บทที่ 8
ทฤษฎีเครื่องปฏิกรณ์นิวเคลียร์
(NUCLEAR REACTOR THEORY)

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาบทนี้แล้วจะสามารถ

1. หาสมการกลุ่มเดียวที่ใช้ในการคำนวณหาค่าฟลักซ์ ณ ตำแหน่งใดๆ ในเครื่องปฏิกรณ์ที่ไม่มีตัวสะท้อนนิวตรอนได้ ทั้งเครื่องปฏิกรณ์รูปทรงกลมและแบบแผ่นขนาดอนันต์
2. หาขนาดของเครื่องปฏิกรณ์รูปทรงกลม และแบบแผ่นที่จะทำให้เครื่องปฏิกรณ์อยู่ในสภาวะวิกฤตได้
3. หาส่วนผสมของสารในเครื่องปฏิกรณ์เพื่อให้เครื่องปฏิกรณ์ทำงานในสภาวะวิกฤตได้
4. หาค่าอัลบีโด หรือความสามารถของสารที่จะสะท้อนนิวตรอนได้
5. หาค่าฟลักซ์สูงสุดต่อค่าฟลักซ์เฉลี่ย และกำลังของเครื่องปฏิกรณ์ได้ ทั้งรูปทรงกลมและแบบแผ่น

เครื่องปฏิกรณ์ที่ทำงานในระบบวิกฤต จะมีการสมดุลของนิวตรอนระหว่างจำนวนนิวตรอนที่เกิดขึ้นโดยการแบ่งแยกตัว และจำนวนนิวตรอนที่สูญเสียไป อาจจะเป็นการดูดกลืนในเครื่องปฏิกรณ์ หรือโดยการรั่วจากผิว ปัญหาหนึ่งในการสร้างเครื่องปฏิกรณ์ คือการคำนวณขนาดและส่วนผสมของเชื้อเพลิงเพื่อให้เกิดการสมดุล การคำนวณจะพิจารณานิวตรอนเพียงพลังงานเดียว เช่นในเครื่องปฏิกรณ์ที่ใช้นิวตรอนเร็วเป็นตัวทำให้เกิดแบ่งแยกตัว จะพิจารณานิวตรอนที่เกิด, ถูกดูดกลืน และรั่วไป ที่เกิดขึ้นกับนิวตรอนเร็ว เพียงพลังงานเดียว การคำนวณโดยวิธีนี้เรียก **การคำนวณกลุ่มเดียว** (one group calculation)

8.1 สมการกลุ่มเดียวสำหรับเครื่องปฏิกรณ์

(One group reactor equation)

พิจารณาเครื่องปฏิกรณ์ แบบที่ใช้นิวตรอนเร็ว (fast reactor) ทำงานในระบบวิกฤต ประกอบด้วยส่วนผสมของ เชื้อเพลิง ตัวทำให้เย็นเป็นเนื้อเดียวกัน มีขอบเขตเพียงแห่งเดียว ไม่มีตัวสะท้อนนิวตรอน เรียก **แบร์รีแอคเตอร์** (bare reactor)

โดยการใช้สมการการแพร่สำหรับนิวตรอนกลุ่มเดียว (One group diffusion equation)

$$D \nabla^2 \phi - \Sigma_a \phi + S = 0 \qquad \text{..... (8.1)}$$

ϕ คือ ฟลักซ์สำหรับนิวตรอนกลุ่มเดียว (เรียก one group flux)

D และ Σ_a เป็นสัมประสิทธิ์การแพร่ของนิวตรอนกลุ่มเดียว และภาคตัดขวางมหัพภาคสำหรับการดูดกลืน สำหรับส่วนผสมของเชื้อเพลิงและตัวทำให้เย็น และ

S เป็นความหนาแน่นของตัวกำเนิดนิวตรอน

กรณีที่เครื่องปฏิกรณ์อยู่ในระบบวิกฤต จำนวนนิวตรอนที่เป็นตัวกำเนิด (S) หาได้ เมื่อกำหนดค่าภาคตัดขวางมหัพภาคสำหรับการดูดกลืนนิวตรอนแล้วเกิดแบ่งแยกตัว

Σ_{aF} เป็นภาคตัดขวางมหัพภาคสำหรับการดูดกลืนสำหรับนิวตรอนกลุ่มเดียว สำหรับเชื้อเพลิง และ

η เป็นค่าเฉลี่ยของจำนวนนิวตรอนเร็วที่เกิดจากการแบ่งแยกตัวที่ส่งออกมาต่อนิวตรอนที่ถูกดูดกลืนเข้าไปในเชื้อเพลิง 1 ตัว

เทอมที่เป็นตัวกำเนิดนิวตรอน คือ

$$S = \eta \Sigma_{aF} \phi \qquad \text{..... (8.2)}$$

เขียนใหม่ได้ว่า

$$S = \eta \frac{\Sigma_{aF}}{\Sigma_a} . \Sigma_a \, \varnothing$$

$$= \eta f . \Sigma_a \, \varnothing$$

เมื่อ $$S = k_\infty \, \Sigma_a \, \varnothing \qquad \text{..... (8.3)}$$

f เรียก แฟกเตอร์ยูทิลไลเซชัน สำหรับเชื้อเพลิง (fuel utilization) และ

Σ_a เป็น ค่าภาคตัดขวางสำหรับ ของผสมระหว่างเชื้อเพลิง และตัวทำให้เย็น

f เป็นสัดส่วนของนิวตรอนที่ถูกดูดกลืนเข้าไปในเชื้อเพลิง ต่อนิวตรอนที่ถูกดูดกลืนเข้าไปในเครื่องปฏิกรณ์ทั้งหมด

พิจารณาเครื่องปฏิกรณ์ที่มีขนาดใหญ่มาก (ขนาดอนันต์) ที่มีส่วนประกอบเหมือนกันตลอด เป็นแบร์รีแอคเตอร์ แบบนี้ไม่มีนิวตรอนรั่วหรือหนีออกไป จะถูกดูดกลืน โดยเชื้อเพลิงหรือตัวระบายความร้อน ทุกแห่งในเครื่องปฏิกรณ์ ฟลักซ์นิวตรอนมีค่าคงที่ โดยไม่คำนึงถึงตำแหน่ง จะเห็นว่ามี $\Sigma_a \varnothing$ นิวตรอนที่ถูกดูดกลืนต่อลูกบาศก์เซนติเมตรต่อวินาที ทุกหนทุกแห่งในระบบ จะมีจำนวนนิวตรอนถูกดูดกลืนไปในเชื้อเพลิง $f \Sigma_a \varnothing$ นิวตรอน และปล่อยนิวตรอนจากการแบ่งแยกตัวออกมา $\eta f \Sigma_a \varnothing$ นิวตรอนในทันทีทันใด หรืออาจถูกดูดกลืนในเครื่องปฏิกรณ์ในเวลาต่อมา ดังนั้นการดูดกลืนนิวตรอน $\Sigma_a \varnothing$ ในชั่วรุ่น (generation) หนึ่งจะทำให้เกิดการดูดกลืนนิวตรอน $\eta f \Sigma_a \varnothing$ ในชั่วรุ่นต่อไป

จากคำจำกัดความของคำว่า แฟกเตอร์ตัวคูณ หมายถึง จำนวนนิวตรอนที่เกิดขึ้นในชั่วรุ่นใหม่ ต่อจำนวนนิวตรอนที่มีอยู่ในชั่วรุ่นเดิม เขียนได้ว่า

$$k_\infty = \frac{\eta f \Sigma_a \varnothing}{\Sigma_a \varnothing} \qquad \eta f \qquad \text{.... (8.4)}$$

เมื่อ k_∞ เป็นค่าแฟกเตอร์ตัวคูณ สำหรับเครื่องปฏิกรณ์ขนาดอนันต์

ตารางที่ 8.1 ตัวเลขแสดงค่าคงที่ต่างๆ โดยใช้ทฤษฎีกลุ่มเดียวสำหรับเครื่องปฏิกรณ์ที่ใช้นิวตรอนเร็ว

ธาตุหรือไอโซโทป	σ_r	σ_f	σ_a	σ_{tr}	ν	η
Na	0.0008	0	0.0008	3.3	-	-
Al	0.002	0	0.002	3.1	-	-
Fe	0.006	0	0.006	2.7	-	-
U^{235}	0.25	1.4	1.65	6.8	2.6	2.2
U^{238}	0.16	0.095	0.255	6.9	2.6	0.97
Pu^{239}	0.26	1.85	2.11	6.8	2.98	2.61

From Reactor Physics Constants, U.S. Atomic Energy Commission Report ANL-5800, 2nd ed., 1963'

8.2 เครื่องปฏิกรณ์แบบไม่มีตัวสะท้อนนิวตรอน

(Bare reactor)

เนื่องจาก η และ f เป็นค่าคงที่ ขึ้นอยู่กับคุณสมบัติของสารในเครื่องปฏิกรณ์ ค่า k_∞ จะเหมือนกัน ทั่วบริเวณในเครื่องปฏิกรณ์แบบที่ไม่มีตัวสะท้อนนิวตรอน เช่นเดียวกับในเครื่องปฏิกรณ์ขนาดอนันต์ ที่มีส่วนประกอบเหมือนๆ กัน

เทอมที่เป็นต้นกำเนิดนิวตรอน ในสมการ (8.3), คือ

$$S = k_\infty \Sigma_a \varnothing$$

นำสมการ (8.3) ใส่ในสมการ (8.1), จะได้ว่า

$$D \nabla^2 \varnothing - \Sigma_a \varnothing + k_\infty \Sigma_a \varnothing = 0 \qquad \text{..... (8.5)}$$

