บทที่ 5
สมการการแพร่
(DIFFUSION EQUATION)

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาบทนี้แล้วจะสามารถ

1. นำสมการการแพร่มาใช้ในการหาฟลักซ์นิวตรอน ณ ตำแหน่งต่างๆ ได้ ไม่ว่าต้นกำเนิดนิวตรอนจะเป็นจุดกำเนิดหรือเป็นต้นกำเนิดแบบระนาบ
2. สามารถนำขอบเขตเงื่อนไขมาใช้เพื่อหาสมการของฟลักซ์ ณ ตำแหน่งต่างๆ ได้
3. คำนวณหาความยาวของการแพร่ได้

5.1 การสมดุลของนิวตรอนในเครื่องปฏิกรณ์

เครื่องปฏิกรณ์นิวเคลียร์จะเกิดปฏิกิริยาลูกโซ่ต่อไปได้เรื่อยๆ จำเป็นต้องมีมวลของวัสดุที่ทำให้เกิดการแบ่งแยกตัวได้มากพอจนถึงขนาดของมวลวิกฤต การที่จะหาขนาดวิกฤตของเครื่องปฏิกรณ์ได้จะต้องพิจารณาการสมดุลของนิวตรอนในเครื่องปฏิกรณ์นั้น คือจะพิจารณานิวตรอนที่เกิดขึ้นจากปฏิกิริยาการแบ่งแยกตัว, นิวตรอนที่เกิดขึ้นเหล่านี้ บางตัวก็จะหายไปจากเครื่องปฏิกรณ์ โดยการหนีหรือการรั่ว (leakage) ออกไปจากเครื่องปฏิกรณ์ บางตัวก็จะถูกดูดกลืนโดยวัสดุที่ไม่เกิดปฏิกิริยาการแบ่งแยกตัว (nonfission) ดังนั้น จึงมีนิวตรอนบางตัวเท่านั้นที่จะเกิดปฏิกิริยาแบ่งแยกตัวต่อไปได้อีก

สมการการสมดุลของนิวตรอน อาจเขียนได้ดังนี้

อัตราการเปลี่ยนแปลงจำนวนนิวตรอน ต่อ 1 หน่วยปริมาตร	=	อัตราการเกิดนิวตรอนโดยการแบ่งแยกตัว ต่อ 1 หน่วยปริมาตร	- อัตราการสูญเสียนิวตรอนโดยการดูดกลืนและการรั่ว ต่อ 1 หน่วยปริมาตร

หรือ ใน 1 หน่วยปริมาตร

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \text{อัตราการเกิด} - \text{อัตราการดูดกลืน} - \text{อัตราการรั่ว}$$

เมื่อ n = ความหนาแน่นของนิวตรอน มีหน่วยเป็น จำนวนนิวตรอนต่อ 1 หน่วยปริมาตร

$\frac{\partial n}{\partial t}$ = อัตราการเปลี่ยนแปลงจำนวนนิวตรอนต่อ 1 หน่วยปริมาตร

และ
$$\frac{\partial n}{\partial t} = S - \Sigma_a \varnothing - (-D\nabla^2\varnothing) \qquad .....(5.1)$$

S = อัตราการเกิดนิวตรอนจากปฏิกิริยาการแบ่งแยกตัว มีหน่วยเป็นนิวตรอนต่อเซนติเมตร^3 ต่อวินาที

$\Sigma_a\varnothing$ = จำนวนนิวตรอนที่ถูกดูดกลืนต่อเซนติเมตร^3 ต่อวินาที

$-D\nabla^2\varnothing$ = จำนวนนิวตรอนที่รั่วออกไปจากระบบที่มีขนาดจำกัด ต่อเซนติเมตร^3 ต่อวินาที

สมการ (5.1) เขียนใหม่ได้ดังนี้

$$D\nabla^2\varnothing - \Sigma_a\varnothing + S = \frac{\partial n}{\partial t} \qquad .....(5.2)$$

เรียกว่า **สมการการแพร่** มักใช้ในทฤษฎีเครื่องปฏิกรณ์, มีการแจกแจงนิวตรอนฟลักซ์ภายใต้เงื่อนไขต่างๆ กันไป

สำหรับระบบที่มีสภาวะคงตัว (Steady state), $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$

สมการการสมดุล คือ

อัตราการเกิด = อัตราการดูดกลืน + อัตราการรั่ว .....(5.3)

ในระบบวิกฤต อัตราการเกิดนิวตรอนโดยการแบ่งแยกตัวจะต้องเท่ากับอัตราการสูญเสียนิวตรอนทุกกระบวนการ ดังนั้น สมการ (5.3) จึงเป็นรูปแบบทั่วๆ ไป สำหรับเครื่องปฏิกรณ์ที่อยู่ในระบบวิกฤต

การคำนวณการเกิดนิวตรอนโดยการแบ่งแยกตัว และการดูดกลืนนิวตรอน จะต้องทราบค่าภาคตัดขวางที่ได้มาจากการทดลองที่แต่ละพลังงาน

การเคลื่อนที่ของนิวตรอนในเครื่องปฏิกรณ์ เกิดจากการชนระหว่างนิวตรอนกับนิวคลีไอ เป็นผลให้เกิดการกระเจิง ในเครื่องปฏิกรณ์มีความหนาแน่นนิวตรอนสูง มีปฏิกิริยาการชนแล้วกระเจิงเกิดขึ้นมาก ทำให้นิวตรอนเหล่านี้รั่ว หรือหนีออกไปจากระบบในระบบที่มีขนาดจำกัด แต่สำหรับเครื่องปฏิกรณ์ที่มีขนาดใหญ่มากหรือขนาดอนันต์ นิวตรอนในเครื่องปฏิกรณ์มีการชนแล้วกระเจิง แต่ก็ยังคงอยู่ในเครื่องปฏิกรณ์นั้น จึงไม่มีนิวตรอนรั่วออกไปจากระบบ การรั่วจึงเป็นศูนย์

5.2 ผลเฉลยของสมการการแพร่

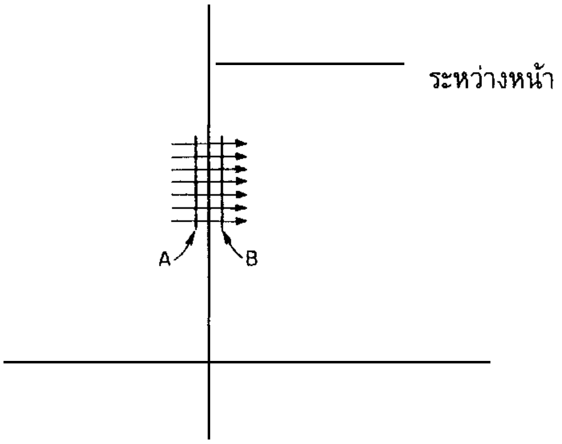
(Solution of the Diffusion Equation)

