเป็นดินที่เอาท์พุท B ถ้าป้อนระดับแรงดันดินแก่อินพุท A บ้าง ทรานซิสเตอร์จะไม่ทำงานให้ผลเป็นแรงดัน +5V ที่เอาท์พุท B

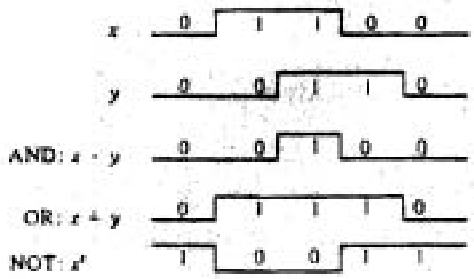


รูป 4.13 รีเลย์อินเวิตเตอร์



รูป 4.14 ทรานซิสเตอร์อินเวิตเตอร์

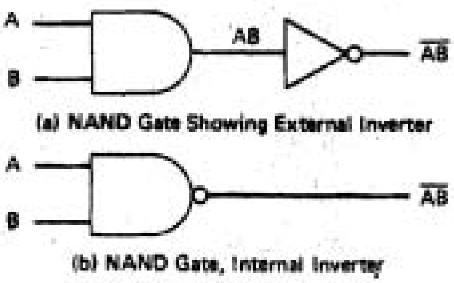
เกทพื้นฐานทั้งสามชนิด คือ แอน ออ และนอท มีสมบัติแตกต่างกัน รูปที่ 4.15 เป็นแผนภาพจังหวะเวลา (timing diagram) ที่แสดงสัญญาณอินพุท–เอาท์พุทของเกททั้งสามชนิดนี้ แผนภาพจังหวะเวลาเช่นนี้มีไว้เพื่อแสดงผลของเกทว่าจะให้เอาท์พุทออกมาเป็นรูปสัญญาณอย่างใด เมื่ออินพุทเป็นสัญญาณที่มีคาบเวลา หรือช่วงปรากฏของสัญญาณต่าง ๆ



รูป 4.15 แผนภาพจังหวะเวลาของแอน ออ และนอทเกท

4.3.4 แนนเกท (NAND gate)

แนน แปลว่า นอท แอน เป็นการรวมแอนเกทกับอินเวิตเตอร์เข้าด้วยกัน (AND + INVERTER = NAND) ทำให้ได้เอาท์พุทเป็นคอมพลีเมนต์ของเอาท์พุทของแอนเกท



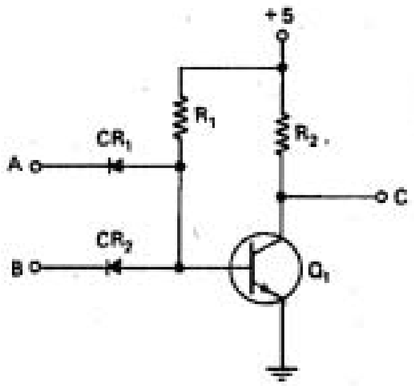
	0	1	2	3
A	0	0	1	1
B	0	1	0	1
AB	0	0	0	1
$\overline{AB}$	1	1	1	0

(c) Truth Table

รูป 4.16 แนนเกท แสดงสัญลักษณ์และตารางความจริง

วงจรในรูป 4.17 เป็นวงจรสร้างแนนเกทโดยใช้ทรานซิสเตอร์ เอาท์พุท C จะเป็น 0 ก็ต่อเมื่ออินพุท A และ B เป็น 5V ทั้งคู่ (ตรรก 1)

เราเรียกแนนเกทได้ว่าเป็นบล็อกสร้างเกทสากล (universal building block) เนื่องจากสมบัติพิเศษของแนนเกทที่ใช้สร้างออเกท, แอนเกท, อินเวิตเตอร์ได้ เช่นเดียวกับนอเกท (NOR gate) ซึ่งจะกล่าวถึงต่อไป



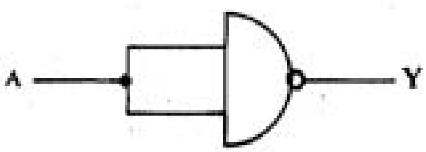
(a) Schematic

	0	1	2	3
A	0	0	1	1
B	0	1	0	1
C	1	1	1	0

(b) Truth Table

รูป 4.17 สร้างแนนเกทโดยทรานซิสเตอร์

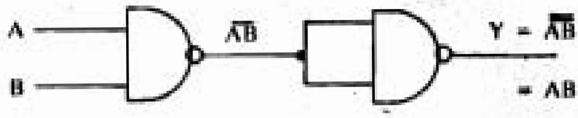
ตัวอย่างการสร้างอินเวิตเตอร์จากแนนเกท แสดงดังรูป 4.18 ซึ่งเมื่อตรวจสอบโดยตารางความจริงแล้ว พบว่าเอาท์พุทที่ได้จะเป็นคอมพลีเมนต์ของอินพุทตรงตามอินเวิตเตอร์ คือ $Y = \bar{A}$



A	B
0	1
1	0

รูป 4.18 สร้างอินเวิตเตอร์จากแนนเกทโดยการช็อตอินพุททั้งสองของแนนเกทเข้าด้วยกัน

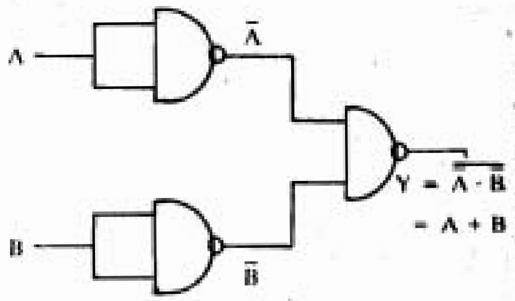
การสร้างแอนเกทโดยใช้แนนเกท ต้องใช้แนนเกท 2 ตัว เอาท์พุทที่ได้จากแนนเกทตัวแรกคือ $\overline{AB}$ แนนเกทตัวที่สองทำหน้าที่คอมพลีเมนต์ จึงเป็นคอมพลีเมนต์ของคอมพลีเมนต์ คือ $\overline{\overline{AB}}$ จึงได้ผลลัพธ์เป็น AB หรืออาจพิสูจน์จากตารางความจริงก็ได้



A	B	$\overline{AB}$	$Y = \overline{\overline{AB}} = AB$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

รูป 4.19 การสร้างแอนเกทด้วยแนนเกท

สำหรับการสร้างออเกทด้วยแนนเกท ต้องใช้แนนเกท 3 ตัว ดังรูป 4.20 เอาท์พุทที่ได้คือ $Y = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$ ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ว่า คือ $A + B$ โดยอาจใช้ตารางความจริงดังรูป 4.20 หรือโดยทฤษฎีของเดอ มอร์แกน ซึ่งจะได้กล่าวถึงต่อไป

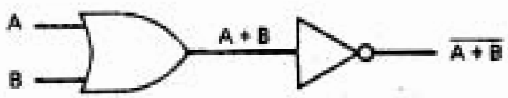


A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$	$\overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = A + B$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1

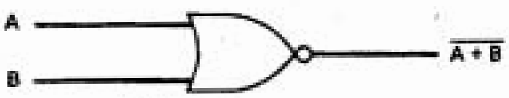
รูป 4.20 การสร้างออเกทด้วยแนนเกท

4.3.5 นอเกท (NOR gate)

นอ คือ นอท ออ เป็นการรวมเอาออเกทกับนอทเกทเข้าด้วยกัน (NOT + OR = NOR) ได้เอาท์พุทเป็นคอมพลีเมนต์ของเอาท์พุทของออเกท



(a) NOR Gate Showing External Inverter

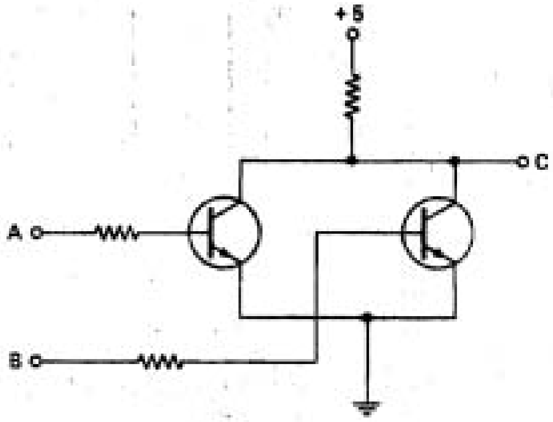


(b) NOR Gate, Internal Inverter

	0	1	2	3
A	0	0	1	1
B	0	1	0	1
A + B	0	1	1	1
$\overline{A+B}$	1	0	0	0

(c) Truth Table

รูป 4.21 นอเกท แสดงสัญลักษณ์ และตารางความจริง



(a) Schematic

	0	1	2	3
A	0	0	1	1
B	0	1	0	1
C	1	0	0	0

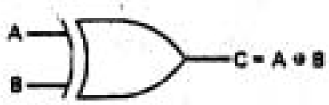
(b) Truth Table

รูป 4.22 นอเกทสร้างขึ้นโดยใช้ทรานซิสเตอร์

นอเกทก็เป็นบล็อกสร้างเกทสากลเช่นเดียวกับแนนเกท ในที่นี้จะขอเว้นไว้ไม่กล่าวถึงรายละเอียด

4.3.6 เอ็กซ์คลูสีฟ-ออเกท (EXCLUSIVE-OR GATE)

เอ็กซ์คลูสีฟ-ออเกท เป็นเกทที่จะมีเอาท์พุทเป็น 1 ก็ต่อเมื่ออินพุทเป็นจำนวนคี่มีค่าเป็น 1 กรณีเอ็กซ์คลูสีฟ-ออเกท 2 อินพุทนั้นเอาท์พุทจะมีค่าเป็น 1 เมื่ออินพุทอันใดอันหนึ่งมีค่าเป็น 1 หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่าเอาท์พุทจะเป็น 1 เมื่ออินพุทมีค่าต่างกัน