หรือ

$$D \nabla^2 \varnothing + (k_\infty - 1) \Sigma_a \varnothing = 0$$

หารด้วย D, จะได้

$$\nabla^2 \varnothing + \left(\frac{k_\infty - 1}{L^2}\right) \varnothing = 0 \qquad \text{..... (8.6)}$$

เมื่อ

$$L^2 = \frac{D}{\Sigma_a} \qquad \text{..... (8.7)}$$

เรียก L^2 ว่าพื้นที่ของการแพร่ของนิวตรอนกลุ่มเดียว (one group diffusion area) , และใช้พารามิเตอร์ B^2 แทน $\left(\frac{k_\infty - 1}{L^2}\right)$

$$B^2 = \frac{k_\infty - 1}{L^2} \qquad \text{..... (8.8)}$$

แทนค่า B^2 ในสมการ (8.6), จะได้

$$\nabla^2 \phi + B^2 \phi = 0 \qquad \text{..... (8.9)}$$

เรียกสมการ (8.9) ว่าเป็น **สมการกลุ่มเดียว สำหรับเครื่องปฏิกรณ์** (One group reactor equation)

ในการคำนวณต้องใช้เงื่อนไข (boundary condition) สำหรับฟลักซ์ ไม่เพียงแต่พิจารณารูปร่างของฟลักซ์ในเครื่องปฏิกรณ์ แต่จะต้องพิจารณาสภาวะที่ทำให้เกิดวิกฤตด้วย จะได้กล่าวถึงตัวพารามิเตอร์บางตัวที่เกี่ยวข้องเพื่อใช้ในการคำนวณในหัวข้อต่อไป

8.3 ความน่าจะเป็นที่เทอร์มาลนิวตรอนไม่รั่วออกไปจากระบบ ($£_{th}$) (Thermal non-leakage probability) และความน่าจะเป็นที่นิวตรอนเร็วไม่รั่วออกไปจากระบบ ($£_f$) (Fast non-leakage probability)

จากสมการ (7.11) จะเห็นว่า k_{eff} ขึ้นกับค่า k_∞ และค่าความน่าจะเป็นที่นิวตรอนไม่รั่วออกจากระบบ สองเทอม คือ $£_{th}$ และ $£_f$,

การหาค่า $£_{th}$ จะพิจารณาจากสมการการแพร่ของนิวตรอนในสภาวะคงตัว (steady state)

$$D\nabla^2 \phi - \Sigma_a \phi + S = 0 \qquad \text{..... (8.10)}$$

แทนค่า S จากสมการที่ (8.3)

$$D\nabla^2 \phi - \Sigma_a \phi + k_\infty \Sigma_a \phi = 0 \qquad \text{..... (8.11)}$$

หรือ

$$\nabla^2 \phi + B^2 \phi = 0 \qquad \text{..... (8.12)}$$

เมื่อ

$$B^2 = \frac{k_\infty - 1}{L^2}$$

เรียก B^2 ว่า **บัคลิ่ง** (Buckling) หรือ

$$B^2 = \frac{(k_\infty - 1)\Sigma_a}{D} = \frac{k_\infty \Sigma_a - \Sigma_a}{D} \qquad \text{..... (8.13)}$$

$k_\infty \Sigma_a$ เป็นเทอมที่แสดงว่า นิวตรอนที่เกิดขึ้นเป็น k_∞ เท่าของนิวตรอนที่ถูกจับไป อาจเขียนได้ว่า

$$B^2 = \frac{\nu\Sigma_f - \Sigma_a}{D}$$

เมื่อ Σ_f เป็นภาคตัดขวางมหัพภาคสำหรับนิวตรอนที่ถูกจับไปแล้วเกิดแบ่งแยกตัว

$$B^2 = \frac{\Sigma_a(\nu - 1)}{D} \qquad \text{..... (8.14)}$$

จากความหมายของ $£_{th}$

$$£_{th} = \frac{\text{นิวตรอนที่ถูกจับไปในเครื่องปฏิกรณ์ต่อวินาที}}{\text{นิวตรอนที่ถูกจับไปในเครื่องปฏิกรณ์ต่อวินาที + นิวตรอนที่รั่วไปต่อวินาที}}$$

นิวตรอนที่ถูกจับไปในเครื่องปฏิกรณ์ต่อวินาที $= \Sigma_a \int_V \phi \, dV$

นิวตรอนที่รั่วไปต่อวินาที $= -D \int_V \nabla^2 \phi \, dV$

สมการ (8.12), คูณตลอดด้วย -D, แล้วจัดใหม่,

นิวตรอนที่รั่วไปต่อวินาที $= D B^2 \int_V \phi \, dV$

$$£_{th} = \frac{\Sigma_a \int_V \phi \, dV}{\Sigma_a \int_V \phi \, dV + D B^2 \int_V \phi \, dV}$$

$$= \frac{\Sigma_a}{\Sigma_a + D B^2}$$

หารตลอดด้วย Σ_a,

$$£_{th} = \frac{1}{1 + B^2 L^2_{th}} \qquad \ldots . (8.15)$$

สมการ (8.15) เรียก สมการกลุ่มเดียวสำหรับความน่าจะเป็นที่นิวตรอนไม่รั่วออกไปจากระบบสำหรับแบร์รีแอคเตอร์

เนื่องจากการรั่วของนิวตรอนขึ้นอยู่กับลักษณะทางเรขาคณิต (geometry) จึงใช้ B_g^2 แทน B^2

$$£_{th} = \frac{1}{1 + B_g^2 L^2_{th}} \qquad (8.16)$$

ในทำนองเดียวกัน จะหาค่า ความน่าจะเป็นที่นิวตรอนเร็วไม่รั่วออกไปจากระบบ ได้ว่า

$$£_f = \frac{1}{1 + B^2_g L^2_f} \qquad (8.17)$$

กรณีที่ B^2 ขึ้นกับส่วนผสมของธาตุ, สมการ (8.15) จะแทน B^2 ด้วย B^2_m เรียก B^2_m ว่า ค่าบัคลิงที่ขึ้นกับส่วนผสม (material buckling)

$$£_{th} = \frac{1}{1 + B^2_m L^2_{th}}$$

8.4. เครื่องปฏิกรณ์รูปทรงกลมที่ไม่มีตัวสะท้อนนิวตรอน

(Bare sphere reactor)

พิจารณาเครื่องปฏิกรณ์รูปทรงกลมรัศมี R ฟลักซ์ในเครื่องปฏิกรณ์ชนิดนี้จะเป็นฟังก์ชันของระยะทางอย่างเดียว แทนค่าลาปลาเซียนในโคออร์ดิเนททรงกลม, จะได้สมการของเครื่องปฏิกรณ์ คือ

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\frac{r^2\,d\phi}{dr} + B^2\phi = 0 \qquad \text{..... (8.18)}$$

ฟลักซ์ยังคงเป็นไปตามเงื่อนไข โดยกำหนดว่า

(1) เมื่อไม่คิดระยะทางเอกซ์ทราโปเลชัน (มีค่าน้อยเมื่อเทียบกับขนาดของเส้นผ่า-ศูนย์กลาง)

$$\phi(R) = 0$$

โดยการแทนค่า $\phi = \frac{\omega}{r}$ ในสมการ (8.18) และแก้สมการตามที่เคยทำมาแล้ว จะได้คำตอบทั่วไป (general solution) ของสมการ คือ

$$\phi = \frac{A\sin Br}{r} + \frac{C\cos Br}{r}$$

เมื่อ A และ C เป็นค่าคงที่

(2) เทอมที่ 2 จะมีค่าอนันต์ เมื่อ r มีค่าเป็นศูนย์ จะได้

$$\phi = \frac{A\sin Br}{r} \qquad \text{..... (8.19)}$$

(3) ใช้เงื่อนไขที่ว่า $\phi(R) = 0$, จะใช้ได้เมื่อ B เป็นตัวเลขตัวใดตัวหนึ่งของค่าไอเกน คือ

$$B_n = \frac{n\pi}{R} \qquad \text{..... (8.20)}$$

เมื่อ n เป็นตัวเลขจำนวนเต็มใดๆ จะมีเพียงค่าไอเกนค่าแรกเท่านั้นที่ใช้ได้สำหรับเครื่องปฏิกรณ์ในระบบวิกฤต ดังนั้นเมื่อ n = 1, ค่าบัคลิงหาได้คือ

$$B_1^2 = \left(\frac{\pi}{R}\right)^2$$

ฟลักซ์จะมีค่าดังนี้

$$\phi(r) = \frac{A\sin\left(\frac{\pi r}{R}\right)}{r} \qquad \text{..... (8.21)}$$