ผลเฉลยทั่วไป (General solution) ของสมการการแพร่ จะต้องมีค่าคงที่ชี้ขาด (Arbitrary constants) ในการคำนวณ เพื่อให้ได้ค่าคงที่ที่ถูกต้องจำเป็นต้องใช้ ขอบเขตเงื่อนไขจากธรรมชาติทางฟิสิกส์ที่เกี่ยวข้องกับเครื่องปฏิกรณ์ ขอบเขตเงื่อนไขที่ได้จะพอเพียงเพื่อให้หาผลเฉลยได้เพียงค่าเดียว โดยไม่มีค่าคงที่ชี้ขาดเหลืออยู่ ต่อไปนี้จะได้กล่าวถึงขอบเขตเงื่อนไข ซึ่งมักใช้หาผลเฉลยของการแจกแจงนิวตรอนฟลักซ์

5.3 ขอบเขตเงื่อนไข

(Boundary Conditions)

1. นิวตรอนฟลักซ์ จะต้องมีขนาดจำกัด (finite), ไม่เป็นลบหรืออนันต์ในขอบเขตที่ใช้สมการการแพร่
2. ที่ระนาบระหว่างหน้า (interface) ระหว่าง 2 ตัวกลางซึ่งมีคุณสมบัติในการแพร่ต่างกัน ความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนในทิศทาง ตั้งได้ฉากกับระหว่างหน้าจะต้องเท่ากัน และนิวตรอนฟลักซ์จะเท่ากันด้วย



รูปที่ 5.1 แสดงการแพร่ที่ระหว่างหน้าของระนาบ

พิจารณาระหว่างหน้าระหว่าง 2 ตัวกลางที่ต่างกัน และพิจารณาพื้นที่เล็กๆ 2 แห่งที่เท่าๆ กัน ถ้าใช้สัญลักษณ์ A และ B ตามรูปที่ 5.1, A และ B อยู่คนละข้างของระหว่างหน้าและอยู่ชิดกับระหว่างหน้ามาก ทุกนิวตรอนที่ผ่านพื้นที่ A ในทิศทาง x- บวก จะเข้าไปยังพื้นที่ B ในทิศทางเดียวกัน, ดังนั้น ความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนที่ A ในทิศทาง x- บวก คือ $J_A +$ จะต้องเท่ากับความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนที่ B คือ J_{B+} ในทิศทางเดียวกัน ทำนองเดียวกัน ความหนาแน่นของกระแสนิวตรอน J_{A-} และ J_{B-} ในทิศทาง x- ลบ จะต้องเท่ากันด้วย นั่นคือ

$$J_{A+} = J_{B+}$$

และ

$$J_{A-} = J_{B-} \qquad .....(5.4)$$

และยังได้ว่า นิวตรอนฟลักซ์ที่ระหว่างหน้า จะต้องเท่ากันด้วย

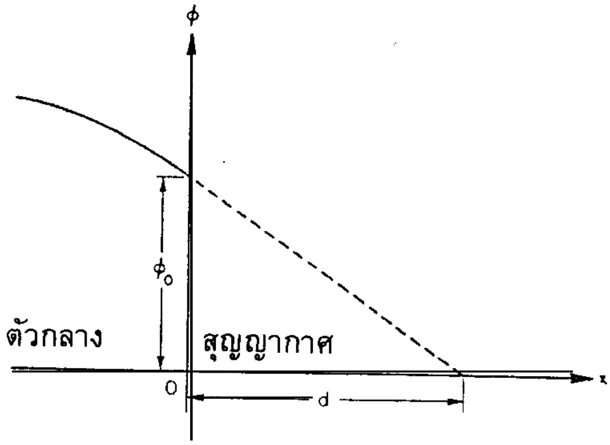
$$\phi_A = \phi_B \qquad .....(5.5)$$

3. ใกล้ขอบเขตระหว่างตัวกลางที่มีการแพร่และสุญญากาศ นิวตรอนฟลักซ์จะเป็นศูนย์ที่ระยะทาง เอกซ์ทราโปเลชัน ใช้สัญลักษณ์ d
   d คือระยะทางห่างจากขอบเขตที่นิวตรอนฟลักซ์จะเป็นศูนย์

ตามรูปที่ 5.2 ถ้าระนาบ Y-Z แทนขอบเขตระหว่างตัวกลางที่มีการแพร่อยู่ทางซ้าย, สุญญากาศอยู่ทางขวา เนื่องจากไม่มีการกระเจิงของนิวตรอนกลับจากสุญญากาศไปยังตัวกลางที่มีการแพร่, จึงไม่มีกระแสนิวตรอนในทิศทาง x- ลบ ที่ขอบเขต, เมื่อ $x = 0$ เขียนได้ว่า

$$J_{-} = \frac{\text{Ø}_0}{4} + \frac{\lambda_{tr}}{6}\frac{d\text{Ø}_0}{dx} = 0 \qquad .....(5.6)$$

เลข ศูนย์ที่อยู่ข้างล่างแสดงว่า เป็นค่าที่ $x = 0$ ฟลักซ์ Ø_0 ที่ขอบเขตเป็นบวก, และจาก สมการนี้จะได้ว่า ความชัน $\frac{d\text{Ø}_0}{dx}$ ของการแจกแจงฟลักซ์ จะต้องเป็นลบที่ขอบเขต ดังแสดง ในรูปที่ 5.2



รูปที่ 5.2 การเอกซ์ทราโปเลทนิวตรอนฟลักซ์ที่ระหว่างหน้าระนาบ

ถ้านิวตรอนฟลักซ์ถูกเอกซ์ทราโปเลทเข้าไปในสุญญากาศโดยการใช้เส้นตรง ที่มีความชัน เท่ากันกับที่ขอบเขต คือ $\frac{d\text{Ø}_0}{dx}$,ฟลักซ์จะหายไป ที่ระยะทางห่างจากขอบเขต d, เขียนได้ว่า

$$-\frac{\text{Ø}_0}{d} = \frac{d\text{Ø}_0}{dx} = -\frac{6\text{Ø}_0}{4\lambda_{tr}} \qquad .....(5.7)$$

จากสมการ (5.7), หาขนาดของ d ได้เรียกว่า ระยะทางเอกซ์ทราโปเลทเชิงเส้น นั่นคือ

$$d = \frac{2}{3}\lambda_{tr} \qquad .....(5.8)$$

ตามรากฐานของการเอกซ์ทราโปเลทเชิงเส้น โดยใช้ทฤษฎีการแพร่ นิวตรอนฟลักซ์ จะหายไปที่ระยะทาง $\frac{2}{3}\lambda_{tr}$ จากระนาบที่แบ่งตัวกลางที่มีการแพร่กับสุญญากาศ ตามทฤษฎี

การนำพา ระยะทางเอกซ์ทราโปเลชั่น ห่างจากผิวระนาบของตัวกลางที่มีการดูดกลืนต่ำมีค่าเกือบจะเป็น 0.7104 λ_{tr} มากกว่าจะเป็น $\frac{2}{3}\lambda_{tr}$ เพื่อที่จะให้ได้ผลที่ถูกต้องมากยิ่งขึ้น ระยะทางเอกซ์ทราโปเลชั่น เมื่อใช้ทฤษฎีการแพร่ จึงควรเป็น 0.71 λ_{tr} จากขอบเขตจริงของระนาบระหว่างตัวกลางที่มีการแพร่และสุญญากาศ