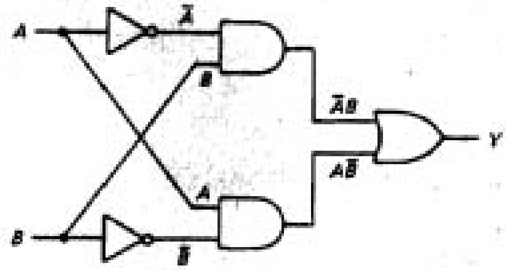
Symbol

	0	1	2	3
A	0	0	1	1
B	0	1	0	1
C	0	1	1	0

Truth Table

รูป 4.23 สัญลักษณ์และตารางความจริงของเอ็กซ์คลูสีฟ-ออเกท

เอ็กซ์คลูสีฟ-ออเกทอาจสร้างขึ้นจากเกทพื้นฐาน คือ แอน ออ และนอทเกท ดังรูป 4.24 โดยแอนเกทอันบนให้เอาท์พุทเป็น $\overline{A}B$ และแอนเกทอันล่างให้เอาท์พุทเป็น $A\overline{B}$ ดังนั้นเอาท์พุทของออเกทคือ $Y = \overline{A}B + A\overline{B}$



รูป 4.24 เอ็กซ์คลูสีฟ-ออเกทสร้างจากแอน ออ และนอทเกท

จากรูป 4.24 เมื่อ A และ B เป็น 0 จะทำให้แอนเกททั้งคู่มีเอาท์พุทเป็น 0 ดังนั้นเอาท์พุทสุดท้ายคือ Y เป็น 0 ถ้า A เป็น 0 และ B เป็น 1 แอนเกทอันบนจะมีเอาท์พุทเป็น 1 ดังนั้นออเกทจึงให้เอาท์พุท 1 เช่นเดียวกับ A เป็น 1 และ B เป็น 0 ถ้าอินพุท A และ B เป็น 1 ทั้งคู่ แอนเกททั้งสองจะเป็น 0 ทำให้เอาท์พุทสุดท้าย (ของออเกท) เป็น 0

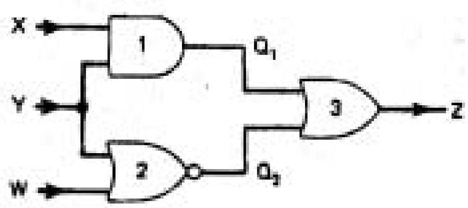
4.4 วงจรเกทพื้นฐาน
Basic Logic circuits

จากเกทต่าง ๆ ในหัวข้อ 4.3 สามารถนำมาสร้างเป็นวงจรเกทพื้นฐานตามนิพจน์บูลลีน (Boolean expression) ซึ่งหมายถึงนิพจน์ของตัวแปรฐานสอง (binary variable : ตัวแปรซึ่งมีค่าเพียง 2 ค่า คือ 0, 1) แสดงความสัมพันธ์กันด้วยตัวดำเนินการ เช่น แอน ออ นอท เป็นต้น

ตัวอย่าง 4.1 จงสร้างวงจรตรรกจากนิพจน์บูลลีน

$$Z = XY + \overline{Y+W}$$

วิธีทำ พิจารณาจากนิพจน์ เห็นว่ามีตัวแปร 3 ตัวคือ W, X, Y เป็นอินพุท และมี Z เป็นเอาท์พุท และสังเกตดูพบว่าในที่นี้วงจรประกอบด้วยเกท 3 ตัว เขียนวงจรตรรกจากความรู้เรื่องเกทต่าง ๆ ได้ดังนี้

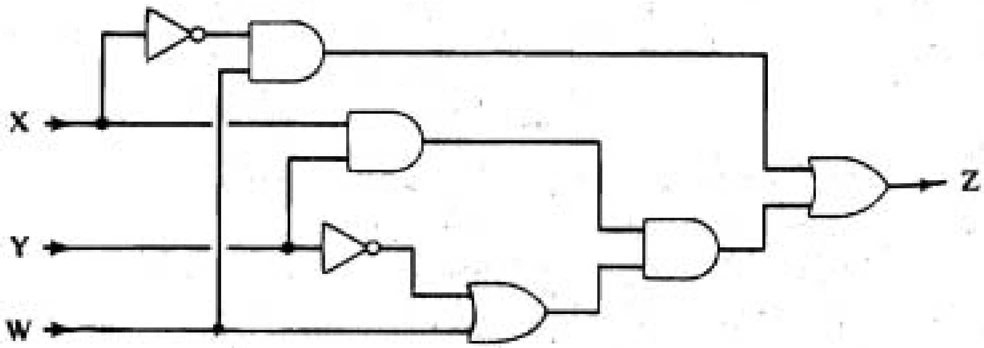


รูป 4.25 วงจรเกทตัวอย่าง 4.1

ตอบ

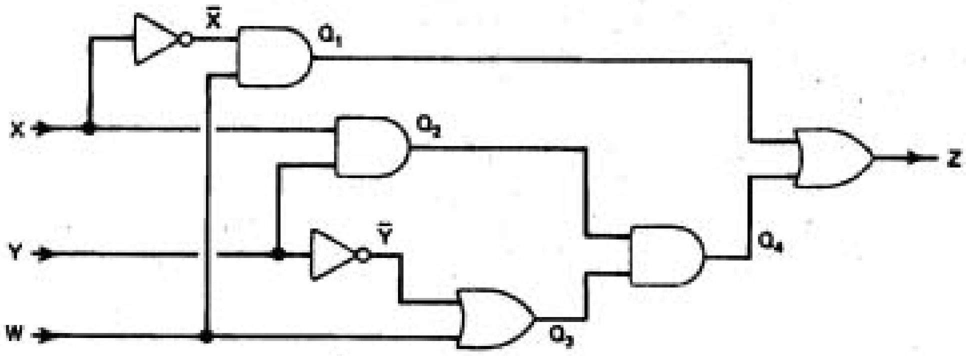
ในทางกลับกัน ถ้ามีวงจรเกทอยู่แล้ว ต้องการเขียนนิพจน์บูลลีนของวงจรก็ย่อมกระทำได้ วิธีที่ดีคือไล่เอาท์พุทของเกททีละตัวไปเรื่อย ๆ เริ่มตั้งแต่อินพุท จนถึงเกทสุดท้ายทางเอาท์พุท

ตัวอย่าง 4.2 จงเขียนนิพจน์บูลลีนจากวงจรต่อไปนี้



รูป 4.26 วงจรโจทย์ตัวอย่าง 4.2

วิธีทำ เขียนเอาท์พุทของเกทแต่ละตัวเริ่มจากอินพุทไปยังเอาท์พุท อาจเขียนลงไปที่รูปเลยก็ได้ หรือกำหนดสัญลักษณ์ลงไปก่อนดังในตัวอย่างนี้ก็ได้



รูป 4.27 โจทย์ตัวอย่าง 4.2 เมื่อกำหนดสัญลักษณ์ของเอาท์พุทของเกทแต่ละตัว

ดังนั้นจะได้เอาท์พุทดังนี้

$Q_1 = \overline{X}W$

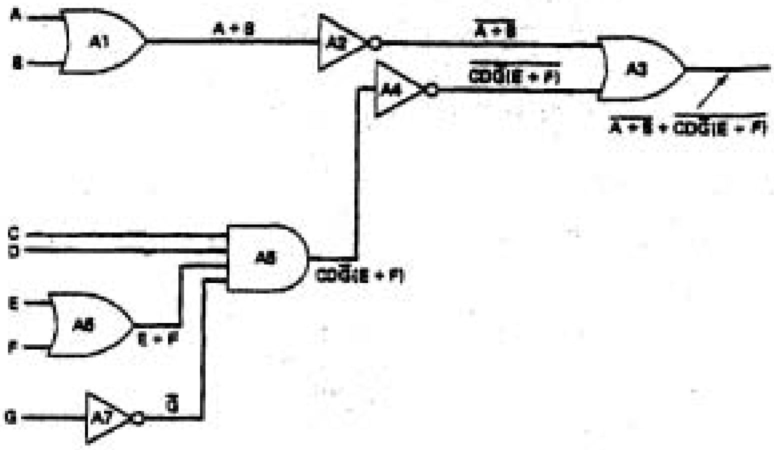
$Q_2 = XY$

$Q_3 = \overline{Y} + W$

$Q_4 = Q_2 \cdot Q_3 = XY(\overline{Y} + W)$

$Z = Q_1 + Q_4 = \overline{X}W + XY(\overline{Y} + W)$ **ตอบ**

ตัวอย่าง 4.3 เขียนนิพจน์บูลลีนจากวงจรเกทได้ดังรูป 4.28



รูป 4.28 ตัวอย่างการเขียนนิพจน์จากวงจรเกท

4.5 พีชคณิตบูลลีน
Boolean Algebra

อริสโตเติล (Aristotle : 384-322 B.C.) ปรัชญาชาวกรีกได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับตรรก และได้พัฒนามาใช้เป็นเครื่องมือแก้ปัญหาทางปรัชญาของเขา ปี 1854 จอร์จ บูล (George Boole : 1815-1864) นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษได้พัฒนาระบบทางคณิตศาสตร์ของตรรก ซึ่งเขียนฟังก์ชันความจริงด้วยสัญลักษณ์ ระบบของเขาแตกต่างจากพีชคณิตที่เราเรียนรู้กันมา ระบบของเขาเป็นพีชคณิตของตรรก เช่น A + A = A มิใช่ 2A อย่างพีชคณิตที่เราเคยรู้ งานของบูลใช้เพียงในขอบข่ายงานทางคณิตศาสตร์ จวบจนปี 1938 คล้อด อี. แชนนอน (Claude E. Shannon) นักวิทยาศาสตร์แห่งห้องทดลองเบลล์ (Bell Laboratories) จึงได้นำพีชคณิตของบูลมาแก้ปัญหาตรรกรีเลย์ ด้วยเหตุผลว่าตรรกเป็นเรื่องการตัดสินระหว่าง 2 สิ่ง คือ ถูก หรือ ผิด เช่นเดียวกับปัญหาทางรีเลย์คือมีพลังงานหรือไม่มีพลังงาน หรือหลอดไฟสว่าง, ดับ สวิตซ์ปิด, เปิด เป็นต้น พีชคณิตบูลลีนจึงถูกนำมาประยุกต์ใช้กับวงจรอิเล็กทรอนิกส์ซึ่งมีเพียง 2 สภาวะที่เป็นไปได้