การหาค่าคงที่ จะหาได้โดยพิจารณากำลังของเครื่องปฏิกรณ์ คือ

$$P = E_R\,\Sigma_f \int \phi(r)\,dV \qquad \text{..... (8.22)}$$

เมื่อ dV เป็นปริมาตรเล็กๆ, สำหรับเครื่องปฏิกรณ์รูปทรงกลม

$$dV = 4\pi r^2\, dr$$

และจากสมการ (8.22)

$$P = 4\pi E_R \Sigma_f \int_0^R r^2 \phi(r)\, dr$$

แทนค่าฟลักซ์ จากสมการ (8.21)

$$P = 4\pi E_R \Sigma_f \int_0^R \frac{r^2\ A \sin\frac{\pi r}{R}\ .\ dr}{r}$$

$$= 4\pi E_R \Sigma_f A. \int_0^R r\ \sin\frac{\pi r}{R}.\ dr$$

$$= 4\pi E_R \Sigma_f A\ \left[\frac{\sin\frac{\pi r}{R}}{\left(\frac{\pi}{R}\right)^2} - \frac{r\cos\frac{\pi r}{R}}{\frac{\pi}{a}}\right]^*$$

$$= 4\pi E_R \Sigma_f A\ \left[-\left\{\frac{R(-1)R}{\pi} - 0\right\}\right]$$

$$= 4\pi E_R \Sigma_f A\left[+\frac{R^2}{\pi} + 0\right]$$

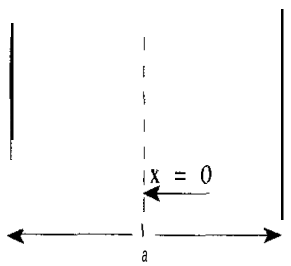
$$P = 4\pi E_R \Sigma_f A.\ \frac{R^2}{\pi}$$

$$A = \frac{P}{4 E_R \Sigma_f R^2}$$

8.5 เครื่องปฏิกรณ์แบบแผ่นขนาดอนันต์ที่ไม่มีตัวสะท้อนนิวตรอน

(Infinite bare slab reactor)

หมายถึงเครื่องปฏิกรณ์ที่ไม่มีตัวสะท้อนนิวตรอน เรียกแบร์รีแอคเตอร์ มีขนาดทางด้าน Y และ Z ใหญ่มากเมื่อเทียบกับด้าน X จะคิดว่าฟลักซ์ขึ้นกับระยะทาง X เพียงทิศทางเดียว



รูปที่ 8.1 แสดงเครื่องปฏิกรณ์แบบแผ่นขนาดอนันต์ ที่ไม่มีตัวสะท้อนนิวตรอน

* $\int x \sin ax\, dx = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x \cos ax}{a}$

พิจารณาเครื่องปฏิกรณ์แบบแผ่นขนาดอนันต์ที่ไม่มีตัวสะท้อนนิวตรอนมีความหนา a ดังรูปที่ 8.1 ใช้สมการของเครื่องปฏิกรณ์

$$\frac{d^2\varnothing}{dx^2} + B^2\varnothing = 0 \qquad \text{..... (8.24)}$$

x วัดจากจุดกึ่งกลางของแผ่น (slab)

การพิจารณาฟลักซ์ในเครื่องปฏิกรณ์ จะใช้สมการ (8.24) หาค่าฟลักซ์ โดยกำหนดเงื่อนไข (boundary condition) ดังนี้

(1) ฟลักซ์เป็นศูนย์ที่ระยะเอกซ์ทราโปเลชัน (extrapolation distance) นั่นคือ $\varnothing = 0$, เมื่อ $x = \frac{a}{2} + d$ และ $-\frac{a}{2} - d$, เพื่อให้ง่ายเข้า จะกำหนดให้ $d = 0$, โดยคิดว่า ในทางปฏิบัติ, d มีค่าน้อยกว่าขนาดของเครื่องปฏิกรณ์มาก ดังนั้นเงื่อนไขจึงเป็น

$$\varnothing\left(\frac{a}{2}\right) = \varnothing\left(-\frac{a}{2}\right) = 0 \qquad \text{..... (8.25)}$$

เนื่องจากลักษณะสมมาตรของเครื่องปฏิกรณ์ จึงไม่มีกระแสนิวตรอนไหลที่กึ่งกลางของแผ่นบางๆนี้และเนื่องจากความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนเป็นสัดส่วนกับค่าอนุพันธ์ของฟลักซ์ หมายความว่า

ที่ x = 0 ,

$$\frac{d\varnothing}{dx} = 0 \qquad \text{..... (8.26)}$$

สภาวะที่ให้ไว้ในสมการ (8.26) จึงตรงกับฟลักซ์ที่เป็นฟังก์ชันคู่, นั่นคือ

$$\varnothing(-x) = \varnothing(x) \qquad \text{..... (8.27)}$$

คำตอบของสมการ (8.24) คือ

$$\varnothing(x) = A\cos Bx + C\sin Bx \qquad \text{..... (8.28)}$$

และ

$$\frac{d\varnothing}{dx} = -AB\sin Bx + CB\cos Bx = 0 \qquad \text{..... (8.29)}$$

เมื่อ A และ C เป็นค่าคงที่, สมการ (8.29) เป็นไปได้เมื่อ C = 0

แทนค่า C ในสมการ (8.28), จะได้

$$\varnothing(x) = A\cos Bx$$

(2) ฟลักซ์ที่ $\frac{a}{2}$ และ $-\frac{a}{2}$ มีค่าไม่ต่างกัน เนื่องจากโคไซน์เป็นฟังก์ชันคู่

$$\varnothing\left(\frac{a}{2}\right) = A\cos\left(B\frac{a}{2}\right) = 0 \qquad . \ (8.30)$$

สมการนี้จะใช้ได้เมื่อ A = 0, หรือ

$$\cos\frac{Ba}{2} = 0 \qquad \text{..... (8.31)}$$

ตรงกับ B ที่มีค่าใดๆ ของ Bn, เมื่อ $Bn = \frac{n\pi}{a}$ ..... (8.32)
และ n เป็น อินทิเจอร์คี่ (odd integer)

ค่าคงที่ B_n เรียก ไอเกนแวลลู (eigen value) และฟังก์ชัน $\cos B_n x$ เรียก ไอเกนฟังก์ชัน เป็นการแสดงว่า ถ้าเครื่องปฏิกรณ์ที่พิจารณาไม่อยู่ในระบบวิกฤต ฟลักซ์จะเป็นผลรวมของไอเกนฟังก์ชันเหล่านั้น แต่ถ้าเครื่องปฏิกรณ์อยู่ในระบบวิกฤต ทุกฟังก์ชันเหล่านั้น ยกเว้นค่าแรกจะหายไปตามเวลา และฟลักซ์จะมีค่าคงที่อยู่ที่ไอเกนฟังก์ชันแรก นั่นคือ

$$\phi(x) = A \cos B_1 x = A \cos (\frac{\pi}{a} . x) \qquad ..... (8.33)$$

สมการนี้จะเป็นสมการของฟลักซ์ในเครื่องปฏิกรณ์วิกฤตแบบแผ่น

กำลังสองของค่าไอเกนต่ำสุด B_1^2 เรียก **บัคลิ้งของเครื่องปฏิกรณ์** เทอมนี้จะหาได้โดยการแก้สมการของฟลักซ์

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + B_1^2 \phi = 0 \qquad ..... (8.34)$$

ค่า B_1^2 ที่ได้คือ

$$B_1^2 = -\frac{1}{\phi} \frac{d^2\phi}{dx^2}$$

เทอมทางขวาเป็นค่าคงที่ เป็นสัดส่วนกับค่าความโค้งของฟลักซ์ในเครื่องปฏิกรณ์ การวัดขนาดความโค้งของฟลักซ์เรียก **บัคเคิล** (buckles), ในเครื่องปฏิกรณ์แบบแผ่นจะได้

$$B_1^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \qquad ..... (8.35)$$

การลดลงของค่าบัคเคิลเกิดขึ้นเมื่อขนาดความกว้าง a เพิ่มขึ้น และเมื่อ a มีค่าอนันต์ , $B_1^2 = 0$, ฟลักซ์จะคงที่และไม่มีบัคเคิล

การหาค่าฟลักซ์ จะต้องหาค่าคงที่ให้ได้ก่อน โดยพิจารณากำลัง (power) ที่ระบบนั้นทำงานอยู่ ไม่ใช่จากคุณสมบัติของสารที่ใช้

การหาค่าคงที่ จำเป็นต้องทราบค่ากำลังของเครื่องปฏิกรณ์ ถ้ากำหนดให้ปฏิกิริยาเกิดขึ้นที่จุด x คือ $\Sigma_f \phi(x)$ ฟิชชัน/ซม.^{3}/วินาที

เมื่อ Σ_f เป็นภาคตัดขวางมหัพภาคสำหรับการแบ่งแยกตัว และถ้าพลังงานที่ได้ออกมาคือ E_R จูล/ฟิชชัน ซึ่งมีค่าประมาณ 200 เอมอีวี/ฟิชชัน, นั่นคือ $E_R = 3.2 \times 10^{-11}$ จูล/ฟิชชัน ดังนั้น กำลังทั้งหมด/หน่วยพื้นที่ของแผ่นในหน่วยวัตต์/ซม.^{2} คือ

$$P = E_R \Sigma_f \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \phi(x)\, dx \qquad ..... (8.36)$$

แทนค่า $\phi(x)$ จากสมการ (8.33)

$$P = E_R \Sigma_f \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} A \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) dx$$

$$= E_R \Sigma_f \frac{a}{\pi} . A . \left[\sin \frac{\pi}{a} x \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}$$

$$= E_R \Sigma_f . \frac{a}{\pi} . A \left[\sin \frac{\pi}{a} . \frac{a}{2} - \sin - \frac{\pi}{a} . \frac{a}{2} \right]$$

$$= \frac{2 A . a \Sigma_f E_R}{\pi}$$

$$A = \frac{\pi P}{2 a E_R \Sigma_f} \qquad \text{..... (8.37)}$$

สมการสุดท้ายที่จะนำมาใช้สำหรับเทอร์มาลฟลักซ์ ในเครื่องปฏิกรณ์แบบแผ่น คือ

$$\phi(x) = \frac{\pi P}{2 a E_R \Sigma_f} . \cos \frac{\pi x}{a} \qquad \text{..... (8.38)}$$

