บทที่ 2
ระบบตัวเลข
NUMBER SYSTEM

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาจบบทนี้แล้วนักศึกษาสามารถ

1. เขียนจำนวนเลขฐานสอง โดยอาศัยหลักตัวนำ และเลขพื้นฐาน
2. แปลงจำนวนเลขระหว่างระบบฐานสิบกับระบบฐานสอง
3. แปลงจำนวนเลขระหว่างระบบฐานสิบกับระบบฐานแปด และระบบฐานสิบหก
4. แปลงจำนวนเลขระหว่างระบบฐานสองกับระบบฐานแปด และระบบฐานสิบหก
5. แปลงจำนวนเลขระหว่างระบบฐานสิบกับระบบฐานใด ๆ ได้
6. บวก ลบ คูณ หารเลขฐานสองได้
7. หาคอมพลีเมนต์ของจำนวนเลขได้ และใช้คอมพลีเมนต์ช่วยในการลบเลขได้
8. เขียนเลขฐานสองจำนวนลบในแบบต่าง ๆ ได้
9. เขียนเลขฐานสองแบบติดเครื่องหมายได้
10. แสดงจำนวนเลขฐานสองในแบบตัวเลขอิงดรรชนีได้
11. ทำเลขคณิตของตัวเลขอิงดรรชนีได้

2.1 ความนำ

ระบบตัวเลขที่เราใช้กันอยู่ในปัจจุบัน เอื้ออำนวยประโยชน์อย่างยิ่งต่อนักคณิตศาสตร์และนักวิทยาศาสตร์สมัยใหม่ และเป็นกลไกสำคัญของความรุดหน้าอันรวดเร็วแห่งวิวัฒนาการ ลาปลาซ (Laplace) นักคณิตศาสตร์รู้คุณค่าของระบบจำนวนฐานสิบ (decimal number system) ที่เราใช้อยู่ได้อย่างดี

เนื่องจากมือเป็นเครื่องมือสะดวกที่สุดที่ธรรมชาติสร้างให้ใช้นับจำนวน จึงเป็นทั้งธรรมชาติและความโชคดีที่ระบบจำนวนของเรามีจำนวนตัวเลขพื้นฐาน สอดคล้องกับจำนวนนิ้วมือมนุษย์ ยุคโบราณเมื่อมนุษย์เริ่มเรียนรู้ในการนับ เขาพยายามแทนจำนวนหรือตัวเลขโดยกราฟ ตัวเลขเริ่มแรกที่พบประกอบด้วยขีดในแนวตั้งและแนวนอน เลข 1 ของเราเป็นตัวอย่างของสัญลักษณ์แบบนี้ น่าสังเกตว่า เลข 2 ประกอบด้วยขีดแนวนอนสองขีด โดยมีเส้นที่สามเป็นเส้นเชื่อมโยงสองเส้นแรก และเลข 3 ประกอบด้วยเส้นในแนวนอนสามเส้นพร้อมด้วยเส้นเชื่อมโยง เลขโรมันเป็นตัวอย่างที่ดีของเส้นที่ใช้เป็นพื้นฐานสำหรับตัวเลขได้แก่ I (1), II (2), III (3), IV (4), V (5), VI (6), X (10), L (50), C (100), CIↃ (1000), CCIↃↃ (10000), CCCIↃↃↃ (10^5) จะเห็นว่าเลขโรมันเป็นการบวกเข้าไปเช่น III คือ I + I + I และ XXV คือ X + X + V สัญลักษณ์ใหม่ (ได้แก่ X, C, M, เป็นต้น) ใช้เมื่อเป็นจำนวนค่ามากขึ้น ดังนั้น V ใช้แทน IIIII ความสำคัญของตำแหน่งของตัวเลขโรมันคือ สัญลักษณ์ตัวหนึ่งจะนำหน้าหรือตามหลังสัญลักษณ์อีกตัวหนึ่ง เช่น IV = 4 แต่ VI = 6 การคำนวณด้วยระบบเลขโรมันนั้นเป็นความเงอะงะอย่างยิ่งจะเห็นได้จากตัวอย่างเช่น การคูณ XII ด้วย XIV นักคณิตศาสตร์ก่อน ๆ ถูกบังคับให้ใช้ลูกคิด (abacus) หรือกระดานนับ (counting boards) แล้วแปลผลลัพธ์ที่ได้กลับมาเป็นรูปแบบตัวเลขโรมัน จะใช้การคำนวณด้วยกระดาษดินสอก็เป็นเรื่องซับซ้อนแทบไม่น่าเชื่อ และเป็นเรื่องยากในระบบตัวเลขเช่นนั้น ความสามารถที่จะดำเนินงานบวก และคูณจึงถูกพิจารณาว่าเป็นเรื่องที่ประสบความสำเร็จยิ่งใหญ่ สำหรับอารยธรรมสมัยแรก ๆ

ข้อสังเกตอันหนึ่งคือ สัญลักษณ์สำหรับเลข 0 หายไปจากระบบเลขโรมันนี้ ปรากฏว่าชาวเมโสโปเตเมีย (Mesopotamians) เข้าใจถึงแนวคิดของ 0 และมีระบบตำแหน่งที่ใช้สัญลักษณ์ 60 ตัว ระบบนี้ถูกยกเลิกในราว 1700 ปีก่อนคริสตกาลแม้ว่าอิทธิพลของมันจะยังคงอยู่ให้เราได้พบเห็นเป็นประจักษ์พยานในปัจจุบันก็ตาม เช่น 60 วินาทีใน 1 นาที 60 นาทีใน 1 ชั่วโมง 360 องศาใน 1 รอบวงกลม

2.2 ระบบตัวเลข
Number System

ระบบตัวเลขแบบต่าง ๆ ได้แก่

ระบบเลขฐาน 16 (Hexadecimal number system) ประกอบด้วยเลขพื้นฐาน 16 ตัว ใช้สัญลักษณ์ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

ระบบเลขฐาน 12 (Duodecimal number system) ได้แก่ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, α, β ตัวอย่างของระบบเลขฐาน 12 อาจเห็นได้ในนาฬิกา นิ้วและฟุต โหลและกุรุส

ระบบเลขฐาน 10 (Decimal number system) มีเลขพื้นฐาน 10 ตัว คือ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

ระบบเลขฐาน 9 (Noval number system) ประกอบด้วยตัวเลข 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

ระบบเลขฐาน 8 (Octal number system) มีตัวเลขพื้นฐาน คือ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

ระบบเลขฐาน 7 (Septary number system) ได้แก่ ตัวเลขพื้นฐาน 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

ระบบเลขฐาน 5 (Quinary number system) ประกอบด้วยตัวเลข 5 ตัวคือ 0, 1, 2, 3, 4 ระบบเลขฐาน 5 แพร่หลายในพวกเอสกิโม (Eskimos) และอินเดียนในอเมริกาเหนือ

ระบบเลขฐาน 4 (Quatary number system) ประกอบด้วยตัวเลข 4 ตัว คือ 0, 1, 2, 3

ระบบเลขฐาน 3 (Ternary number system) ประกอบด้วยตัวเลข 3 ตัวคือ 0, 1, 2

ระบบเลขฐาน 2 (Binary number system) มีเลขพื้นฐาน 2 ตัว คือ 0, 1

ระบบตัวเลขที่ใช้ในระบบดิจิตอลคือ ระบบเลขฐาน 16 ฐาน 10 ฐาน 8 ระบบเลขฐาน 2

2.3 ระบบเลขฐานสิบ
Decimal Number System

เราจะเห็นความสวยงามและความง่ายของระบบเลขฐาน 10 ของเราว่า เราจำเป็นเพียงเรียนตัวเลขพื้นฐาน 10 ตัวและระบบสัญกรณ์เชิงตำแหน่ง (positional notation system) แทนที่จะนับเพิ่มขึ้นเป็นสัญลักษณ์อื่น ๆ อีก การเขียนจำนวนของเราจะมีหลักคือมีตัวนำ ตามด้วยเลขพื้นฐานทั้ง 10 ตัว เช่น 0, 1, 2, 3,..., 9 มีตัวนำคือ 0 ตามด้วยเลขพื้นฐาน คือเลขซึ่งเป็นสัญลักษณ์ของระบบตัวเลขนี้คือ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 จำนวนที่มากกว่า 9 เขียนได้ด้วยตัวนำคือ 1 ตามด้วยเลขพื้นฐานทั้ง 10 จึงได้เป็น 10, 11, 12, 13, ..., 19 ดังนั้นจำนวนที่มากกว่า 19 ก็อาจเขียนได้โดย เปลี่ยนตัวนำเป็น 2 แล้วตามด้วยเลขพื้นฐานทั้งสิบอีกจึงเป็น 20, 21, 22, ..., 29 สำหรับจำนวนที่มากกว่านี้ ก็ใช้หลักเกณฑ์เช่นเดียวกัน จะได้ 30, 31, ... 99, 100, 101, ... 199, 200, 201, ... 999, 1000, 1001, ...

ลองพิจารณาจำนวน 478 เป็นตัวย่อของ $(4 \times 100) + (7 \times 10) + 8$ จุดสำคัญคือ ค่าของแต่ละตัวเลข (digit) พิจารณาจากตำแหน่งของมัน ตัวอย่างเช่น 2 ใน 2,000 มีค่าต่างกับ 2 ใน 20 ซึ่งเราแสดงความหมายที่แตกต่างนี้ด้วยคำพูดว่า สองพัน และยี่สิบ ตัวเลขในภาษาเขียนจะย่นย่อกว่าภาษาพูดเสมอ เช่น 35,697 อ่านว่า สามหมื่นห้าพันหกร้อยเก้าสิบเจ็ด

เมื่อเรามีจำนวนใด ๆ ในเลขฐานสิบ เช่น 407128 เราสามารถบรรยายได้โดยระบบของน้ำหนักประจำตำแหน่ง ดังนั้น

$$407128 = 4\times10^5 + 0\times10^4 + 7\times10^3 + 1\times10^2 + 2\times10^1 + 8\times10^0$$

นั่นคือจำนวนเต็มในเลขฐานสิบ N ซึ่งมีตัวเลข n ตัว คือผลบวกของสัมประสิทธิ์ตามน้ำหนัก (weighted coefficients) :–

$$N_{10} = a_{n-1}(10)^{n-1} + a_{n-2}(10)^{n-2} + \dots + a_1(10)^1 + a_0(10)^0$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i (10)^i \qquad \dots (2.1)$$

โดย a_i คือสัมประสิทธิ์ของน้ำหนัก 10^i

สัญกรณ์เชิงตำแหน่งคือตัวแทน (representation) ย่อของสมการ (2.1) โดยที่เครื่องหมายบวกและน้ำหนักถูกละไว้ ดังนั้นจะได้

$$N_{10} = a_{n-1}\, a_{n-2} \cdots a_1\, a_0 \qquad \dots (2.2)$$

ตัวแทนของจำนวนดังในสมการ (2.2) มีความเก่าแก่ราว 10 ศตวรรษ ระบบเลขฐานสิบ ซึ่งมีสัญกรณ์เชิงตำแหน่งเช่นนี้ ได้รับการพัฒนาโดยชาวฮินดู (Hindus) ในราว ศตวรรษที่ 5 และถูกนำเข้าสู่อารยธรรมตะวันตกโดยชาวอาหรับ (Arabs) ผู้ซึ่งเติมสัญลักษณ์ 0 เข้าไปด้วย

ฐาน (base หรือ radix) ของระบบตัวเลขนิยามว่า คือจำนวนของเลขต่าง ๆ ในระบบตัวเลขนั้น เช่นระบบเลขฐานสิบมีฐานคือ 10 หมายความว่าเป็นระบบที่มีตัวเลขต่าง ๆ 10 ตัว ในสมการ (2.1) (2.2) มีฐานเป็น 10 อย่างไรก็ตามเป็นไปได้ที่จะใช้ฐานอื่น ๆ ใด ๆ ก็ได้ ในการเขียนสมการลักษณะเช่นนี้ โดยทั่วไปแล้ว เราอาจเขียนสมการอย่างสมการ (2.1) ได้ว่า

$$N_r = a_{n-1}(r)^{n-1} + a_{n-2}(r)^{n-2} + \dots + a_1(r)^1 + a_0(r)^0$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i (r)^i \qquad \dots (2.3)$$

โดย r เป็นฐานของระบบตัวเลข

ตัวเลขฐาน r มีสัญลักษณ์เป็นตัวเลขจำนวนเต็มจาก 0 ถึง (r−1) ดังได้กล่าวไปแล้วในหัวข้อ 2.2 มีข้อสังเกตคือถ้า r > 10 เราจะมีสัญลักษณ์ใหม่เพิ่มเติมจากเลข 0 ถึง 9 ในระบบเลขฐาน 10 ของเรา

การเขียนสมการดังเช่นข้างบนนี้ยังอาจขยายไปสู่จำนวนเศษส่วน (fractional numbers) ในระบบฐาน 10 เราแทนจำนวนเศษส่วนด้วยตัวเลขซึ่งอยู่ทางขวาของจุดทศนิยม (decimal point) จุดซึ่งแบ่งจำนวนเลขออกเป็นจำนวนเต็มและจำนวนเศษส่วนเช่นนี้ สำหรับระบบตัวเลขฐานใด ๆ เรียกว่า จุดฐาน (radix point) โดยทั่วไปแล้วค่าของจำนวนเศษส่วนใด ๆ n_r ของระบบเลขฐาน r หนึ่ง ๆ ซึ่งมีตัวเลข m ตัวอยู่หลังจุดฐาน จะเป็น

$$n_r = a_{-1}(r)^{-1} + a_{-2}(r)^{-2} + \ldots + a_{-(m-1)}(r)^{-m+1} + a_{-m}(r)^{-m}$$

$$= \sum_{i=-m}^{-1} a_i (r)^i \qquad \ldots (2.4)$$

รวมสมการ (2.3) และ (2.4) เข้าด้วยกันจะได้นิพจน์ทั่วไป สำหรับจำนวนเต็มและจำนวนเศษส่วนใด ๆ หรือเรียกว่าจำนวนผสม (mixed number) ใด ๆ ซึ่งมี (n+m) ตัวเลขในฐาน r คือ

$$N = N_r + n_r = [a_{n-1}(r)^{n-1} + \ldots + a_0(r)^0 + a_{-1}(r)^{-1} + \ldots + a_{-m}(r)^{-m}]_r$$

$$= \sum_{i=-m}^{n-1} a_i (r)^i \qquad \ldots (2.5)$$

เพื่อป้องกันความสับสน เราจะใช้ตัวห้อยท้ายจำนวนเลขใด ๆ ด้วยเลขฐาน เช่น 143_{10} เป็นจำนวนในระบบฐาน 10 143_{16} เป็นจำนวนในระบบฐาน 16 143_8 เป็นจำนวนในระบบเลขฐาน 8 ซึ่งจำนวนเลขทั้งสามนี้มีค่าไม่เท่ากัน

ตาราง 2.1 จำนวนเลขที่เลือกสรรมาเป็นตัวอย่างสำหรับระบบตัวเลขฐานต่าง ๆ

Decimal	Binary	Octal	Hexadecimal
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10
17	10001	21	11
18	10010	22	12
19	10011	23	13
20	10100	24	14
32	100000	40	20
50	110010	62	32
60	111100	74	3C
64	1000000	100	40
100	1100100	144	64
255	11111111	377	FF
1000	1111101000	1750	3E8

2.4 ระบบเลขฐานสอง

Binary Number System

ศตวรรษที่ 17 นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันชื่อ กอทฟรายด์ วิลเฮม ฟอน ลิบนิกซ์ (Gottfried Wilhelm von Leibniz) เป็นผู้สนับสนุนระบบเลขฐานสอง ซึ่งมี 2 เป็นฐาน ใช้สัญลักษณ์เพียง 0 และ 1 ในปัจจุบันดิจิตอลคอมพิวเตอร์สร้างขึ้นมาให้ดำเนินงานด้วยระบบเลขฐานสองหรือระบบรหัสฐานสอง จึงย่อมเป็นเครื่องชี้ให้เห็นว่าเครื่องจักรในอนาคตจะถูกสร้างให้ทำงานด้วยระบบเหล่านี้

อุปกรณ์พื้นฐานในคอมพิวเตอร์แรกเริ่ม คือ รีเลย์ (relays) และสวิตช์ (switches) ซึ่งมีการทำงานเป็นฐานสองโดยธรรมชาติ กล่าวคือ สวิตช์ไม่เปิด (on) ซึ่งตรงกับเลขฐานสองคือ 1 ก็ปิด (off) ซึ่งตรงกับเลขฐานสองคือ 0 อุปกรณ์วงจรเบื้องต้นในคอมพิวเตอร์ยุคใหม่ขึ้นคือ ทรานซิสเตอร์ (transistors) เช่นเดียวกับที่ใช้ในวิทยุและโทรทัศน์ ด้วยความเชื่อถือได้และไว้ใจได้จึงทำให้นักออกแบบใช้เครื่องมือเหล่านี้เพื่อว่ามันจะดำรงสภาวะใดสภาวะหนึ่งในสองสภาวะของมันคือ นำกระแส (conducting ; 1) หรือไม่นำกระแส (non-conducting ; 0) ความละม้ายคล้ายคลึงเช่นนี้อาจพบได้ในหลอดไฟฟ้าซึ่งให้ 2 สภาวะเช่นกันคือ สว่าง (1) หรือดับ (0) ระบบตัวเลขขนาดเล็กอย่างเช่นระบบเลขฐานสองจึงได้รับการพิสูจน์แล้วว่าเป็นธรรมชาติและมีประสิทธิภาพสูงสุดสำหรับการใช้กับเครื่องจักร

ตาราง 2.1 แสดงตัวอย่างของเลขฐานสองบางจำนวนเทียบค่ากับเลขฐานสิบ เลขฐานแปดและเลขฐานสิบหก

จำนวนเลขในระบบเลขฐานสองมีวิธีเขียนเช่นเดียวกับจำนวนเลขในระบบเลขฐานสิบที่กล่าวมาแล้วคือมีตัวนำ ตามด้วยเลขพื้นฐาน เช่น เลขฐานสอง 16 ตัวแรก ซึ่งมีค่าเทียบกับเลขฐานสิบ 0 ถึง 15 จะมีตัวนำ และเลขพื้นฐานดังนี้

เลขฐานสิบ	เลขฐานสอง	มีตัวนำคือ	เลขพื้นฐานคือ
0	(0) 0	0	0
1	(0) 1	0	1
2	10	1	0
3	11	1	1
4	100	10	0
5	101	10	1
6	110	11	0
7	111	11	1
8	1000	100	0
9	1001	100	1
10	1010	101	0
11	1011	101	1
12	1100	110	0
13	1101	110	1
14	1110	111	0
15	1111	111	1