พีชคณิตบูลลีนเป็นเทคนิคทางคณิตศาสตร์ ซึ่งใช้ได้กับปัญหาที่มีธรรมชาติเป็นตรรก ปัจจุบันได้ใช้พีชคณิตบูลลีนในคอมพิวเตอร์ในการออกแบบทางตรรก ข้อดีของการใช้คณิตศาสตร์อธิบายการทำงานของวงจรภายในคอมพิวเตอร์ ซึ่งมีสภาวะเพียง 0 หรือ 1 คือความสะดวกในการคำนวณด้วยนิพจน์ที่ใช้แทนวงจรกว่าการใช้แผนภาพวงจรตรรก นอกจากนี้ทฤษฎีพีชคณิตบูลลีนยังช่วยในการลดรูปนิพจน์ที่ใช้อธิบายโครงข่ายวงจร ทำให้ได้วงจรที่ง่าย ประหยัดแก่การสร้าง ให้ความสะดวก และยังไว้วางใจได้

พีชคณิตบูลลีนสามารถแปลเป็นฮาร์ดแวร์ (hardware) ในรูปแบบของแอนเกท ออเกท และอินเวิตเตอร์ เช่นเดียวกับพีชคณิตบูลลีนมีประโยชน์สำหรับวิเคราะห์เนื่องจากสามารถแปลฮาร์ดแวร์เป็นนิพจน์บูลลีนได้ ดังจะเห็นได้จากหัวข้อ 4.4 ที่ผ่านมา

สมมุติฐาน กฎ และทฤษฎีของพีชคณิตบูลลีน มีดังนี้

เกี่ยวกับคอมพลีเมนต์ :

1. $\overline{0} = 1$
2. $\overline{1} = 0$
3. ถ้า $A = 0$ แล้ว $\overline{A} = 1$
4. ถ้า $A = 1$ แล้ว $\overline{A} = 0$
5. $\overline{\overline{A}} = A$

เกี่ยวกับแอน :

6. $A \cdot 0 = 0$
7. $A \cdot 1 = A$
8. $A \cdot A = A$
9. $A \cdot \overline{A} = 0$

เกี่ยวกับออ :

10. $A + 0 = A$
11. $A + 1 = 1$
12. $A + A = A$
13. $A + \overline{A} = 1$

กฎการสลับที่ (commutative law) :

14. $A + B = B + A$
15. $A \cdot B = B \cdot A$

กฎการเปลี่ยนกลุ่ม (associative law) :

16. $A + (B+C) = (A+B) + C$
17. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

กฎการแจกแจง (distributive law) :

18. $A \cdot (B+C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$
19. $A + (B \cdot C) = (A+B) \cdot (A+C)$
20. $A + (\overline{A} \cdot B) = A + B$
21. $A \cdot (\overline{A}+B) = A \cdot B$

กฎลดรูปเยิ่นเย้อ (absorption law or redundance law) :

22. $A + A \cdot B = A$

23. $A \cdot (A+B) = A$

ทฤษฎีของเดอ มอร์แกน (De Morgan's Theorem) :

24. $\overline{A + B + C} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$

25. $\overline{A \cdot B \cdot C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

ทฤษฎีของเดอ มอร์แกน 2 ข้อ คือ

1. คอมพลีเมนต์ของผลบวก เท่ากับผลคูณของคอมพลีเมนต์

$$\overline{A + B + C} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$$

2. คอมพลีเมนต์ของผลคูณ เท่ากับผลบวกของคอมพลีเมนต์

$$\overline{A \cdot B \cdot C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$$

ทฤษฎีทั้งสองข้อนี้ เป็นเครื่องมือสำคัญแก่นักออกแบบคือ

ประการแรก ช่วยให้สามารถแตกตัวแปรภายใต้เครื่องหมายนอท (คอมพลีเมนต์) ให้เป็นตัวแปรเดี่ยว ๆ เช่น $\overline{A + BC}$ ทำให้กลายเป็น $\overline{A}\,(\overline{B} + \overline{C})$

ประการที่สอง ช่วยให้สามารถแปลงนิพจน์ในแบบผลบวกของผลคูณ (sum-of-products) ให้เป็นนิพจน์ในแบบผลคูณของผลบวก (product-of-sums) เช่น $A\overline{B}C + A\overline{BC}$ สามารถแปลงเป็น $\overline{(\overline{A} + B + \overline{C})\,(\overline{A} + B + C)}$

พีชคณิตบูลลีนมีสมบัติที่สำคัญคือ สมบัติคู่เสมอกัน (dual property) ซึ่งจะเห็นได้ชัดเจนจากข้างบนนี้ สมบัติข้อนี้หมายความว่า เอกลักษณ์ (identity) หรือกฎเกณฑ์หนึ่ง ๆ ของพีชคณิตบูลลีน ถ้าเปลี่ยนตัวดำเนินการแอน เป็นตัวดำเนินการออ หรือในทางกลับกันเปลี่ยนตัวดำเนินการออเป็นตัวดำเนินการแอน และเปลี่ยน 0 หรือ 1 เป็นคอมพลีเมนต์ของมันแล้ว ย่อมจะได้เอกลักษณ์ หรือกฎเกณฑ์ของพีชคณิตบูลลีนข้อใหม่เสมอ

เช่นมี $A + 1 = 1$ จากสมบัติคู่เสมอกันจึงมี $A \cdot 0 = 0$ ด้วย

หรือมี $A + (B \cdot C) = (A+B) \cdot (A+C)$ จากสมบัติคู่เสมอกันจึงมี

$A \cdot (B+C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$ ด้วย

การพิสูจน์กฎเกณฑ์ของพีชคณิตบูลลีน อาจทำได้หลายวิธี เช่น โดยใช้สมมติฐาน (ซึ่งคือสัจจพจน์) หรืออาจทำโดยเขียนตารางความจริงเพื่อดูทุก ๆ สภาวะที่เป็นไปได้ของตัวแปร แล้วดูผลลัพธ์ว่าทางซ้ายของสมการบูลลีนให้ผลเหมือนทางขวาของสมการบูลลีนในทุก ๆ สภาวะของตัวแปรหรือไม่ ถ้าเหมือนกันก็สรุปได้ว่ากฎเกณฑ์พีชคณิตบูลลีนนั้นถูกต้อง

ตัวอย่าง 4.4 จงพิสูจน์ว่า $A + (B \cdot C) = (A+B) \cdot (A+C)$ (ข้อ 19)

พิสูจน์

$A + BC = A \cdot 1 + BC$ (ข้อ 7)

$= A(1+B) + BC$ (ข้อ 11, 14)

$= A + AB + BC$ (ข้อ 18)

$= A(1+C) + AB + BC$ (ข้อ 11)

$= AA + AC + AB + BC$ (ข้อ 8, 18)

$= A(A+C) + BA + BC$ (ข้อ 18, 15)

$= A(A+C) + B(A+C)$ (ข้อ 18)

$= (A+C)A + (A+C)B$ (ข้อ 15)

$= (A+C)(A+B)$ (ข้อ 18)

$= (A+B) \cdot (A+C)$ (ข้อ 15)

ตัวอย่าง 4.5 จงพิสูจน์ทฤษฎีของเดอ มอร์แกน ที่ว่า

"คอมพลีเมนต์ของผลบวก เท่ากับผลคูณของคอมพลีเมนต์"

พิสูจน์ โดยใช้ตารางความจริง

สมมุติให้มีตัวแปรคือ A, B ดังนั้นทฤษฎีของ เดอ มอร์แกน ข้อนี้คือ $\overline{A+B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$

=

A	B	A + B	$\overline{A+B}$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} \cdot \bar{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

4.6 การประยุกต์พีชคณิตบูลลีน
Application of Boolean Algebra

พีชคณิตบูลลีนช่วยลดรูปนิพจน์บูลลีนให้ง่ายขึ้น เป็นผลให้วงจรตรรกใช้เกทน้อยลง เกิดความสะดวก ง่าย และประหยัด ลองพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

F_1, F_2, F_3 และ F_4 เป็นบูลลีนฟังก์ชัน ซึ่งมีความสัมพันธ์, ตารางความจริง และวงจรตรรกดังนี้

$F_1 = xyz'$

$F_2 = x + y'z$

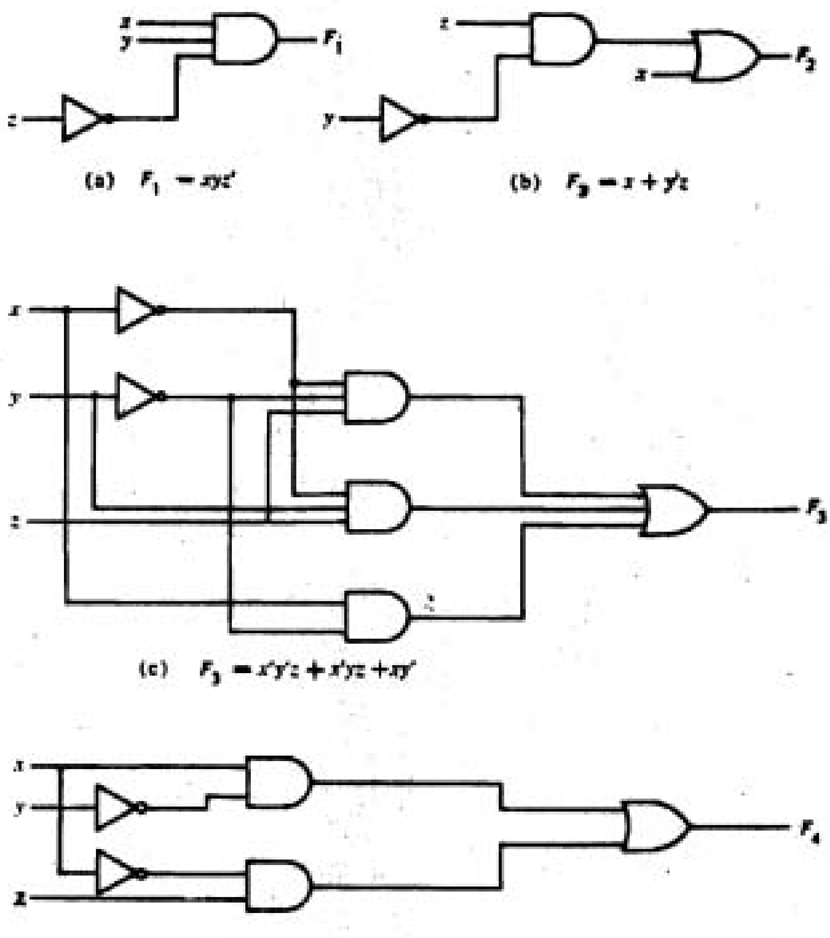
$F_3 = x'y'z + x'yz + xy'$

$F_4 = xy' + x'z$

ตาราง 4.2 ตารางความจริงสำหรับฟังก์ชัน F_1, F_2, F_3, F_4

Truth tables for $F_1 = xyz'$, $F_2 = x + y'z$,
$F_3 = x'y'z + x'yz + xy'$, and $F_4 = xy' + x'z$