5.4 การนำสมการการแพร่มาใช้ในระบบที่มีสภาวะต่าง ๆ กัน

จากสมการการแพร่

$$D \nabla^2 \phi - \Sigma_a \phi + S = \frac{\partial n}{\partial t}$$

ในระบบที่อยู่ในสภาวะคงตัว $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$

สมการ (5.2) จะเขียนได้ดังนี้

$$D \nabla^2 \phi - \Sigma_a \phi + S = 0 \qquad .....(5.9)$$

ในตัวกลางที่ไม่มีวัสดุที่ทำให้เกิดการแบ่งแยกตัว (fissile material), S ในสมการ (5.9) จะเป็นศูนย์, หมายความว่า ทุกหนทุกแห่งไม่มีนิวตรอนเกิดขึ้นใหม่จากการแบ่งแยกตัว คงมีแต่ต้นกำเนิดนิวตรอนเพียงแห่งเดียวเท่านั้น เขียนสมการ (5.9) ใหม่ได้ดังนี้

$$D \nabla^2 \phi - \Sigma_a \phi = 0 \qquad .....(5.10)$$

สมการ (5.10) จะเป็นสมการการแพร่สำหรับระบบที่อยู่ในสภาวะคงตัว และไม่มีวัสดุที่ทำให้เกิดการแบ่งแยกตัว การหาผลเฉลยจะนำขอบเขตเงื่อนไขสำหรับตัวกำเนิดมาใช้เพื่อหาค่าคงที่ชี้ขาด

สมการ (5.10) หารด้วย D จะได้ดังนี้

$$\nabla^2 \phi - \frac{\Sigma_a}{D}\phi = 0 \qquad .....(5.11)$$

ถ้า $K^2 = \frac{\Sigma_a}{D}$

สมการ (5.1 1) คือ

$$\nabla^2 \phi - K^2 \phi = 0 \qquad .....(5.12)$$

และ $K^2 = \frac{1}{L^2}$

L^2 คือ พื้นที่ของการแพร่ (diffusion area) มีหน่วยเป็น เซนติเมตร^2

L คือ ความยาวของการแพร่ (diffusion length) มีหน่วยเป็น เซนติเมตร

Σ_a คือ ภาคตัดขวางมหัพภาค สำหรับการดูดกลืน มีหน่วยเป็น เซนติเมตร$^{-1}$

D คือ สัมประสิทธิ์ของการแพร่ มีหน่วยเป็น เซนติเมตร

5.5 การหาฟลักซ์ที่เกิดจากต้นกำเนิดรูปแบบต่าง ๆ

5.5.1 จุดกำเนิดในตัวกลางขนาดอนันต์

(Point Source in Infinite Medium)

พิจารณาจุดกำเนิดนิวตรอนส่ง Q นิวตรอน ต่อวินาที วางอยู่ในตัวกลางที่เป็นเนื้อเดียวกันขนาดอนันต์ เลือกระบบพิกัดที่มีการแจกแจงนิวตรอนเป็นสมมาตรเชิงทรงกลม (Spherical symmetry) กับจุดกำเนิดในพิกัดทรงกลม การแจกแจงฟลักซ์จึงไม่ขึ้นกับมุม ดังนั้น $d\theta$ และ $d\varphi = 0$ และไม่มีตัวกำเนิดอื่นอยู่ในตัวกลางเพราะมีจุดกำเนิดเพียงแห่งเดียวคือที่ $r=0$ สมการการแพร่เมื่อ $S = 0$ คือ

$$\frac{d^2\varnothing}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\varnothing}{dr} - K^2\varnothing = 0 \qquad .....(5.13)$$

เมื่อ r คือระยะทางจากจุดกำเนิด ถึงตำแหน่งใดๆ ในตัวกลาง (สมการนี้จะใช้หาฟลักซ์ที่ตำแหน่งวางจุดกำเนิดคือ $r=0$ ไม่ได้)

การแก้สมการทำได้โดยการแทนค่า $\varnothing = \frac{y}{r}$,

เขียนสมการ (5.13) ใหม่

$$\frac{d^2y}{dr^2} - K^2y = 0$$

K^2 เป็นปริมาณบวก

ผลเฉลยทั่วไป

$$y = Ae^{-Kr} + Ce^{Kr}$$

$$\varnothing(r) = \frac{Ae^{-Kr}}{r} + \frac{Ce^{Kr}}{r} \qquad ..(5.14)$$

ขอบเขตเงื่อนไข

1. ฟลักซ์ ณ ตำแหน่งใด ๆ ต้องมีค่าจำกัด, ยกเว้นที่ตัวกำเนิด, จากสมการ (5.14) ถ้า $r \to \infty$, ฟลักซ์จะมีค่าอนันต์ ดังนั้น ค่าคงที่ C ต้องเป็นศูนย์, สมการ (5.14) จึงเหลือ ดังนี้

$$\varnothing(r) = \frac{A}{r}e^{-Kr} \qquad .....(5.15)$$

2. การหาค่า A จะใช้เงื่อนไขของต้นกำเนิด คือ

ถ้า J เป็นความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนที่ผิวทรงกลมรัศมี r ที่มีจุดกำเนิดนิวตรอนอยู่ที่จุดศูนย์กลาง จำนวนนิวตรอนทั้งหมดที่ผ่านผิวทรงกลม ต่อวินาที คือ $4\pi r^2 J$ ถ้าระยะทาง $r \rightarrow 0$, $4\pi r^2 J$ จะมีค่าเท่ากับความแรงของจุดกำเนิดที่ส่งนิวตรอนออกมาทุกทิศทางต่อวินาที เรียกเงื่อนไขนี้ว่า **เงื่อนไขสำหรับต้นกำเนิด** (source condition)

ดังนั้น $$\lim_{r \rightarrow 0} 4\pi r^2 J = Q \qquad .....(5.16)$$

จากกฎของฟิค, $$J = -D\frac{d\varnothing}{dr}$$

$$= DA\, e^{-Kr}\left(\frac{1 + Kr}{r^2}\right)$$

แต่จากขอบเขตเงื่อนไข

$$\lim_{r \rightarrow 0} 4\pi r^2 J = Q$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} 4\pi r^2 \left[DA\, e^{-Kr}\left(\frac{1 + Kr}{r^2}\right)\right] = \mathbf{Q}$$

$$A = \frac{Q}{4\pi D}$$

ฟลักซ์ ณ จุดใดๆ ที่เกิดจากจุดกำเนิด คือ

$$\Theta\ (r) = \frac{Q}{4\pi Dr} e^{-Kr} \qquad .(5.17)$$

ตัวอย่างที่ 5.1

จุดกำเนิดเทอร์มาลนิวตรอน ส่ง 10^6 นิวตรอนต่อวินาที ผ่านไปยังตัวกลางซึ่งเป็นกราไฟท์ขนาดอนันต์ จงหานิวตรอนฟลักซ์ที่ระยะทางห่างจากต้นกำเนิด 54 เซนติเมตร, สำหรับกราไฟท์ $\cdot K = 0.0185$ เซนติเมตร$^{-1}$ และ $D = 0.94$ เซนติเมตร

$$\varnothing = \frac{Q}{4\pi Dr} e^{-Kr}$$

$$= \frac{10^6\ e^{-0.0185 \times 54}}{4\,\pi \times 0.94 \times 54}$$

$$= \frac{8.46 \times 10^4\ e}{54}$$

$$= 5.8 \times 10^2$$

ฟลักซ์มีค่า 5.8×10^2 นิวตรอน/ซม.^{2}/วินาที

5.5.2 ต้นกำเนิดแบบระนาบขนาดอนันต์

(Infinite Plane Source)