มีข้อสังเกตคือ เลขฐานสอง 16 ตัวแรก เขียนด้วยตัวเลขเต็มที่ ขนาด 4 หลัก หรือ 4 บิท (bit มาจากคำว่า binary digit) ตัวเลขซึ่งอยู่ทางขวามือสุดของเลขฐานสองแต่ละจำนวนคือเลขพื้นฐานซึ่งเป็นได้เพียง 0 กับ 1 เท่านั้น ตัวเลขที่เหลือของเลขฐานสองแต่ละจำนวนคือตัวนำซึ่งแปรเปลี่ยนไปเรื่อย ๆ นอกจากนี้ค่าทางตัวเลขที่อยู่ณตำแหน่งต่าง ๆ ของจำนวนเลขฐานสองยังแตกต่างเช่นเดียวกับในระบบเลขฐานสิบคือ ตัวเลขที่อยู่ตำแหน่งซ้ายสุดของจำนวนเลขใด ๆ เป็นเลขที่มีนัยสำคัญมากที่สุด (most significant digit (bit) ใช้ตัวย่อว่า msd หรือ msb) ตัวเลขที่อยู่ตำแหน่งขวาสุดของจำนวนเลขใด ๆ เป็นเลขที่มีนัยสำคัญน้อยที่สุด (least significant digit (bit) ย่อว่า lsd หรือ lsb) เช่น จำนวนเลข $(101110)_2$ มี 1 ซึ่งอยู่ซ้ายมือสุดเป็น msb และมี 0 ซึ่งอยู่ขวามือสุด เป็น lsb เป็นต้น

2.4.1 การแปลงเลขฐานสองเป็นเลขฐานสิบ

เนื่องจากมนุษย์คุ้นเคยอยู่กับระบบเลขฐานสิบ จึงเกิดช่องว่างระหว่างระบบอิเล็กทรอนิกส์ฐานสองกับมนุษย์ หมายความว่า เราต้องรู้วิธีแปลงระบบเลขฐานสองเป็นระบบเลขฐานสิบได้ และในทางกลับกัน ก็ต้องสามารถแปลงเลขฐานสิบเป็นเลขฐานสองได้เช่นกัน

ตาราง 2.2 น้ำหนักในระบบเลขฐานสองเทียบค่ากับน้ำหนักในระบบเลขฐานสิบ

(a) Binary	(b) Decimal
$1_2 = 1 \times 2^0 = 1_{10}$	$1_{10} = 1 \times 10^0 = 1_{10}$
$10_2 = 1 \times 2^1 = 2_{10}$	$10_{10} = 1 \times 10^1 = 10_{10}$
$100_2 = 1 \times 2^2 = 4_{10}$	$100_{10} = 1 \times 10^2 = 100_{10}$
$1000_2 = 1 \times 2^3 = 8_{10}$	$1000_{10} = 1 \times 10^3 = 1000_{10}$
$10000_2 = 1 \times 2^4 = 16_{10}$	$10000_{10} = 1 \times 10^4 = 10000_{10}$

เช่นเดียวกับระบบเลขฐานสิบ ระบบเลขฐานสองก็มีน้ำหนักของตัวเลขทั้งสองคือ 0 และ 1 ตามตำแหน่งของมันที่อยู่ในจำนวนเลขฐานสองจำนวนใดจำนวนหนึ่ง แต่ละตำแหน่งของมันจะแทนค่าเฉพาะของ 2^n เมื่อ n คือจำนวนเต็ม 0,1,2,3,... ตาราง 2.2 แสดงน้ำหนักประจำตำแหน่งในระบบเลขฐานสอง และฐานสิบ ซึ่งมีตัวห้อยท้ายบอกอยู่ว่าเป็นฐานอะไร ด้วยสมบัติของน้ำหนักประจำตำแหน่งนี้เองทำให้การแปลงเลขฐานสองเป็นเลขฐานสิบคล้ายคลึงยิ่ง กับการแตกจำนวนเลขฐานสิบออกเป็นค่าตามน้ำหนักของมันดังได้กล่าวไว้แล้วในหัวข้อ 2.3 หมายความว่าวิธีการแปลงเลขฐานสองเป็นเลขฐานสิบให้ใช้สมการ (2.3) หรือ (2.4) หรือ (2.5) แล้วแต่กรณี โดยมี a_i คือตัวเลข 0 หรือ 1 ที่อยู่ ณ ตำแหน่งต่าง ๆ ในจำนวนเลขฐาน 2 ใด ๆ r คือเลขฐานซึ่งในที่นี้คือ 2 และ i เป็นตัวยกกำลังของ 2 ขึ้นอยู่กับตำแหน่งซึ่งมีจุดฐานสอง (binary point) เป็นหลักว่าจะยกกำลังอะไร ถ้าเป็นระบบเลขฐานสิบเรียกจุดนี้ว่า จุดทศนิยม

ตาราง 2.3 กำลังของ 2

2^n	n	2^{-n}
1	0	1.0
2	1	0.5
4	2	0.25
8	3	0.125
16	4	0.062 5
32	5	0.031 25
64	6	0.015 625
128	7	0.007 812 5
256	8	0.003 906 25
512	9	0.001 953 125
1 024	10	0.000 976 562 5
2 048	11	0.000 488 281 25
4 096	12	0.000 244 140 625
8 192	13	0.000 122 070 312 5
16 384	14	0.000 061 035 156 25
32 768	15	0.000 030 517 578 125
65 536	16	0.000 015 258 789 062 5
131 072	17	0.000 007 629 394 531 25
262 144	18	0.000 003 814 697 265 625
524 288	19	0.000 001 907 348 632 812 5
1 048 576	20	0.000 000 953 674 316 406 25
2 097 152	21	0.000 000 476 837 158 203 125
4 194 304	22	0.000 000 238 418 579 101 562 5
8 388 608	23	0.000 000 119 209 289 550 781 25
16 777 216	24	0.000 000 059 604 644 775 390 625
33 554 432	25	0.000 000 029 802 322 387 695 312 5
67 108 864	26	0.000 000 014 901 161 193 847 656 25
134 217 728	27	0.000 000 007 450 580 596 923 828 125
268 435 456	28	0.000 000 003 725 290 298 461 914 062 5
536 870 912	29	0.000 000 001 862 645 149 230 957 031 25
1 073 741 824	30	0.000 000 000 931 322 574 615 478 515 625
2 147 483 648	31	0.000 000 000 465 661 287 307 739 257 812 5
4 294 967 296	32	0.000 000 000 232 830 643 653 869 628 906 25
8 589 934 592	33	0.000 000 000 116 415 321 826 934 814 453 125
17 179 869 184	34	0.000 000 000 058 207 660 913 467 407 226 562 5
34 359 738 368	35	0.000 000 000 029 103 830 456 733 703 613 281 25
68 719 476 736	36	0.000 000 000 014 551 915 228 366 851 806 640 625

ตัวอย่าง 2.1 จงแปลงเลขฐานสองต่อไปนี้เป็นเลขฐานสิบ 10111_2

วิธีทำ ใช้สมการ (2.3)

$$N_2 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i (r)^i$$

$$\begin{aligned} 10111_2 &= (1\times2^4) + (0\times2^3) + (1\times2^2) + (1\times2^1) + 1\times2^0 \\ &= 16 + 0 + 4 + 2 + 1 \\ &= 23_{10} \end{aligned}$$

ตอบ

ตัวอย่าง 2.2 จงแปลง $.1101_2$ ให้เป็นเลขฐานสิบ

วิธีทำ ใช้สมการ (2.4)

$$n_2 = \sum_{i=-m}^{-1} a_i (r)^i$$

$$\begin{aligned} .1101_2 &= (1\times2^{-1}) + (1\times2^{-2}) + (0\times2^{-3}) + (1 \times 2^{-4}) \\ &= 0.5 + 0.25 + 0 + 0.0625 \\ &= (0.8125)_{10} \end{aligned}$$

ตอบ

ตัวอย่าง 2.3 จงหาค่า x ของสมการ $101101.0101_2 = x_{10}$

วิธีทำ ใช้สมการ (2.5)

$$N = \sum_{i=-m}^{n-1} a_i (r)^i$$

$$\begin{aligned} 101101.0101_2 &= (1\times2^5) + (0\times2^4) + (1\times2^3) + (1\times2^2) + (0\times2^1) + (1\times2^0) \\ &\quad + (0\times2^{-1}) + (1\times2^{-2}) + (0\times2^{-3}) + (1\times2^{-4}) \\ &= 32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 1 + 0 + 0.25 + 0 + 0.0625 \\ &= 45.3125_{10} \end{aligned}$$

ตอบ

ยังมีวิธีแปลงเลขฐานสองที่เป็นจำนวนเต็มไปเป็นเลขฐานสิบอีกวิธีหนึ่ง เรียกว่า วิธีดับเบิล-แดบเบิล (double-dabble) หรือ ดับเบิลและบวก (double-and-add) บางตำราเรียกว่า วิธีดิบเบิล-ดอบเบิล (dibble-dobble) โดยวิธีการคือเริ่มต้นที่บิทแรกทางซ้ายมือสุด (msb) เอา 2 คูณที่บิทนี้แล้วบวกกับบิทที่ 2 ถัดมา นำค่าที่ได้มาคูณด้วย 2 แล้วบวกเข้ากับบิทที่ 3 ถัดมา จากนั้นนำค่าที่ได้คูณด้วย 2 แล้วบวกเข้ากับบิทที่ 4 ถัดมา ดำเนินวิธีการเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนถึงบิทสุดท้ายทางขวามือ (lsb) ซึ่งเป็นบิทที่นำไปบวกกับผลคูณของบิทก่อนหน้ากับ 2

ตัวอย่าง 2.4 จงแปลง 101101_2 ให้เป็นเลขฐานสิบ

วิธีทำ

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$1\times2+0 = 2 \quad 2\times2+1 = 5 \quad 5\times2+1 = 11 \quad 11\times2+0 = 22 \quad 22\times2+1 = 45$$

นั่นคือ $101101_2 = 45_{10}$

ตอบ

ตัวอย่าง 2.5 จงแปลง 1101111_2 ให้เป็นเลขฐานสิบ

วิธีทำ บิทแรกซ้ายมือ คือ msb :			1
คูณด้วย 2	แล้วบวกกับบิทที่ 2 :	$(1\times2)+1=$	3
"	" 3 :	$(3\times2)+0=$	6
"	" 4 :	$(6\times2)+1=$	13
"	" 5 :	$(13\times2)+1=$	27
"	" 6 :	$(27\times2)+1=$	55
"	" 7 :	$(55\times2)+1=$	111

$\therefore\ 1101111_2 = 111_{10}$ **ตอบ**

2.4.2 การแปลงเลขฐานสิบเป็นเลขฐานสอง

สำหรับเลขฐานสิบจำนวนเต็มขนาดเล็ก ๆ วิธีการแปลงให้เป็นเลขฐานสองนั้นให้ระลึกถึงผลบวกของกำลังของ 2 ที่มีค่าอยู่ภายใน (ไม่เกิน) เลขจำนวนเต็มฐานสิบ เริ่มโดยนึกถึงกำลังของ 2 ที่มีค่ามากที่สุดก่อน (ค่านี้ไม่เกินเลขฐานสิบที่จะแปลง) นำค่านี้ไปลบออกจากเลขฐานสิบที่ต้องการแปลง นำผลลบที่ได้มาหากำลังของ 2 ที่มากที่สุดต่อไป แล้วนำกำลังของ 2 ค่ามากที่สุดที่อยู่ภายในค่า (ไม่เกิน) ผลลบนี้ไปลบออกจากผลลบนั้น ได้เท่าไรดำเนินวิธีการเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งได้ตัวเลขที่เป็น lsb ของเลขฐานสอง

ตัวอย่าง 2.6 จงแปลงเลขฐานสิบ 81_{10} ให้เป็นเลขฐานสอง

วิธีทำ กำลังของ 2 ที่มีค่าสูงสุดไม่เกิน 81 คือ $2^6 = 64_{10}$

$\therefore\ (81-64)_{10} = 17_{10}$

กำลังของ 2 ที่มีค่าสูงสุดภายในค่า (ไม่เกิน) 17 คือ $2^4 = 16_{10}$

$\therefore\ (17-16)_{10} = 1$ เศษ 1 ที่ได้นี้คือ lsb ; $1 = 2^0$

นั่นคือ $81_{10} = (1\times2^6)+(1\times2^4)+(1\times2^0)$

$= 1010001_2$ **ตอบ**

สำหรับเลขฐานสิบจำนวนเต็มที่มีขนาดใหญ่ การแปลงให้เป็นเลขฐานสองด้วยวิธีข้างบนนี้ค่อนข้างจะชลุกชลักไม่สะดวก จะใช้วิธีการต่อไปนี้แทนคือ นำจำนวนเลขฐานสิบที่ต้องการแปลงมาหารด้วย 2 ไปเรื่อย ๆ พร้อมกับเก็บเศษที่ได้จากการหารไปเรื่อย ๆ เศษที่ได้จากการหารครั้งแรกจะเป็น lsb มีน้ำหนัก 2^0 เศษที่ได้จากการหารครั้งถัดไปจะมีน้ำหนักเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ เป็น $2^1, 2^2, \ldots$ จนถึงเศษที่ได้จากการหารครั้งสุดท้ายจะเป็น msb มีน้ำหนักสูงสุดของเลขฐานสองที่ได้จากการแปลงเลขฐานสิบนั้น ๆ

ตัวอย่าง 2.7 จงแปลง 100_{10} ให้เป็นเลขฐานสอง

วิธีทำ

		เศษ	น้ำหนักฐานสอง	
$100 \div 2$	$= 50$	0	2^0	(lsb)
$50 \div 2$	$= 25$	0	2^1	
$25 \div 2$	$= 12$	1	2^2	
$12 \div 2$	$= 6$	0	2^3	
$6 \div 2$	$= 3$	0	2^4	
$3 \div 2$	$= 1$	1	2^5	
$1 \div 2$	$= 0$	1	2^6	(msb)

ดังนั้นเขียนเศษของการหารเรียงลำดับจากล่างสุด (ซึ่งเป็นเศษที่ได้จากการหารครั้งสุดท้าย) เป็น msb ขึ้นข้างบนจนถึงบนสุด (ซึ่งเป็นเศษที่ได้จากการหารครั้งแรก) เป็น lsb จะได้ว่า

$100_{10} = 1100100_2$ **ตอบ**

เพื่อความสะดวกและเพื่อประหยัดเวลา และเนื้อที่ในการเขียนจะใช้วิธีดีตารางการหาร และเศษของการหาร จากขวาสุดไปยังซ้ายสุด ดังนั้นเศษของการหารครั้งสุดท้ายซึ่งอยู่ซ้ายมือสุดจะเป็น msb เรียงลำดับมาจนถึงเศษของการหารครั้งแรกซึ่งอยู่ขวามือสุดจะเป็น lsb

ตัวอย่าง 2.8 จงหาค่า x ของ $123_{10} = x_2$

วิธีทำ

0	1	3	7	15	30	61	123	÷2
1	1	1	1	0	1	1		เศษ

$\therefore\ 123_{10} = 1111011_2$ **ตอบ**

กรณีที่เลขฐานสิบที่ต้องการแปลงเป็นเลขฐานสองนั้นไม่ใช่จำนวนเต็มแต่เป็นเศษส่วน (หรือเรียกว่าทศนิยม) วิธีการแปลงกระทำได้โดยเอาเลขฐานสิบนั้น ๆ คูณด้วย 2 ไปเรื่อย ๆ แล้วเก็บจำนวนเต็มหน้าจุดทศนิยมที่ได้จากการคูณทุกครั้ง หมายความว่าในการคูณตั้งแต่ครั้งที่ 2 จะเป็นทศนิยมที่เหลือจากการเก็บจำนวนเต็มแล้ว คูณด้วย 2 จำนวนเต็มที่ได้จากการคูณครั้งแรกจะเป็น msb มีน้ำหนัก 2^{-1} จำนวนเต็มที่ได้จากการคูณครั้งต่อ ๆ ไปจะมีน้ำหนักลดหลั่นไปเป็น $2^{-2}, 2^{-3}, \ldots$ เรียงลำดับไปจนถึงจำนวนเต็มที่ได้จากการคูณถึงครั้งที่เราเห็นเหมาะสม

ตัวอย่าง 2.9 เลขฐานสิบจำนวนไม่เต็ม 0.57251_{10} แปลงเป็นเลขฐานสองได้เท่าไร

วิธีทำ

		จำนวนเต็ม	น้ำหนักฐานสอง
0.57251×2	$= 1.14502$	1	2^{-1}
0.14502×2	$= 0.29004$	0	2^{-2}
0.29004×2	$= 0.58008$	0	2^{-3}
0.58008×2	$= 1.16016$	1	2^{-4}
0.16016×2	$= 0.32032$	0	2^{-5}

ถ้าหยุดเพียงเท่านี้ดังนั้น $0.57251_{10} = 0.10010_2$ **ตอบ**

ตรวจสอบคำตอบ $(0.10010)_2 = 1\times2^{-1} + 0\times2^{-2} + 0\times2^{-3} + 1\times2^{-4} + 0\times2^{-5}$

$$= 0.5 + 0 + 0 + 0.0625 + 0$$

$$= (0.5625)_{10}$$

พึงเห็นได้ว่าจำนวนเลขทั้งสองนี้ไม่เท่ากันโดยแท้ ถ้าดำเนินการหาตำแหน่งของเลขฐานสองต่อไปเรื่อย ๆ ค่าทางตัวเลขของเลขฐานสองที่ได้จะเขยิบเข้าใกล้ค่าของเลขฐานสิบที่กำหนดให้มากขึ้นทุกที ส่วนจะดำเนินการไปถึงตำแหน่งใดนั้นขึ้นอยู่กับค่าความแม่นยำที่ต้องการในทางปฏิบัติ ตัวอย่างต่อไปนี้ ตัวอย่างหนึ่งมีความยาวของเลขฐานสองด้วยจำนวนจำกัด และอีกตัวอย่างหนึ่งมีความยาวไม่จำกัด โดยปกติแล้วถ้าเลขฐานสิบจำนวนไม่เต็มนั้นเป็นเศษส่วนดังเช่น $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ หรือการประสมใด ๆ ของเศษส่วนแบบนี้แล้ว เลขฐานสองซึ่งเทียบเท่ากันจะมีความยาวจำกัด

ตัวอย่าง 2.10 จงแปลง $(0.65625)_{10}$ ให้เป็นเลขฐานสอง

วิธีทำ เพื่อประหยัดเวลา และเพื่อความสะดวกจะตีเป็นตาราง แต่พึงระลึกไว้เสมอว่า เมื่อได้ผลคูณของเลขฐานสิบจำนวนไม่เต็มกับสองแล้วเราจะเก็บจำนวนเต็มไว้ ดังนั้นในการคูณครั้งต่อ ๆ ไปก็ย่อมจะเป็นการคูณของเลขฐานสิบจำนวนไม่เต็ม (ทศนิยม) ที่เหลือหลังจากเก็บจำนวนเต็มไปแล้วกับสอง คำตอบที่ได้จะเรียงลำดับจากจำนวนเต็มครั้งแรกเป็น msb เรื่อยไปจนถึงจำนวนเต็มครั้งสุดท้ายเป็น lsb

×2	0.65625	1.31250	0.62500	1.25000	0.50000	1.00000
จำนวนเต็ม		1	0	1	0	1
		msb				lsb

$\therefore \ (0.65625)_{10} = (10101)_2$ **ตอบ**

ตัวอย่าง 2.11 จงแปลง $(0.1482)_{10}$ ให้เป็นเลขฐานสอง

วิธีทำ

×2	0.1482	0.2964	0.5928	1.1856	0.3712	0.7424	1.4848
จำนวนเต็ม		0	0	1	0	0	1

$\therefore (0.1482)_{10} = (0.001001)_2$ **ตอบ**

ตรวจสอบคำตอบ $(0.001001)_2 = 1\times2^{-3} + 1\times2^{-6}$

$= 0.125 + 0.015625$

$= (0.140625)_{10}$

จะเห็นว่าคำตอบเลขฐานสองมีค่าห่างจากเลขฐานสิบที่ต้องการแปลง ถ้าเราดำเนินการในตำแหน่งต่อ ๆ ไปอีกจะได้ค่าที่ดียิ่งขึ้น