x	y	z	F_1	F_2	F_3	F_4
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0



(a) $F_1 = xyz'$

(b) $F_2 = x + y'z$

(c) $F_3 = x'y'z + x'yz + xy'$

(d) $F_4 = xy' + x'z$

รูป 4.29 วงจรตรรกของฟังก์ชัน F_1, F_2, F_3, F_4

จากตารางความจริงของฟังก์ชันทั้งสี่นี้ มีข้อสังเกตว่า ตารางความจริงหนึ่งๆ อาจใช้อธิบายฟังก์ชันได้มากกว่าหนึ่งฟังก์ชัน ซึ่งจะเห็นได้จากตารางความจริงของ F_3 และ F_4 ว่ามีทุกๆ แถวเหมือนกัน เมื่อพิจารณาวงจรเกทของฟังก์ชัน F_3 และ F_4 ก็เห็นได้ว่า F_3 เป็นวงจรที่ใช้อุปกรณ์มากกว่า F_4 หมายความว่าย่อมมีวิธีการที่จะทำให้ฟังก์ชันง่ายขึ้นได้ วิธีการดังกล่าวนี้ก็คือพีชคณิตบูลลีนนั่นเอง

$$\begin{aligned} F_3 &= x'y'z + x'yz + xy' \\ &= x'z\,(y'+y) + xy' \\ &= xy' + x'z \\ &= F_4 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.6 จงลดรูปฟังก์ชันต่อไปนี้

(ก) $x + x'y$

(ข) $x\,(x'+y)$

(ค) $xy + x'z + yz$

(ง) $(x+y)\,(x'+z)\,(y+z)$

วิธีทำ (ก) $$\begin{aligned} x + x'y &= (x+x')\,(x+y) \\ &= 1\,(x+y) \\ &= x+y \end{aligned}$$

(ข) $x\,(x'+y) = xx' + xy = 0 + xy = xy$

(ค) $$\begin{aligned} xy + x'z + yz &= xy + x'z + yz\,(x+x') \\ &= xy + x'z + xyz + x'yz \\ &= xy\,(1+z) + x'z\,(1+y) \\ &= xy + x'z \end{aligned}$$

(ง) $(x+y)\,(x'+z)\,(y+z) = (x+y)\,(x'+z)$ โดยสมบัติคู่เสมอกันของฟังก์ชันในข้อ (ค)

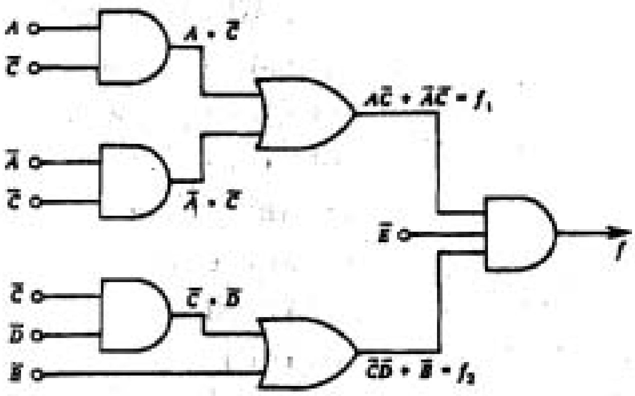
ตอบ

ตัวอย่าง 4.7 จงลดรูปของ $\overline{\overline{AB} + \overline{A} + AB}$

วิธีทำ $$\begin{aligned} \overline{\overline{AB} + \overline{A} + AB} &= \overline{\overline{A} + \overline{B} + \overline{A} + AB} \\ &= \overline{\overline{A} + \overline{B} + AB} \\ &= \overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}} \cdot \overline{AB} \\ &= A \cdot B\,(\overline{A}+\overline{B}) \\ &= AB\overline{A} + AB\overline{B} \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ตอบ

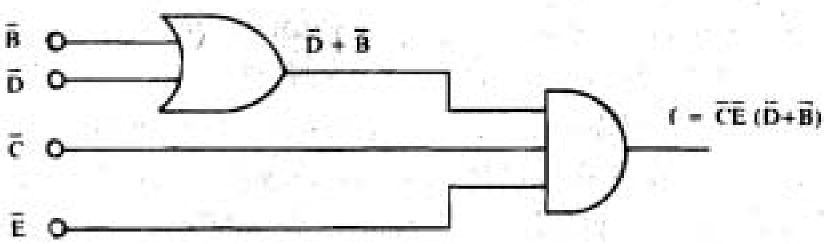
ตัวอย่าง 4.8 จงเขียนบูลลีนฟังก์ชันจากวงจรต่อไปนี้ แล้วลดรูปให้อยู่ในรูปแบบง่ายที่สุด แล้วเขียนวงจรใหม่ที่ได้จากการลดรูปแล้ว



รูป 4.30 โจทย์ตัวอย่าง 4.8

วิธีทำ จากรูป 4.30 จะได้ฟังก์ชัน คือ

$$f = f_1 \cdot \bar{E} \cdot f_2 = (A\bar{C} + \bar{A}\bar{C}) \cdot \bar{E} \cdot (\bar{C}\bar{D}+\bar{B})$$
$$= \bar{C}\,(A+\bar{A}) \cdot \bar{E} \cdot (\bar{C}\bar{D}+\bar{B})$$
$$= \bar{C}\bar{E}\bar{C}\bar{D} + \bar{C}\bar{E}\bar{B}$$
$$= \bar{C}\bar{E}\,(\bar{D}+\bar{B})$$



ตอบ

รูป 4.31 วงจรที่ได้จากการลดรูปโจทย์ตัวอย่าง 4.8

ตัวอย่าง 4.9 จงลดรูปของ $AB + \overline{AC} + A\bar{B}C\,(AB+C)$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
AB + \overline{AC} + A\bar{B}C\,(AB+C) &= AB + \overline{AC} + AAB\bar{B}C + A\bar{B}CC && \text{[ข้อ 18]} \\
&= AB + \overline{AC} + D + A\bar{B}C && \text{[ข้อ 6, 8,9]} \\
&= AB + \bar{A} + \bar{C} + A\bar{B}C && \text{[ข้อ 25]} \\
&= AB + \bar{C} + (\bar{A} + A\bar{B}C) && \text{[ข้อ 14]} \\
&= AB + \bar{C} + (\bar{A} + \bar{B}C) && \text{[ข้อ 20]} \\
&= (\bar{A} + AB) + (\bar{C} + \bar{B}C) && \text{[ข้อ 14]} \\
&= (\bar{A} + B) + (\bar{C} + \bar{B}) && \text{[ข้อ 20]} \\
&= \bar{A} + \bar{C} + (B + \bar{B}) && \text{[ข้อ 14]} \\
&= \bar{A} + \bar{C} + 1 && \text{[ข้อ 13]} \\
&= \bar{A} + (\bar{C} + 1) && \text{[ข้อ 16]} \\
&= \bar{A} + 1 && \text{[ข้อ 11]} \\
&= 1 && \text{[ข้อ 11]}
\end{aligned}
$$

ตอบ

4.7 รูปแบบบัญญัติ และรูปแบบมาตรฐาน Canonical and Standard Forms

4.7.1 มินเทอม และแมกซ์เทอม (Minterms and Maxterms)

ตัวแปรฐานสองอาจปรากฏในรูปแบบปกติ เช่น x หรือในรูปคอมพลีเมนต์ เช่น x' (หรือ $\bar{x}$) พิจารณาตัวแปร x และ y ซึ่งต่างก็เป็นได้ทั้งรูปแบบปกติ และรูปคอมพลีเมนต์ ดังนั้นเมื่อมาแอนกันย่อมเกิดสภาวะที่เป็นไปได้ 4 สภาวะ คือ $x'y'$, $x'y$, xy' และ xy แต่ละเทอมเหล่านี้เรียกว่า มินเทอม (minterm) หรือผลคูณมาตรฐาน (standard product) ในทำนองเดียวกัน ตัวแปร n ตัว สามารถทำให้เกิดมินเทอมได้ 2^n เทอม โดยมีชื่อเรียกแต่ละมินเทอมดังตัวอย่างกรณี 3 ตัวแปรในตาราง 4.3 เลขฐานสองจะเรียงลำดับจาก 0 ถึง 2^n-1 โดย n คือจำนวนตัวแปร แต่ละมินเทอมได้จากการแอนกันของตัวแปร โดยใส่เครื่องหมายแสดงคอมพลีเมนต์ (พราม, หรือบาร์) สำหรับเลขฐานสองบิทที่เป็น 0 และเขียนเป็นรูปแบบปกติของตัวแปรสำหรับเลขฐานสองที่เป็น 1 สัญลักษณ์ของมินเทอมคือ m_j เมื่อ j เป็นเลขฐานสิบที่เทียบค่าเท่ากับเลขฐานสองของมินเทอมนั้น ๆ