ถ้ามีต้นกำเนิดแบบระนาบขนาดอนันต์ ส่งนิวตรอนออกมาอย่างสม่ำเสมอด้วยอัตรา Q นิวตรอน ต่อเซนติเมตร^2 ต่อวินาที ต้นกำเนิดแบบระนาบนี้วางอยู่ในตัวกลางที่เป็นเนื้อเดียวกันขนาดอนันต์ เลือกระบบพิกัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า เนื่องจากต้นกำเนิดมีขนาดอนันต์ ฟลักซ์จะไม่ขึ้นกับ y และ z และไม่มีต้นกำเนิดนิวตรอนที่อื่นนอกจากที่ $x = o$ สมการการแพร่เมื่อ $S = 0$ คือ

$$\frac{d^2\text{ø}}{dx^2} - K^2\text{ø} = 0$$

ผลเฉลยทั่วไปคือ

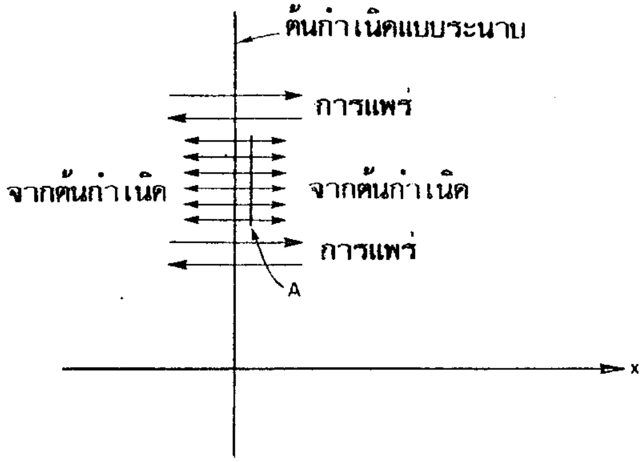
$$0\ (x) = Ae^{-Kx} + Ce^{Kx} \qquad \text{....(5.18)}$$

ขอบเขตเงื่อนไข

1. ฟลักซ์ต้องมีค่าจำกัดทุกหนทุกแห่ง ยกเว้นที่ $x = o$ ดังนั้น ถ้า x มีค่ามากขึ้นจนถึงอนันต์ เทอมที่สองจะเพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขต, ค่าคงที่ C จึงต้องเป็นศูนย์ สมการ (5.18) จึงเหลือ

$$\text{ø}(x) = Ae^{-Kx} \qquad \text{.....(5.19)}$$

2. โดยใช้เงื่อนไขสำหรับต้นกำเนิด พบว่า ที่ระนาบของต้นกำเนิดแบบระนาบขนาดอนันต์ความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนมีค่าเท่ากับ $\frac{Q}{2}$ นิวตรอนต่อเซนติเมตร^2 ต่อวินาที ในทิศทาง x- บวก และ x-ลบ



รูปที่ 5.3 แสดงความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนที่ต้นกำเนิดแบบระนาบ

เงื่อนไขสำหรับต้นกำเนิด อธิบายได้โดยพิจารณาพื้นที่เล็กๆ A ที่อยู่ชิดกับต้นกำเนิดแบบระนาบ ความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนที่ผ่านพื้นที่นี้ ประกอบด้วย นิวตรอนที่ออกมาจากต้นกำเนิดโดยตรงซึ่งจะเคลื่อนที่ไปในทิศทาง x-บวก กับนิวตรอนที่แพร่ผ่านพื้นที่นี้ทั้งทางทิศทางบวกและทิศทางลบ แต่พื้นที่นี้อยู่ชิดกับระนาบของตัวกำเนิด, การแพร่จะเหมือนกัน แต่มีทิศทางตรงข้าม จึงไม่มีผลต่อความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนที่ผ่านพื้นที่ A อย่างไรก็ตาม กระแสนิวตรอนที่อยู่ชิดกับระนาบของตัวกำเนิดและที่ระนาบของตัวกำเนิดเอง จะหาได้โดยตรงจากนิวตรอนที่ออกมาจากตัวกำเนิดในทิศทาง x-บวก เนื่องจากนิวตรอนจาก ระนาบของตัวกำเนิดมีค่าเท่ากันทั้งทาง x-บวกและ x-ลบ ดังแสดงในรูปที่ 5.3 ดังนั้น ถ้า Q เป็นความแรงของนิวตรอน มีหน่วยเป็น นิวตรอนต่อเซนติเมตร^2 ต่อวินาที ความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนที่ระนาบของตัวกำเนิดจะมีค่า $= \frac{Q}{2}$

นั่นคือ $$\lim_{x \to 0} J = \frac{Q}{2} \qquad .....(5.20)$$

จากกฎของฟิค, $$J = -D \frac{d\text{Ø}}{dx} = D\,A\,K e^{-Kx}$$

และ $$\lim_{x \to 0} DAKe^{-Kx} = DAK = \frac{Q}{2}$$

$$A = \frac{Q}{2KD}$$

แทนค่า A ในสมการ (5.19), จะได้

$$\text{Ø}(x) = \frac{Q}{2KD} e^{Kx}$$

แต่ฟลักซ์ ณ ตำแหน่งที่ห่างจากต้นกำเนิด ทาง x-บวกและ x-ลบ มีค่าเท่ากัน

ดังนั้น $$0\ (x) = \frac{Q}{2KD} e^{-Kx} \qquad (5.21)$$

ตัวอย่างที่ 5.2

ต้นกำเนิดแบบระนาบขนาดอนันต์ ส่งเทอร์มาลนิวตรอน 10^8 นิวตรอน/ซม.^{2}/วินาที วางอยู่ในตัวกลางซึ่งเป็นน้ำขนาดอนันต์ จงหาฟลักซ์ที่จุดห่างจากต้นกำเนิดแบบระนาบ 10 เซนติเมตร สำหรับน้ำ, กำหนด L = 2.76 ซม., D = 0.17 ซม.

$$0(x) = \frac{Q}{2KD} e^{Kx}$$

$$K = \frac{1}{L} = \frac{1}{2.16} = 0.36$$

$$Kx \quad \frac{1}{2.76} \times 10 = 3.6231$$

$e^{Kx} = 0.0266$

$$0 \ (x) = \frac{10^8}{2 \times 0.36 \times 0.17} e^{-3.6231}$$

$$= 8.16 \times 10^8 \times 0.0266$$

$$= 21.73 \times 10^6$$

$$= 2.17 \times 10'$$

ฟลักซ์มีค่า 2.17×10^7 นิวตรอน/ซม.^{2}/วินาที

5.6 การหาความยาวของการแพร่

พิจารณาปริมาตรเล็กๆ ที่เกิดจากทรงกลมรัศมี r ที่ผิวของทรงกลม ปริมาตรเล็กๆ นี้มีค่า = $4\pi r^2 dr$ เซนติเมตร^3