สำหรับเลขฐานสิบจำนวนผสมคือมีทั้งจำนวนเต็ม และจำนวนไม่เต็ม วิธีแปลงเป็นเลขฐานสองก็ดำเนินการแปลงทีละส่วนแล้วนำมาเขียนเรียงต่อกันคั่นด้วยจุดฐานสอง

ตัวอย่าง 2.12 จงแก้สมาการ $(98.443)_{10} = x_2$

วิธีทำ

	0	1	3	6	12	24	49	98	÷2
	1	1	0	0	0	1	0		เศษ
×2	.443	0.886	1.772	1.544	1.088	0.176	0.352	0.704	1.408
จำนวนเต็ม		0	1	1	1	0	0	0	1

$\therefore (98.443)_{10} = (1100010.01110001)_2$ **ตอบ**

2.5 ระบบเลขฐานแปด
Octal Number System

ความไม่สะดวกอย่างหนึ่งในการใช้เลขฐานสองแทนข้อมูล หรือบอกรายละเอียดก็คือขนาดจำนวนบิทค่อนข้างมาก ข้อเสียอันนี้อาจขจัดได้โดยใช้ระบบเลขฐานอื่นที่เป็นกำลังของ 2 เช่นระบบเลขฐานแปดซึ่งคือ $2^3 = 8$ ใช้สัญลักษณ์ของเลขพื้นฐาน 8 ตัวคือ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 สำหรับค่าที่มากกว่านี้ใช้หลักการเขียนเช่นเดียวกับเลขฐานสิบ และฐานสอง คือเปลี่ยนตัวนำไปแล้วตามด้วยเลขพื้นฐาน ดูตาราง 2.4

ตาราง 2.4 เลขฐานแปดจาก 0_8 ถึง 100_8 เทียบค่ากับเลขฐานสิบ

Decimal $10^1\ 10^0$	Octal $8^1\ 8^0$	Decimal $10^1\ 10^0$	Octal $8^1\ 8^0$	Decimal $10^1\ 10^0$	Octal $8^1\ 8^0$	Decimal $10^1\ 10^0$	Octal $8^1\ 8^0$
00	00	17	21	34	42	51	63
01	01	18	22	35	43	52	64
02	02	19	23	36	44	53	65
03	03	20	24	37	45	54	66
04	04	21	25	38	46	55	67
05	05	22	26	39	47	56	70
06	06	23	27	40	50	57	71
07	07	24	30	41	51	58	72
08	10	25	31	42	52	59	73
09	11	26	32	43	53	60	74
10	12	27	33	44	54	61	75
11	13	28	34	45	55	62	76
12	14	29	35	46	56	63	77
13	15	30	36	47	57	64	100
14	16	31	37	48	60		
15	17	32	40	49	61		
16	20	33	41	50	62		

เลขฐานแปดใช้ในดิจิตอลคอมพิวเตอร์เช่น IBM 7090 มินิคอมพิวเตอร์ DEC PDP-8 และไมโครคอมพิวเตอร์ชิพใช้เลขฐานแปดสำหรับการดำเนินงานอินพุท-เอาท์พุทเพื่อความง่ายและตรง

เลขฐานแปด N_8 ที่มีจำนวนเต็ม n หลัก จำนวนไม่เต็ม m หลักสามารถเขียนแบบโพลิโนเมียล (polynomial) คล้ายคลึงกับเลขฐานอื่น ๆ ได้ว่า

$$N_8 = a_{n-1}(8)^{n-1} + a_{n-2}(8)^{n-2} + \ldots + a_1(8)^1 + a_0(8)^0 + a_{-1}(8)^{-1} + \ldots + a_{-m}(8)^{-m}$$

$$= \sum_{i=-m}^{n-1} a_i(8)^i \qquad \ldots (2.6)$$

2.5.1 การแปลงเลขฐานแปดเป็นเลขฐานสิบ

ใช้วิธีแปลงจำนวนเลขคล้ายคลึงกับการแปลงเลขฐานสองเป็นเลขฐานสิบกล่าวคือ ใช้วิธีกระจายแบบโพลิโนเมียล

ตัวอย่าง 2.13 จงแปลง 7523_8 ให้เป็นเลขฐานสิบ

วิธีทำ จากสมการ (2.6)

$$N_8 = \sum_{i=-m}^{n-1} a_i (8)^i$$

$$= 7\times8^3 + 5\times8^2 + 2\times8^1 + 3\times8^0$$

$$= 7\times512 + 5\times64 + 16 + 3$$

$$= 3584 + 320 + 16 + 3$$

$$= 3923_{10}$$

ตอบ

ตัวอย่าง 2.14 จงแปลง 107.24_8 ให้เป็นเลขฐานสิบ

วิธีทำ สมการ (2.6)

$$N_8 = \sum_{i=-m}^{n-1} a_i (8)^i$$

$$107.24_8 = 1\times8^2 + 0\times8^1 + 7\times8^0 + 2\times8^{-1} + 4\times8^{-2}$$

$$= 1\times64 + 0 + 7 + 2\times0.125 + 4\times0.015625$$

$$= 64 + 0 + 7 + 0.250 + 0.0625$$

$$= 71.3125_{10}$$

ตอบ

2.5.2 การแปลงเลขฐานสิบเป็นเลขฐานแปด

การแปลงเลขฐานสิบจำนวนเต็มเป็นเลขฐานแปดกระทำโดยเอา 8 ไปหารเลขฐานสิบเรื่อย ๆ แล้วเก็บเศษที่เหลือจากการหารในแต่ละครั้งเช่นเดียวกับการแปลงเลขฐานสิบเป็นเลขฐานสอง เศษจากการหารครั้งแรกเป็น lsd และเศษจากการหารครั้งสุดท้ายเป็น msd ทำนองเดียวกันการแปลงเลขฐานสิบจำนวนไม่เต็มให้เป็นเลขฐานแปดก็ใช้การคูณด้วย 8 ไปเรื่อย ๆ แล้วดึงจำนวนเต็มของการคูณแต่ละครั้งจำนวนเต็มที่ได้ครั้งแรกจะเป็น msd มีน้ำหนัก 8^{-1} และจำนวนเต็มที่ได้ครั้งต่อ ๆ มาจะมีน้ำหนักลดหลั่นเป็น $8^{-2}, 8^{-3}, \ldots$

ตัวอย่าง 2.15 เลขฐานสิบต่อไปนี้แปลงเป็นเลขฐานแปดได้เท่าไร

(ก) 6431_{10}

(ข) 0.28_{10}

(ค) 87.053_{10}

วิธีทำ

(ก)

0	1	12	100	803	6431	÷8
1	4	4	3	7		เศษ

$\therefore 6431_{10} = 14437_8$ **ตอบ**

(ข)

×8	0.28	2.24	1.92	7.36	2.88	7.04
จำนวนเต็ม		2	1	7	2	7

$\therefore 0.28_{10} = 0.21727_8$ **ตอบ**

(ค)

		0	1	10	87	÷8
		1	2	7		เศษ
×8	.053	0.424	3.392	3.136	1.088	0.704
จำนวนเต็ม		0	3	3	1	0

$\therefore 87.053_{10} = 123.03310_8$ **ตอบ**

2.5.3 การแปลงระหว่างเลขฐานแปดกับเลขฐานสอง

ความสัมพันธ์ของเลขฐานแปดกับเลขฐานสองคือ เลขฐานแปดที่เป็นเลขพื้นฐานเขียนเป็นเลขฐานสองขนาด 3 บิท ได้ดังตาราง 2.5

ตาราง 2.5 เลขฐานแปด เปรียบเทียบได้กับเลขฐานสองขนาด 3 บิท

เลขฐานสอง	เลขฐานแปด	เลขฐานสิบ
000	0	0
001	1	1
010	2	2
011	3	3
100	4	4
101	5	5
110	6	6
111	7	7

การแปลงเลขฐานสองให้เป็นเลขฐานแปด หรือในทางกลับกันแปลงเลขฐานแปดให้เป็นเลขฐานสอง ก็อาศัยความคล้องจองกันนี้ กล่าวคือถ้าต้องการแปลงเลขฐานสองให้เป็นเลขฐานแปด ก็จัดกลุ่มเลขฐานสองนั้นเป็นกลุ่มละ 3 บิท โดยนับจากจุดฐานสองเป็นหลัก เลขฐานสองที่เป็นจำนวนเต็มจัดกลุ่มโดยเริ่มนับจากตัวเลขที่อยู่ติดกับจุดฐานสอง นับไปทางซ้ายทีละ 3 บิท จนถึงบิทที่เป็น msb ถ้ามีไม่ถึง 3 บิท ให้เติมเลข 0 ไว้ข้างหน้าให้ครบ 3 บิท เลขฐานสองที่เป็นจำนวนไม่เต็มจัดกลุ่มโดยเริ่มนับจากตัวเลขที่อยู่ติดกับจุดฐานสองนับไปทางขวาทีละ 3 บิท ถ้ากลุ่มสุดท้ายทางขวามีไม่ครบ 3 บิทให้เติม 0 ไว้ข้างท้ายจนครบ 3 บิท จากนั้นเขียนเลขฐานแปดที่เทียบเท่ากับเลขฐานสองแต่ละกลุ่ม สำหรับการแปลงเลขฐานแปดเป็นเลขฐานสอง กระทำโดยเขียนเลขฐานสองขนาด 3 บิทที่เทียบเท่ากับเลขฐานแปดแต่ละหลัก

<u>ตัวอย่าง 2.16</u> จงแปลงเลขฐานสองต่อไปนี้เป็นเลขฐานแปด

(ก) 10001110

(ข) .1111001

(ค) 1011010.0101

<u>วิธีทำ</u>

(ก) 10001110 มี 8 บิทจึงเติม 0 ไว้ข้างหน้า 1 ตัวเพื่อให้เป็น 9 บิท ได้เป็น 010001110 แล้วจัดกลุ่ม ๆ ละ 3 บิท ได้เป็น 010 001 110 แต่ละกลุ่มมีเลขฐานแปดที่เทียบเท่ากันเป็น 2 1 6

ดังนั้น $10001110_2 = 216_8$ **<u>ตอบ</u>**

(ข) $.1111001 = .111\ 100\ 100$

$= .7\,4\,4_8$ **<u>ตอบ</u>**

(ค) $1011010.01011 = 001\ 011\ 010\ .\ 010\ 110$

$= 132.26_8$ **<u>ตอบ</u>**

<u>ตัวอย่าง 2.17</u> จงแปลงเลขฐานแปดต่อไปนี้เป็นเลขฐานสอง

(ก) 5170

(ข) .43526

(ค) 35.007

<u>วิธีทำ</u>

(ก) 5170_8 เขียนเลขฐานสองขนาด 3 บิทสำหรับแต่ละหลักของเลขฐานแปดนี้ได้เป็น $101\ 001\ 111\ 000_2$ **<u>ตอบ</u>**

(ข) $.43526_8 = .100\ 011\ 101\ 010\ 110_2$ **<u>ตอบ</u>**

(ค) $35.007_8 = 011\ 101.000\ 000\ 111_2$ **<u>ตอบ</u>**

2.6 ระบบเลขฐานสิบหก
Hexadecimal Number System

ระบบเลขฐานสิบหก มีฐานเป็น 16 (คือ 2^4) ใช้สัญลักษณ์ของเลขพื้นฐาน 16 ตัวคือ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F จำนวนเลขที่มากกว่านี้ใช้ระบบการเขียนเช่นเดียวกับระบบเลขฐานอื่น ๆ ที่กล่าวมาแล้ว ตาราง 2.6 แสดงเลขฐานสิบหกเปรียบเทียบกับเลขฐานสิบ

ระบบเลขฐานสิบหกใช้ในคอมพิวเตอร์ IBM System 360, IBM System 370, IBM 1130, Honeywell 200, RCA Spectra 70, NOVA, PDP-II และในมินิคอมพิวเตอร์ส่วนใหญ่ คอมพิวเตอร์พวกนี้มีหน่วยความจำประกอบด้วยกลุ่มคำ (word) ของเลขฐานสอง ขนาด 8 บิท ที่เรียกว่าไบท์ (byte)

ตาราง 2.6 เลขฐานสิบหกจาก 0 ถึง FFFF เทียบค่ากับเลขฐานสิบ

Decimal	Hexadecimal	Decimal	Hexadecimal
0	0	155	9B
1	1	156	9C
2	2	157	9D
.	.	158	9E
.	.	159	9F
.	.	160	A0
9	9	161	A1
10	A	162	A2
11	B	.	.
12	C	.	.
13	D	.	.
14	E	248	F8
15	F	249	F9
16	10	250	FA
17	11	251	FB
18	12	252	FC
19	13	253	FD
20	14	254	FE
21	15	255	FF
22	16	256	100
23	17	257	101
24	18	258	102
25	19	.	.
26	1A	.	.
27	1B	.	.
28	1C	511	1FF
29	1D	512	200
30	1E	.	.
31	1F	.	.
32	20	.	.
.	.	4,095	FFF
.	.	4,096	1000
.	.	.	.
152	98	.	.
153	99	.	.
154	9A	65,535	FFFF

เลขฐานสิบหก N_{16} ซึ่งมีจำนวนเต็ม n หลัก จำนวนไม่เต็ม m หลัก มีค่าทางตัวเลขดังสมการ

$$N_{16} = a_{n-1}(16)^{n-1} + a_{n-2}(16)^{n-2} + \ldots + a_1(16)^1 + a_0(16)^0 + a_{-1}(16)^{-1} + \ldots + a_{-m}(16)^{-m}$$

$$= \sum_{i=-m}^{n-1} a_i (16)^i \qquad \ldots (2.7)$$

2.6.1 การแปลงเลขฐานสิบหกเป็นเลขฐานสิบ

ใช้สมการ (2.7) เพื่อกระจายจำนวนเลขในเลขฐานสิบหก ตามน้ำหนักตำแหน่งของตัวเลขแต่ละหลักที่ประกอบกันขึ้นเป็นจำนวนเลขฐานสิบหกนั้น

__ตัวอย่าง 2.18__ จงแปลงเลขฐานสิบหกต่อไปนี้เป็นเลขฐานสิบ

(ก) $1FF.C8_{16}$

(ข) $A2_{16}$

__วิธีทำ__ จากสมการ (2.7)

$$N_{16} = \sum_{i=-m}^{n-1} a_i (16)^i$$

(ก)
$$\begin{aligned} 1FF.C8_{16} &= 1\times16^2 + F\times16^1 + F\times16^0 + C\times16^{-1} + 8\times16^{-2} \\ &= 1\times16^2 + 15\times16^1 + 15\times16^0 + 12\times16^{-1} + 8\times16^{-2} \\ &= 1\times256 + 15\times16 + 15\times1 + 12\times\frac{1}{16} + 8\times\frac{1}{256} \\ &= 256 + 240 + 15 + 0.75 + 0.03125 \\ &= 511.78125_{10} \end{aligned}$$

__ตอบ__

(ข)
$$\begin{aligned} A2_{16} &= 10\times16^1 + 2\times16^0 \\ &= 160 + 2 \\ &= 162_{10} \end{aligned}$$

__ตอบ__

2.6.2 การแปลงเลขฐานสิบเป็นเลขฐานสิบหก

สำหรับเลขฐานสิบจำนวนเต็มให้เอา 16 ไปหารเรื่อย ๆ แล้วเก็บเศษของการหารแต่ละครั้ง เศษของการหารครั้งแรกเป็น lsd เรียงลำดับจนถึงเศษของการหารครั้งสุดท้าย เป็น msd และสำหรับเลขฐานสิบจำนวนไม่เต็มให้เอา 16 ไปคูณเรื่อย ๆ แล้วเก็บจำนวนเต็มของการคูณแต่ละครั้ง จำนวนเต็มของการคูณครั้งแรกเป็น msd มีน้ำหนัก 16^{-1} จำนวนเต็มของการคูณครั้งต่อ ๆ ไปจะมีน้ำหนักลดหลั่นลงไปเป็น $16^{-2}, 16^{-3}, \ldots$

ตาราง 2.7 ตารางเพื่อความสะดวกในการแปลงเลขฐานสิบหกและเลขฐานสิบ

A. INTEGER CONVERSION

HEX	DEC	HEX	DEC	HEX	DEC	HEX	DEC
0	0	0	0	0	0	0	0
1	4,096	1	256	1	16	1	1
2	8,192	2	512	2	32	2	2
3	12,288	3	768	3	48	3	3
4	16,384	4	1,024	4	64	4	4
5	20,480	5	1,280	5	80	5	5
6	24,576	6	1,536	6	96	6	6
7	28,672	7	1,792	7	112	7	7
8	32,768	8	2,048	8	128	8	8
9	36,864	9	2,304	9	144	9	9
A	40,960	A	2,560	A	160	A	10
B	45,056	B	2,816	B	176	B	11
C	49,152	C	3,072	C	192	C	12
D	53,248	D	3,328	D	208	D	13
E	57,344	E	3,584	E	224	E	14
F	61,440	F	3,840	F	240	F	15
Hexadecimal Positions: 4		3		2		1	

EXAMPLE: 2322_{16} is $8192_{10} + 768_{10} + 32_{10} + 2_{10}$ = 8994.0.