8.6 ความสัมพันธ์ระหว่างบัคลิงที่ขึ้นกับวัสดุที่เป็นส่วนผสม (B^2_m) และบัคลิงที่ขึ้นกับรูปทรงเรขาคณิต (B^2_g)

เครื่องปฏิกรณ์จะดำเนินงานได้ เมื่อจำนวนนิวตรอนที่เกิดขึ้นในระบบเท่ากับจำนวนนิวตรอนที่หายไปจากระบบ เรียกว่า ทำงานในระบบวิกฤต จากการพิจารณาค่าบัคลิง พบว่า ค่าบัคลิงที่ขึ้นกับมวล มีความสัมพันธ์กับจำนวนเชื้อเพลิงที่เป็นส่วนผสมของเชื้อเพลิงในเครื่องปฏิกรณ์ และลักษณะรูปทรงเรขาคณิต มีผลต่อจำนวนนิวตรอนที่หายไปจากระบบโดยการรั่ว พิจารณาได้ดังนี้

กรณีที่ 1 เมื่อค่าตัวคูณ = 1 คือ

จำนวนนิวตรอนที่เกิดขึ้น = จำนวนนิวตรอนที่หายไป

ดังนั้น $B^2_m = B^2_g$

เมื่อ $B^2_m = \dfrac{\nu \Sigma_f - \Sigma_a}{D}$

สำหรับเครื่องปฏิกรณ์รูปทรงกลม

$$B^2_g = \left(\frac{\pi}{R}\right)^2 \qquad \text{..... (8.39)}$$

สำหรับเครื่องปฏิกรณ์รูปแบบแผ่น

$$B^2_g = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \qquad \text{..... (8.40)}$$

เมื่อ $$B_1^2 = \left(\frac{\pi}{R}\right)^2$$

และ $$\frac{k-1}{L^2} \qquad B_1^2$$

ดังนั้น $$R = \pi\sqrt{\frac{L^2}{k_\infty - 1}} \qquad (1)$$

อ่านค่าภาคตัดขวางจากตารางที่ 8.1, หาค่า

$$\Sigma_{aF} = 0.00395 \times 2.11 = 0.00833 \text{ ซม.}^{-1}$$

$$\Sigma_{aS} = 0.0234 \times 0.0008 = 0.000019 \text{ ซม.}^{-1}$$

$$\Sigma_a = \Sigma_{aF} + \Sigma_{as} = 0.00835$$

จาก $$f = \frac{\Sigma_{aF}}{\Sigma_a} = \frac{0.00833}{0.00835} \simeq 1$$

$$k_\infty = \eta f \simeq 2.61$$

หาค่า $$L^2 = \frac{D}{\Sigma_a} \text{ และ } D = \frac{\lambda_{tr}}{3} = \frac{1}{3\Sigma_{tr}}$$

เมื่อ Σ_{tr} คือ ภาคตัดขวางมหัพภาคสำหรับการนำพา
โดยการใช้ตารางที่ *8.1* เช่นกัน

$$\Sigma_{tr} = 0.00395 \times 6.8 + 0.0234 \times 3.3 = 0.104 \text{ ซม.}^{-1}$$

$$D = \frac{1}{3 \times 0.104} = 3.21 \text{ ซม.}$$

$$L^2 = \frac{3.21}{0.00835} = 384 \text{ ซม.}^2$$

แทนค่า k_∞ และ L^2 ในสมการ (1)

$$R = \sqrt{\frac{384}{2.61-1}} = 48.5 \text{ ซม.}$$

รัศมีที่จะทำให้เครื่องปฏิกรณ์อยู่ในระบบวิกฤต คือ 48.5 ซม.

เรียกว่าเครื่องปฏิกรณ์ทำงานในระบบวิกฤต (critical system)

กรณีที่ 2 เมื่อจำนวนนิวตรอนที่เกิดขึ้นมากกว่าจำนวนนิวตรอนที่รั่วออกไปจากระบบ เครื่องปฏิกรณ์จะอยู่ในภาวะ สูงกว่าวิกฤต (supercritical)

$$B^2_m > B^2_g$$

กรณีที่ 3 ถ้าจำนวนนิวตรอนที่เกิดขึ้นน้อยกว่าจำนวนนิวตรอนที่รั่วออกไปจากระบบ ทำให้จำนวนนิวตรอนลดน้อยลงไปเรื่อยๆ ตามเวลา เรียกว่า เครื่องปฏิกรณ์ ทำงานในระบบต่ำกว่าวิกฤต (subcritical)

$$B^2_m < B^2_g$$

ตารางที่ 8.2 แสดงบัคลิง และฟลักซ์ สำหรับเครื่องปฏิกรณ์ที่ไม่มีตัวสะท้อนนิวตรอนในระบบวิกฤต

ลักษณะทางเรขาคณิต	ขนาด	บัคลิง	ฟลักซ์	ค่าคงที่ A	Ømax 0 av
แผ่นขนาด ใหญ่มาก (Infinite slab)	หนา a	$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2$	$A\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)$	$\frac{1.57P}{aE_R\Sigma_f}$	1.57
ทรงกลม (Sphere)	รัศมี R	$\left(\frac{\pi}{R}\right)^2$	$\frac{A}{r}\sin\frac{\pi r}{R}$	$\frac{P}{4R^2E_R\Sigma_f}$	3.29
Rectangular Parallelepiped	ax b x c	$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{\pi}{c}\right)^2$	$A\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{c}\right)$	$\frac{3.87P}{VE_R\Sigma_f}$	3.88

ตัวอย่างที่ 8.1

จงคำนวณหาความหนาของเครื่องปฏิกรณ์ในสภาวะ วิกฤตที่มีทรงลูกบาศก์ มีพารามิเตอร์ดังต่อไปนี้ : $\eta = 2.08, p = 0.96, f = 0.79, \epsilon = 1.04, L^2_{th}, = 40.6$ ซม.^{2},
$£_f = 1.0, \Sigma_a = 0.074$ ซม.$^{-1}$
สมมุติให้เครื่องปฏิกรณ์มีขนาด (a x a x a)
เมื่อเครื่องปฏิกรณ์อยู่ในสภาวะวิกฤต

$$k_{eff} = 1 = k_\infty \, £_{th} £_f = \frac{k_\infty}{1 + B^2 L^2_{th}}$$

$$B^2_m = \frac{k_\infty - 1}{L^2_{th}} = \frac{\epsilon \, p \, f \, \eta - 1}{L^2_{th}}$$

$$= \frac{(1.04)(0.96)(0.79)(2.08) - 1}{40.6}$$

$$= 0.0158 \quad \text{ซม.}^{-2},$$

$$B_m = 0.1256 \quad \text{ซม.}^{-1}$$

$$B^2_g = 3\left(\frac{\pi}{a}\right)^2$$

เนื่องจากเครื่องปฏิกรณ์วิกฤต, ดังนั้น $B^2_m = B^2_g$

$$a = \left(\frac{\pi}{B_m}\right)\sqrt{3} = 4330 \quad \text{ซม.}$$

(a เป็นระยะทางที่รวมระยะทางเอกซ์ทราโปเลชั่น)

ขนาดจริงของเครื่องปฏิกรณ์ $a_o = a - 2d = a - 2(0.71)\,\lambda_{tr}$

เนื่องจาก $D = \frac{\lambda_{tr}}{3}$

$$= \frac{\lambda_{tr}}{3} \cdot \frac{\lambda_a}{\lambda_a} = \frac{L^2_{th}}{\lambda_a}$$

$$= L^2_{th}\Sigma_a = (40.6)(0.074)$$

$$= 3.01 \quad \text{ซม.}$$

$$\lambda_{tr} = 3 \times 3.01 = 9.03 \quad \text{ซม.}$$

ดังนั้น ขนาดจริงของเครื่องปฏิกรณ์ $a_o = 43 - 2(0.71)(9.03) = 30.2$ ซม.