ตาราง 4.3 มินเทอมและแมกซ์เทอมสำหรับตัวแปรฐานสอง 3 ตัวแปร

x	y	z	Minterms Term	Minterms Designation	Maxterms Term	Maxterms designation
0	0	0	$x'y'z'$	m_0	$x + y + z$	M_0
0	0	1	$x'y'z$	m_1	$x + y + z'$	M_1
0	1	0	$x'yz'$	m_2	$x + y' + z$	M_2
0	1	1	$x'yz$	m_3	$x + y' + z'$	M_3
1	0	0	$xy'z'$	m_4	$x' + y + z$	M_4
1	0	1	$xy'z$	m_5	$x' + y + z'$	M_5
1	1	0	xyz'	m_6	$x' + y' + z$	M_6
1	1	1	xyz	m_7	$x' + y' + z'$	M_7

ในทำนองเดียวกัน ตัวแปร n ตัว ก็สามารถทำให้เกิดเทอมของออได้ 2^n เทอม เรียกว่า แมกซ์เทอม (maxterm) หรือผลบวกมาตรฐาน (standard sum) ตัวอย่างแมกซ์เทอม 8 เทอมของตัวแปร 3 ตัว พร้อมด้วยสัญลักษณ์ในการเรียกชื่อของแมกซ์เทอม แสดงดัง ตาราง 4.3 แต่ละแมกซ์เทอมได้จากการนำตัวแปรมาออกันโดยใส่เครื่องหมายแสดงคอมพลีเมนต์ (พราม หรือ บาร์ ¯) สำหรับตัวแปรที่มีค่าเป็น 1 และเขียนเป็นรูปแบบปกติสำหรับตัวแปรที่มีค่าเป็น 0 จงสังเกตว่าแต่ละแมกซ์เทอมเป็นคอมพลีเมนต์ของมินเทอมที่สอดคล้องกัน และในทางกลับกัน แต่ละมินเทอมก็ย่อมเป็นคอมพลีเมนต์ของแมกซ์เทอมที่สอดคล้องกัน

บูลลีนฟังก์ชันอาจแสดงในเชิงพีชคณิตจากตารางความจริงด้วยการเขียนมินเทอมสำหรับแต่ละสภาวะประสมของตัวแปรที่ให้ค่าฟังก์ชัน (เอาท์พุท) เป็น 1 แล้วนำมินเทอมทุกเทอมมาออกัน ตัวอย่างเช่น ฟังก์ชัน f_1 ในตาราง 4.4 เขียนได้จากสภาวะประสม 001, 100 และ 111 เป็น $x'y'z$, $y'z'$ และ xyz ตามลำดับ เนื่องจากแต่ละมินเทอมนี้ให้ผลลัพธ์เป็น 1 ในฟังก์ชัน f_1 ดังนั้น

$$f_1 = x'y'z + xy'z' + xyz = m_1 + m_4 + m_7$$

ตาราง 4.4 ฟังก์ชัน 3 ตัวแปร
Functions of three variables

x	y	z	Function f_1	Function f_2
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

ในทำนองเดียวกันสำหรับฟังก์ชัน f_2 เราได้

$$f_2 = x'yz + xy'z + xyz' + xyz = m_3 + m_5 + m_6 + m_7$$

ตัวอย่างนี้แสดงสมบัติสำคัญประการหนึ่งของพีชคณิตบูลลีนคือ "บูลลีนฟังก์ชันใด ๆ สามารถแสดงได้ด้วยผลบวกของมินเทอม" (ผลบวก หมายถึง การออ ของเทอมต่าง ๆ นั่นเอง)

ต่อไปพิจารณาคอมพลีเมนต์ของบูลลีนฟังก์ชัน ซึ่งจะเห็นได้จากตารางความจริงว่าสามารถหาได้โดยอ่านมินเทอมสำหรับทุก ๆ สภาวะประสมที่ให้ค่าฟังก์ชันเป็น 0 จากนั้นจึงนำมาออกัน เช่น คอมพลีเมนต์ของ f_1 คือ

$$f_1' = x'y'z' + x'yz' + x'yz + xy'z + xyz'$$

ถ้าคอมพลีเมนต์ฟังก์ชัน f_1' จะได้ฟังก์ชัน f_1 ดังนี้

$$f_1 = (x+y+z)\ (x+y'+z)\ (x+y'+z')\ (x'+y+z')\ (x'+y'+z)$$
$$= M_0 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_5 \cdot M_6$$

ในทำนองเดียวกันสามารถอ่านนิพจน์สำหรับ f_2 จากตารางความจริงได้ดังนี้

$$f_2 = (x+y+z)\ (x+y+z')\ (x+y'+z)\ (x'+y+z)$$
$$= M_0\, M_1\, M_2\, M_4$$

ตัวอย่างข้างต้นแสดงสมบัติประการที่สองของพีชคณิตบูลลีน คือ "บูลลีนฟังก์ชันใด ๆ สามารถแสดงได้ด้วยผลคูณของแมกซ์เทอม" (ผลคูณ หมายถึง การแอนเทอมต่าง ๆ เข้าด้วยกัน) ขบวนการหาผลคูณของแมกซ์เทอมโดยตรงจากตารางความจริงมีดังนี้

หาแมกซ์เทอมสำหรับแต่ละสภาวะประสมของตัวแปรซึ่งให้ค่าเป็น 0 แก่ฟังก์ชัน จากนั้นนำแมกซ์เทอมเหล่านั้นมาแอนกัน

บูลลีนฟังก์ชันซึ่งแสดงอยู่ในรูปแบบผลบวกของมินเทอม หรือผลคูณของแมกซ์เทอม เรียกว่าอยู่ในรูปแบบบัญญัติ (canonical form)

4.7.2 ผลบวกของมินเทอม (Sum of Minterms)

บางครั้งเป็นความสะดวกที่จะแสดงบูลลีนฟังก์ชันในรูปแบบผลบวกของมินเทอม ถ้าไม่ได้อยู่ในรูปแบบนี้ แล้วเราต้องการทำให้อยู่ในรูปแบบนี้ก็กระทำได้โดยเริ่มด้วยการขยายนิพจน์ให้อยู่ในแบบแอนเทอม จากนั้นตรวจสอบดูว่าแต่ละเทอมประกอบด้วยตัวแปรครบถ้วนหรือไม่ ถ้าตัวแปรใดหายไปให้เติมด้วยการเอา $(x+x')$ เข้าไปคูณ โดย x คือตัวแปรที่หายไป ลองดูตัวอย่างข้างล่างนี้จะเข้าใจดีขึ้น

ตัวอย่าง 4.10 จงแสดงบูลลีนฟังก์ชัน $F = A + B'C$ ให้อยู่ในแบบผลบวกของมินเทอม

วิธีทำ ฟังก์ชันนี้มี 3 ตัวแปร คือ A, B, C

เทอมแรกคือ A มีตัวแปรขาดหายไป 2 ตัว คือ B, C

เติมตัวแปร B ด้วยการเอา $(B+B')$ เข้าไปแอน :

$A = A(B+B') = AB + AB'$

ผลที่ได้ยังคงขาดตัวแปร C จึงเติมตัวแปร C ด้วยการเอา $(C+C')$ เข้าไปแอน :

$$\begin{aligned} A &= AB(C+C') + AB'(C+C') \\ &= ABC + ABC' + AB'C + AB'C' \end{aligned}$$

เทอมที่สองคือ $B'C$ มีตัวแปรขาดหายไป 1 ตัว คือ A

เติมตัวแปร A ด้วยการเอา $(A+A')$ เข้าไปแอน :

$B'C = B'C(A+A') = AB'C + A'B'C$

รวมทุก ๆ เทอม จะได้

$$\begin{aligned} F &= A + B'C \\ &= ABC + ABC' + AB'C + AB'C' + AB'C + A'B'C \end{aligned}$$

แต่เทอม $AB'C$ มี 2 อัน จึงตัดทิ้งไป 1 อัน ตามพีชคณิตบูลลีนที่ว่า $x + x = x$ พร้อมกับจัดเทอมใหม่ให้เรียงลำดับ จึงได้

$$\begin{aligned} F &= A'B'C + AB'C' + AB'C + ABC' + ABC \\ &= m_1 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 \end{aligned}$$

เป็นความสะดวกหากจะใช้สัญลักษณ์สำหรับแสดงฟังก์ชันบูลลีนที่อยู่ในแบบผลบวกของมินเทอม เช่น ฟังก์ชันในตัวอย่าง 4.10 ข้างบน ใช้สัญลักษณ์ ได้ว่า

$F(A, B, C) = \Sigma(1, 4, 5, 6, 7)$

โดยเครื่องหมาย Σ (summation) แทนการออของมินเทอม ตัวเลขที่ตามหลังมาเป็นมินเทอมของฟังก์ชัน ซึ่งคือเทอมของการแอน (ผลคูณ) ของตัวแปรที่ให้ค่าฟังก์ชันเป็น 1 เรียงตามลำดับ

4.7.3 ผลคูณของแมกซ์เทอม (Product of Maxterms)

การแสดงบูลลีนฟังก์ชันด้วยผลคูณของแมกซ์เทอม กระทำโดยเริ่มด้วยการหาออเทอม ซึ่งทำได้โดยใช้กฎการแจกแจงของพีชคณิตบูลลีนที่ว่า $x + yz = (x+y)(x+z)$ จากนั้นตัวแปรที่หายไปก็ให้เติมด้วยการเอา xx' เข้าไปออ ลองดูตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.11 จงแสดงบูลลีนฟังก์ชัน $F = xy + x'z$ ในรูปแบบผลคูณของแมกซ์เทอม

วิธีทำ เริ่มโดยแปลงฟังก์ชันเป็นออเทอม โดยใช้กฎการแจกแจงของพีชคณิตบูลลีน :

$$F = xy + x'z = (xy+x')(xy+z)$$

$$= (x+x')(y+x')(x+z)(y+z)$$

$$= (x'+y)(x+z)(y+z)$$

ฟังก์ชันนี้มี 3 ตัวแปร คือ x, y, z แต่ละออเทอมขาดตัวแปรไป 1 ตัว จึงเติมเข้าไป :

$$x' + y = x' + y + zz' = (x' + y + z)(x' + y + z')$$

$$x + z = x + z + yy' = (x + y + z)(x + y' + z)$$

$$y + z = y + z + xx' = (x + y + z)(x' + y + z)$$

รวมทุก ๆ เทอม และตัดเทอมที่ปรากฏเกิน 1 ครั้ง ให้เหลือ 1 ครั้ง จะได้

$$F = (x + y + z)(x + y' + z)(x' + y + z)(x' + y + z')$$

$$= M_0 M_2 M_4 M_5$$

ใช้สัญลักษณ์เพื่อความสะดวก :

$$F(x, y, z) = \pi(0, 2, 4, 5)$$

สัญลักษณ์คูณ (π) แทนการแอนของแมกซ์เทอม ตัวเลขที่ตามหลังมาซึ่งอยู่ในวงเล็บคือแมกซ์เทอมของฟังก์ชัน