B. FRACTIONAL CONVERSION

HEX	0123 DEC	HEX	4567 DECIMAL	HEX	0123 DECIMAL	HEX	4567 DECIMAL EQUIVALENT
.0	.0000	.00	.0000 0000	.000	.0000 0000 0000	.0000	.0000 0000 0000 0000
.1	.0625	.01	.0039 0625	.001	.0002 4414 0625	.0001	.0000 1525 8789 0625
.2	.1250	.02	.0078 1250	.002	.0004 8828 1250	.0002	.0000 3051 7578 1250
.3	.1875	.03	.0117 1875	.003	.0007 3242 1875	.0003	.0000 4577 6367 1875
.4	.2500	.04	.0156 2500	.004	.0009 7656 2500	.0004	.0000 6103 5156 2500
.5	.3125	.05	.0195 3125	.005	.0012 2070 3125	.0005	.0000 7629 3945 3125
.6	.3750	.06	.0234 3750	.006	.0014 6484 3750	.0006	.0000 9155 2734 3750
.7	.4375	.07	.0273 4375	.007	.0017 0898 4375	.0007	.0001 0681 1523 4375
.8	.5000	.08	.0312 5000	.008	.0019 5312 5000	.0008	.0001 2207 0312 5000
.9	.5625	.09	.0351 5625	.009	.0021 9726 5625	.0009	.0001 3732 9101 5625
.A	.6250	.0A	.0390 6250	.00A	.0024 4140 6250	.000A	.0001 5258 7890 6250
.B	.6875	.0B	.0429 6875	.00B	.0026 8554 6875	.000B	.0001 6784 6679 6875
.C	.7500	.0C	.0468 7500	.00C	.0029 2968 7500	.000C	.0001 8310 5468 7500
.D	.8125	.0D	.0507 8125	.00D	.0031 7382 8125	.000D	.0001 9836 4257 8125
.E	.8750	.0E	.0546 8750	.00E	.0034 1796 8750	.000E	.0002 1362 3046 8750
.F	.9375	.0F	.0585 9375	.00F	.0036 6210 9375	.000F	.0002 2888 1835 9375
Hexadecimal Positions: 1		2		3		4	

ตัวอย่าง 2.19 เลขฐานสิบหกที่เทียบเท่ากับเลขฐานสิบต่อไปนี้คืออะไร

(ก) 249

(ข) 567.1875

(ค) 1978.05

(ง) 4359.827

วิธีทำ (ก) $249 \div 16 = 15 + 9$

$15 \div 16 = 0 + 15$ (=F) F9

$249_{10} = F9_{16}$ **ตอบ**

(ข) $567 \div 16 = 35 + 7$

$35 \div 16 = 2 + 3$

$2 \div 16 = 0 + 2$ 237

$0.1875 \times 16 = 3.0000$ 0.3

$567.1875_{10} = 237.3_{16}$ **ตอบ**

(ค) $1978 \div 16 = 123 + 10$ (= A)

$123 \div 16 = 7 + 11$ (= B)

$7 \div 16 = 0 + 7$ 7BA

$.05 \times 16 = 0.80$

$.80 \times 16 = 1.28$

$.28 \times 16 = 3.48$

$.48 \times 16 = 7.68$

$.68 \times 16 = 10.88$ .0137A

$1978.05_{10} = 7BA.0137A_{16}$ **ตอบ**

(ง)

	0	1	17	272	4359	÷ 16
	1	1	0	7		เศษ
× 16	.827	13.232	3.712	11.392	6.272	4.352
จำนวนเต็ม		D	3	B	6	4

$4359.827_{10} = 1107.D3B64_{16}$ **ตอบ**

2.6.3 การแปลงระหว่างเลขฐานสิบหกกับเลขฐานสอง

เลขฐานสิบหก ที่เป็นพื้นฐาน 16 ตัว คือ 0,1,2,...,F เปรียบเทียบค่าได้กับเลขฐานสองขนาด 4 บิท ได้คือ 0000, 0001, 0010, ..., 1111 พอดี ความคล้องจองอันนี้ทำให้การแปลงจำนวนเลขระหว่างสองระบบนี้กระทำได้ง่ายคล้ายการแปลงจำนวนเลขในระบบฐานแปดกับฐานสอง

ตาราง 2.8 เลขฐานสิบหกเทียบค่ากับเลขฐานสองและฐานสิบ

BINARY	HEXADECIMAL	DECIMAL
0000	0	0
0001	1	1
0010	2	2
0011	3	3
0100	4	4
0101	5	5
0110	6	6
0111	7	7
1000	8	8
1001	9	9
1010	A	10
1011	B	11
1100	C	12
1101	D	13
1110	E	14
1111	F	15

ถ้าต้องการแปลงเลขฐานสิบหกเป็นเลขฐานสอง ให้เขียนเลขฐานสองขนาด 4 บิท ให้กับแต่ละหลักของเลขฐานสิบหก และในทางตรงข้ามเมื่อต้องการแปลงเลขฐานสองเป็นเลขฐานสิบหก ให้จัดกลุ่มเลขฐานสองเป็นกลุ่ม ๆ ละ 4 บิท โดยเริ่มตั้งต้นจากจุดฐานสอง นับไปทางซ้ายทีละ 4 บิท และนับไปทางขวาทีละ 4 บิท แล้วเขียนเลขฐานสิบหกที่เทียบเท่ากับเลขฐานสองขนาด 4 บิทแต่ละกลุ่มนั้น

<u>ตัวอย่าง 2.20</u> จงแปลงเลขฐานสิบหกต่อไปนี้ให้เป็นเลขฐานสอง

(ก) 1CE98

(ข) B01.FD3A

<u>วิธีทำ</u> (ก) $1CE98_{16} = 0001\ 1100\ \ 1110\ 1001\ 1000_2$

$= 11100111010011000_2$ **<u>ตอบ</u>**

(ข) $B01.FD3A_{16} = 1011\ 0000\ 0001.1111\ 1101\ 0011\ 1010_2$

<u>ตอบ</u>

ตัวอย่าง 2.21 จงแปลงเลขฐานสองต่อไปนี้เป็นเลขฐานสิบหก

(ก) 11110010110.010101

(ข) 10001001.1110001

วิธีทำ (ก) 11110010110.010101_2 $= 0111\ 1001\ 0110.0101\ 0100$

$= 796.54_{16}$ **ตอบ**

(ข) 10001001.1110001 $= 1000\ 1001.1110\ 0010$

$= 89.E2_{16}$ **ตอบ**

2.7 การแปลงเลขฐานใด ๆ
Number Base Conversion

จะกล่าวถึงวิธีทั่ว ๆ ไปของการแปลงเลขจำนวนหนึ่งซึ่งมีฐานเป็นระบบหนึ่งให้เป็นเลขในฐานอีกระบบหนึ่ง

พิจารณาเลขในระบบฐานสิบ N_{10} ซึ่งมีจำนวนเต็ม n หลักจำนวนไม่เต็ม m หลัก

$$N_{10} = d_{n-1}d_{n-2}\ldots d_1d_0 . d_{-1}d_{-2}\ldots d_{-m} \qquad \ldots (2.8)$$

สมการ (2.8) เป็นสมการแบบสัญกรณ์ตำแหน่ง ค่าของตัวเลขในสมการ (2.8) นี้อาจเขียนเป็นในระบบเลขฐานอื่น ๆ ซึ่งอาจจะมีจำนวนหลักแตกต่างไป ตัวอย่างเช่น จำนวนเลข N_2 ในระบบเลขฐานสอง ที่มีค่าเทียบเท่ากับ N_{10} นั้น อาจมีจำนวนเต็ม s บิท และจำนวนไม่เต็ม t บิท ดังนั้นหากเขียน N_2 ให้เป็นรูปแบบสัญกรณ์ตำแหน่ง จะได้ว่า

$$N_2 = b_{s-1}\, b_{s-2}\ldots b_1\, b_0 . b_{-1}\, b_{-2}\ldots b_{-t} \qquad \ldots (2.9)$$

วิธีแปลงฐานของจำนวนเลขให้แยกแปลงทีละส่วนคือส่วนที่เป็นจำนวนเต็มกับส่วนที่เป็นจำนวนไม่เต็ม ดังนั้นสำหรับส่วนที่เป็นจำนวนเต็มนั้นกระทำการแปลงโดยเทียบสมการ (2.8) กับ (2.9) จะได้

$$N_{10}(\text{จำนวนเต็ม}) = b_{s-1}(2)^{s-1} + b_{s-2}(2)^{s-2} + \ldots + b_1(2)^1 + b_0 \qquad \ldots (2.10)$$

แยก 2 ซึ่งเป็นตัวคูณร่วมของพจน์ (term) จำนวนทั้งสิ้น (s−1) พจน์ออกมาข้างนอกจะได้ว่า

$$N_{10}\ (\text{จำนวนเต็ม}) = 2\,[b_{s-1}(2)^{s-2} + b_{s-2}(2)^{s-3} + \ldots + b_1] + b_0 \qquad \ldots (2.11)$$

สมการ (2.11) อาจเขียนใหม่ได้เป็น

$$N_{10}\ (\text{จำนวนเต็ม}) = 2A_1 + b_0$$

โดย A_1 เป็นโพลีโนเมียล ใน สแควร์แบรกเก็ท (square bracket) ของสมการ (2.11) และ b_0 เป็นเศษ

บิทต่อไปคือ b_1 อาจหาได้โดยลักษณะเดียวกันคือแยกตัวคูณร่วมคือ 2 ออกจาก A_1 :

$$A_1 = 2A_2 + b_1$$

ในทำนองเดียวกันจะได้

$$A_2 = 2A_3 + b_2$$

$$A_3 = 2A_4 + b_3$$

เป็นเช่นนี้เรื่อย ๆ ขบวนการจะสำเร็จจนถึงชั้นที่ s ซึ่งจะได้ตัวเศษ b_{s-1} ตัวเศษทั้งหลายนี้ คือ b_0 ถึง b_{s-1} คือ เลขฐานสองของส่วนที่เป็นจำนวนเต็มของ N_2 ในสมการ (2.9) นั่นเอง

ตัวอย่าง 2.22 เลขฐานสองของเลขฐานสิบ 53 คืออะไร

วิธีทำ

$53 \div 2$	= 26,	เศษ 1	= b_0 (lsb)
$26 \div 2$	= 13,	เศษ 0	= b_1
$13 \div 2$	= 6,	เศษ 1	= b_2
$6 \div 2$	= 3,	เศษ 0	= b_3
$3 \div 2$	= 1,	เศษ 1	= b_4
$1 \div 2$	= 0,	เศษ 1	= b_5 (msb)

ดังนั้นเลขฐานสองที่มีค่าเทียบเท่ากับเลขฐานสิบ 53_{10} คือ เศษของการหารที่เขียนเรียงลำดับจากล่างสุดถึงบนสุดคือ 110101_2

ตอบ

สำหรับส่วนที่เป็นจำนวนไม่เต็ม มีวิธีการแปลงดังต่อไปนี้

$$N_{10}(\text{จำนวนไม่เต็ม}) = b_{-1}2^{-1} + b_{-2}2^{-2} + \ldots + b_{-t}2^{-t} \qquad \ldots(2.12)$$

คูณ (2.12) ด้วย 2 จะได้

$$2N_{10}(\text{จำนวนไม่เต็ม}) = b_{-1} + [b_{-2}2^{-1} + b_{-3}2^{-2} + \ldots + b_{-t}2^{-t+1}] \qquad \ldots(2.13)$$

โดย b_{-1} เป็น 0 หรือ 1 และนิพจน์ (expression) ในสแควร์ แบรกเก็ท มีค่าน้อยกว่า 1 ดำเนินวิธีการเช่นนี้ (คูณด้วย 2) ไป t ครั้ง จะได้ $b_{-1}, b_{-2}, \ldots, b_{-t}$ ตามลำดับ ขบวนการจะสำเร็จสมบูรณ์เมื่อส่วนที่เป็นเศษส่วน (จำนวนไม่เต็ม) เป็น 0 หลังจากที่ได้คูณด้วย 2 แล้ว หรืออาจจะหยุดดำเนินการคูณเมื่อถึงค่าความแม่นยำที่ต้องการ

ตัวอย่าง 2.23 จงหาเลขฐานสองของ $.39_{10}$

วิธีทำ

$.39 \times 2$	$= 0.78$	$b_{-1} = 0$
$.78 \times 2$	$= 1.56$	$b_{-2} = 1$
$.56 \times 2$	$= 1.12$	$b_{-3} = 1$
$.12 \times 2$	$= 0.24$	$b_{-4} = 0$
$.24 \times 2$	$= 0.48$	$b_{-5} = 0$
$.48 \times 2$	$= 0.96$	$b_{-6} = 0$
$.96 \times 2$	$= 1.92$	$b_{-7} = 1$
$.92 \times 2$	$= 1.84$	$b_{-8} = 1$
$.84 \times 2$	$= 1.68$	$b_{-9} = 1$
$.68 \times 2$	$= 1.36$	$b_{-10} = 1$

หยุดขั้นตอนการทำที่นี่ จะมีความคลาดเคลื่อนมีขนาด $|\varepsilon|$ ซึ่งน้อยกว่า 2^{-10} นั่นคือ $|\varepsilon| < 1/1024$

เลขฐานสองที่เทียบเท่ากับเลขฐานสิบ $.39_{10}$ คือ จำนวนเต็มของการคูณด้วย 2 เรียงลำดับจากบนมาล่าง คือ $.0110001111_2 + |\varepsilon|$

ตอบ

ตัวอย่าง 2.24 จงแปลง 53.39_{10} ให้เป็นเลขฐานสิบหก

วิธีทำ ส่วนที่เป็นจำนวนเต็ม:

$53 \div 16$	$= 3,$	เศษ 5	$= h_0$ (lsd)
$3 \div 16$	$= 0,$	เศษ 3	$= h_1$ (msd)

$\therefore 53_{10} = 35_{16}$

ส่วนที่เป็นจำนวนไม่เต็ม:

$.39 \times 16$	$= 6.24$	$h_{-1} = 6$
$.24 \times 16$	$= 3.84$	$h_{-2} = 3$
$.84 \times 16$	$= 13.44$	$h_{-3} = D$
$.44 \times 16$	$= 7.04$	$h_{-4} = 7$

$\therefore .39_{10} = .63D7_{16}$

ดังนั้น $53.39_{10} = 35.63D7_{16}$ **ตอบ**

ตรวจสอบคำตอบ

อาจนำตัวอย่าง 2.22 และ 2.23 มาช่วยตรวจสอบค่า เพราะการแปลงระหว่างเลขฐาน 16 กับเลขฐานสอง กระทำได้ง่าย

$35.63D7_{16} = (11\ 0101\ .\ 0110\ 0011\ 1101\ 0111)_2$

ความคลาดเคลื่อน $|\varepsilon| < 16^{-4} = 2^{-16} < 1/64,000$

การแปลงฐานของจำนวนเลขตามวิธีการข้างต้นนี้ อาจใช้ได้กับการแปลงระหว่างจำนวนเลขฐานใด ๆ ได้ ถ้ามีจำนวนเลขอยู่ในฐาน r_1 ต้องการแปลงให้เป็นจำนวนเลขในฐาน r_2 เลขคณิตของการแปลงจะกระทำกับจำนวนเลขในฐาน r_1 จึงเป็นการสะดวก ถ้ามีตารางการบวกและคูณสำหรับฐาน r_1 ดังเช่นตาราง 2.9 เป็นตัวอย่างสำหรับเลขฐานหก

ตาราง 2.9 ตารางเลขคณิตสำหรับเลขฐานหก

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	10
2	2	3	4	5	10	11
3	3	4	5	10	11	12
4	4	5	10	11	12	13
5	5	10	11	12	13	14

×	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	10	12	14
3	0	3	10	13	20	23
4	0	4	12	20	24	32
5	0	5	14	23	32	41

Base 10	Base 6
10	14
20	32
30	50
40	104
50	122
60	140
70	154
80	212
90	230

ตัวอย่าง 2.25 จงแปลง 25223_6 ให้เป็นเลขฐานสิบ

วิธีทำ การแปลงเลขจำนวนเต็ม ใช้วิธีหารต่อเนื่องด้วย $10_{10} = 14_6$

$$\begin{array}{r}
1423_6 \\
14_6\overline{)25223_6} \\
\underline{14} \\
112 \\
\underline{104} \\
42 \\
\underline{32} \\
103 \\
\underline{50} \\
13
\end{array}$$

เศษ $13_6 = 9_{10}$ = lsd

หารผลลัพธ์ที่เหลือ คือ 1423_6 ด้วย 14_6 :

$$\begin{array}{r}
101_6 \\
14_6\overline{)1423_6} \\
\underline{14} \\
23 \\
\underline{14} \\
5
\end{array}$$

เศษ $5_6 = 5_{10}$

หารผลลัพธ์ที่เหลือคือ 101_6 ด้วย 14_6 :

$$\begin{array}{r}
3_6 \\
14_6\overline{)101_6} \\
\underline{50} \\
11
\end{array}$$

เศษ $11_6 = 7_{10}$

หารผลลัพธ์ที่เหลือคือ 3_6 ด้วย 14_6 :

$$14_6 \overset{0}{\overline{)3}} \text{ เศษ } 3_6 = 3_{10} = \text{msd}$$

ดังนั้น $25223_6 = 3759_{10}$ **ตอบ**

สำหรับการแปลงเลขจำนวนไม่เต็มที่อยู่ในฐาน r_1 ให้เป็นเลขจำนวนไม่เต็มในฐาน r_2 ใช้วิธีคูณต่อเนื่องไปเรื่อย ๆ ด้วยค่าของเลขในฐาน r_2 ที่เขียนอยู่ในฐาน r_1

2.8 การบวก
Addition

2.8.1 การบวกเลขฐานสอง (Binary Addition)

มีวิธีบวกคล้ายคลึงกับการบวกเลขฐานสิบที่เราคุ้นเคยแล้ว แต่การบวกเลขฐานสองง่ายกว่ามาก ตาราง 2.10 เป็นตารางสำหรับการบวกเลขฐานสอง

ตาราง 2.10 ตารางการบวกเลขฐานสอง

	0	1
0	0	1
1	1	10

	ตัวตั้ง		ตัวบวก		ตัวทด	ผลบวก
1)	0	+	0	=	0	0
2)	0	+	1	=	0	1
3)	1	+	0	=	0	1
4)	1	+	1	=	1	0

จากตารางจะเห็นว่ามีการทด (carry over) เกิดขึ้นเช่นเดียวกับในเลขฐานสิบ และเนื่องจากในเลขฐานสองมี 1 เป็นเลขใหญ่ที่สุด ดังนั้นผลบวกที่เกิน 1 จึงต้องการการทดไปยังหลักที่อยู่สูงกว่าทางซ้ายมือ

__ตัวอย่าง 2.26__ จงบวก 1011 และ 110 เข้าด้วยกัน

__วิธีทำ__

$$\begin{array}{r} 1011 \\ 110 \\ \hline 10001 \end{array} +$$

ตอบ

ตัวอย่าง 2.27 จงบวก เลขฐานสิบ $3\frac{1}{4} + 5\frac{3}{4}$ ด้วยระบบเลขฐานสอง

วิธีทำ

เลขฐานสิบ	เลขฐานสอง
$3\frac{1}{4}$	11.01
$5\frac{3}{4}$ +	101.11 +
	1001.00
9	

ตอบ

2.8.2 การบวกเลขฐานแปด (Octal Addition)

มีวิธีการบวกคล้ายคลึงการบวกเลขฐานสิบเช่นเดียวกัน และเรามีตารางการบวกเลขฐานแปดดังข้างล่างนี้

ตาราง 2.11 ตารางการบวกเลขฐานแปด

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

ตัวอย่าง 2.28 จงบวกเลขฐานแปดต่อไปนี้เข้าด้วยกัน

(ก) $76_8 + 23_8$

(ข) $2017_8 + 4674_8$

วิธีทำ (ก)

$$\begin{array}{r} 76 \\ 23 \; + \\ \hline 121 \end{array}$$

ตอบ

(ข)

$$\begin{array}{r} 2017 \\ 4674 \; + \\ \hline 6713 \end{array}$$

ตอบ

2.8.3 การบวกเลขฐานสิบหก (Hexadecimal Addition)

ในชั้นแรกเริ่มของการบวกเลขฐานสิบหก (หรือเลขฐานแปดก็ดี) เราอาจต้องอาศัยตารางของการบวกไปก่อน ต่อเมื่อได้ฝึกฝนการบวกไปเรื่อย ๆ แล้ว ตารางการบวกก็อาจไม่จำเป็นอีกต่อไป เช่นเดียวกับความคุ้นเคยในการบวกเลขฐานสิบของเรานั่นเอง

ตาราง 2.12 ตารางการบวกเลขฐานสิบหก

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
C	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
D	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
E	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
F	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E

ตัวอย่าง 2.29 จงบวก $1A8_{16}$ เข้ากับ $67B_{16}$

วิธีทำ

คอลัมน์ 3 2 1

$$\begin{array}{r} 1\,A\,8 \\ \underline{6\,7\,B} \\ \underline{8\,2\,3} \end{array} +$$