จำนวนนิวตรอนที่ถูกดูดกลืนต่อ 1 หน่วยปริมาตร = $\Sigma_a ø$ นิวตรอน/วินาที

เมื่อ Σ_a เป็นภาคตัดขวางมหัพภาค สำหรับการดูดกลืนนิวตรอนในตัวกลางนั้น

ø คือ นิวตรอนฟลักซ์ที่ส่งออกมาจากจุดกำเนิด

อัตราการดูดกลืนนิวตรอนในปริมาตรเล็กๆ คือ $4\pi r^2 dr \ \Sigma_a ø$ นิวตรอน/วินาที ความน่าจะเป็นที่นิวตรอนถูกดูดกลืนภายในส่วนเล็กๆ dr ที่ห่างจากต้นกำเนิด r หาได้จาก $\overline{r^2}$ ซึ่งเป็นระยะทางกำลังสองเฉลี่ยที่นิวตรอนออกจากต้นกำเนิดจนถึงจุดที่ถูกดูดกลืน

$$\overline{r^2} = \frac{\int_0^\infty r^2 \ 4\pi r^2 \ \Sigma_a ø \, dr}{\int_0^\infty 4\pi r^2 \Sigma_a ø \, dr} \qquad \text{.....(5.22)}$$

นิวตรอนฟลักซ์เกิดจากจุดกำเนิด

$$ø = \frac{Q}{4\pi Dr} e^{-Kr}$$

$$\overline{r^2} = \frac{\int_0^\infty r^3 \ e^{-Kr} \, dr}{\int_0^\infty r \, e^{-Kr} \, dr}$$

$$= \frac{\frac{6}{K^4}}{\frac{1}{K^2}} = \frac{6}{K^2} \qquad \text{....(5.23)}$$

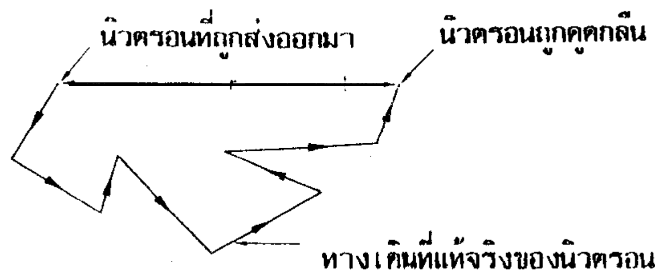
จากหัวข้อ 5.4 ปริมาณที่เรียกว่า **ความยาวของการแพร่** ใช้สัญลักษณ์ L, และ

$$L = \frac{1}{K} = \sqrt{\frac{D}{\Sigma_a}} \quad \text{เซนติเมตร} \qquad ..(5.24)$$

ตามที่ได้กำหนดให้ $K^2 = \frac{\Sigma_a}{D}$

ดังนั้น $$L^2 = \frac{1}{6}\bar{r^2} \qquad .....(5.25)$$

ความยาวของการแพร่ของนิวตรอนพลังงานเดียวกำลังสอง จะมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{6}$ เท่าของระยะทางเฉลี่ยกำลังสอง ซึ่งเป็นระยะทางทั้งหมดที่นิวตรอนออกจากตัวกำเนิดจนถึงจุดที่นิวตรอนถูกนิวเคลียสอื่นดูดกลืน



รูปที่ 5.4 การเคลื่อนที่ของนิวตรอนในตัวกลางลดความเร็ว

ความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของการแพร่และคุณสมบัติอื่นๆ ของตัวกลาง หาได้โดยการแทนค่า D ลงในสมการ (5.24)

$$D = \frac{\lambda_{tr}}{3}$$

และ $\lambda_{tr} = \frac{\lambda_s}{1-\bar{\mu}}$ และ $\frac{1}{\Sigma_a} = \lambda_a$

ดังนั้น $$L = \sqrt{\frac{\lambda_a \lambda_s}{3(1-\bar{\mu})}} \qquad ....(5.26)$$

ถ้า Σ_{tr} = ภาคตัดขวางมหภาคการนำพามีค่า = $\frac{1}{\lambda_{tr}}$

$$L = \frac{1}{\sqrt{3\,\Sigma_{tr}\,\Sigma_a}}$$

ตารางที่ 5.1 แสดงคุณสมบัติของการแพร่ของเทอร์มาลนิวตรอนในตัวลดความเร็วต่าง ๆ

ตัวลดความเร็ว	ความหนาแน่น กรัม/ซม.^{3}	L ซม.	Σ_a ซม.$^{-1}$	D ซม.
น้ำ 1 O)	1..oo	2.76	2.2×10^{-2}	0.17
(99.75% D	1.			0.85
เบอร์ริลเลียม	1.1.84	21	1.2×10^{-3}	0.54
คาร์บอน (กราไฟท์)	1.70	54.2	3.2×10^{-4}	0.94
น้ำหนัก	1.10	100.	8.5×10^{-5}	

ตัวอย่างที่ 5.3

จงหาความยาวของการแพร่ของนิวตรอนในตัวกลางที่เป็นธาตุเบอร์ริลเลียม-9, กำหนด $\Sigma_a = 1.2 \times 10^{-3}$ ซม.$^{-1}$, $\Sigma_s = 0.7589$ ซม.$^{-1}$

$$L = \sqrt{\frac{\lambda_a \lambda_s}{3(1-\bar{\mu})}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3\Sigma_a \Sigma_s (1-\bar{\mu})}}$$

$$= \frac{2}{3A} = \frac{2}{3 \times 9} = 0.0740$$

$$1 - \bar{\mu} = 0.9259$$

$$L = \sqrt{\frac{1}{3 \times 1.2 \times 10^{-3} \times 0.7589 \times 0.9259}} = \sqrt{395.32}$$

ความยาวของการแพร่ = 19.88 ซม.

5.7 การแพร่ของนิวตรอนสองพวก

เป็นการอธิบายการกระเจิงของนิวตรอนที่ออกจากตัวกำเนิดนิวตรอนที่วางอยู่ในวัสดุลดความเร็วใดๆ โดยคิดว่านิวตรอนที่วิ่งออกจากตัวกำเนิดนิวตรอนแล้วไปแพร่อยู่ในตัวกลางมีอยู่เพียง 2 พวกเท่านั้น คือนิวตรอนเร็ว กับเทอร์มาลนิวตรอน เมื่อนิวตรอนที่ออกจากตัวกำเนิดเป็นนิวตรอนเร็ววิ่งผ่านตัวกลางแล้วไปปรากฏที่ตำแหน่งต่างๆ ในตัวกลาง จะกลายเป็นเทอร์มาลนิวตรอน ดังนั้นเทอร์มาลนิวตรอนจะปรากฏอยู่ทุกแห่งในตัวกลาง ในกรณีนี้นิวตรอนเร็วมีต้นกำเนิดเพียงแห่งเดียว คือที่ตัวกำเนิดนิวตรอนซึ่งถือว่าเป็นจุด