ตัวอย่างที่ 8.2

จงคำนวณหาค่า $\frac{N^H}{N^{235}}$ เพื่อให้เครื่องปฏิกรณ์ทรงลูกบาศก์อยู่ในสภาวะวิกฤต แกน (core) ของเครื่องปฏิกรณ์ประกอบด้วยน้ำและยูเรเนียม -235 บริสุทธิ์ละลายอยู่ สมมุติว่าแกนอยู่ในอุณหภูมิห้อง ไม่มีตัวสะท้อน และไม่คิดการดูดกลืนในออกซิเจน, ด้านของเครื่องปฏิกรณ์ $a = 50$ ซม., $£_f = 0.70$, $\eta = 2.08$ $\sigma^H_a = 0.33$ บาร์น

เนื่องจากเครื่องปฏิกรณ์เป็นแบบเอกพันธ์ (น้ำ + ยูเรเนียม -235 บริสุทธิ์)

p และ ϵ จะมีค่าใกล้ 1 (ประมาณได้เท่ากับ 1)

$$f \quad = \quad = \frac{\Sigma_a^{235}}{\Sigma_a^{235} + \Sigma_a^{H}} \quad \frac{\sigma_a^{235}}{\sigma_a^{235} + \frac{N^H}{N^{235}} \cdot \sigma_a^{H}} = \frac{683}{683 + \frac{N^H}{N^{235}}(0.33)}$$

พยายามหาค่า f เพื่อจะได้ค่า $\frac{N^H}{N^{235}}$, โดยใช้

$$\pounds_{th} = \frac{1}{1 + B^2 . L^2_{th}}$$, (L^2_{th} จะเป็นพื้นที่การแพร่ของเชื้อเพลิงและตัวลดความเร็ว

ถ้าให้ λ_a = ทางเดินเฉลี่ยสำหรับการดูดกลืนนิวตรอนของเชื้อเพลิงและตัวลดความเร็ว (ไม่คิดการกระเจิงในยูเรเนียม -235), จะได้

$$L^2_{th} = \frac{\lambda_{tr}\lambda_a}{3} = \frac{1}{3\Sigma_{tr}.\Sigma_a} . \frac{\Sigma^H_a}{\Sigma^H_a} = \frac{1}{3\,\Sigma_{tr}.\Sigma^H_a} . \frac{\Sigma^H_a}{\Sigma_a}$$

$$= L^2_{mod}(1-f)$$

L^2_{mod} = พื้นที่ของการแพร่ของเทอร์มาลนิวตรอน (thermal diffusion length) สำหรับตัวลดความเร็วอย่างเดียว (ในน้ำ = 8.1 ซม.^{2})

$$\frac{\Sigma^H_a}{\Sigma_a} = (1 - f)$$

$$B^2 = 3\left(\frac{\pi}{a}\right)^2$$

$a = a_o + 2(0.7\,1)\,\lambda_{tr}$ และ λ_{tr} (ในน้ำ) = 0.43

$B^2 = 0.0116$ ซม.$^{-2}$

$$k_{eff} = k_\infty \pounds_f \pounds_{th} = \frac{\epsilon\, p\, \eta\, f\, \pounds_f}{1 + B^2 L^2_{mod}(1-f)} = 1$$

$$\frac{(1)\ (1)\ (2.08)\ (0.70)\ f}{1 + (0.0116)\,(8.1)\,(1-f)} = 1$$

$$f = 0.71$$

$$\frac{N^H}{N^{235}} = 590$$

$$\frac{N^{H20}}{N^{235}} = 295$$

ตัวอย่างที่ 8.3

จงคำนวณหา $\pounds_f$ สำหรับเครื่องปฏิกรณ์รูปทรงกลม รัศมี 1 เมตร ถ้าวัสดุที่ใช้เป็นกราฟไฟท์และยูเรเนียม -235 ในอัตราส่วนอะตอม = $\frac{1000}{1}$ (ไม่คิดการกระเจิงในยูเรเนียม -235)

$$\pounds_f = \frac{1}{1 + B^2 L_f^2}$$

$$L_f^2 = \frac{1}{3\Sigma_{tr}\Sigma_S} \frac{\ln \frac{E_o}{E_{th}}}{\xi}$$

สำหรับกราไฟท์, $\Sigma_S = 0.335$ ซม.$^{-1}$

และ A= 12 $\Sigma_{tr} = \Sigma_S (1- \cancel{3 \times 12}^{2}) = 0.335\,(1-\frac{2}{36})$

$$\ln \frac{E_o}{E_{th}} = \ln \left(\frac{2 \times 10^6}{0.025}\right) = 18.2$$

$$\xi = \frac{2}{12 + \frac{2}{3}} = 0.158$$

$$L_f^2 = \frac{1}{3(0.335)\,(0.335)\,(1 - \frac{2}{36})} \frac{18.2}{0.158}$$

$$= 364 \text{ ซม.}^2$$

$$\pounds_f = \frac{1}{1 + (\frac{\pi}{100})^2 (364)} = 0.736$$

ตัวอย่างที่ 8.4

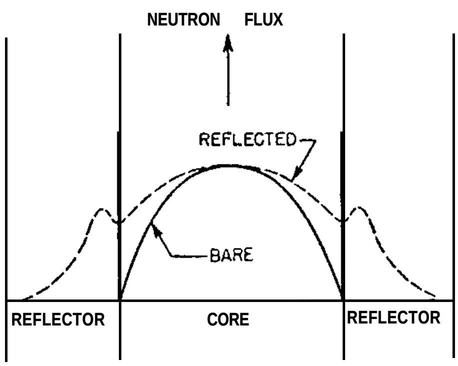
เครื่องปฏิกรณ์ชนิดที่ใช้นิวตรอนเร็วเข้าทำปฏิกิริยา ประกอบด้วยส่วนผสมของพลูโต-เนียม-239 และโซเดียม ผสมเป็นเนื้อเดียวกัน ถูกทำให้อยู่ในรูปทรงกลม ที่ไม่มีตัวสะท้อนนิวตรอน ความหนาแน่นอะตอมของพลูโตเนียม-239 คือ N_F เท่ากับ 0.00395×10^{24} สำหรับโซเดียมคือ N_S เท่ากับ 0.0234×10^{24} จงหารัศมีที่จะทำให้เครื่องปฏิกรณ์อยู่ในระบบวิกฤต

8.7 เครื่องปฏิกรณ์แบบที่มีตัวสะท้อนนิวตรอน

(The reflected reactor)

เป็นที่น่าสังเกตว่า เครื่องปฏิกรณ์ที่มีตัวสะท้อนนิวตรอน ทำให้ขนาดวิกฤตของเครื่องปฏิกรณ์ลดลงได้ เพราะตัวสะท้อนจะสะท้อนนิวตรอนให้กลับเข้ามายังเครื่องปฏิกรณ์ได้อีก ตัวเลขที่แสดงถึงประสิทธิภาพของตัวสะท้อนนิวตรอนวัดได้ด้วยค่า **อัลบีโด** (Albedo)

ในการเปรียบเทียบนิวตรอนฟลักซ์สำหรับเครื่องปฏิกรณ์ที่ไม่มีตัวสะท้อนนิวตรอน (bare reactor) กับเครื่องปฏิกรณ์ที่มีตัวสะท้อนนิวตรอน (reflected reactor) จะเห็นว่าในเครื่องปฏิกรณ์ที่มีตัวสะท้อนนิวตรอนนั้น นิวตรอนฟลักซ์จะมีรูปแบบในบริเวณใกล้แกนซึ่งเป็นบริเวณที่ให้ค่าฟลักซ์สูงสุด

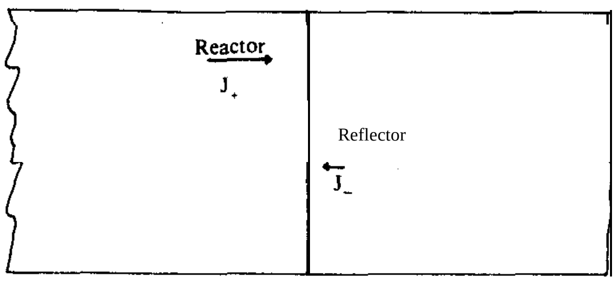


รูปที่ 8.2 แสดงการกระเจิงของเทอร์มาลนิวตรอนฟลักซ์ในเครื่องปฏิกรณ์ชนิดไม่มีตัวสะท้อนนิวตรอน และมีตัวสะท้อนนิวตรอน

ในการใช้ตัวสะท้อนนิวตรอนที่มีเลขมวลต่ำ จะทำให้นิวตรอนเร็วมีพลังงานลดลงจนเป็นเทอร์มาลนิวตรอนอย่างรวดเร็ว แทนที่นิวตรอนเหล่านี้จะหนีออกไปจากระบบ, จะสะท้อนเข้ามายังแกนของเครื่องปฏิกรณ์อีก นิวตรอนฟลักซ์ที่อยู่นอกแกนของเครื่องปฏิกรณ์จึงมีค่ามากกว่าในแกนของเครื่องปฏิกรณ์ที่ไม่มีตัวสะท้อนนิวตรอน

8.8 การหาค่าอัลบีโดสำหรับตัวสะท้อนนิวตรอนที่มีขนาดอนันต์

การสูญเสียนิวตรอนจากเครื่องปฏิกรณ์ อาจทำให้มีค่าน้อยที่สุดได้โดยการล้อมรอบด้วยวัสดุที่มีคุณสมบัติในการสะท้อนนิวตรอน เรียก **ตัวสะท้อน** (reflector) ซึ่งสามารถกระเจิงนิวตรอนให้กลับเข้ามายังเครื่องปฏิกรณ์ได้อีกแทนที่จะหายไป มักกล่าวในเทอม **อัลบีโด** (Albedo) หมายถึง **อัตราส่วนของจำนวนนิวตรอนที่สะท้อนกลับต่อจำนวนนิวตรอนที่ผ่านเข้าไปยังตัวสะท้อน**



รูปที่ 8.3 แสดงทิศทางของกระแสนิวตรอนในเครื่องปฏิกรณ์ และในตัวสะท้อนนิวตรอน

ถ้า J_+ และ J_- เป็นกระแสนิวตรอนในทิศทางบวก และทิศทางลบ ตรงผิวที่ติดต่อกับตัวสะท้อน จากสมการทั่วไปของกระแสนิวตรอน

$$J_- = \frac{\phi}{4} + \frac{D}{2}\frac{d\phi}{dx}$$

$$J_+ = \frac{\phi}{4} - \frac{D}{2}\frac{d\phi}{dx}$$

อัลบีโด $= \dfrac{J_-}{J_+} = \dfrac{\dfrac{\phi}{4} + \dfrac{D}{2}\dfrac{d\phi}{dx}}{\dfrac{\phi}{4} - \dfrac{D}{2}\dfrac{d\phi}{dx}}$ (8.41)