4.7.4 การแปลงระหว่างรูปแบบบัญญัติ (Conversion between Canonical Forms)

คอมพลีเมนต์ของฟังก์ชันที่แสดงอยู่ในแบบผลบวกของมินเทอมจะเท่ากับผลบวกของมินเทอมซึ่งหายไปจากฟังก์ชันนั้น ทั้งนี้เพราะฟังก์ชันนั้นแสดงโดยมินเทอมทั้งหลายที่ให้ค่าฟังก์ชันเป็น 1 ในขณะที่คอมพลีเมนต์ของมันคือ 1 สำหรับมินเทอมที่ให้ค่าฟังก์ชันเป็น 0 เช่นตัวอย่างต่อไปนี้

ฟังก์ชัน $F(A, B, C) = \Sigma(1, 4, 5, 6, 7)$

มีคอมพลีเมนต์คือ $F'(A, B, C) = \Sigma(0, 2, 3) = m_0 + m_2 + m_3$

ถ้าเราหาคอมพลีเมนต์ของ F' โดยทฤษฎีเดอ มอร์แกน เราจะได้ F ในอีกรูปแบบหนึ่งคือ

$$F = (m_0+m_2+m_3)' = m_0' \cdot m_2' \cdot m_3' = M_0M_2M_3 = \pi(0, 2, 3)$$

จากสมการข้างบนจึงได้ความสัมพันธ์ว่า

$$m_j' = M_j$$

ดังที่เราได้พบมาแล้วจากตาราง 4.3 ความสัมพันธ์นี้หมายความว่า แมกซ์เทอม j เป็นคอมพลีเมนต์ของมินเทอม j และในทางกลับกัน

ตัวอย่างข้างบนเป็นการแสดงการแปลงฟังก์ชันในแบบผลบวกของมินเทอมให้เป็นฟังก์ชันในแบบผลคูณของแมกซ์เทอม ในทำนองเดียวกันอาจแสดงการแปลงกลับกันได้ ดังนั้นจึงสรุปขบวนการแปลงได้ว่าให้กระทำโดยเปลี่ยน เครื่องหมาย Σ กับ π แล้วเขียนตัวเลขของเทอมที่ไม่ปรากฏในรูปแบบตั้งต้น

เช่น $F(x, y, z) = \pi(0, 2, 4, 5)$

ซึ่งอยู่ในรูปแบบผลคูณของแมกซ์เทอม สามารถแปลงให้เป็นฟังก์ชันในรูปแบบผลบวกของมินเทอม คือ

$F(x, y, z) = \Sigma(1, 3, 6, 7)$

ข้อสังเกต ในการหาเทอมที่ไม่ปรากฏในรูปแบบตั้งต้น ต้องระลึกถึงจำนวนมินเทอมหรือแมกซ์เทอมทั้งหมดว่าเป็น 2^n เมื่อ n เป็นจำนวนตัวแปรในฟังก์ชัน

4.7.5 รูปแบบมาตรฐาน

รูปแบบบัญญัติทั้งสองของพีชคณิตบูลลีนเป็นรูปแบบพื้นฐาน ซึ่งสามารถอ่านได้จากตารางความจริงของฟังก์ชัน และทั้งสองแบบนี้ไม่ได้ให้ฟังก์ชันที่ประกอบด้วยตัวแปร หรือเทอมที่น้อยที่สุด เพราะแต่ละมินเทอม หรือแมกซ์เทอมต้องประกอบด้วยตัวแปรทุกตัว (ไม่ว่าจะเป็นคอมพลีเมนต์ หรือไม่ก็ตาม) โดยนิยามอยู่แล้ว

อีกวิธีหนึ่งในการแสดงบูลลีนฟังก์ชันคือรูปแบบมาตรฐาน วิธีนี้เทอมที่ประกอบอยู่ในฟังก์ชันอาจมีหนึ่ง สอง หรือกี่ตัวแปรก็ได้ รูปแบบมาตรฐานมี 2 ชนิดคือ ผลบวกของผลคูณ (sum of products) และผลคูณของผลบวก (product of sums)

ผลบวกของผลคูณ เป็นนิพจน์บูลลีน ซึ่งประกอบด้วยแอนเทอม เรียกว่า เทอมผลคูณ (product terms) ของหนึ่งหรือมากกว่าหนึ่งตัวแปร คำว่าผลบวก แทน การออของเทอมเหล่านี้ ตัวอย่างฟังก์ชันที่แสดงในแบบผลบวกของผลคูณได้แก่

$F_1 = y' + xy + x'yz'$

ซึ่งจะเห็นว่ามีผลคูณอยู่ 3 เทอม แต่ละเทอมมี 1, 2 และ 3 ตัวแปร ตามลำดับ ผลบวกของเทอมเหล่านี้คือการออ

ผลคูณของผลบวกเป็นนิพจน์บูลลีน ซึ่งประกอบด้วยออเทอม เรียกว่า เทอมผลบวก (sum term) แต่ละเทอมอาจมีตัวแปรจำนวนเท่าใดก็ได้ คำว่าผลคูณหมายถึงการแอนของเทอมเหล่านี้ ตัวอย่างฟังก์ชันซึ่งแสดงในแบบผลคูณของผลบวกได้แก่

$F_2 = x(y'+z)(x'+y+z'+w)$

ซึ่งจะเห็นว่ามีผลบวกอยู่ 3 เทอม แต่ละเทอมมี 1, 2 และ 4 ตัวแปร ตามลำดับ ผลคูณของเทอมเหล่านี้คือการแอน

บูลลีนฟังก์ชันอาจแสดงในรูปแบบไม่มาตรฐาน (nonstandard form) เช่น

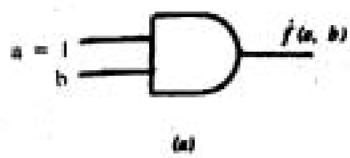
$F_3 = (AB+CD)(A'B' + C'D')$

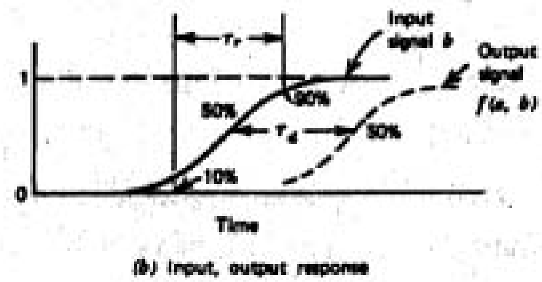
ซึ่งมิใช่ทั้งผลบวกของผลคูณ หรือผลคูณของผลบวก เราอาจเปลี่ยนให้เป็นรูปแบบมาตรฐาน โดยอาศัยกฎการแจกแจงของพีชคณิตบูลลีน เพื่อจัดการกับวงเล็บ จะได้

$F_3 = A'B'CD + ABC'D'$

4.8 พฤติกรรมพลวัต
Dynamic Behavior

กลอุปกรณ์ตรรกทั้งหลายประกอบด้วยชิ้นส่วนซึ่งสะสมพลังงานได้ ดังนั้นผลของการเปลี่ยนแปลงที่อินพุทของกลอุปกรณ์ ไม่สามารถไปปรากฏที่เอาท์พุทได้ทันที ตัวอย่างเช่น วงจรแอนเกทในรูป 4.32 (a)

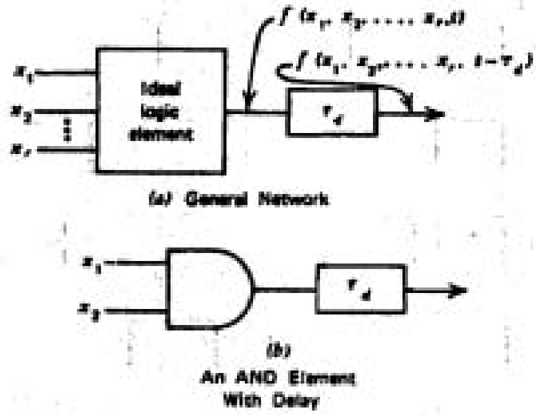




รูป 4.32 การตอบสนองพลวัตของวงจรตรรก

เริ่มต้นจัดให้อินพุท a เป็น 1 ไว้ก่อน จึงใส่อินพุท b ให้เป็น 1 ซึ่งจะมีลักษณะดังรูป 4.32 (b) พิจารณาสัญญาณอินพุท เราจะเห็นว่าเมื่อเริ่มต้นนั้นอินพุทเป็น 0 ทำให้สัญญาณเอาท์พุท เป็นสถานะคงตัวที่ค่า 0 จากนั้นอินพุท b เปลี่ยนไปเป็นค่า 1 แต่มิใช่ทันทีทันใด แต่จะค่อยเป็นค่อยไปดังรูป 4.32 (b) เวลา τ_r คือระยะเวลาที่อินพุทใช้ไปในการทำให้สัญญาณอินพุทเปลี่ยนจาก 10% ไปถึง90% ของค่าสูงสุด (คือ 1) เรียกว่า เวลาขึ้น (rise time) ของสัญญาณอินพุท ค่าเวลานี้เป็นตัววัดอัตราเร็วที่อินพุทสามารถเปลี่ยนแปลง มาพิจารณาที่เอาท์พุทบ้าง เอาท์พุทซึ่งต้องกลายเป็น 1 ก็มิใช่ว่าจะตอบสนองในทันทีต่อสัญญาณอินพุท แต่จะต้องหน่วงเวลา (delay) ไปเท่ากับ τ_d วินาทีก่อนจึงจะมีการตอบสนองต่อสัญญาณของอินพุท τ_d นี้วัดที่ 50% ระหว่างสัญญาณของอินพุทและเอาท์พุท