การแพร่ของนิวตรอน 2 พวกนี้อาศัยสมการการแพร่ คำนวณหาฟลักซ์ของนิวตรอนเร็วจากฟลักซ์ของนิวตรอนเร็วตามจุดต่างๆ นำมาคำนวณค่าเทอร์มาลฟลักซ์ โดยอาศัยสมการการแพร่เช่นเดียวกัน

สมการการแพร่ของระบบที่อยู่ในสภาวะคงตัว มีดังนี้

$$D \nabla^2 \phi - \Sigma_a \phi + S = 0 \qquad .....(5.27)$$

D = สัมประสิทธิ์การแพร่ของนิวตรอน มีหน่วยเป็นเซนติเมตร

ϕ = นิวตรอนฟลักซ์มีหน่วยเป็น นิวตรอน/ซม.^{2}/วินาที

Σ_a = ภาคตัดขวางมหัพภาคสำหรับการดูดกลืน มีหน่วยเป็นเซนติเมตร$^{-1}$

S = อัตราการเกิดนิวตรอนในตัวกลาง 1 ซม.^{3}/วินาที มีหน่วยเป็น นิวตรอน/ซม.^{3}/วินาที

สำหรับระบบที่มีตัวกำเนิดนิวตรอนขนาดจุดวางอยู่ในตัวกลางที่มีเนื้อเดียวกันมีขอบเขตอนันต์ อัตราการเกิดนิวตรอนเร็วในตัวกลางถือว่าเป็นศูนย์ นอกจากตำแหน่งที่วางจุดกำเนิดนิวตรอนเร็ว ในการแก้สมการดิฟเฟอเรนเชียล จะหาได้โดยให้ S = 0 การกระเจิงของนิวตรอนจากตัวกำเนิดจึงมีความสมมาตรเชิงทรงกลมกับจุดกำเนิด (Spherical symmetry) ตัวดำเนินการลาปลาซ (Laplacian operator) มีค่าเป็น

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} \qquad .....(5.28)$$

5.7.1 กรณีของนิวตรอนเร็ว

ต้นกำเนิดของนิวตรอนเร็วอยู่ที่ตำแหน่งของตัวกำเนิดนิวตรอนแห่งเดียว เทอม S ในสมการการแพร่เป็นศูนย์ ดังนั้นสมการการแพร่ของนิวตรอนเร็ว คือ

$$\nabla^2 \phi_f - K_f^2 \phi_f = 0 \qquad .....(5.29)$$

โดยให้ $K_f^2 = \frac{1}{L_f^2} = \frac{\Sigma_f}{D_f}$

และ L_f เป็นความยาวของการแพร่ของนิวตรอนเร็ว

Σ_f เป็นภาคตัดขวางมหัพภาคที่ทำให้นิวตรอนวิ่งช้าลง (slowing down macroscopic cross sections)

D_f คือสัมประสิทธิ์การแพร่ของนิวตรอนเร็ว

ขอบเขตเงื่อนไขในการหาฟลักซ์ในสมการ (5.29) คือ

1. ฟลักซ์ต้องมีค่าไม่เป็นอนันต์ที่จุดใดๆ
2. เงื่อนไขสำหรับตัวกำเนิดนิวตรอนกำหนดว่า

กระแสนิวตรอนทั้งหมดที่ผิวของทรงกลมซึ่งมีรัศมียาวเท่ากับ r มีหน่วยเป็นนิวตรอน/วินาที จะมีค่าเท่ากับจำนวนนิวตรอนที่แผ่ออกมาจากตัวกำเนิดนิวตรอนใน 1 วินาที เมื่อรัศมี r ของทรงกลมมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ เงื่อนไขข้อที่ 2 จึงเขียนได้ว่า

$$\lim_{r \to 0} 4\pi r^2 J = Q$$

เมื่อ Q = จำนวนนิวตรอนทั้งหมดที่แผ่ออกมาจากตัวกำเนิดนิวตรอนใน 1 วินาที

จากกฎของฟิค

$$\vec{J} = -D \text{ grad } \varnothing$$

นำค่า ∇^2 ในสมการ (5.28) แทนลงในสมการ (5.29) แล้วใช้เงื่อนไขทั้งสองข้อ จะได้ผลเฉลยของสมการ (5.29) คือ

$$\varnothing_f(r) = \frac{\dot{Q}}{4\pi D_f} \cdot \frac{e^{-K_f r}}{r} \qquad \text{....(5.30)}$$

สมการ (5.30) นี้เป็นค่าฟลักซ์ของนิวตรอนเร็วรอบๆ ตัวกำเนิดนิวตรอนที่มีระยะห่างออกไปจากตัวกำเนิดนิวตรอนเป็นระยะทาง r ในตัวกลางที่มีขนาดอนันต์ ฟลักซ์ของนิวตรอนเร็วที่หามาได้นี้ จะใช้เป็นต้นกำเนิดของเทอร์มาลนิวตรอนต่อไป

5.7.2 กรณีของเทอร์มาลนิวตรอน

เทอม S ในสมการการแพร่สำหรับเทอร์มาลนิวตรอน มีค่าเท่ากับ $\Sigma_f\ \phi_f$ จากสมการ (5.27) เขียนสมการการแพร่ของเทอร์มาลนิวตรอนได้ดังนี้

$$\nabla^2 \varnothing - K^2 \varnothing + \frac{\Sigma_f}{D} \cdot \varnothing_f = 0 \qquad \text{.....(5.31)}$$

โดยให้ $K^2 = \frac{1}{L^2} = \frac{\Sigma_a}{D}$

เมื่อ L เป็นความยาวของการแพร่ของเทอร์มาลนิวตรอน

D คือสัมประสิทธิ์การแพร่ของเทอร์มาลนิวตรอน

ขอบเขตเงื่อนไขสำหรับหาค่าเทอร์มาลฟลักซ์ในสมการ (5.31) คือ

1) ฟลักซ์ต้องมีค่าไม่เป็นอนันต์ที่จุดใดๆ

2) จำนวนนิวตรอนที่แผ่ออกจากตัวกำเนิดนิวตรอนซึ่งวางอยู่ในตัวกลางที่มีขอบเขตอนันต์ มีค่าเท่ากับจำนวนนิวตรอนที่ถูกดูดกลืนอยู่ในตัวกลาง

เงื่อนไขข้อที่ 2 เขียนได้ว่า

$$\int_0^\infty \Sigma_a \varnothing 4\pi r^2\, dr = Q \qquad \text{....(5.32)}$$

เมื่อ $\Sigma_a \varnothing$ = จำนวนเทอร์มาลนิวตรอนที่ถูกดูดกลืนอยู่ในตัวกลาง 1 ซม.^{3}/วินาที

นำค่า ∇^2 จากสมการ (5.28) และ $\varnothing_f$ จากสมการ (5.30) แทนลงในสมการ (5.31) แล้วใช้เงื่อนไขทั้ง 2 ข้อ จะหาผลเฉลยของสมการ (5.31) ได้ดังนี้

$$\varnothing(r) = \frac{\varnothing K_f^2}{4\pi D (K^2 - K_f^2) r} (e^{-K_f r} - e^{-Kr}) \qquad .....(5.33)$$