คอลัมน์ 1 :

$$\begin{aligned} 8 + B &= 8 + 11_{10} \\ &= 19_{10} \\ &= 16 + 3 \\ &= 13_{16} \end{aligned}$$

ผลบวกคือ 3, ตัวทดคือ 1

คอลัมน์ 2 :

$$\begin{aligned} 1 + A + 17 &= 1 + 10_{10} + 7 \\ &= 18_{10} \\ &= 16 + 2 \\ &= 12_{16} \end{aligned}$$

ผลบวกคือ 2, ตัวทดคือ 1

คอลัมน์ 3 :

$1 + 1 + 6 = 8$ ผลบวกคือ 8, ไม่มีตัวทด

$\therefore 1A8_{16} + 67B_{16} = 823_{16}$ **ตอบ**

ตัวอย่าง 2.30 จงบวกเลขฐานสิบหก ACDF1 เข้ากับ 16B7D

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} ACFF1 \\ \underline{16B7D}^{+} \\ \underline{C3A6E} \end{array}$$

ตอบ

2.9 การลบ
Subtraction

2.9.1 การลบเลขฐานสอง

มีหลักการลบดังตาราง 2.13

ตาราง 2.13 ตารางการลบเลขฐานสอง

	ตัวตั้ง (minuend)	
0	0	1
ตัวลบ (subtrahend) 1	1+b	0 ผลลบ (difference)

หมายเหตุ b คือ ตัวยืม (borrow)

ตาราง 2.13 นี้ หากจะเขียนเป็นข้อ ๆ จะได้กฎการลบ 4 ข้อคือ

	ตัวตั้ง		ตัวลบ		ผลลบ	ตัวยืม
1)	0	–	0	=	0	0
2)	0	–	1	=	–1	1
3)	1	–	0	=	1	0
4)	1	–	1	=	0	0

ตัวอย่าง 2.31 จงหาผลลบของ 11011001 – 10101011

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} 11011001 \\ \underline{10101011}^{-} \\ \underline{00101110} \end{array} \qquad \left(\begin{array}{r} 217 \\ \underline{171}^{-} \\ \underline{46} \end{array}\right)_{10}$$

ได้ผลลบ 101110 **ตอบ**

2.9.2 การลบเลขฐานแปด

ใช้ตารางบวกเลขฐานแปด โดยดูว่าตัวตั้งหรือตัวลบเลขจำนวนใดน้อยกว่า เปรียบเทียบทีละหลักเริ่มจากหลักที่มีนัยสำคัญน้อยที่สุด (LSD) นำเลขจำนวนที่น้อยกว่ามาไล่ตามคอลัมน์ริมซ้ายมือสุด เมื่อพบตัวเลขนี้แล้วก็กวาดไปตามแนวนอนจนพบตัวเลขที่มากกว่าผลลบของเลขสองจำนวนนี้คือ ตัวเลขบนสุดที่ตรงกับเลขในแถวนี้ตัวอย่างเช่น 7 – 3 ให้ใช้ 3 ซึ่งเป็นจำนวนที่น้อยกว่ามาไล่ที่คอลัมน์ริมซ้ายมือสุด จากนั้นกวาดไปตามแนวนอนจนพบเลข 7 จึงมองขึ้นไปหาแถวบนสุดที่ตรงกับเลข 7 จะพบเลข 4 เป็นคำตอบของ 7–3 นี้

นอกจากวิธีลบเช่นนี้แล้ว อาจใช้หลักการลบเช่นเดียวกับในเลขฐานสิบ

ตัวอย่าง 2.32 จงลบ 516 ออกจาก 1274

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} 1274 \\ -\underline{516} \\ 556 \end{array}$$

ตอบ

ตัวอย่าง 2.33 จงหาผลลบของ 4310 – 1732

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} 4310 \\ -\underline{1732} \\ 2356 \end{array}$$

ตอบ

2.9.3 การลบเลขฐานสิบหก

มีวิธีการเช่นเดียวกับการลบเลขฐานแปด

ตัวอย่าง 2.34 จงลบ 3A8 ออกจาก 1273

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} 1273 \\ -\underline{3A8} \\ ECB \end{array}$$

ตอบ

การลบเลขฐานต่าง ๆ ในหัวข้อ 2.9 นี้ เป็นวิธีลบทั่ว ๆ ไป สำหรับในเครื่องคอมพิวเตอร์นั้นจะใช้หลักการของคอมพลีเมนต์ (complement) ในการลบเลข ซึ่งจะได้กล่าวถึงต่อไป

2.10 การคูณ
Multiplication

2.10.1 การคูณเลขฐานสอง

ใช้ตารางคูณ ดังตาราง 2.14 ซึ่งจะเห็นว่าง่ายมากเพราะ 0 คูณอะไรก็ได้ 0 และ 1 คูณอะไรก็ได้เหมือนตัวตั้ง

ตาราง 2.14 ตารางการคูณเลขฐานสอง

	0	1
0	0	0
1	0	1

<u>ตัวอย่าง 2.35</u> จงคูณ 1011 ด้วย 101

<u>วิธีทำ</u>

```
   1011
  × 101
   ----
   1011
  0000
 1011
 ------
 110111
```

<u>ตอบ</u>

2.10.2 การคูณเลขฐานสิบหก

กรณีนี้เราสามารถเขียนเป็นตารางสำหรับคูณเลขฐานสิบหกได้โดยอาศัยความรู้ของการคูณฐานสิบที่เราเคยคุ้นเป็นอย่างดีแล้ว (ท่านองเดียวกันก็อาจเขียนตารางการคูณเลขฐานแปดได้)

ตาราง 2.15 ตารางการคูณเลขฐานสิบหก

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
2	0	2	4	6	8	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E
3	0	3	6	9	C	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D
4	0	4	8	C	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C
5	0	5	A	F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B
6	0	6	C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A
7	0	7	E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69
8	0	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	0	9	12	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87
A	0	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96
B	0	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79	84	8F	9A	A5
C	0	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90	9C	A8	B4
D	0	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3
E	0	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	D2
F	0	F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1

ตัวอย่าง 2.36 จงคูณ $1A3_{16}$ ด้วย 89_{16}

วิธีทำ

$$
\begin{array}{r}
1\,A\,3 \\
\times\ 8\,9 \\
\hline
E\,B\,B \\
D\,1\,8\ \ \\
\hline
E\,0\,3\,B
\end{array}
$$

ตอบ

2.11 การหาร
Division

2.11.1 การหารเลขฐานสอง

ใช้ตารางการคูณเลขฐานสอง และความรู้ที่เรามีอยู่แล้วในการคูณเลขฐานสิบ

ตัวอย่าง 2.37 จงหาร 110110 ด้วย 101

วิธีทำ

$$
\begin{array}{r}
1010 \\
101\overline{)110110} \\
\underline{101} \\
111 \\
\underline{101} \\
100\ \text{เศษ}
\end{array}
$$

ได้ผลหาร 1010 เศษ 100 **ตอบ**

2.11.2 การหารเลขฐานสิบหก

ใช้ความรู้ ประสบการณ์จากการหารเลขฐานสิบ บวกกับตารางการคูณเลขฐานสิบหก

ตัวอย่าง 2.38 จงหาร $1EC87_{16}$ ด้วย $A5_{16}$

วิธีทำ

$$
\begin{array}{r}
2FC \\
A5\overline{)1EC87} \\
\underline{14A} \\
A28 \\
\underline{9AB} \\
7D7 \\
\underline{7BC} \\
1B \leftarrow \text{เศษ}
\end{array}
$$

ได้ผลหาร 2FC เศษ 1B **ตอบ**

2.12 คอมพลีเมนต์
Complements

คอมพลีเมนต์ถูกใช้ในดิจิตอลคอมพิวเตอร์เพื่อทำให้การดำเนินงานลบง่ายขึ้น และสำหรับการปฏิบัติทางตรรก ระบบตัวเลขที่มีฐาน (radix) เป็น r จะมีคอมพลีเมนต์ 2 ชนิด

คือ คอมพลีเมนต์ฐาน (radix complement or r's complement) ได้แก่ คอมพลีเมนต์ของ 10 (10's complement) ในระบบเลขฐานสิบ คอมพลีเมนต์ของ 2 (2's complement) ในระบบเลขฐานสองเป็นต้น

คอมพลีเมนต์อีกชนิดหนึ่งคือ คอมพลีเมนต์ฐานลบหนึ่ง (radix-minus-one complement หรือ diminished radix complement or (r-1)'s complement) ได้แก่ คอมพลีเมนต์ของ 9 (9's complement) ในระบบเลขฐานสิบ และคอมพลีเมนต์ของ 1 (1's complement) ในระบบเลขฐานสอง

2.12.1 r's Complement

จำนวนเลขบวก N_r ในฐาน r ซึ่งมีจำนวนเต็ม n หลัก จำนวนไม่เต็ม m หลัก r's complement ($\bar{N}_r$) ของ N_r นี้ คือ

$$\bar{N}_r = r^n - N_r$$

สำหรับ $N_r \neq 0$

และ $$\bar{N}_r = 0$$

สำหรับ $N_r = 0$

ถ้า r = 10, 10's complement เช่น

10's complement ของเลขฐานสิบที่มี 5 หลัก : 123.45_{10} คือ

$10^3 - 123.45_{10} = 876.55_{10}$

10's complement ของ 52520_{10} คือ

$10^5 - 52520 = 47480$

10's complement ของ $(0.3267)_{10}$ คือ

$1 - 0.3267 = 0.6733$

(สำหรับตัวอย่างนี้ ไม่มีส่วนที่เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $10^n = 10^0 = 1$)

10's complement ของ $(25.639)_{10}$ คือ

$10^2 - 25.639 = 74.361$

ถ้า r = 2, ตัวอย่างของ 2's complement เช่น

2's complement ของ $(101100)_2$ คือ

$(2^6)_2 - (101100)_2 = (1000000 - 101100)_2 = 010100$

2's complement ของ $(0.0110)_2$ คือ

$(1 - 0.0110)_2 = 0.1010$

จากนิยามและตัวอย่างข้างบน เราจะได้วิธีหา r's complement ของจำนวนเลขในฐาน r วิธีที่ 2 คือ

สำหรับ 10's complement ของเลขฐานสิบหาได้โดย ปล่อยเลข 0 ที่มีนัยสำคัญน้อยที่สุดทุกตัวให้คงเดิม ลบเลขที่ไม่ใช่ 0 ซึ่งมีนัยสำคัญน้อยที่สุดตัวแรกออกจาก 10 แล้วลบเลขอื่น ๆ ทุกตัวซึ่งมีนัยสำคัญสูงขึ้นออกจาก 9

สำหรับ 2's complement ของเลขฐานสอง หาได้โดย คงเลข 0 ที่มีนัยสำคัญน้อยที่สุดทุกตัวและเลขไม่ใช่ 0 ตัวแรกให้เหมือนเดิมแล้วเปลี่ยนเลขนัยสำคัญสูงขึ้นอื่น ๆ ทุกตัวจาก 1 เป็น 0 จาก 0 เป็น 1

ยังมีวิธีหา r's complement วิธีที่ 3 ซึ่งง่ายกว่า 2 วิธีข้างบนนี้ จะกล่าวถึงต่อไป

เลขฐาน r ใด ๆ ที่ r มากกว่า 1 แต่ไม่เท่ากับ 1 จะมี r's complement เสมอ

2.12.2 (r−1)'s Complement

เลขจำนวนบวก N_r ในฐาน r ประกอบด้วยส่วนที่เป็นจำนวนเต็ม n หลัก และส่วนที่เป็นจำนวนไม่เต็ม m หลัก (r−1)'s complement $\bar{N}_{r-1}$ ของ N_r นี้ นิยามว่า คือ

$$\bar{N}_{r-1} = r^n - r^{-m} - N_r = \bar{N}_r - r^{-m}$$

ถ้า N_r เป็นจำนวนเต็ม : $\bar{N}_{r-1} = r^n - N_r - 1$

ตัวอย่างของ (r-1) 's complement เช่น

9's complement ของ 123.45_{10} คือ 876.54_{10}

9's complement ของ $(52520)_{10}$ คือ :

$$(10^5 - 1 - 52520) = 99999 - 52520 = 47479$$

ในที่นี้ไม่มีส่วนที่เป็นจำนวนไม่เต็ม ดังนั้น $10^{-m} = 10^0 = 1$

9's complement ของ $(0.3267)_{10}$ คือ :

$$(1 - 10^{-4} - 0.3267) = 0.9999 - 0.3267 = 0.6732$$

ในที่นี้ ไม่มีส่วนที่เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $10^n = 10^0 = 1$

9's complement ของ $(25.639)_{10}$ คือ

$$(10^2 - 10^{-3} - 25.639) = 99.999 - 25.639 = 74.360$$

1's complement ของ $(101100)_2$ คือ

$$(2^6 - 1) - (101100) = (111111 - 101100)_2 = 010011$$

1's complement ของ $(0.0110)_2$ คือ

$$(1 - 2^{-4})_2 - (0.0110)_2 = (0.1111 - 0.0110)_2 = 0.1001$$

จากตัวอย่างจะเห็นว่า 9's complement ของเลขฐานสิบหาได้ง่ายโดยเพียงนำเลขทุก ๆ หลักไปลบออกจาก 9 และ 1's complement หาได้ยิ่งง่ายไปอีกเพียงเปลี่ยน 1 ให้เป็น 0 และเปลี่ยน 0 ให้เป็น 1 เท่านั้น เนื่องจาก (r−1)'s complement หาได้ง่ายบางครั้งจึงเป็นความสะดวกที่จะหา r's complement จาก (r − 1)'s complement โดยเพียงบวก r^{-m} เข้าที่หลักนัยสำคัญน้อยที่สุดของ (r−1)'s complement เท่านั้น ซึ่งนี่คือวิธีหา r's complement วิธีที่ 3

ตัวอย่างเช่น 2's complement ของ 10110100 หาได้จาก 1's complement ของมัน คือ 01001011 บวกกับ 1 จึงได้ 01001100

สิ่งสำคัญอีกอย่างหนึ่งในเรื่องคอมพลีเมนต์คือ คอมพลีเมนต์ของคอมพลีเมนต์ จะให้ค่าเป็นจำนวนเลขเดิมแรกเริ่ม เช่น r's complement ของ N คือ $r^n - N$ และคอมพลีเมนต์ของ $(r^n - N_r)$ คือ $r^n - (r^n - N_r) = N_r$ และเช่นเดียวกับใน (r − 1)'s complement

2.12.3 การใช้ r's Complement ในการลบ

การลบโดยวิธีตรงไปตรงมาใช้หลักการยืม โดยยืม 1 จากเลขที่อยู่ในตำแหน่งหลักที่สูงกว่า เมื่อตัวตั้งน้อยกว่าตัวลบ วิธีนี้ดูง่ายตายเมื่อลบโดยปากกาดินสอกระดาษ แต่สำหรับในดิจิตอลคอมพิวเตอร์ การลบด้วยวิธีนี้มีประสิทธิภาพน้อยกว่าการใช้ r's complement และวิธีบวก มาช่วยในการลบจำนวนเลข

การลบจำนวนเลขบวก 2 จำนวน (M − N) ซึ่งมีฐาน r ทั้งคู่ มีวิธีการดังนี้

(1) บวกตัวตั้ง M เข้ากับ r's complement ของตัวลบ N

(2) ตรวจสอบผลลัพธ์ของขั้นตอน (1) ว่ามีตัวทดสุดท้ายหรือไม่ :

ก. ถ้ามีตัวทดสุดท้ายให้ตัดทิ้ง

ข. ถ้าไม่มีตัวทดสุดท้าย ให้หา r's complement ของคำตอบในขั้นตอน (1) แล้วใส่เครื่องหมายลบไว้ข้างหน้า

<u>ตัวอย่าง 2.39</u> ให้ใช้ 10's complement เพื่อหาค่าของ

(ก) 72532 − 3250

(ข) 3250 − 72532

<u>วิธีทำ</u> (ก) M = 72532 — 72532

N = 03250 มี 10's complement คือ — 96750^{+}

ตัวทดสุดท้าย ⟶ 1 / 69282

ผลลบคือ 69282 — <u>ตอบ</u>

(ข) M = 03250

N = 72532 +

$$\begin{array}{lr} & 03250 \\ \text{10's complement} \rightarrow & +\ 27468 \\ \hline \text{ไม่มีตัวทดสุดท้าย} & 30718 \end{array}$$

ผลลบคือ −10's complement ของ 30718 = −69282

ตอบ

ตัวอย่าง 2.40 จงใช้ 2's complement เพื่อหาค่า M−N โดย

(ก) M = 1010100 , N = 1000100

(ข) M = 1000100 , N = 1010100

วิธีทำ (ก)

$$\begin{array}{r} 1010100 \\ -\underline{1000100} \end{array} \qquad \begin{array}{lr} & 1010100 \\ \text{2's complement} \rightarrow & +\ 0111100 \\ \hline \text{ตัวทดสุดท้าย} \rightarrow 1 & 0010000 \end{array}$$

ผลลบคือ 10000

(ข)

$$\begin{array}{r} 1000100 \\ -\underline{1010100} \end{array} \qquad \begin{array}{lr} & 1000100 \\ \text{2's complement} \rightarrow & +\ 0101100 \\ \hline \text{ไม่มีตัวทด} & 1110000 \end{array}$$

ค่าตอบคือ −(2's complement ของ 1110000) = −10000

ตอบ

ตัวอย่าง 2.41 จงหาผลลบ $(572 - 425)_8$ โดยใช้ 8's complement

วิธีทำ 7's complement ของ 425 คือ 777 − 425 = 352

8's complement ของ 425 คือ 352 + 1 = 353

$(572 - 425)_8$:

$$\begin{array}{r} 572 \\ +\ 353 \\ \hline 1145 \end{array}$$

$(572 - 425)_8 = 145_8$ **ตอบ**

การพิสูจน์วิธีลบด้วย r's complement

การบวก M เข้ากับ r's complement ของ N ได้ $(M + r^n - N)$ สำหรับจำนวนเลขซึ่งมีส่วนที่เป็นจำนวนเต็ม n หลักนั้น r^n มีค่าเท่ากับ 1 ในตำแหน่งที่ (n+1) [ซึ่งเรียกว่า 'ตัวทดสุดท้าย' (end carry) นั่นเอง] เนื่องจาก M และ N เราสมมติว่าเป็นจำนวนบวก ดังนั้น

(ก) $(M + r^n - N) \geq r^n$ ถ้า $M \geq N$, หรือ

(ข) $(M + r^n - N) < r^n$ ถ้า $M < N$

ในกรณี (ก) ได้คำตอบเป็นบวก และเท่ากับ $M - N$ ซึ่งจะได้โดยตรงโดยตัดค่าตัวทดสุดท้าย r^n ทิ้งไป