การหน่วงเวลาซึ่งมีอยู่ประจำตัวในชิ้นส่วนตรรกทั้งหลายมีความสำคัญในการพิจารณาอัตราเร็วสูงสุดของการทำงานของโครงข่ายตรรก (logic network) ถ้าเราคำนึงถึงปัญหาเช่นนี้ เราอาจประมาณสมบัติพลวัตของชิ้นส่วนตรรกได้ดังแผนภาพวงจรที่แสดงในรูป 4.33 รูป 4.33 (b) เป็นการยกตัวอย่างชิ้นส่วนตรรกอันหนึ่งคือแอนเกท

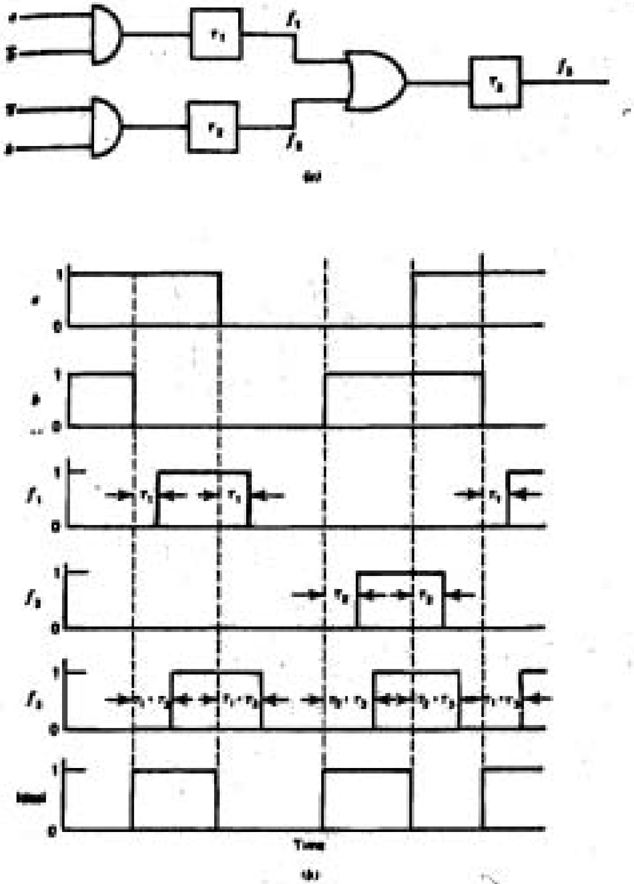


รูป 4.33 โครงข่ายเกทพร้อมด้วยการหน่วงเวลาประจำตัว (a) โครงข่ายทั่วไป (b) แอนเกท

4.9 แผนภาพจังหวะเวลา
Timing Diagrams

การหน่วงเวลาของชิ้นส่วนตรรกแต่ละอันในโครงข่ายตรรกมีส่วนร่วมต่อการหน่วงเวลาทั้งหมดของโครงข่าย ในบางกรณีเป็นสิ่งสำคัญยิ่งที่จะต้องรู้ผลที่แม่นตรงที่ชิ้นส่วนตรรกแต่ละชิ้นมีต่อพฤติกรรมภาวะชั่วครู่ (transient) ของโครงข่ายทั้งหมด เราสามารถศึกษาพฤติกรรมนี้ด้วยแผนภาพจังหวะเวลาซึ่งแสดงจังหวะเวลาของแต่ละสัญญาณในโครงข่าย

แผนภาพจังหวะเวลาของโครงข่ายตัวอย่างในรูป 4.34 (a) แสดงดังรูป 4.34 (b) ในที่นี้สมมุติว่า $\delta_2 > \delta_1$



รูป 4.34 (a) ตัวอย่างโครงข่าย (b) แผนภาพจังหวะเวลาของโครงข่ายตรรกในรูป (a) โดย $f_3 = a\bar{b} + \bar{a}b$

การหน่วงเวลาในชิ้นส่วนตรรกนั้นพิจารณาได้โดยโครงสร้างทางฟิสิกส์ของชิ้นส่วน และสามารถแปรเปลี่ยนได้อย่างเห็นได้ชัดจากชิ้นส่วนหนึ่งไปยังอีกชิ้นส่วนหนึ่ง ซึ่งเป็นประเภทเดียวกัน ดังนั้นการหน่วงเวลาซึ่งปรากฏในแผนภาพจังหวะเวลาจึงเป็นค่าตัวแทนซึ่งแสดงลักษณะของพฤติกรรมโดยเฉลี่ยของชิ้นส่วนแต่ละชิ้น

อัตราเร็วของการทำงาน (operating speed) ของโครงข่ายตรรกใด ๆ หาได้จากเวลาทั้งหมดที่เอาท์พุทของโครงข่ายใช้ไปในการไปสู่ค่าสถานะคงตัว ภายหลังการเปลี่ยนแปลงในสัญญาณอินพุทแล้ว ตัวอย่างในรูป 4.34 นี้ โครงข่ายจะต้องใช้เวลา $\delta_1 + \delta_3$ วินาที ในการไปสู่ค่าเสถียรหลังจากที่มีการเปลี่ยนแปลงในอินพุทของสายบนผ่านตลอดโครงข่ายแล้ว และใช้เวลา $\delta_2 + \delta_3$ วินาที หลังจากการเปลี่ยนแปลงในอินพุทไปยังสายล่างผ่านตลอดโครงข่าย เนื่องจาก $\delta_2 > \delta_1$ ดังนั้นอัตราเร็วทั้งหมดของการทำงานของโครงข่ายจึงถูกกำหนดโดยเวลาหน่วง $\delta_2 + \delta_3$ วินาที เพราะฉะนั้นอินพุทของโครงข่ายนี้ต้องจำกัดให้มีการเปลี่ยนแปลงน้อยกว่า $1/(\delta_2 + \delta_3)$ ต่อวินาที

สรุป

ตัวแปรฐานสอง คือตัวแปรที่มีค่าเพียง 2 ค่า คือ 0 และ 1 ตรรกที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรเช่นนี้ด้วยตัวดำเนินการแอน ออ และนอท เรียกว่าตรรกฐานสอง และฟังก์ชันที่เขียนแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรฐานสองกับตัวดำเนินการข้างต้นก็คือ ฟังก์ชันฐานสอง หรือบูลลีนฟังก์ชัน

เกทพื้นฐานคือแอนเกท ออเกท และนอทเกท มีสมบัติแตกต่างกัน กล่าวคือ แอนเกทจะให้เอาท์พุทเป็น 1 ก็ต่อเมื่ออินพุททุกอันเป็น 1 ในขณะที่ออเกทให้เอาท์พุท 1 เมื่ออินพุทอันใดอันหนึ่ง หรือทุกอินพุทเป็น 1 และสำหรับนอทเกทนั้นเป็นการคอมพลีเมนต์อินพุทนั่นเอง

แนทเกท และนอเกท เป็นเกทสำคัญใช้สร้างแอน, ออ และนอทเกทได้

เอ็กซ์คลูสีฟ-ออเกท เป็นเกทที่แตกต่างจากออเกท เนื่องจากมันให้เอาท์พุทเป็น 1 ก็ต่อเมื่ออินพุทเป็นจำนวนคี่มีค่าเป็น 1

พีชคณิตบูลลีนมีความสำคัญยิ่งต่อขอบข่ายงานคอมพิวเตอร์ และอิเล็กทรอนิกส์ที่มีสภาวะที่เป็นไปได้เพียง 2 สภาวะ พีชคณิตบูลลีนช่วยลดรูปฟังก์ชันตรรกให้เป็นฟังก์ชันที่ง่าย จึงประหยัดและสะดวกในการสร้างวงจร

สมมุติฐาน กฎ และทฤษฎีพีชคณิตบูลลีน ซึ่งรวบรวมขึ้นเพื่อแสดงสมบัติคู่เสมอกันมีดังต่อไปนี้

สมมุติฐาน (postulates)

1. ก. $A = 1$ (ถ้า $A \neq 0$) — 1. ข. $A = 0$ (ถ้า $A \neq 1$)

ผลคูณตรรก

2. ก. $0 \cdot 0 = 0$ — 2. ข. $1 + 1 = 1$

3. ก. $0.1 = 1.0 = 0$ — 3. ข. $1 + 0 = 0 + 1 = 1$

4. ก. $1 \cdot 1 = 1$ — 4. ข. $0 + 0 = 0$

คอมพลีเมนต์ (complement)

5. ก. $\overline{1} = 0$ — 5. ข. $\overline{0} = 1$

คุณสมบัติทางพีชคณิต

กฎการสลับที่ (commutative law)

6. ก. $AB = BA$ — 6. ข. $A + B = B + A$

กฎการเปลี่ยนกลุ่ม (associative law)

7. ก. $A(BC) = AB(C)$ — 7. ข. $A + (B+C) = (A+B) + C$

กฎการแจกแจง (distributive law)

8. ก. $A(B+C) = AB + AC$ 8. ข. $A + BC = (A+B)(A+C)$

ทฤษฎี

กฎเอกลักษณ์ (identity Jaw)

9. ก. $A \cdot A = A$ 9. ข. $A + A = A$

กฎนิเสธ (negation law)

10. ก. $\bar{A} = \bar{A}$ 10. ข. $(\bar{\bar{A}}) = A$

กฎลดรูปเยิ่นเย้อ (redundance or absorbtion law)

11. ก. $A \cdot (A+B) = A$ 11. ข. $A + (A \cdot B) = A$

12. ก. $A(\bar{A}+B) = AB$ 12. ข. $A + (\bar{A}B) = A + B$

กฎเกณฑ์

13. ก. $A \cdot 0 = 0$ 13. ข. $A + 1 = 1$

14. ก. $A \cdot 1 = A$ 14. ข. $A + 0 = A$

15. ก. $A \cdot \bar{A} = 0$ 15. ข. $A + \bar{A} = 1$

ทฤษฎีเดอ มอร์แกน (De Morgan's Theorem)

16. ก. $\overline{A \cdot B \cdot C} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$ 16. ข. $\overline{A + B + C} = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$