สมการ (5.33) คือค่าเทอร์มาลฟลักซ์ที่ระยะห่างจากตัวกำเนิดนิวตรอนเท่ากับ r

สมการ (5.33) นี้ใช้หาค่าฟลักซ์ของเทอร์มาลนิวตรอนเมื่อ $r = 0$ ไม่ได้

5.8 การแพร่ของนิวตรอนสามพวก

ใช้สำหรับอธิบายการกระเจิงของนิวตรอน ที่แผ่ออกจากตัวกำเนิดนิวตรอนที่วางอยู่ในวัสดุสำหรับลดความเร็วใดๆ โดยคิดว่านิวตรอนที่วิ่งออกจากตัวกำเนิดนิวตรอนแล้วไปแพร่อยู่ในตัวกลาง คือนิวตรอนเร็วกับเทอร์มาลนิวตรอน การลดพลังงานของนิวตรอนเร็วเป็นไปทีละขั้น มีความยาวของการแพร่สำหรับนิวตรอนเร็ว 2 ค่าด้วยกัน คือ L_1 กับ L_2 เริ่มต้นจากนิวตรอนที่มีพลังงานสูงจนถึงเทอร์มาลนิวตรอน นิวตรอนที่แผ่ออกจากตัวกำเนิดเป็นนิวตรอนเร็ว เมื่อวิ่งไปปรากฏที่ตำแหน่งต่างๆ ในตัวกลาง จะกลายเป็นต้นกำเนิดของเทอร์มาลนิวตรอนที่ตำแหน่งนั้น ต้นกำเนิดของเทอร์มาลนิวตรอนจึงปรากฏอยู่ทุกแห่งในตัวกลาง ส่วนนิวตรอนเร็วมีต้นกำเนิดอยู่เพียงแห่งเดียว คือที่ตัวกำเนิดนิวตรอน

การแพร่ของนิวตรอน 3 พวกนี้ ใช้สมการการแพร่คำนวณหาฟลักซ์ของนิวตรอนเร็ว แล้วหาฟลักซ์ของเทอร์มาลนิวตรอนเช่นเดียวกับการหาเทอร์มาลฟลักซ์ โดยใช้การแพร่ของนิวตรอน 2 พวก

สมการการแพร่ของนิวตรอนพวกที่ 1 คือ

$$D_1 \nabla^2 \varnothing_{f_1} - \Sigma_{f_1} \varnothing_{f_1} = 0$$

$$\nabla^2 \varnothing_{f_1} - K_1^2 \varnothing_{f_1} = 0 \qquad .....(5.34)$$

นำค่า ∇^2 จากสมการ (5.28) แทนในสมการ (5.34) แล้วใช้เงื่อนไขข้อที่ 1 และข้อที่ 2 ในสมการ (5.32) จะได้ผลเฉลยของสมการ (5.34) คือ

$$\varnothing_{f_1}(r) = \frac{Q}{4\pi D_1 r} e^{-K_1 r} \qquad .....(5.35)$$

เมื่อ D_1 คือ สัมประสิทธิ์การแพร่ของนิวตรอนเร็วพวกที่ 1

$K_1 = \frac{1}{L_1}$, เมื่อ L_1 คือความยาวของการแพร่ของนิวตรอนเร็วพวกที่ 1 นิวตรอนเร็วจากสมการ (5.35) นี้จะเป็นต้นกำเนิดของนิวตรอนเร็ว ที่จะลดพลังงานต่อไป

สมการการแพร่ของนิวตรอนเร็วพวกที่ 2

$$D_2 \nabla^2 \varnothing_{f2} - \Sigma_{f2} \varnothing_{f2} + \Sigma_{f1} \varnothing_{f1} = 0$$

$$\nabla^2 \varnothing_{f2} \quad \frac{\Sigma_{f2}}{D_2} \varnothing_{f2} + \frac{\Sigma_{f1}}{D_2} \varnothing_{f1} = 0 \qquad \text{.....(5.36)}$$

ผลเฉลยของสมการ (5.36) จะหาได้โดยวิธีทางคณิตศาสตร์ แล้วใช้เงื่อนไขจากสมการ (5.32) จะได้ฟลักซ์ของนิวตรอนเร็วคือ

$$\varnothing_2(r) = \frac{Q}{4\pi D_2 r} \frac{K_1^2}{K_2^2 - K_1^2} \left(e^{-K_1 r} - e^{K_2 r}\right) \qquad \text{.....(5.37)}$$

เมื่อ D_2 คือ สัมประสิทธิ์การแพร่ของนิวตรอนเร็วพวกที่ 2

ค่าฟลักซ์ที่ได้จากสมการ (5.37) จะกลายเป็นต้นกำเนิดของเทอร์มาลนิวตรอนต่อไป สมการการแพร่ของเทอร์มาลนิวตรอนเขียนได้ดังนี้

$$\nabla^2 0 - K^{-2}\varnothing + \frac{\Sigma_{f2}}{D}\varnothing_{f2} = 0 \qquad \text{.....(5.38)}$$

นำขอบเขตเงื่อนไขที่ใช้สำหรับหาเทอร์มาลฟลักซ์ จากสมการ (5.32) มาใช้ในการหาเทอร์-มาลฟลักซ์ สำหรับสมการ (5.38) นำค่า ∇^2 จากสมการ (5.28) และ $\varnothing_{f2}(r)$ จากสมการ (5.37) แทนลงในสมการ (5.38) จะหาผลเฉลยของสมการ (5.38) ได้ดังนี้

$$\varnothing(r) = \frac{Q}{4\pi Dr} \frac{K_1^2 K_2^2}{K_2^2 - K_1^2} \left| \frac{1}{K^2 - K_1^2}\left(e^{-K_1 r} - e^{-Kr}\right) - \frac{1}{K^2 - K_2^2}\left(e^{-K_2 r} - e^{-Kr}\right) \right| \qquad \text{.....(5.39)}$$

สมการ (5.39) นี้ คือค่าเทอร์มาลฟลักซ์ที่ระยะห่างจากตัวกำเนิดนิวตรอนเท่ากับ r สมการนี้ใช้หาค่าฟลักซ์ของเทอร์มาลนิวตรอนเมื่อ r = 0 โดยตรงไม่ได้

สรุป

1. สมการการแพร่ คือ $\frac{\partial n}{\partial t} = S - \Sigma_a \phi + D\nabla^2\phi$

   สำหรับสภาวะที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงจำนวนนิวตรอน $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$

   เรียกสมการการแพร่ ในสภาวะคงตัว คือ

   $D\nabla^2\phi - \Sigma_a\phi + S = 0$

2. จะให้เครื่องปฏิกรณ์นิวเคลียร์ทำงานได้โดยมีจำนวนนิวตรอนคงที่ จำเป็นต้องออกแบบให้เครื่องปฏิกรณ์สามารถผลิต นิวตรอนได้ไม่น้อยกว่าที่ต้องสูญเสียไป เพราะการผลิตนิวตรอนขึ้นกับส่วนผสมของเชื้อเพลิงและวัสดุที่มีอยู่ในแกนของเครื่องปฏิกรณ์ ส่วนการรั่วขึ้นกับลักษณะรูปร่างของเครื่องปฏิกรณ์