ในกรณี (ข) ได้คำตอบเป็นลบ และมีค่าเท่ากับ $-(N - M)$ ซึ่งกรณีนี้จะตรวจสอบได้จากการไม่ปรากฏของตัวทดสุดท้าย คำตอบของการลบหาได้โดยคิดคอมพลีเมนต์ของผลลัพธ์ที่ได้ $(M + r^n - N)$ แล้วใส่เครื่องหมายลบไว้ข้างหน้า :

$$-[r^n - (M + r^n - N)] = -(N - M)$$

2.12.4 การใช้ (r – 1)'s Complement ในการลบ

กระบวนการลบโดยใช้ (r–1)'s Complement เหมือนการลบโดยใช้ r's complement ยกเว้นแต่ขั้นตอนที่เรียกว่า 'ตัวทดเข้าข้างท้าย (end–around carry) ซึ่งจะกล่าวถึงข้างล่างนี้ การลบ M – N เมื่อ M, N ต่างก็เป็นจำนวนบวกในฐาน r ทั้งคู่ มีวิธีดังนี้

(1) บวกตัวตั้ง M เข้ากับ (r – 1)'s complement ของตัวลบ N

(2) ตรวจสอบผลลัพธ์ในขั้นตอนที่ (1) ว่ามีตัวทดสุดท้ายหรือไม่

(ก) ถ้ามีตัวทดสุดท้าย ให้นำ 1 ไปบวกเข้ากับหลักสุดท้ายของผลลัพธ์ในตอนที่ (1) [จึงเรียก end–around carry]

(ข) ถ้าไม่มีตัวทดสุดท้าย ให้หา (r–1)'s complement ของผลลัพธ์ในตอนที่ (1) แล้วใส่เครื่องหมายลบไว้ข้างหน้า เป็นคำตอบของ M – N

การพิสูจน์การลบโดยใช้ (r–1)'s complement คล้ายคลึงกับการพิสูจน์การลบโดยใช้ r's complement

<u>**ตัวอย่าง 2.42**</u> ซ้ำตัวอย่าง 2.39 โดยใช้ 9's complement

<u>**วิธีทำ**</u> (ก) M = 72532

N = 03250 $\xrightarrow{\text{9's complement}}$

$$\begin{array}{rr} & 72532 \\ + & 96749 \\ \hline \text{ตัวทดเข้าข้างท้าย} \quad 1 & 69281 \\ + & 1 \\ \hline & 69282 \end{array}$$

$\therefore$ M – N = 69282 **<u>ตอบ</u>**

(ข) M = 03250

N = 72532 $\xrightarrow{\text{9's complement}}$ + 27467

03250
+ 27467
ไม่มีตัวทด 30717

$\therefore$ M − N = − 9's complement ของ 30717 = − 69282

ตัวอย่าง 2.43 ซ้ำตัวอย่าง 2.40 โดยใช้ 1's complement

วิธีทำ (ก)

1010100
− 1000100 $\xrightarrow{\text{1's complement}}$ + 0111011

1010100
+ 0111011
1 0001111
ตัวทดเข้าข้างท้าย + 1
0010000

$\therefore$ 1010100 − 1000100 = 10000 **ตอบ**

(ข)

1000100
− 1010100 $\xrightarrow{\text{1's complement}}$ + 0101011

1000100
+ 0101011
ไม่มีตัวทด 1101111

$\therefore$ 1000100 − 1010100 = −(1's complement ของ 1101111)
= − 10000 **ตอบ**

ตัวอย่าง 2.44 ซ้ำตัวอย่าง 2.41 โดยใช้ 7's complement

วิธีทำ

572
− 425 $\xrightarrow{\text{7's complement}}$ 352 +

572
+ 352
1 144
ตัวทดเข้าข้างท้าย + 1
145

$\therefore (572 - 425)_8 = 145_8$ **ตอบ**

2.13 จำนวนเลขฐานสองแบบไม่ติดเครื่องแบบ
Unsigned Binary Numbers

เท่าที่กล่าวมาแล้วเป็นเลขฐานสองจำนวนบวก ซึ่งอาจประกอบด้วยส่วนที่เป็นจำนวนเต็มหรือส่วนที่เป็นจำนวนไม่เต็ม หรือทั้งสองส่วน เลขฐานสองเหล่านี้เราไม่ได้ใส่เครื่องหมายหรือสัญลักษณ์ใด ๆ แสดงค่าว่าเป็นบวกหรือลบ จึงถือว่าเป็นค่าบวก

สำหรับเลขฐานสองขนาด 8 บิท ค่าเล็กที่สุดคือ 0000 0000 และค่าใหญ่ที่สุดคือ 11111111 ดังนั้น เรนจ์ (range) ทั้งหมดของเลข 8 บิท คือ

0000 0000	$(0)_{10}$	$(00)_{16}$	ถึง
1111 1111	$(255)_{10}$	$(FF)_{16}$	

สำหรับเลขฐานสองขนาด 16 บิท มีเรนจ์ ทั้งหมดคือ

0000 0000 0000 0000	$(0)_{10}$	$(0000)_{16}$	ถึง
1111 1111 1111 1111	$(65,535)_{10}$	$(FFFF)_{16}$	

ข้อมูลหรือเลขฐานสองประเภทข้างบนนี้เรียกว่าเลขฐานสองแบบไม่ติดเครื่องหมาย เพราะทุกบิทในเลขฐานสองใช้แทนขนาดของเลขฐานสิบที่เทียบเท่ากัน เราสามารถบวกหรือลบเลขฐานสองแบบไม่ติดเครื่องหมายแต่ต้องรู้ข้อจำกัดของมัน ถ้าเป็นไมโครคอมพิวเตอร์ยุคแรก (first generation microcomputer) สามารถทำงานเพียงครั้งละ 8 บิท ดังนั้นคณิตศาสตร์ของเลขฐานสองขนาด 8 บิท ขนาดทั้งหมดต้องอยู่ระหว่าง 0 ถึง 255 เลขแต่ละจำนวนที่จะบวกหรือลบกันต้องอยู่ระหว่าง 0 ถึง 255และคำตอบต้องมีเรนจ์อยู่ระหว่าง 0 ถึง 255 ด้วย ถ้าขนาดใดขนาดหนึ่งเกินกว่า 255 ต้องใช้คณิตศาสตร์ของ 16 บิท ซึ่งหมายความว่าดำเนินการกับ 8 บิทต่ำก่อน (lower 8 bits) แล้วตามด้วย 8 บิทสูง (upper 8 bits)

ตัวอย่าง 2.45 จงบวกเลขฐานสองขนาด 16 บิทต่อไปนี้ด้วยคณิตศาสตร์ 8 บิท

0000 1111 1010 1100 + 0011 1000 0111 1111

วิธีทำ บวกบิทต่ำ 8 บิทก่อน แล้วจึงบวกบิทสูงที่เหลือ 8 บิท

ไบท์สูง (upper bytes)	ไบท์ต่ำ (lower byte)
0000 1111	1010 1100
+ 0011 1000	0111 1111

?

บวกไบท์ต่ำ :

```
  1010 1100
 +0111 1111
 10010 1011
```

สังเกตตัวทดในคอลัมน์สุดท้าย ไมโครคอมพิวเตอร์ 8 บิท จะเก็บไบท์ต่ำ (0010 1011) แล้วจะทำการบวกไบท์สูงรวมทั้งตัวทดดังนี้

```
            1←ตัวทด
   0000 1111
  +0011 1000
   0100 1000
```

แล้วไมโครคอมพิวเตอร์เก็บไบท์สูงไว้

คำตอบทั้งหมดที่ไมโครคอมพิวเตอร์ดึงออกจากหน่วยความจำนั้น เป็นผลบวกของไบท์ต่ำและไบท์สูง จึงได้ 0100 1000 0010 1011

<u>ตอบ</u>

2.14 จำนวนเลขฐานสองแบบติดเครื่องหมาย
Signed Binary Numbers

เมื่อข้อมูลมีทั้งค่าบวกและลบ เราจะแสดงเป็นจำนวนเลขฐานสองอย่างไร เนื่องจากทุก ๆ อย่างต้องถูกรหัสด้วย 0 หรือ 1 เลขฐานสองจำนวนบวก เราแทนเครื่องหมายบวกด้วย 0 และแทนขนาดด้วยจำนวนเลขฐานสองบวก สำหรับเลขฐานสองจำนวนลบเราแทนเครื่องหมายลบด้วย 1 และแทนส่วนที่เหลือของเลขจำนวนลบนั้นด้วยรูปแบบต่าง ๆ ได้ 3 วิธี ดังนั้นเลขฐานสองจำนวนลบจึงแสดงได้ 3 แบบ คือ

1. Sign−magnitude
2. Sign−1's complement
3. Sign − 2's complement

ในแบบ sign−magnitude ขนาดจะถูกแทนด้วยจำนวนเลขฐานสองบวก ในอีก 2 แบบนั้นจำนวนจะอยู่ในรูป 1's หรือ 2's complement ถ้าเป็นเลขฐานสองจำนวนบวกจะมีรูปแบบทั้งสามเหมือนกัน ตัวอย่างเช่น จะเขียน เลข+9 และ−9 ให้เป็นเลขฐานสองขนาด 8 บิท ใน 3 รูปแบบนี้ ได้ว่า

	+9	−9
Sign−magnitude	0 0001001	1 0001001
Sign−1's complement	0 0001001	1 1110110
Sign−2's complement	0 0001001	1 1110111
	↑ บิทเครื่องหมาย	↑ บิทเครื่องหมาย

จำนวนเลขบวกในแต่ละรูปแบบมี 0 อยู่ที่บิทซ้ายมือสุดแทนเครื่องหมายบวก ตามด้วยจำนวนบวกฐานสอง จำนวนเลขลบมี 1 อยู่ที่บิทซ้ายมือสุดแทนเครื่องหมายลบ แต่บิทที่แทนขนาดจะแตกต่างกัน ในแบบ Sign−magnitude บิทที่แทนขนาดเหล่านี้เป็นจำนวนบวก

ในแบบ 1's complement บิทที่ใช้แทนขนาดของจำนวนเลขคือ 1's complement ของเลขฐานสอง และในแบบ 2's complement จะใช้ 2's complement แทนขนาดของจำนวนเลข

Sign–magnitude ของ –9 ได้มากจาก +9 (0 0001001) ด้วยการหาคอมพลีเมนต์เฉพาะบิทเครื่องหมาย สำหรับแบบ Sign–1's complement ของ –9 ได้จากการคอมพลีเมนต์ทุก ๆ บิทของ 0 0001001 (+9) ซึ่งรวมทั้งบิทเครื่องหมายด้วย และในแบบ Sign–2's complement หาได้โดยการทำ 2's complement ของจำนวนบวกรวมทั้งบิทเครื่องหมาย

การเขียนจำนวนเลขฐานสองแบบติดเครื่องหมายจะสังเกตได้ว่าเราเขียนบิทเครื่องหมายให้ห่างจากบิทขนาดเล็กน้อย

2.14.1 เลขฐานสองแบบ sign–magnitude

การแทนเลขฐานสองด้วย sign–magnitude นั้น จะเห็นว่าเป็นวิธีที่ง่าย ทั้งนี้เพราะเลขจำนวนบวก และจำนวนลบจะมีบิทขนาดเขียนเหมือนกันจะแตกต่างกันเพียงบิทเครื่องหมายเท่านั้น จำนวนเลขฐานสองในแบบ sign–magnitude อาจมีขนาดตั้งแต่ 4 บิทขึ้นไป โดยบิทแรกทางซ้ายมือสุด (msb) จะเป็นบิทเครื่องหมาย จำนวนเลขที่มีขนาดใหญ่ขึ้นต้องใช้ขนาดมากกว่า 4 บิท ลองดูตัวอย่างต่อไปนี้ ซึ่งเป็นการแปลงเลขฐานสองที่มีทั้งขนาดและเครื่องหมาย

+7 ⟶ 0 1 1 1 (หรือ 0 0 0 0 0 1 1 1), (หรือ ขนาดจำนวนบิทมากขึ้น)

–16 ⟶ 1 0 0 1 0 0 0 0

+25 ⟶ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 1

–128 ⟶ 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0

จะเห็นว่าจำนวนบิทจะเป็นเท่าไรก็ได้ที่เราต้องการ แต่ต้องเพียงพอแก่ขนาดของตัวเลข

เรนจ์ของจำนวนเลขในแบบ sign–magnitude จะเหลือประมาณครึ่งหนึ่งของ เรนจ์ของจำนวนเลขในแบบไม่ติดเครื่องหมาย เนื่องจากเราลดขนาดใหญ่สุดลงไปประมาณครึ่งหนึ่ง เช่น 255 ลดลงเหลือ 127 เพราะเราจำเป็นต้องแทนทั้งจำนวนบวกและจำนวนลบ

ตัวอย่างเลขลบ :	1 0 0 0	0 0 0 1	(–1)
ถึง	1 1 1 1	1 1 1 1	(–127)
ตัวอย่างเลขบวก :	0 0 0 0	0 0 0 0	(+1)
ถึง	0 1 1 1	1 1 1 1	(+127)

จะเห็นว่าขนาดใหญ่ที่สุดคือ 127 ประมาณครึ่งหนึ่งของเลขฐานสองขนาด 8 บิทแบบไม่ติดเครื่องหมาย ดังนั้นตราบเท่าที่ข้อมูลอยู่ในเรนจ์ –127 ถึง + 127 เราสามารถใช้คณิตศาสตร์ของเลข 8 บิท

ถ้าข้อมูลมีขนาดใหญ่กว่า 127 แล้ว ต้องใช้คณิตศาสตร์ของเลข 16 บิท เลขฐานสองขนาด 16 บิท จำนวนลบเช่นตัวอย่าง :

	1000	0000	0000	0001	(−1)
ถึง	1111	1111	1111	1111	(− 32,767)

และจำนวนบวก ขนาด 16 บิท ตัวอย่างเช่น

	0000	0000	0000	0001	(+1)
ถึง	0111	1111	1111	1111	(+ 32,767)

จะเห็นได้เช่นกันว่าขนาดสูงสุดมีประมาณครึ่งหนึ่งของเลขฐานสองแบบไม่ติดเครื่องหมาย ในการแทนข้อมูลของเราเราใช้เลขฐานสองแบบไม่ติดเครื่องหมายจะดีกว่า เว้นแต่ว่าเราจำเป็นต้องใส่เครื่องหมาย + และ − เท่านั้นเราจึงจะใช้เลขฐานสองแบบติดเครื่องหมาย

โดยทั่วไป เลขฐานสอง ที่มีจำนวนเต็ม n บิท จำนวนไม่เต็ม m บิท จะเขียนเป็นเลขฐานสองแบบติดเครื่องหมายได้ n + m + 1 บิท โดยมี 1 บิทเป็นบิทเครื่องหมาย เรนจ์ (range) หรือโดเมน (domain) ของค่าทางตัวเลข (numerical value) R ซึ่งถูกคลุมโดยจำนวนเลขที่แสดงอยู่ในแบบ sign − magnitude คือ

$$-(2^{n+m} - 1) \leq R \leq + (2^{n+m} - 1)$$

ตัวอย่างเช่นในคอลัมน์ที่ 2 ของตาราง 2.16 แสดงเรนจ์ของตัวเลขแบบ sign−magnitude ขนาด 4 บิท สังเกตด้วยว่าจะมีการแทนเลข 0 ได้ 2 วิธี เช่นเดียวกับในแบบ 1's complement ซึ่งอยู่ในคอลัมน์ที่ 3 กล่าวคือ มี 0 ในแบบ ศูนย์บวก (positive zero) ซึ่งเขียนเป็น 00...00 และ 0 ในแบบ ศูนย์ลบ (negative zero) ซึ่งเขียนเป็น 11...11

กรณีเลขฐานสอง มีแต่จำนวนเต็ม n บิท เรนจ์ของจำนวนเลขในแบบ sign−magnitude คือ $\pm (2^n - 1)$ เช่น เลข 8 บิท จะมีเรนจ์ $\pm (2^7 - 1) = \pm 127$ เป็นต้น

ตาราง 2.16 ตัวอย่างเลขฐานสองแบบติดเครื่องหมาย (a) เลขฐานสอง 4 บิท (b) เลขฐานสองอื่น ๆ ที่เลือกสรรมา

Decimal	Binary Sign-and-magnitude	Binary 1's-complement	Binary 2's-complement
−8			1 000
−7	1 111	1 000	1 001
−6	1 110	1 001	1 010
−5	1 101	1 010	1 011
−4	1 100	1 011	1 100
−3	1 011	1 100	1 101
−2	1 010	1 101	1 110
−1	1 001	1 110	1 111
$\begin{Bmatrix} -0 \\ +0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1\,000 \\ 0\,000 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1\,111 \\ 0\,000 \end{Bmatrix}$	0 000
1	0 001	0 001	0 001
2	0 010	0 010	0 010
3	0 011	0 011	0 011
4	0 100	0 100	0 100
5	0 101	0 101	0 101
6	0 110	0 110	0 110
7	0 111	0 111	0 111

(a)

Decimal	Binary Sign-and-magnitude	Binary 1's-complement	Binary 2's-complement
+11	001011	001011	001011
−11	101011	110100	110101
+.3125	0 .0101	0 .0101	0 .0101
−.3125	1 .0101	1 .1010	1 .1011
+31	011111	011111	011111
−31	111111	100000	100001
$\begin{Bmatrix} +0 \\ -0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 000000 \\ 100000 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 000000 \\ 111111 \end{Bmatrix}$	000000

(b)

การบวกลบเลขฐานสองแบบติดเครื่องหมายแบบ sign−magnitude

สมมุติว่าต้องการบวก +23 กับ −35 เข้าด้วยกัน เราเขียนตัวเลขทั้งสองในแบบ sign−magnitude ซึ่งประกอบด้วยบิทเครื่องหมายตามด้วยบิทขนาด จากนั้นนำจำนวนเลขมาบวกกัน ในกรณีนี้จะเห็นว่าจำเป็นต้องลบเลขที่มีขนาดเล็กกว่าออกจากเลขที่มีขนาดใหญ่กว่า แล้วใช้เครื่องหมายของคำตอบตามจำนวนที่มีขนาดใหญ่กว่า นั่นคือ

$$(+23) + (-35) = -(35 - 23) = -12$$

กระบวนการบวกจำนวนเลขแบบติดเครื่องหมาย สองจำนวน เมื่อเลขจำนวนลบถูกแทนด้วยแบบ sign–magnitude เราจำเป็นต้องเปรียบเทียบเครื่องหมายของจำนวนเลขทั้งสอง ถ้าเครื่องหมายเหมือนกันเราก็รวมขนาดของเลขทั้งสอง ถ้าเครื่องหมายต่างกันเราเปรียบเทียบขนาดของจำนวนเลขแล้วจึงลบจำนวนที่เล็กกว่าออกจากจำนวนที่ใหญ่กว่า และก็จำเป็นต้องพิจารณาถึงเครื่องหมายของผลลัพธ์เช่นกัน ขบวนการนี้ถ้ากระทำโดยดิจิตอลคอมพิวเตอร์แล้วต้องใช้ลำดับของการตัดสินใจควบคุม เช่นเดียวกับวงจรซึ่งสามารถเปรียบเทียบ บวก และลบจำนวนเลข