สำหรับฟลักซ์จากตัวกำเนิดแบบระนาบ คือ

$$\phi = A e^{-Kx}$$

เมื่อ $K = \frac{1}{L}$

$$\frac{d\phi}{dx} = - K A e^{-Kx}$$

แทนค่า ϕ และ $\frac{d\phi}{dx}$ ในสมการ *(8.41)*

$$\text{อัลบีโด} = \frac{\frac{A}{4} e^{-Kx} - \frac{D}{2} K.A e^{-Kx}}{\frac{A}{4} e^{-Kx} + \frac{D}{2} KA e^{-Kx}}$$

หารตลอดด้วย $\frac{A}{2} e^{-Kx}$, จะได้

$$\text{อัลบีโด} = \frac{\frac{1}{2} - DK}{\frac{1}{2} + DK} = \frac{1 - 2DK}{1 + 2DK} \quad \text{.. (8.42)}$$

8.9 เครื่องปฏิกรณ์รูปทรงกลมที่มีตัวสะท้อนนิวตรอน

กำหนดให้เครื่องปฏิกรณ์รูปทรงกลมรัศมี R , ล้อมรอบด้วยตัวสะท้อนขนาดอนันต์ ในการวิเคราะห์ จะกำหนดให้ตัวพารามิเตอร์ที่ใช้กับแกนและตัวสะท้อนนิวตรอนมีอักษรข้างใต้ c และ r ตามลำดับ

ตามทฤษฎีที่กำหนดให้นิวตรอนมีเพียงพวกเดียว ถ้า ϕ_c เป็นฟลักซ์ที่แกน, ใช้สมการ

$$\nabla^2 \phi_c + B^2 \phi_c = 0 \quad \text{..... (8.43)}$$

$$B^2 = \frac{k_\infty - 1}{L_c^2} \quad \text{..... (8.44)}$$

เนื่องจากไม่มีเชื้อเพลิงในตัวสะท้อนนิวตรอน, ฟลักซ์ในเขตนี้จึงเป็นไปตามสมการการแพร่ของนิวตรอนพลังงานเดียว

$$\nabla^2 \phi_r - K_r^2 \phi_r = 0 \quad \text{..... (8.45)}$$

ในการหาค่าฟลักซ์ตลอดทั้งเครื่องปฏิกรณ์ และสภาวะสำหรับการเกิดวิกฤต จำเป็นต้องแก้สมการ (8.43) และ (8.45), สมการสำหรับ ϕ_c และ ϕ_r ขึ้นกับเงื่อนไข คำตอบทั่วไป (general solution) สำหรับสมการ (8.43) คือ

$$\phi_c = \frac{A_1 \sin Br}{r} + \frac{A_2 \cos Br}{r}$$

เมื่อ A_1 และ A_2 เป็นค่าคงที่,

เงื่อนไขคือ

(1) ฟลักซ์ที่แกนจะต้องหาค่าได้ (finite), ไม่เป็นอนันต์ ดังนั้นที่จุดศูนย์กลางของเครื่องปฏิกรณ์ ($r = 0$) จึงต้องไม่เป็นค่าอนันต์, c จึงต้องเป็นศูนย์ ฟลักซ์ที่แกนเขียนได้ดังนี้

$$0_c = \frac{A, \sin Br}{r} \qquad (8.46)$$

สมการทั่วไปของสมการ (8.45) คือ

$$\varnothing_r = \frac{A_3 e^{Kr}}{r} \quad \frac{A, e^{-Kr}}{r}$$

เมื่อ A_3 และ A_4 เป็นค่าคงที่, และ

(2) ฟลักซ์ในเขตที่มีตัวสะท้อนนิวตรอน ยังคงหาค่าได้เมื่อระยะทาง r มีค่าเข้าใกล้อนันต์ ดังนั้น A_3 จะต้องเท่ากับศูนย์, ฟลักซ์ในเขตที่มีตัวสะท้อนนิวตรอน จึงเหลือเป็น

$$0 = \frac{A_4 e^{-Kr}}{r} \qquad (8.47)$$

ฟังก์ชัน $\varnothing_c$ และ $\varnothing_r$ เป็นไปตามเงื่อนไข

(3) การต่อเนื่องของนิวตรอนฟลักซ์และกระแสนิวตรอนที่ตรงรอยต่อระหว่างแกนและตัวสะท้อน (Core-reflector interface) คือที่ $r = R$, เขียนได้ว่า

$$\varnothing_c(R) = \varnothing_r(R) \qquad ..... (8.48)$$

และ

$$J_c(R) = J_r(R)$$

หรือ

$$D_c \varnothing'_c(R) = D_r \varnothing'_r(R) \qquad ..... (8.49)$$

แทนค่าสมการ (8.46) และ (8.47) ในสมการ (8.48) , จะได้

$$\frac{A, \sin BR}{R} = \frac{A}{R} \quad , \qquad (8.50)$$

หาอนุพันธ์ของสมการ (8.46) และ (8.47) และใส่ผลที่ได้ในสมการ (8.49) จะได้

$$A_1 D_c \left(\frac{B \cos BR}{R} - \frac{\sin BR}{R^2} \right) = -A_4 D_r \left(\frac{K_r}{R} + \frac{1}{R^2} \right) e^{-K_r R} \qquad (8.51)$$

$$D_c \left(B \cot BR - \frac{1}{R}\right) = -D_r\left(K_r + \frac{1}{R}\right)$$

จัดรูปสมการใหม่, จะได้

$$BR \cot BR - 1 = -\frac{D_r}{D_c}(K_r R + 1)$$

กรณีที่ $D_r = D_c$

เมื่อ $K_r = \frac{1}{L}$. $\tan BR = -\frac{B}{K_r}$

8.10 เครื่องปฏิกรณ์แบบแผ่นที่มีตัวสะท้อนนิวตรอน

กรณีที่เครื่องปฏิกรณ์เป็นแบบแผ่นและมีตัวสะท้อนนิวตรอน จะแยกพิจารณาการแพร่ของนิวตรอนบริเวณแกนและบริเวณที่มีตัวสะท้อน สมการการแพร่สำหรับแกนและตัวสะท้อน คือ

$$\nabla^2 \varnothing_c + B^2 \varnothing_c = 0 \qquad \text{..... (8.52)}$$

เมื่อ $$B^2 = \frac{k_\infty - 1}{L^2}$$

และเนื่องจากไม่มีการแบ่งแยกตัวเกิดในตัวสะท้อนนิวตรอน

$$\nabla^2 \varnothing_r + K_r^2 \varnothing_r = 0 \qquad \text{..... (8.53)}$$

เมื่อ $K_r = \frac{1}{L_r}$,และ

L_r เรียก ความยาวของการแพร่ของนิวตรอน สำหรับตัวสะท้อนนิวตรอน มีค่า $L_r^2 = \frac{D_r}{\Sigma_{ar}}$

คำตอบของสมการ (8.52) และ (8.53) คือ

$$\varnothing_c(x) = A_c \sin (B_c x) + C_c \cos (B_c x) \qquad \text{..... (8.54)}$$

$$\varnothing_r(x) = A_r e^{-K_r x} + C_r e^{K_r x} \qquad \text{..... (8.55)}$$

ฟลักซ์มีลักษณะสมมาตร, $A_c = 0$ สมการ (8.54) เขียนได้ว่า

$$\varnothing_c(x) = C_c \cos (B_c x) \qquad \text{..... (8.56)}$$

เงื่อนไข (Boundary condition) คือ

(1) ฟลักซ์ต้องมีค่าแน่นอน (finite) ณ ตำแหน่งใดๆ, C_r จึงต้องเท่ากับศูนย์ สมการ (8.55) จึงเขียนได้ว่า

$$\varnothing_r(x) = A_r e^{-K_r x} \qquad \text{..... (8.57)}$$

(2) ฟลักซ์ที่ตรงรอยต่อระหว่างแกน และตัวสะท้อน (interface) ต้องมีค่าเท่ากัน, ดังนั้น

$$\phi_c(\frac{a}{2}) = \phi_r(\frac{a}{2})$$

ที่ $x = \frac{a}{2}$,
$$C_c \cos(B_c \frac{a}{2}) = A_r e^{K_r \frac{a}{2}} \qquad (8.58)$$

และ

(3) กระแสนิวตรอนที่ตรงรอยต่อระหว่างแกนและตัวสะท้อน ต้องมีค่าเท่ากัน, นั่นคือ

$$(J_c)_{\frac{a}{2}} = (J_r)_{\frac{a}{2}}$$

โดยใช้กฎของฟิค

$$J = -D\frac{d\phi}{dx}$$, จะได้

$$D_c(\frac{d\phi_c}{dx})_{\frac{a}{2}} = D_r(\frac{d\phi_r}{dx})_{\frac{a}{2}} \qquad \text{..... (8.59)}$$