3. สมการการแพร่ เป็นพื้นฐานที่จะใช้ในการคำนวณหาค่าฟลักซ์ ที่ตำแหน่งต่างๆ ไม่ว่าจะเป็นที่แกนของเครื่องปฏิกรณ์ หรือบริเวณที่ไม่มีเชื้อเพลิง โดยมีขอบเขตเงื่อนไขสำหรับเครื่องปฏิกรณ์คือ

   1. ฟลักซ์ต้องหาค่าได้ ไม่เป็นลบหรืออนันต์
   2. ที่ระนาบระหว่างหน้า A และ B ที่มีคุณสมบัติในการแพร่ต่างกัน

      $J_A = J_B$

   และ $\phi_A = \phi_A$

   3. ฟลักซ์จะเป็นศูนย์ที่ระยะทางเอกซ์ทราโปเลชั่น d

      $d = 0.71\,\lambda_{tr}$

4. การหาฟลักซ์ ณ ตำแหน่งใดๆ ไม่ว่าต้นกำเนิดจะเป็นจุด หรือ ระนาบขนาดอนันต์ที่อยู่ในตัวกลางขนาดอนันต์ ทำได้โดยใช้สมการการแพร่ เมื่อ $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$ และไม่มีตัวกำเนิดอื่นอยู่ในตัวกลาง คือ $S = 0$ สมการคือ

   $\nabla^2\phi - K^2\phi = 0$

โดยการเลือกใช้ ตัวดำเนินการลาปลาซที่ถูกต้อง จะหาผลเฉลยได้และใช้ขอบเขตเงื่อนไข คือ

(1) ฟลักซ์ต้องหาค่าได้ ไม่มีค่าเป็นลบหรืออนันต์

(2) ใช้เงื่อนไขของตัวกำเนิดแต่ละแบบ จะหาสมการของฟลักซ์ ณ ตำแหน่งใดๆ ได้ ดังนี้

จุดกำเนิด

$$\varnothing(r) = \frac{Q}{4\pi Dr} e^{-Kr}$$

ตัวกำเนิดแบบระนาบขนาดอนันต์

$$\varnothing(x) = \frac{Q}{2KD} e^{-Kx}$$

เมื่อ $K = \frac{1}{L}$

5. การหาค่าความยาวของการแพร่ จะหาได้จาก

$$L = \frac{D}{\Sigma_a} = \sqrt{\frac{\lambda_a \lambda_s}{3(1-\bar{\mu})}}$$

6. การแพร่ของนิวตรอนสองพวก และการแพร่ของนิวตรอนสามพวก มีประโยชน์ในการหานิวตรอนฟลักซ์ มีรากฐานมาจากทฤษฎีการแพร่ การแพร่ของนิวตรอนสองพวก ได้กำหนดว่า มีนิวตรอนอยู่สองพวก พวกแรกคือนิวตรอนจากจุดกำเนิด เป็นนิวตรอนเร็ว มีอยู่เพียงแห่งเดียว เทอม S ในสมการการแพร่จึงเป็นศูนย์ สมการการแพร่ของนิวตรอนเร็วพวกแรก คือ

$$\nabla^2 \varnothing_f - K_f^2 \varnothing_f = 0$$

นิวตรอนเร็ววิ่งผ่านตัวกลาง แล้วไปปรากฏที่ตำแหน่งต่าง ๆ จะกลายเป็นเทอร์มาลนิวตรอน ดังนั้น เทอม S ในสมการการแพร่ คือ $\Sigma_f \varnothing_f$ จะได้สมการการแพร่ คือ

$$\nabla^2 \varnothing - K^2 \varnothing + \frac{\Sigma_f}{D} \varnothing_f = 0$$

การหาผลเฉลย จะใช้ขอบเขตเงื่อนไข เพื่อให้ได้นิวตรอนฟลักซ์ ที่ตำแหน่งต่าง ๆ

โดยวิธีเดียวกันจะสามารถเขียนสมการและหาผลเฉลยสำหรับการแพร่ของนิวตรอนสามพวกได้

แบบฝึกหัด

ข้อ 5.1 จุดกำเนิดเทอร์มาลนิวตรอนส่ง 10^5 นิวตรอน/วินาที ในตัวกลางขนาดอนันต์ทำด้วยเบอร์ริลเลี่ยม จงหาความแรงที่จุดห่างจากจุดกำเนิด 15 เซนติเมตรโดยใช้ทฤษฎีการแพร่

กำหนดให้ ความหนาแน่นของเบอร์ริลเลียม = 0.1236×10^{24} อะตอม/ซม^3

ภาคตัดขวางสำหรับการดูดกลืนของเบอร์ริลเลียม = 0.01 บาร์น

สัมประสิทธิ์การแพร่ = 0.54 ซม.

ข้อ 5.2 จุดกำเนิด S_1, S_2 วางห่างกัน 20 ซม. ในตัวกลางขนาดอนันต์ ทั้ง S_1 และ S_2 ส่งนิวตรอน 10^8 นิวตรอน/วินาที ตามลำดับ จงหา ฟลักซ์และกระแสนิวตรอนที่จุดกึ่งกลางระหว่างจุดกำเนิดทั้งสอง

สำหรับตัวกลาง $D = 0.17$ ซม. , $L = 2.76$ ซม.

ข้อ 5.3 แผ่นสแลบขนาดอนันต์ หนา $2a$ มีต้นกำเนิดแบบระนาบขนาดอนันต์ อยู่ที่จุดกึ่งกลางส่ง Q นิวตรอน/ซม^2/วินาที โดยใช้สมการการแพร่ ฟลักซ์ตำแหน่งที่ห่างจากจุดกึ่งกลางของแผ่นเป็นระยะทาง x หาได้จาก

$$\phi(x) = \frac{Q}{2KD} \frac{\sinh K(a + d - |x|)}{\cosh K(a + d)}$$

เมื่อ d คือระยะทางเอกซ์ทราโปเลชั่น

$2a$ คือความหนาของแผ่น

จงหา

(ก) จำนวนนิวตรอนที่รั่วออกไปทั้งสองข้างของแผ่นสแลบ

(ข) ความน่าจะเป็นที่นิวตรอนจากตัวกำเนิดรั่วออกไปจากแผ่นสแลบนี้

ข้อ 5.4 จงหาความน่าจะเป็นที่นิวตรอนจะหนีออกไปจากระบบ เมื่อพบว่าจำนวนนิวตรอนที่ส่งออกมาจากต้นกำเนิด = 10^8 นิวตรอน/ซม^2/วินาที และมีนิวตรอนหนีออกไป = 10^7 นิวตรอน/ซม^2/วินาที

ข้อ 5.5 ต้นกำเนิดแบบระนาบขนาดอนันต์ ส่ง 10^8 นิวตรอน/ซม^2/วินาที ผ่านตัวกลางที่เป็นเบอร์ริลเลียมออกไซด์ขนาดอนันต์ จงหาฟลักซ์ที่จุดห่างจากต้นกำเนิด 10 เซนติเมตร

สำหรับเบอร์ริลเลียมออกไซด์

$L = 30$ ซม. $D = 0.66$ ซม.