ถ้าให้ A และ B เป็นขนาดของจำนวนเลข 2 จำนวน การบวกหรือลบจำนวนเลขอย่างพีชคณิตนั้น เราพบว่ามีสภาวะต่าง ๆ ได้ 8 กรณี ขึ้นอยู่กับเครื่องหมายของจำนวนเลขและพีชคณิตที่กระทำต่อกัน ซึ่งอาจเขียนสภาวะทั้งแปดนั้นได้ดังนี้

$$(\pm A) \pm (\pm B)$$

พิจารณากรณีการลบ เราสามารถเปลี่ยนเครื่องหมายของ B แล้วนำไปบวกกับ A ได้ดังความสัมพันธ์คือ

$$(\pm A) - (+B) = (\pm A) + (-B)$$

$$(\pm A) - (-B) = (\pm A) + (+B)$$

ซึ่งทำให้ลดสภาวะที่เป็นไปได้เหลือเพียง 4 กรณี คือ

$$(\pm A) + (\pm B)$$

ถ้าเครื่องหมายของ A และ B เหมือนกัน เราก็บวกขนาดของจำนวนเลขทั้งสองเข้าด้วยกัน และเครื่องหมายของผลลัพธ์คือเครื่องหมายเดียวกับเครื่องหมายร่วม เมื่อเครื่องหมายของ A และ B ไม่เหมือนกัน เราเอาจำนวนที่น้อยกว่าไปลบออกจากจำนวนที่มากกว่าและเครื่องหมายของผลลัพธ์เป็นไปตามเครื่องหมายของจำนวนที่มากกว่า ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้

	ถ้า $A \geq B$		**ถ้า $A < B$**
$(+A) + (+B) = +(A + B)$			
$(+A) + (-B) =$	$+(A - B)$	$=$	$-(B - A)$
$(-A) + (+B) =$	$-(A - B)$	$=$	$+(B - A)$
$(-A) + (-B) = -(A + B)$			

จากที่กล่าวมาแล้วทั้งหมด จะเห็นว่า ข้อดีสำคัญของจำนวนเลขในแบบ sign–magnitude คือ ความง่ายของมันเลขลบเหมือนเลขบวก ยกเว้นบิทเครื่องหมาย ด้วยเหตุผลนี้เราจึงหาขนาดได้ง่ายโดยเพียงเอาบิทเครื่องหมายออก แล้วแปลงบิทที่เหลือเพื่อหาเลขฐานสิบที่เทียบเท่ากัน แต่โชคร้ายที่จำนวนเลขในแบบ sign–magnitude มีการใช้จำกัด เพราะมันต้องการวงจรเลขคณิตที่ยุ่งยาก ถ้าเราไม่ต้องบวกหรือลบข้อมูลเราใช้ sign–magnitude เช่น ใช้ในวงจร analog–to–digital (A/D)

2.14.2 เลขฐานสองแบบ sign−2's complement

เราสามารถหาเลขฐานสองจำนวนลบที่สอดคล้องกับเลขฐานสองจำนวนบวกได้โดยหา 2's complement ของเลขฐานสองจำนวนบวกนั้น เช่น

$$3 \rightarrow 0011$$
$$-3 \leftarrow 1101$$

ในทางกลับกัน ถ้าเรามีเลขฐานสองจำนวนลบ เราจะหาเลขฐานสองจำนวนบวกที่สอดคล้องกันได้ เช่น

$$-7 \rightarrow 1001$$
$$+7 \leftarrow 0111$$

หมายความว่าการหา 2's complement เทียบเท่ากับการเปลี่ยนเครื่องหมายของจำนวน (negation) นี่เป็นสิ่งสำคัญเพราะเป็นการง่ายที่จะสร้างวงจรตรรกซึ่งผลิต 2's complement เมื่อไรก็ตามที่วงจรนี้สร้าง 2's complement เอาท์พุท (output) ที่ได้จะเป็นลบของอินพุท (input) ความคิดนี้เป็นกุญแจนำไปสู่วงจรเลขคณิตที่ง่ายอย่างไม่น่าเชื่อที่สามารถบวกและลบเลขได้

เรนจ์ของค่าทางตัวเลข R ซึ่งถูกคลุมโดยจำนวนเลขที่แสดงอยู่ในแบบ 2's complement เมื่อจำนวนเลขฐานสองนี้มีจำนวนเต็ม n บิท จำนวนไม่เต็ม m บิท คือ

$$-2^{n+m} \le R \le +(2^{n+m}-1)$$

ซึ่งจะเห็นว่า เรนจ์ของเลขแบบ 2's complement จะมากกว่าในแบบ sign−magnitude และ 1's complement (ซึ่งจะได้กล่าวถึงต่อไป) ทั้งนี้เพราะแบบ 2's complement มี 0 เพียงชนิดเดียว ดังจะเห็นได้ในตาราง 2.16 จึงมีที่ว่างอีกหนึ่งที่จะคลอบคลุมตัวเลขได้มากกว่าในแบบอื่นอีก 2 แบบ

กรณีที่พิจารณาเฉพาะเลขฐานสองจำนวนเต็ม เรนจ์ของจำนวนเลขฐานสองในแบบ 2's complement จะเป็น $+(2^n-1)$ ถึง -2^n

การบวกลบเลขฐานสองติดเครื่องหมายในแบบ sign−2's complement

การบวกเลขฐานสองติดเครื่องหมายสองจำนวน โดยมีเลขจำนวนลบแสดงอยู่ในแบบ sign−2's complement นั้นกระทำได้โดย บวกเลขสองจำนวนเข้าด้วยกัน รวมทั้งบิทเครื่องหมาย ถ้ามีตัวทดของบิทที่มีนัยสำคัญมากที่สุด (บิทเครื่องหมาย) จะถูกตัดทิ้ง การบวกจะมี 4 กรณี ดังตัวอย่างต่อไปนี้

กรณีที่ 1 เป็นบวกทั้งคู่

$$\begin{array}{rr} +83 & 0\ 1010011 \\ \underline{+16} & \underline{+\ 0\ 0010000} \\ 99 & 0\ 1100011 \end{array}$$

กรณีที่ 2 เลขบวกและเลขลบขนาดเล็กกว่า

+ 125	+ 125	0 1111101	
− 68	+ (−68)	+ 1 0111100	
	57	1 0 0111001	→ 0 0111001

กรณีนี้มีตัวทดสุดท้าย ซึ่งถูกตัดทิ้งไป ไม่อยู่ในคำตอบ

กรณีที่ 3 เลขบวกและเลขลบขนาดใหญ่กว่า

+ 37	+ 37	0 0100101
− 1 15	+ (− 1 15)	+ 1 0001101
	−78	1 0110010

กรณีที่ 4 เลขลบทั้งคู่

− 43	− 43	1 1010101	
− 78	+ (−78)	+ 1 0110010	
	− 121	1 1 0000111	→ 1 0000111

เราตัดตัวทดสุดท้ายทิ้งไป ดังนั้นจึงไม่ปรากฏในคำตอบ

ข้อสังเกต จะเห็นว่าผลบวกในทุก ๆ กรณีจะอยู่ในรูป sign−2's complement

การลบเลขฐานสองติดเครื่องหมายในแบบ 2's complement เมื่อเลขจำนวนลบแสดงอยู่ในแบบ 2's complement นั้นง่ายมาก โดยมีวิธีดังนี้คือ หา 2's complement ของตัวลบ (รวมทั้งบิทเครื่องหมายด้วย) แล้วบวกเข้ากับตัวตั้ง (รวมทั้งบิทเครื่องหมายด้วย) วิธีดังกล่าวกระทำได้โดยอาศัยความจริงที่ว่า การลบสามารถเปลี่ยนเป็นการบวกได้ ถ้าเครื่องหมายของตัวลบถูกเปลี่ยน ข้อความนี้สามารถแสดงได้ดังข้างล่างนี้ โดยให้ A เป็นตัวตั้ง B เป็นตัวลบ จะได้ความสัมพันธ์คือ

$$(\pm A) - (-B) = (\pm A) + (+B)$$

$$(\pm A) - (+B) = (\pm A) + (-B)$$

การเปลี่ยนเลขจำนวนบวกเป็นเลขจำนวนลบกระทำได้ง่ายโดยทำ 2's complement ของมัน (รวมทั้งบิทเครื่องหมายด้วย) ขั้นตอนย้อนกลับยังคงเป็นจริง เพราะคอมพลีเมนต์ของคอมพลีเมนต์ ให้ผลเป็นจำนวนเลขแรกเริ่ม

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างการลบโดยใช้ 2's complement

กรณีที่ 1 เลขบวกทั้งคู่ เช่น ตัวตั้งคือ +83 ตัวลบคือ +16

การลบ +16 ออกจาก +83 คอมพิวเตอร์จะส่ง +16 เข้าสู่วงจร 2's complement เพื่อผลิต −16 ⟶ 1 1110000 จากนั้นจะบวก +83 และ −16 เข้าด้วยกัน ดังนี้

83	0 1010011	
+ (− 16)	+ 1 1110000	
67	1 0 1000011	→ 0 1000011

กรณีที่ 2 เลขบวกและเลขลบขนาดเล็กกว่า สมมุติตัวตั้งคือ +68 ตัวลบคือ -27

ในแบบ 2's complement : + 68 → 0 1000100

− 27 → 1 1100101

คอมพิวเตอร์ ส่ง -27 เข้าสู่วงจร 2's complement เพื่อผลิต

+ 27 → 0 0011011

จากนั้น บวก + 68 และ + 27 ดังนี้

+ 68	0 1000100
+ 27	+ 0 0011011
95	0 1011111

กรณีที่ 3 เลขบวกและเลขลบที่มีขนาดใหญ่กว่า เช่น + 14 เป็นตัวตั้ง และ − 108 เป็นตัวลบ

2's complement ของเลขทั้งสองนี้คือ : + 14 → 0 0001110

− 108 → 1 0010100

คอมพิวเตอร์ผลิต 2's complement ของ − 108 :

+ 108 → 0 1101100

จากนั้นบวกเลขเข้าด้วยกัน :

+ 14	0 0001110
+ 108	+ 0 1101100
122	0 1111010

กรณีที่ 4 เลขลบทั้งคู่ เช่น ตัวตั้งคือ -43 ตัวลบคือ -78

2'a complement ของเลขทั้งสองนี้คือ −43 → 1 1010101

− 78 → 1 0110010

2's complement ของ -78 คือ + 78 → 0 1001110

บวกตัวตั้งเข้ากับ 2's complement ของตัวลบ :

− 43	1 1010101
+ 78	+ 0 1001110
35	1 0 0100011 → 0 0100011

ด้วยความง่ายในการบวกและการลบจำนวนเลขฐานสองเมื่อเลขจำนวนลบแสดงอยู่ในแบบ sign−2's complement คอมพิวเตอร์ส่วนใหญ่จึงรับเอาการแทนเลขฐานสองจำนวนลบในรูปแบบนี้เหนือกว่า แบบ sign−magnitude และเหตุผลที่แบบ sign−2's complement ดี เหนือกว่าแบบ sign−1's complement ก็เพราะ เพื่อหลีกเลี่ยงการบวกที่บิทสุดท้ายที่มีนัยสำคัญน้อยที่สุด (lsb) ด้วยตัวทดสุดท้ายที่อาจเกิดขึ้น และนอกจากนี้ยังต้องการหลีกเลี่ยงศูนย์ลบ (negative zero) ที่เกิดขึ้นในแบบ sign−1's complement อีกด้วย

2.14.3 เลขฐานสองแบบ sign−1's complement

การหาเลขฐานสองจำนวนลบที่สอดคล้องกับเลขฐานสองจำนวนบวกโดยใช้ 1's complement คล้ายคลึงกับกรณีใช้ 2's complement ในแบบ sign−1's complement นั้น ให้หา 1's complement ของเลขฐานสองจำนวนบวก รวมทั้งบิทเครื่องหมายด้วยก็จะได้เลขฐานสองจำนวนลบ เช่น

13 = 0 0001101

−13 = 1 1110010

ในทางกลับกัน 1's complement ของเลขจำนวนลบจะเป็นเลขจำนวนบวก เช่น

−25 = 1 00110

25 = 0 11001

เลขฐานสองในแบบ sign−1's complement จะมี 0 อยู่ 2 ประเภท คือศูนย์บวก และศูนย์ลบ ซึ่งเห็นตัวอย่างได้จากตาราง 2.16 ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงให้เห็นการเกิดศูนย์ลบเช่นกัน : ให้บวก + 9 เข้ากับ − 9 ในแบบ 1's complement

+ 9	0 001001
− 9	+ 1 110110
− 0	1 111111

คำตอบคือ ศูนย์ลบ ซึ่งเป็นคอมพลีเมนต์ของ 0 000000 (ศูนย์บวก)

เลขศูนย์พร้อมทั้งเครื่องหมายนั้น อาจมีรูปแบบต่าง ๆ กันเช่น

	+0	−0
แบบ sign−magnitude	0 0000000	1 0000000
แบบ sign−1's complement	0 0000000	1 1111111
แบบ sign−2's complement	0 0000000	ไม่มี

จำนวนเลขฐานสองที่ประกอบด้วยจำนวนเต็ม n บิท จำนวนไม่เต็ม m บิท มีเรนจ์ของค่าทางตัวเลข R ซึ่งถูกคลุมโดยจำนวนเลขที่แสดงอยู่ในแบบ sign−1's complement จะเท่ากับในแบบ sign−magnitude

ลองเปรียบเทียบจำนวนเลขใหญ่ที่สุด และเล็กที่สุดต่อไปนี้จะเห็นว่าในแบบ sign−2's complement เป็นไปได้ที่จะมี −128 ซึ่งเขียนอยู่เป็นจำนวนเลขขนาด 8 บิท

	sign−1's complement	sign−2's complement
+ 126 = 0 1111110	− 126 = 1 0000001	1 0000010
+ 127 = 0 1111111	− 127 = 1 0000000	1 0000001
+ 128 (เป็นไปไม่ได้)	− 128 (เป็นไปไม่ได้)	1 0000000

การบวกลบเลขฐานสองติดเครื่องหมายในแบบ sign−1's complement

คล้ายคลึงกับกรณีของ sign−2's complement จะแตกต่างกันที่ตัวทดเข้าข้างท้าย (end-around carry) ลองพิจารณาการบวกต่อไปนี้

+ 6	0 000110	− 6	1 111001
+ 9	0 001001 +	+ 9	0 001001 +
+15	0 001111		10 000010
			1
		+ 3	0 000011
+ 6	0 000110	− 9	1 110110
− 9	1 110110 +	− 9	1 110110 +
− 3	1 111100		11 101100
			1 +
		− 18	1 101101

2.15 ระบบตัวเลขอิงดรรชนี
Floating Point Number Systems

ในการดำเนินการเกี่ยวข้องกับตัวเลขฐานสองซึ่งกระจายอยู่ในเรนจ์ใหญ่มีความสำคัญยิ่งที่จะต้องรักษาจำนวนมากที่สุดของตัวเลขทั้งหลายที่มีนัยสำคัญไว้ วิธีการแทนตัวเลขอิงดรรชนีจะให้ความสะดวกสำหรับความต้องการดังกล่าวข้างต้นได้ วิธีนี้คล้ายคลึงกับในทางวิทยาศาสตร์ซึ่งมีความจำเป็นบ่อยครั้งที่ต้องคำนวณด้วยจำนวนเลขที่มีขนาดใหญ่หรือเล็กมาก ๆ วิธีสะดวกก็โดยการเขียนตัวเลขในแบบแมนทิสซา (mantissa) ผสมกับเลขชี้กำลัง (exponent) เช่น ความเร็วของแสงเป็นเมตร/วินาที คือ 300,000,000 เขียนแทนได้ด้วย 3×10^8 โดยมี 3 เป็น แมนทิสซา, 8 เป็นค่าของเลขชี้กำลัง หรือจำนวนเลข 0.00023 อาจเขียนแทนได้ด้วย 0.23×10^{-3} เป็นต้น การแทนจำนวนเลขแบบนี้อาจสรุปได้ว่า มีรูปแบบเป็น $y = a \times r^p$ โดย y คือ จำนวนเลขที่ต้องแทน, a คือ แมนทิสซา, r คือเลขฐานของจำนวนเลข ($r = 10$ สำหรับระบบเลขฐานสิบ และ $r = 2$ สำหรับระบบเลขฐานสอง) และ p คือตัวเลขยกกำลังของเลขฐาน

คำในคอมพิวเตอร์ (computer word) ซึ่งเป็นเลขฐานสอง ถ้าแทนในระบบตัวเลขอิงดรรชนีอาจแบ่งออกได้เป็น 3 ส่วนคือ บิทแรกเป็นบิทเครื่องหมาย เพื่อแสดงว่าจำนวนเลขนั้น ๆ

เป็นบวกหรือลบ ส่วนที่สอง คือ เลขชี้กำลัง E (บางครั้งอาจเรียกว่า ค่าลักษณะเฉพาะ (characteristic)) และส่วนที่สามคือ แมนทิสซา M (บางครั้งเรียกว่า ส่วนจำนวนไม่เต็ม (fraction field) ก็ได้) ทั้ง E และ M ขึ้นอยู่กับความยาวของคำในคอมพิวเตอร์ และขึ้นกับงานที่จะใช้ เช่น E อาจมีขนาด 5 ถึง 20 บิท ในขณะที่ M อาจใช้ 8 ถึง 100 บิท ค่าของคำในเลขอิงดรรชนี คือ $M \times 2^E$

มีวิธีมากมายในการแสดงจำนวนเลขอิงดรรชนี แตกต่างกันเพียงรายละเอียด ทุกวิธีมีความละม้ายร่วมกันอยู่คือ กลุ่มบิทนำหน้าจะเป็นเลขชี้กำลัง E ในขณะที่กลุ่มบิทที่เหลือเป็นแมนทิสซาซึ่งคือจำนวนไม่เต็ม M โดย M ต้องอยู่ในเรนจ์ :

$$\tfrac{1}{2} \leq |M| < 1 \qquad \ldots(2.14)$$

เลขชี้กำลัง และแมนทิสซาอาจแสดงอยู่ในแบบ 2's complement และค่าของ E จะถูกปรับแต่งเพื่อให้แน่ใจว่าได้ความสัมพันธ์ดังสมการ (2.14) การปรับแต่งแบบนี้เรียกว่า นอร์มอลไลเซชัน (normalization)

<u>ตัวอย่าง 2.46</u> จงแสดงจำนวนเลขฐานสองต่อไปนี้ให้อยู่ในแบบเลขอิงดรรชนี

$$N = -1.10011011$$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก N ไม่นอร์มอลไลซ์ ดังนั้น $|M| \geq 1$ เราต้องเอาตัวคูณร่วม 2^1 ออก :

$$N = 2^1 \times (-.110011011)$$

ซึ่งทำให้ $|M|$ เป็นไปตามเงื่อนไข (2.14)

สมมุติให้ E มีขนาด 8 บิท และให้ใช้ 2's complement สำหรับแทน E และ M เราจะได้

$$N\ (\text{อิงดรรชนี}) = \underbrace{0\,0000001}_{E},\ \underbrace{1\,001100101}_{M}$$

โดยบิทแรกของ E และ M เป็นบิทแสดงเครื่องหมาย (+ และ − ของ E และ M ตามลำดับ)

ค่าของ E นั้นอาจพิจารณาได้ว่าคือจำนวนการเลื่อนเพื่อให้เกิดการนอร์มอลไลซ์ M ให้อยู่ในเรนจ์ $\tfrac{1}{2} \leq |M| < 1$ ถ้า $|M| \geq 1$ แมนทิสซาต้องถูกเลื่อนไปทางขวา และเลขชี้กำลังจะเป็นบวก เช่น $N = 101.101$ อาจเขียนเป็น $N = 2^3 \times (.101101)$ และเลขชี้กำลัง E เป็น $(0\ 0 \ldots 11)_2$ ในทางกลับกัน ถ้า $|M| < \frac{1}{2}$ แมนทิสซาจะถูกเลื่อนซ้ายเพื่อทำให้บิทนำหน้าเป็น 1 และ E มีค่าเป็นลบด้วยขนาดเท่ากับจำนวนของการเลื่อน