จากสมการ (8.56)
$$\phi_c = C_c \cos B_c x$$

$$\frac{d\phi_c}{dx} = -C_c B_c \sin B_c x \qquad \text{..... (8.60)}$$

และจากสมการ (8.57)

$$\frac{d\phi_r}{dx} = -K_r A_r e^{-K_r x} \qquad \text{..... (8.61)}$$

แทนสมการ (8.60), (8.61) ลงในสมการ (8.59) แล้วแทนค่า x ด้วย $\frac{a}{2}$, จะได้

$$D_c C_c B_c \sin B_c x \frac{a}{2} = D_r K_r A_r \cdot e^{-K_r \frac{a}{2}}$$

สมการ $\frac{(8.62)}{(8.58)}$ กรณีที่ $D_r = D_c$ จะได้

$$\tan(B_c \frac{a}{2}) = \frac{K_r}{B_c} \qquad \text{..... (8.63)}$$

8.11 ค่าสูงสุดต่อค่าเฉลี่ยของฟลักซ์และกำลัง

(Maximum to average flux and power)

ค่าสูงสุดของฟลักซ์คือ ϕ_{max}. ในเครื่องปฏิกรณ์ที่ไม่มีตัวสะท้อนนิวตรอนและมีส่วนประกอบสม่ำเสมอ พบได้ที่จุดกึ่งกลางของเครื่องปฏิกรณ์ เนื่องจากกำลังที่เกิดขึ้นมีหน่วยเป็นวัตต์ ต่อลูกบาศก์เซนติเมตร ความหนาแน่นของกำลัง (power density) เป็นสัดส่วนกับฟลักซ์ หมายความว่า กำลังจะมีค่าสูงสุดที่จุดกึ่งกลาง น่าสนใจที่จะหาอัตราส่วนของ ค่าฟลักซ์สูงสุดต่อค่าเฉลี่ยของฟลักซ์ตลอดทั้งเครื่องปฏิกรณ์ อัตราส่วนนี้แทนได้ด้วยสัญลักษณ์ Ω เป็นเครื่องชี้ให้เห็นขนาดของกำลังสูงสุดต่อกำลังเฉลี่ยในเครื่องปฏิกรณ์ด้วย

พิจารณากรณีของเครื่องปฏิกรณ์รูปทรงกลมที่ไม่มีตัวสะท้อนนิวตรอน หาค่าฟลักซ์สูงสุดได้, เมื่อระยะทาง r เข้าใกล้ศูนย์ ;

$$\phi_{max} = \frac{P}{4 E_R \Sigma_f R^2} \lim_{r \to 0} \frac{\sin \frac{\pi}{R} \cdot r}{r}$$

โดยการใช้ทฤษฎี แอล ฮอสปิตัล (L'hospital theorem) , จะได้

$$\varnothing_{max} = \frac{\pi P}{4 E_R \Sigma_f R^3} \quad ..... (8.64)$$

ค่าเฉลี่ยของฟลักซ์ คือ

$$\varnothing_{av} = \frac{1}{V} \int \varnothing \, dV \quad ..... (8.65)$$

เป็นการหาค่าอินทิกรัลทั่วทั้งปริมาตรของทรงกลม

อย่างไรก็ตามการอินทิกรัลนี้จะเป็นสัดส่วนกับกำลังของเครื่องปฏิกรณ์, นั่นคือ

$$P = E_R \Sigma_f \int \varnothing \, dV$$

และดังนั้น

$$\varnothing_{av} = \frac{P}{E_R \Sigma_f V} \quad ..... (8.66)$$

ผลที่ได้จะใช้ได้สำหรับทุกรูปทรงเรขาคณิต

สมการ (8.64) หารด้วยสมการ (8.66), จะได้ผลสำหรับเครื่องปฏิกรณ์รูปทรงกลมคือ

$$\Omega = \frac{\varnothing_{max}}{\varnothing_{av}} = \frac{\pi^2}{3} = 3.29 \quad ..... (8.67)$$

ค่าของ Ω สำหรับรูปทรงเรขาคณิตอื่นๆ ก็จะหาได้โดยวิธีเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 8.5

เครื่องปฏิกรณ์รูปทรงกลม ไม่มีตัวสะท้อน รัศมี 50 เซนติเมตร ทำงานด้วยกำลัง 100 เมกะวัตต์, ถ้า $\Sigma_f = 0.0047$ ซม.$^{-1}$ จงหาค่าสูงสุด และค่าเฉลี่ยของฟลักซ์ในเครื่องปฏิกรณ์

ค่าฟลักซ์สูงสุดคือ $\varnothing_{max} = \frac{\pi P}{4 E_R \Sigma_f R^3}$

แทนค่าตัวเลขจะได้

$$\varnothing_{max} = \frac{\pi \cdot 10^8}{4 \times 3.2 \times 10^{-11} \times 0.0047\,(50)^3}$$

$$= 4.18 \times 10^{15} \text{ นิวตรอน/ซม.}^3\text{/วินาที}$$

ค่าเฉลี่ยของฟลักซ์ หาได้จาก

$$\Omega = \frac{\varnothing_{max}}{\varnothing_{av}}$$

$$\varnothing_{av} = \frac{\varnothing_{max}}{\Omega} = \frac{4.18 \times 10^{15}}{3.29}$$

$$= 1.27 \times 10^{15} \text{ นิวตรอน/ซม.}^2\text{/วินาที}$$

8.12 การหาความแรงของรังสีหลังจากเครื่องปฏิกรณ์เลิกทำงาน

(shut down)

ความแรงของรังสีที่ส่งออกมาจากผลที่เกิดจากการแบ่งแยกตัวจะถูกสะสมขณะที่เครื่องปฏิกรณ์กำลังทำงาน จึงต้องระวังอย่างรอบคอบเพื่อไม่ให้รังสีที่เกิดขึ้นกระจายสู่ภายนอก นอกจากนี้ยังมีความร้อนที่ถูกปล่อยออกมาจากการสลายของธาตุที่เกิดจากการแบ่งแยกตัว จึงต้องทำให้เย็นหลังจากการดับเครื่องแล้ว เพื่อป้องกันอันตรายที่จะเกิดจากเชื้อเพลิง จึงมีการคำนวณความแรงของรังสีเมื่อเวลาผ่านไปหลังจากดับเครื่องแล้ว

การสลายของธาตุซึ่งเป็นผลจากการแบ่งแยกตัว นับว่าเป็นการยุ่งยากเพราะมีธาตุเกิดขึ้นมากมาย แต่ละธาตุที่เกิดขึ้นก็จะมีครึ่งชีวิต และวิธีการสลายของมันเอง อย่างไรก็ตามอาจประมาณการสลายของธาตุเหล่านั้นได้ เป็นการหาอัตราการสลายของรังสีเบตาและรังสีแกมมาที่อยู่ในระยะเวลา 10 วินาทีแรก จนถึงหลายๆ สัปดาห์หลังจากการเกิดแบ่งแยกตัว

อัตราการส่งรังสีเบตา $\cong 3.8 \times 10^{-6} t^{-1.2}$ รังสีเบตา/วินาที.

อัตราการส่งรังสีแกมมา $\cong 1.9 \times 10^{-6} t^{-1.2}$ รังสีแกมมา/วินาที

เมื่อ t เป็นเวลาหลังจากเกิดแบ่งแยกตัวเป็นวัน

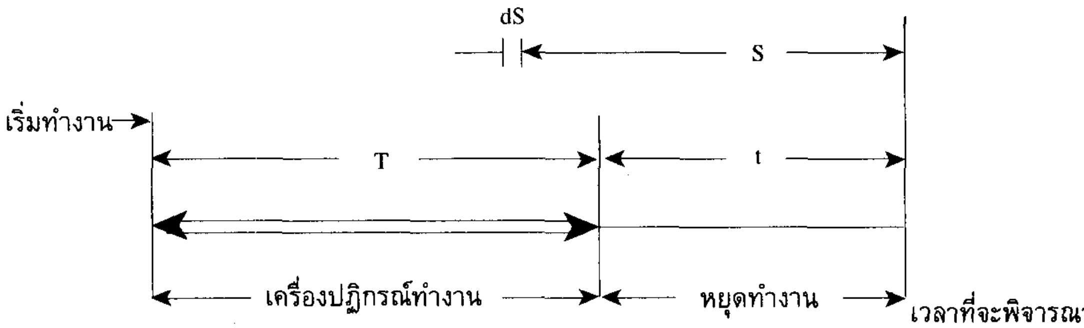
อัตราการสลายในหน่วยคูรี่ หาได้จาก

$$\text{ความแรงจากผลที่เกิดจากการแบ่งแยกตัว} = \frac{3.8 \times 10^{-6} t^{-1.2}}{3.7 \times 10^{10}}$$

$$= 1.03 \times 10^{-16} t^{-1.2} \text{ คูรี} \qquad \text{..... (8.68)}$$

กรณีที่เครื่องปฏิกรณ์ทำงานด้วยกำลัง P เมกะวัตต์ เป็นเวลานาน T วัน แล้วจึงหยุด (shut down) ต้องการหาความแรงของรังสีจากผลที่เกิดจากการแบ่งแยกตัว เมื่อเวลา t วันต่อมาหลังจากการหยุดทำงานจำเป็นต้องอินทิเกรตสมการ (8.68) ตลอดระยะเวลา

ถ้ากำหนดให้ S เป็นระยะเวลาเมื่อเกิดแบ่งแยกตัวเป็นวันจนถึงเวลาที่จะวัดความแรงของฟิชชัน แฟลกเมนท์ จำเป็นต้องรวมความแรงจากผลที่เกิดจากการแบ่งแยกตัว ตลอดระยะเวลา S ตามรูปที่ 8.4



รูปที่ 8.4 แสดงการคำนวณความแรงของรังสีจากผลที่เกิดจากการแบ่งแยกตัว

จะเห็นว่า ถ้าเครื่องปฏิกรณ์ทำงานด้วยกำลัง P เมกะวัตต์

อัตราการเกิดแบ่งแยกตัวทั้งหมด = 2.7×10^{21} ฟิชชัน/วัน (จากตัวอย่างที่ 6.4)