ถ้า $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นตัวแปรฐานสอง n ตัว คอมพลีเมนต์ของตัวแปรเหล่านี้คือ $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ จะทำให้เกิดผลคูณมาตรฐาน หรือเรียกว่ามินเทอม (m_j) ได้ 2^n เทอม ซึ่งหาได้จากสภาวะประสมของตัวแปร โดยถ้าตัวแปรเป็น 0 ให้ใช้คอมพลีเมนต์ของตัวแปรนั้นมาสร้างผลคูณ และถ้าตัวแปรเป็น 1 ก็ใช้ตัวแปรนั้นมาสร้างผลคูณ ตัวแปรดังกล่าวก็สามารถสร้างผลบวกมาตรฐานหรือเรียกว่า แมกซ์เทอม (M_j) ได้ 2^n เทอม ซึ่งสร้างได้โดยถ้าตัวแปรเป็น 0 ให้ใช้ตัวแปรนั้นมาสร้างผลบวก และถ้าตัวแปรเป็น 1 ก็ใช้คอมพลีเมนต์ของตัวแปรมาสร้างผลบวก มินเทอมและแมกซ์เทอมที่ได้จะเป็นคอมพลีเมนต์ของกันและกัน $(m_j' = M_j)$

บูลลีนฟังก์ชันใด ๆ สามารถแสดงได้ด้วยผลบวกของมินเทอม หรือผลคูณของแมกซ์เทอม เรียกว่าบูลลีนฟังก์ชันนั้นอยู่ในรูปแบบบัญญัติ ความสัมพันธ์ระหว่าง 2 รูปแบบนี้คือ

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_i (m_j') = \pi (M_j)$$

รูปแบบมาตรฐานเป็นอีกวิธีหนึ่งในการแสดงบูลลีนฟังก์ชัน ซึ่งมี 2 ชนิดเช่นเดียวกัน คือ แบบผลบวกของผลคูณ และผลคูณของผลบวก

รูปแบบมาตรฐานนั้น เทอมต่าง ๆ ที่ประกอบอยู่ในฟังก์ชันอาจมีตัวแปรกี่ตัวก็ได้ แต่รูปแบบบัญญัติต้องประกอบด้วยมินเทอมหรือแมกซ์เทอมที่มีตัวแปรทุกตัวของฟังก์ชันปรากฏอยู่

อุปกรณ์ตรรกทั้งหลายมีเวลาขึ้น เวลาหน่วงประจำตัว เวลาขึ้นคือเวลาในการเปลี่ยนแปลงอินพุทจาก 10% ถึง 90% ของค่าสูงสุดคือ 1 และเวลาหน่วงนั้นวัดระหว่างจุด 50% ของสัญญาณอินพุทและเอาท์พุท

แผนภาพจังหวะเวลามีประโยชน์ในการศึกษาพฤติกรรมของโครงข่าย เพราะแสดงความสัมพันธ์ของสัญญาณอินพุท และเอาท์พุทของโครงข่าย

แบบฝึกหัด

4.1 จงสร้างอินเวิตเตอร์ แอนเกท และออเกทจากนอเกท

4.2 จงเขียนตารางความจริงของเอ็กซ์คลูสีฟ-ออเกท 4 อินพุท

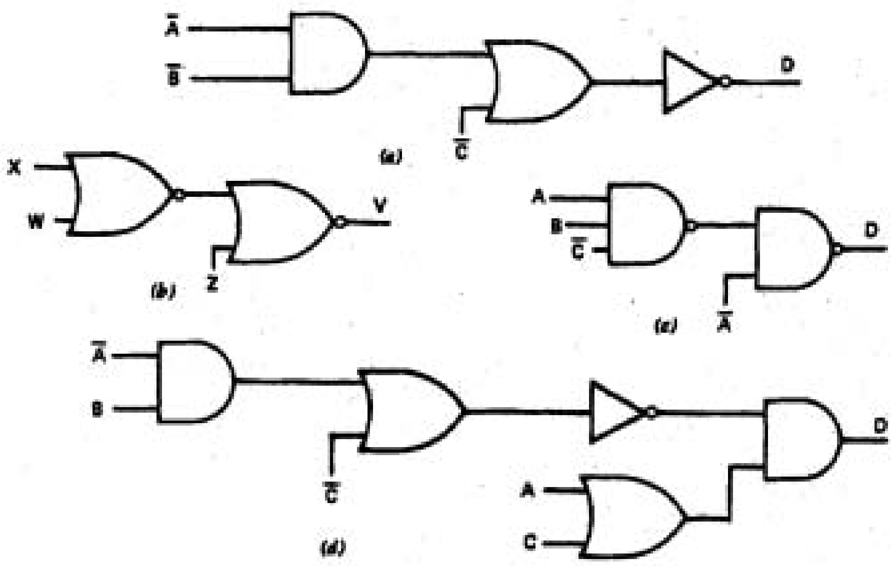
4.3 จงวาดแผนภาพตรรก (logic diagram) จากนิพจน์ตรรกต่อไปนี้

(ก) $D = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}$

(ข) $W = X\bar{Y}(Z+\bar{Y}) + \bar{X}Z$

(ค) $D = [A(B+\bar{C}) + \bar{A}B]\,C$

4.4 จงเขียนนิพจน์บูลลีนจากแผนภาพตรรกต่อไปนี้



รูป 4.35 โจทย์แบบฝึกหัด 4.4

4.5 จากนิพจน์บูลลีนต่อไปนี้จงทำให้เป็นนิพจน์ที่ง่ายที่สุด แล้วเขียนวงจรของนิพจน์ที่ได้

(ก) $D = \bar{A}BC + A\bar{B}C + ABC + B\bar{C}$

(ข) $W = X\bar{Y} + \bar{X}(Z+Y) + X\bar{Z}$

4.6 จงแสดงทฤษฎีเดอ มอร์แกน เป็นแผนภาพตรรก (วงจรเกท)

4.7 จงลดรูปนิพจน์บูลลีนต่อไปนี้

(ก) $A\bar{\bar{B}} + ABC + A(B+A\bar{\bar{B}})$

(ข) $A + \bar{B}C(A+\overline{\bar{B}C})$

(ค) $A[B+C(\overline{AB+AC})]$

(ง) $\overline{ABC}(\overline{A+B+C})$

4.8 จงพิสูจน์ว่า $AB + BC + C\bar{A} = AB + C\bar{A}$

4.9 จากสมการ $T = A\bar{B}\bar{C} + AB$ จงหาค่าว่า T จะเป็น 0 หรือ 1 เมื่อ

(ก) $A = 1, B = 0, C = 1$

(ข) $A = 0, B = 0, C = 0$

4.10 จงเขียนตารางความจริงสำหรับสมการต่อไปนี้

(ก) $V = R(\bar{S} + \bar{T})$ (ข) $M = N + P + N\bar{P}$

4.11 จงลดรูปฟังก์ชัน T_1, T_2 ต่อไปนี้

A	B	C	T_1	T_2
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	0	1

4.12 จงทำให้นิพจน์ต่อไปนี้เป็นนิพจน์ที่ง่ายที่สุด

(ก) $(x + y)(x + y')$

(ข) $xyz + x'y + xyz'$

(ค) $y(wz' + wz) + xy$

(ง) $(A+B)'(A'+B')'$

4.13 จงเขียนตารางความจริงของฟังก์ชัน $F = xy + xy' + y'z$

4.14 จงแสดงฟังก์ชันต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของ ผลบวกของมินเทอม และผลคูณของแมกซ์เทอม

(ก) $F(A, B, C, D) = D(A' + B) + B'D$

(ข) $F(w, x, y, z) = y'z + wxy' + wxz' + w'x'z$

(ค) $F(A, B, C) = (A'+B)(B'+C)$

(ง) $F(x, y, z) = 1$

4.15 จงแปลงฟังก์ชันต่อไปนี้ซึ่งอยู่ในแบบหนึ่งของรูปแบบบัญญัติให้อยู่ในอีกแบบหนึ่งของรูปแบบบัญญัติ

(ก) $F(x, y, z) = \Sigma(1, 3, 7)$

(ข) $F(A, B, C, D) = \Sigma(0, 2, 6, 11, 13, 14)$

(ค) $F(x, y, z) = \pi(0, 3, 6, 7)$

(ง) $F(A, B, C, D) = \pi(0, 1, 2, 3, 4, 6, 12)$

4.16 "ผลบวกของมินเทอมทั้งหมดของบูลลีนฟังก์ชันที่มี n ตัวแปรคือ 1"

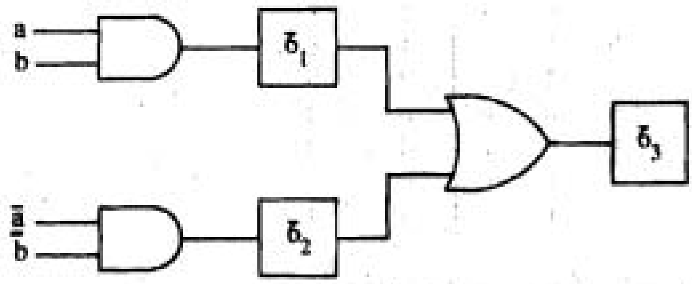
(ก) จงพิสูจน์ข้อความข้างบน เมื่อ $n = 3$

(ข) จงพิสูจน์ข้อความข้างบนเมื่อ n เป็นค่าใด ๆ

4.17 ความแตกต่างระหว่างรูปแบบบัญญัติ และรูปแบบมาตรฐานคืออะไร รูปแบบใดดีกว่าในการเขียนบูลลีนฟังก์ชันสำหรับเกท รูปแบบใดที่อ่านได้โดยตรงจากตารางความจริง

4.18 จงแสดงว่าคู่เสมอกัน (dual) ของเอกซ์คลูสีฟ-ออ เท่ากับคอมพลีเมนต์ของมัน

4.19 จงวาดแผนภาพจังหวะเวลาของโครงข่ายตรรกในรูป 4.36 และหาอัตราเร็วของการทำงานของโครงข่าย กำหนด $\delta_2 < \delta_1$



รูป 4.36 โจทย์ข้อ 4.19