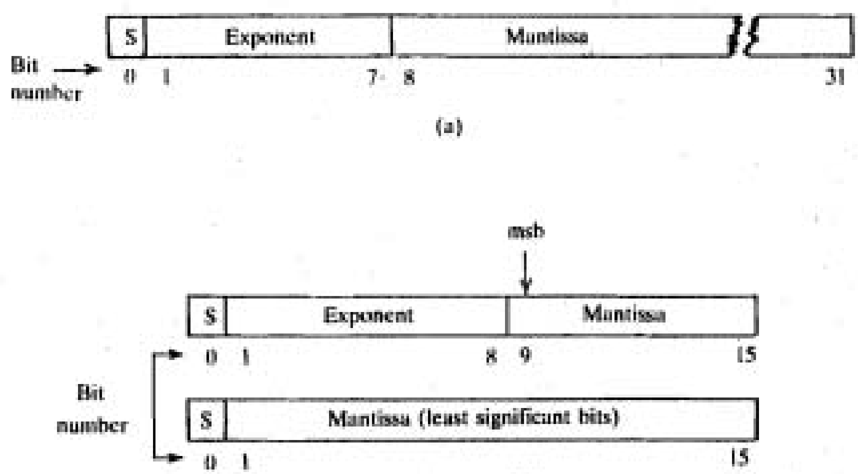
<u>**ตัวอย่าง 2.47**</u> จงแสดงจำนวนเลขต่อไปนี้ให้เป็นตัวเลขอิงตรรชนี (ในที่นี้เขียนจำนวนเลขทั้งหลายเป็นเลขฐานแปดเพื่อความสะดวก) : $+0.653_8$, -0.732_8, $+1215_8$, -0.0074_8 และ 261.2_8 ให้ใช้ 2's complement สำหรับเลขจำนวนลบ E และ M และให้ใช้ 5 บิทในการแสดงค่า E

<u>**วิธีทำ**</u> คำตอบอยู่ในตารางข้างล่างนี้

ตาราง 2.17 คำตอบตัวอย่าง 2.47

Octal	Binary	Floating point	
		Exponent	Mantissa
+ 0.653	+.110101011	0 0000	0 110101011
− 0.732	−.111011010	0 0000	1 000100110
+ 1215	+1010001101	0 1010	0 1010001101
− 0.0074	−.0000001111	1 1010	1 0001
+ 261.2	+10110001.01	0 1000	0 1011000101

<u>**ตัวอย่าง 2.48**</u> จงหาเรนจ์ของเลขจำนวนบวก N ซึ่งสามารถแสดงได้ในแบบตัวเลขอิงตรรชนีตามรูป 2.1 (a)



รูป 2.1 การแสดงจำนวนเลขอิงตรรชนี : (a) โดยคำในคอมพิวเตอร์ขนาด 32 บิท (b) โดยคำในคอมพิวเตอร์ 2 คำแต่ละคำมีขนาด 16 บิท

<u>**วิธีทำ**</u> จากรูป 2.1 (a) เนื่องจากเลขชี้กำลัง E มี 7 บิท ดังนั้นเรนจ์ทั้งหมดของเลขชี้กำลังคือ 2^{127} และ E แสดงด้วยสัญกรณ์ "เกิน 64" จึงได้ว่าเลขชี้กำลังของจำนวนใหญ่ที่สุดคือ $2^{127-64} = 2^{+63}$ ค่าสูงสุดของแมนทิสซาคือ $(2^{24}-1) \times 2^{-24} = 1-2^{-24}$ ดังนั้น

$N_{max} = 2^{+63}(1-2^{-24})$ สำหรับ N_{min} อาจหาได้โดยข้อสังเกตจากรูป 2.1 (a) ว่าค่าต่ำสุดของ E คือ 0 สอดคล้องกับ -64_{10} ในสัญกรณ์ "เกิน 64" ค่าต่ำสุดของแมนทิสซาที่ถูกนอร์มอลไลซ์คือ 2^{-1} ดังนั้นค่าต่ำสุดที่ได้คือ $N_{min} = 2^{-64}.2^{-1} = 2^{-65}$ จำนวนเลข N นี้จึงมีเรนจ์เป็น

$$2^{-65} \le N \le 2^{+63}(1-2^{-24})$$

เลขฐานสองอิงดรรชนีซึ่งเขียนโดยใช้คำคอมพิวเตอร์ 2 คำ แต่ละคำมีขนาด 16 บิท ดังในรูป 2.16 (b) มีบิทแรกทางซ้ายมือสุดในคำข้างบนเป็นบิทเครื่องหมายของเลขชี้กำลัง ในขณะที่บิทเดียวกันนี้ในคำข้างล่างเป็นบิทเครื่องหมายของแมนทิสซา

ตาราง 2.18 เลขฐานสองเทียบค่าเลขฐานสิบ

Decimal	Binary
1	1
3	11
7	111
15	1111
31	1 1111
63	11 1111
127	111 1111
255	1111 1111
511	1 1111 1111
1,023	11 1111 1111
2,047	111 1111 1111
4,095	1111 1111 1111
8,191	1 1111 1111 1111
16,383	11 1111 1111 1111
32,767	111 1111 1111 1111
65,535	1111 1111 1111 1111

เลขคณิตของตัวเลขอิงดรรชนี (Floating Point Arithmetic)

การคูณ หาร บวก ลบของจำนวนเลข 2 จำนวนในแบบเลขอิงดรรชนีเป็นไปตามข้างล่างนี้ กำหนดให้ตัวเลขอิงดรรชนีซึ่งถูกนอร์มอลไลซ์ 2 จำนวน เป็น

$$X = 2^{E_x}(M_x),\ Y = 2^{E_y}(M_y)$$

การคูณ $$X \cdot Y = (2^{E_x+E_y})(M_x \cdot M_y) = 2^{E_v}(M_v)$$

การหาร $$X \div Y = (2^{E_x-E_y})(M_x \div M_y) = 2^{E_w}(M_w)$$

เราต้องทำการนอร์มอลไลซ์ผลลัพธ์ของการคูณและหาร เมื่อ $|M_v|$ หรือ $|M_w|$ ของผลลัพธ์อยู่ภายนอกเรนจ์ในสมการ (2.14) ตัวอย่างเช่น

ให้ $X = 2^5(.1)_2$ และ $Y = 2^{12}(.1)_2$ ดังนั้น

$X \cdot Y = 2^{17}(.01)_2 = 2^{16}(.1)_2$

การบวก หรือการลบเลขอิงดรรชนี 2 จำนวน ถ้ามีเลขชี้กำลังเหมือนกันก็ทำการบวกลบแมนทิสซาเข้าด้วยกันดังนี้

เช่น

$$X = 2^{E_x}(M_x),\ y = 2^{E_x}(M_y) \text{ จะได้}$$

$$X + Y = (M_x + M_y)\,2^{E_x}$$

$$X - Y = (M_x - M_y)\,2^{E_x}$$

กรณีที่เลข 2 จำนวนนั้นมีเลขชี้กำลังต่างกัน ต้องทำเลขชี้กำลังให้เหมือนกันเสียก่อนเรียกว่า การปรับแนว (alignment) ซึ่งกระทำโดยเลื่อนแมนทิสซาไปทางขวาสำหรับเลขที่มีเลขชี้กำลังน้อยกว่า จำนวนของการเลื่อนพิจารณาได้จากผลต่างของเลขชี้กำลังของเลข 2 จำนวนนั้น

<u>**ตัวอย่าง 2.49**</u> จงหาผลบวกของ $X + Y = Z$ เมื่อ

$$X = 2^{E_x}(M_x) = 2^6(.101)_2,\ Y = 2^{E_y}(M_y) = 2^{11}(.101101)_2$$

<u>**วิธีทำ**</u> แมนทิสซาของ X ต้องถูกเลื่อนไปทางขวา 5 ตำแหน่ง เพราะ

$E_y - E_x = 11 - 6 = 5$

$$\begin{aligned} X &= 2^{11}(.00000101)_2 \\ Y &= 2^{11}(.101101)_2 \\ \hline Z &= 2^{11}(.10111001)_2 \end{aligned}$$

<u>**ตอบ**</u>

การบวกหรือการลบเลขอิงดรรชนี ต้องตามด้วยการนอร์มอลไลซ์ผลลัพธ์ เมื่อแมนทิสซาอยู่ภายนอกเรนจ์ในสมการ (2.14)

<u>**ตัวอย่าง 2.50**</u> จงหาผลบวก $X + Y = Z$ เมื่อ $X = Y = 0.11_2 = 0.75_{10}$

<u>**วิธีทำ**</u> $X = Y = 0.11_2 = 2^0(.11)_2$

$\therefore Z = X + Y = (1.1)_2 = 1.5_{10}$

ต้องนอร์มอลไลซ์ Z เพื่อทำให้เป็นไปตามสมการ (2.14)

$\therefore Z = 2^1(.11)_2$ <u>**ตอบ**</u>

สรุป

การเขียนจำนวนเลขในระบบฐานใด ๆ กระทำโดยอาศัยหลักตัวนำซึ่งแปรค่าไป ตามด้วยเลขพื้นฐาน ซึ่งคือสัญลักษณ์ของตัวเลขในระบบฐานนั้น ๆ

ถ้าต้องการแปลงจำนวนเลขในระบบฐานใด ๆ ให้เป็นจำนวนเลขในระบบฐานสิบ ใช้วิธีหาผลบวกของสัมประสิทธิ์ตามน้ำหนักดังนี้

$$N = N_r + n_r = [a_{n-1}(r)^{n-1} + \ldots + a_0(r)^0 + a_{-1}(r)^{-1} + \ldots + a_{-m}(r)^{-m}]_r$$

$$= \sum_{i=-m}^{n-1} a_i (r)^i$$

เมื่อ N คือ จำนวนเลขในระบบฐานใด ๆ ซึ่งประกอบด้วยจำนวนเต็ม n หลัก, จำนวนไม่เต็ม m หลัก

N_r คือ เลขจำนวนเต็ม

n_r คือ เลขจำนวนไม่เต็ม

a_i คือ สัมประสิทธิ์ประจำตำแหน่ง

r คือ เลขฐาน

ถ้าต้องการแปลงเลขฐานสิบให้เป็นเลขฐานใด ๆ กระทำโดยแบ่งเป็น 2 ส่วน เลขฐานสิบที่เป็นจำนวนเต็มให้หารด้วยเลขฐานที่ต้องการแล้วเก็บเศษที่เหลือจากการหารในแต่ละครั้ง เศษที่ได้จากการหารครั้งแรกเป็น lsd และเศษที่ได้จากการหารครั้งสุดท้ายเป็น msd สำหรับเลขฐานสิบจำนวนไม่เต็มให้เอาเลขฐานที่ต้องการไปคูณ แล้วเก็บจำนวนเต็มที่ได้จากการคูณ จำนวนเต็มของการคูณครั้งแรกมีน้ำหนัก r^{-1} จำนวนเต็มครั้งต่อ ๆ ไปมีน้ำหนัก r^{-2}, r^{-3},...

การแปลงจำนวนเลขระหว่างเลขฐานสองกับเลขฐานแปด และเลขฐานสิบหกอาศัยความคล้องจองที่เลขฐานสองขนาด 3 บิท และ 4 บิท เทียบค่าได้เท่ากับเลขพื้นฐานของเลขฐานแปด และเลขฐานสิบหกตามลำดับ

เลขคณิตของระบบเลขฐานสอง แปด สิบหก อาจกระทำโดยคิดเปรียบเทียบกับเลขคณิตของจำนวนเลขในระบบฐานสิบซึ่งเราคุ้นเคย

การใช้คอมพลีเมนต์ช่วยในการลบเลขซึ่งมีฐานเป็น r มีวิธีดังนี้

1. ใช้ r's complement : ให้บวกตัวตั้งเข้ากับ r's complement ของตัวลบ แล้วตรวจสอบผลลัพธ์ที่ได้โดยถ้ามีตัวทดสุดท้ายให้ตัดทิ้ง ถ้าไม่มีตัวทดสุดท้ายให้หา r's complement ของผลลัพธ์นั้น

2. การใช้ (r−1)'s complement : ให้บวกตัวตั้งเข้ากับ (r−1)'s complement ของตัวลบ แล้วตรวจสอบผลลัพธ์ที่ได้ โดยถ้ามีตัวทดสุดท้าย ให้นำไปบวกเข้ากับหลักสุดท้ายของผลลัพธ์ข้างบน ถ้าไม่มีตัวทดสุดท้ายให้หา (r−1)'s complement ของผลลัพธ์นั้น

เลขฐานสองจำนวนบวก เราแทนเครื่องหมายบวกด้วยเลข 0 และแทนขนาดด้วยจำนวนเลขฐานสองบวก เช่น $9_{10} = 0\ 0001001_2$

เลขฐานสองจำนวนลบ แสดงได้เป็น 3 รูปแบบคือ

1. แบบ sign−magnitude แทนเครื่องหมายลบด้วยเลข 1 และแทนขนาดด้วยเลขฐานสองบวก เช่น $-9_{10} = 0\ 0001001_2$

2. แบบ sign−1's complement แทนเครื่องหมายลบด้วยเลข 1 และแทนขนาดด้วย 1's complement ของเลขฐานสองนั้น เช่น $-9_{10} = 1\ 1110110$

3. แบบ sign−2's complement แทนเครื่องหมายลบด้วยเลข 1 และแทนขนาดด้วย 2's complement ของเลขฐานสองนั้น เช่น $-9_{10} = 1\ 1110111$

จำนวนเลขฐานสองแบบอิงตรรชนีหนึ่ง ๆ แบ่งได้เป็นสามส่วนคือ บิทเครื่องหมาย เลขชี้กำลัง E และ แมนทิสซา M โดยมีบิทแรกของ E และ M เป็นบิทเครื่องหมาย

แบบฝึกหัด

2.1 จงหาเลขฐานสอง เลขฐานแปด เลขฐานสิบหกที่เทียบเท่ากับ 411_{10}

2.2 จงหาเลขฐานสิบที่เทียบเท่ากับ 1110011_2, 7105_8, $A0CDE8_{16}$

2.3 จงแปลง 298.0462_{10} ให้เป็นเลขฐานสอง เลขฐานแปด เลขฐานสิบหก

2.4 จงแปลง 10101110.101_2 ให้เป็นเลขฐานสิบ เลขฐานแปด เลขฐานสิบหก

2.5 จงแปลง 4732.15_8 ให้เป็นเลขฐานสิบ เลขฐานสอง เลขฐานสิบหก

2.6 จงแปลง $92FB0.341_{16}$ ให้เป็นเลขฐานสิบ เลขฐานสอง เลขฐานสิบหก

2.7 กำหนดให้จำนวนเต็มในเลขฐานสิบมี n หลัก จำนวนเลขในฐาน 3, 4, 8 และ 16 จะมีกี่หลัก เมื่อแทนเลขจำนวนเดียวกับเลขฐานสิบนี้

2.8 จงแสดงค่าคงตัวต่อไปนี้ ให้เป็นจำนวนเลขในฐาน 8

(ก) $\pi = 3.14159_{10}$ (ข) $e = 2.718_{10}$

(ค) $c = 2.998 \times 10^8$

2.9 จงเขียนตารางการคูณเลขฐานแปด

2.10 จงหาผลบวกของ

(ก) $101011010_2 + 111000_2$ (ข) $70356_8 + 17564_8 + 2143_8$

(ค) $E109_{16} + F8641_{16} + BCDA_{16}$

2.11 จงลบเลขต่อไปนี้

(ก) $1110010_2 - 1010111_2$ (ข) $4731_8 - 3564_8$

(ค) $8FECD_{16} - 4AF0E_{16}$

2.12 จงคูณเลขฐานสองต่อไปนี้ 11110×1010

2.13 จงคูณเลขฐานแปดต่อไปนี้ 2714×302

2.14 จงคูณเลขฐานสิบหกต่อไปนี้ $CCA05 \times B94$

2.15 จงหารเลขฐานสองต่อไปนี้ $1111100001 \div 1011$

2.16 จงหาผลลัพธ์ของ $65023_8 \div 145_8$

2.17 จงหารเลขฐานสิบหกต่อไปนี้ $4BE28 \div D7F$

2.18 จงลบเลขฐานสิบต่อไปนี้โดยใช้ 9's complement

(ก) $5250 - 321$ (ข) $20 - 1000$

2.19 จงลบเลขฐานสองต่อไปนี้โดยใช้ 1's complement

(ก) $10101011 - 1001111$ (ข) $1000101 - 1010101$

(ค) $1111000011 - 1101011110$ (ง) $101110000 - 10100111$

2.20 จงลบเลขฐานแปดต่อไปนี้โดยใช้ 8's complement

(ก) 7645.13 − 2754.26 (ข) 15432 − 70041

2.21 จงลบเลขฐานสองต่อไปนี้โดยใช้ 2's complement

(ก) 101110 − 100101 (ข) 1110000 − 110101

(ค) 101101101 − 101111011 (ง) 111100001111 − 111011101110

2.22 เลขฐานสองต่อไปนี้มีบิทเครื่องหมายอยู่ที่บิทซ้ายมือสุด ถ้าเป็นเลขจำนวนลบได้เขียนอยู่ในแบบ sign−2's complement

จงหาผลลัพธ์ในแต่ละข้อ แล้วตรวจสอบคำตอบกับผลลัพธ์ที่หาโดยใช้จำนวนเลขฐานสิบที่สอดคล้องกัน

(ก) 1 01110 + 1 10010 (ข) 0 10101 − 0 00111

(ค) 1 11001 + 0 01010 (ง) 1 01011 − 1 00110

2.23 จงทำเลขคณิตต่อไปนี้โดยใช้เลขฐานสองในแบบ sign−2's complement ให้ใช้เลขฐานสองขนาด 8 บิท

(ก) (+65) + (+78) (ข) (+65) + (−78)

(ค) (−65) + (−78) (ง) (−65) + (+78)

2.24 จงหา r's complement และ (r−1)'s complement ของ 1.12_{10}, 0.378_{10}, 11234_{6}, 102.201_{3}

2.25 จงทำเลขคณิตต่อไปนี้โดยใช้เลขฐานสองขนาด 8 บิท ในรูปแบบ sign−1's complement

(ก) (+49) + (25) (ข) (+49) + (−25)

(ค) (−49) + (−25) (ง) (−49) + (+25)

2.26 จงแสดงเลขฐานสองต่อไปนี้ในรูปแบบตัวเลขอิงดรรชนี

(ก) +0.101001 (ข) −0.100011

(ค) +10111.01 (ง) −0.00000101

โดยใช้ sign−2's complement สำหรับเลขชี้กำลังและแมนทิสซาที่เป็นลบ

2.27 จงหาค่าของ X.Y เมื่อ $X = 2^{11}(.1)_2$, $Y = 2^{8}(.01)_2$

2.28 จงหาค่าของ X−Y = Z เมื่อ $X = 2^{10}(.10101)_2$ $Y = 2^{5}(.0111)_2$