จำนวนการแบ่งแยกตัวที่เกิดในระยะเวลา dS คือ 2.7×10^{21} P dS ฟิชชัน

จากสมการ (8.68) , ความแรงในเวลา S วันต่อมา คือ

$$2.7 \times 10^{21}\, P\, dS \times 1.03 \times 10^{-16} S^{-1.2} = 0.28 \times 10^{6} P\, S^{-1.2} dS \quad \text{คูรี}$$

ความแรงเมื่อเวลา t จึงเป็นดังนี้

ความแรงของรังสีจากผลที่เกิดจากการแบ่งแยกตัว $= 0.28 \times 10^{6} P \int_{t}^{t+T} S^{-1.2} dS$

$$= 1.4 \times 10^{6} P\, [t^{-0.2} - (t+T)^{-0.2}] \quad \text{คูรี} \qquad \ldots(8.69)$$

สมการ (8.69) เป็นสมการที่ใช้คำนวณหาความแรงของแท่งเชื้อเพลิงแท่งเดียวที่อยู่ในเครื่องปฏิกรณ์นาน T วัน และนำออกมา ในกรณีนี้, P เป็นกำลังที่เกิดจากเชื้อเพลิงเป็นเมกะวัตต์ และ t เป็นเวลาในหน่วยวัน ที่นำเชื้อเพลิงออกจากเครื่องปฏิกรณ์

เป็นการยากที่จะคำนวณพลังงานทั้งหมดที่ถูกปล่อยออกมาจากฟิชชันโพรดัค เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของสเปคตรัมของพลังงานที่ส่งออกมาขณะที่นิวไคลด์มีการสลาย ประมาณอย่างง่ายๆ จะได้ค่ารังสีเบตาและรังสีแกมมาประมาณ 0.4 เอมอีวี และ 0.7 เอมอีวี ตามลำดับ อัตราการส่งพลังงานจากการสลายของฟิชชันโพรดัค คือ

พลังงานการสลายที่ส่งออกมา $\cong 2.8 \times 10^{-6} t^{-1.2}$ เอมอีวี/วินาที

เมื่อ t มีหน่วยเป็นวัน

ตัวอย่างที่ 8.6

เครื่องปฏิกรณ์ที่ประกอบด้วยแท่งเชื้อเพลิง 120 แท่ง หลังจากที่ทำงานด้วยกำลัง 100 เมกะวัตต์ ในเวลา 1 ปี จึงเอาแท่งเชื้อเพลิงออก สมมุติว่า แต่ละแท่งให้กำลังได้หมด

ให้หาความแรงของแท่งเชื้อเพลิงหลังจากนำออกมา 1 วัน

ใช้สมการ (8.69) เมื่อ

$P = 100,\ t = 1,\ t + T = 1 + 365 = 366$

ความแรงของเชื้อเพลิงทั้งหมดหลังจากที่นำออกมาจึงเป็นดังนี้

$$1.4 \times 10^6 \times 100\ [(1)^{-0.2} - (366)^{-0.2}] = 1.4 \times 10^8 (1 - 0.307)$$

$$= 9.7 \times 10^7 \text{ คูรี}$$

แท่งหนึ่งจะมีความแรง $= \dfrac{9.7 \times 10^7}{120}$

$$= 8.1 \times 10^5 \text{ คูรี}$$

สรุป

1. สมการกลุ่มเดี่ยวสำหรับเครื่องปฏิกรณ์แบบไม่มีตัวสะท้อนนิวตรอน คือ

$$\nabla^2\phi + B^2\phi = 0$$

เมื่อ $B^2 = \frac{k_\infty - 1}{L^2}$

2. ฟลักซ์ ณ ตำแหน่งใดๆ ในเครื่องปฏิกรณ์ ที่ไม่มีตัวสะท้อนนิวตรอน ที่อยู่ในสภาวะวิกฤต หาได้ดังนี้

2.1 สำหรับเครื่องปฏิกรณ์รูปทรงกลมรัศมี R

ฟลักซ์ ณ ตำแหน่ง r คือ $\phi(r) = \frac{P}{4 E_R \Sigma_f R^2} \frac{\sin \frac{\pi r}{R}}{r}$

เมื่อ P คือ กำลังของเครื่องปฏิกรณ์

E_R คือ พลังงานที่เกิดจากการแบ่งแยกตัว มีหน่วยเป็น จูล ต่อ 1 ฟิชชัน

Σ_f คือ ภาคตัดขวางมหัพภาคสำหรับการเกิดปฏิกิริยาแบ่งแยกตัว

2.2 สำหรับเครื่องปฏิกรณ์แบบแผ่นขนาดกว้าง a , ไม่มีตัวสะท้อนนิวตรอน ฟลักซ์ ณ ตำแหน่ง x

คือ $\phi(x) = \frac{\pi P}{2 a E_R \Sigma_f} \cos \frac{\pi x}{a}$

3. เมื่อเครื่องปฏิกรณ์อยู่ในระบบวิกฤต จะได้ $B_m^2 = B_g^2$

เมื่อ $B_m^2 = \left(\frac{\pi}{R}\right)^2$, สำหรับเครื่องปฏิกรณ์รูปทรงกลม

$B_m^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$, สำหรับเครื่องปฏิกรณ์แบบแผ่น

และ $B_m^2 = \frac{k_\infty - 1}{L^2}$

4. ความสามารถของสารที่จะสะท้อนนิวตรอน หรืออัลบีโด หมายถึง อัตราส่วนระหว่างจำนวนนิวตรอนที่จะสะท้อนกลับต่อจำนวนนิวตรอนที่ผ่านเข้าไปยังตัวสะท้อน

$$\text{อัลบีโด} = \frac{J_-}{J_+} = \frac{\frac{\phi}{4} + \frac{D}{2}\frac{d\phi}{dx}}{\frac{\phi}{4} - \frac{D}{2}\frac{d\phi}{dx}}$$

5. ฟลักซ์สูงสุดต่อฟลักซ์เฉลี่ย

สำหรับเครื่องปฏิกรณ์รูปทรงกลม = 3.29

สำหรับเครื่องปฏิกรณ์แบบแผ่นขนาดอนันต์ = 1.57

แบบฝึกหัด

8.1 จงแสดงการหาฟลักซ์ ณ ตำแหน่งใดๆ ในเครื่องปฏิกรณ์ที่ไม่มีตัวสะท้อนนิวตรอน โดยกำหนดให้นิวตรอนมีพลังงานเดียว

8.2 ให้ความหมายของอัลบีโด, และจงหาค่า อัลบีโด จากข้อมูลต่อไปนี้

ธาตุ หรือ สารประกอบ	L (ซม.)	λ_{tr} (ซม.)
H_2O	2.88	0.426
D_2O	100.00	2.4
Be	23.6	2.1
C	50.0	2.71
BeO	30.0	1.65

8.3 จงแสดงการหาค่าอัลบีโด สำหรับเครื่องปฏิกรณ์แบบแผ่นขนาดใหญ่มาก

8.4 โดยการใช้สมการการแพร่ เมื่อเครื่องปฏิกรณ์อยู่ในระบบวิกฤต และไม่มีตัวสะท้อนนิวตรอน, จงแสดงการหาค่าฟลักซ์ที่ตำแหน่งใดๆ พร้อมทั้งเงื่อนไข (Boundary condition) ที่ใช้ สำหรับ

(ก) เครื่องปฏิกรณ์แบบแผ่นขนาดอนันต์

(ข) เครื่องปฏิกรณ์รูปทรงกลม

8.5 โดยการใช้ทฤษฎีการแพร่เช่นกัน, เมื่อเครื่องปฏิกรณ์อยู่ในระบบวิกฤต สำหรับเครื่องปฏิกรณ์ที่มีตัวสะท้อนนิวตรอน

(ก) จงแสดงสมการของฟลักซ์ที่แกนและที่ตัวสะท้อน

(ข) แสดงเงื่อนไขที่ใช้

เมื่อเครื่องปฏิกรณ์เป็นรูปทรงกลม และเป็นแบบแผ่น

8.6 ฟลักซ์สำหรับเครื่องปฏิกรณ์รูปทรงกลมที่ไม่มีตัวสะท้อนนิวตรอน คือ

$$\o(r) = \frac{P}{4 E_R \Sigma_f R^2} \frac{\sin \frac{\pi r}{R}}{r}$$

จงหา ค่าฟลักซ์ที่มีค่าสูงสุด และค่าเฉลี่ยของฟลักซ์ ในเครื่องปฏิกรณ์นี้

8.7 จงแสดงการหาค่าฟลักซ์ที่มีค่าสูงสุดต่อค่าฟลักซ์เฉลี่ยสำหรับเครื่องปฏิกรณ์แบบแผ่นที่ไม่มีตัวสะท้อนนิวตรอน

8.8 จงคำนวณหาขนาดวิกฤต สำหรับเครื่องปฏิกรณ์รูปทรงกลมที่ไม่มีตัวสะท้อนนิวตรอนซึ่งมียูเรเนียม -235 เป็นเชื้อเพลิง

กำหนด $\nu = 2.11$, $\Sigma_f = 0.1$ ซม.$^{-1}$

$\sigma_s = 4$ บาร์น,

ความหนาแน่นของยูเรเนียม -235 = 18.9 กรัม/ซม.^{3}