บทที่ 4
ทฤษฎีการแพร่
(DIFFUSION THEORY)

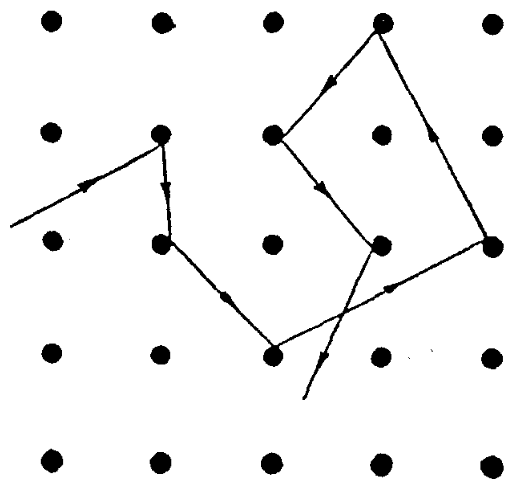
วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาบทนี้แล้วจะสามารถ

1. นำกฎของฟิคมาใช้ได้
2. คำนวณหาความหนาแน่นของนิวตรอน
3. นำทฤษฎีการนำพามาใช้ร่วมกับทฤษฎีการแพร่
4. คำนวณหาการรั่วของนิวตรอน

4.1 มูลฐานของทฤษฎีการแพร่

เมื่อนิวตรอนวิ่งผ่านสสาร เป็นผลให้เกิดการกระเจิงโดยนิวเคลียสของอะตอม ทางเดินของนิวตรอนเป็นเส้นตรง มีลักษณะซิกแซก แต่ละทางเดินมีความยาวต่างกันตามระยะทางที่นิวตรอนเคลื่อนที่ จนกระทั่งเข้าชนกับอีกนิวเคลียสหนึ่งของตัวกลางแล้วถูกจับไป ความยาวของทางเดินของแต่ละนิวตรอนจึงมีการแจกแจงจากศูนย์จนถึงอนันต์สำหรับตัวกลางที่มีขอบเขตไม่จำกัด



***รูปที่ 4.1** แสดงการชนแบบยืดหยุ่นแล้วกระเจิงของนิวตรอนกับนิวคลีไอในตัวกลางที่เป็นของแข็ง*

โดยธรรมชาติแล้ว การแพร่ของนิวตรอนเป็นลักษณะทางสถิติ ทฤษฎีจลน์ของแก๊สได้ถูกนำมาใช้เป็นทฤษฎีมหัพภาค เป็นการแสดงพฤติกรรมของนิวตรอนเป็นจำนวนมาก นิวตรอนมีการแพร่เช่นเดียวกับโมเลกุลของแก๊ส คือจะแพร่จากบริเวณที่มีความหนาแน่นสูงไปยังบริเวณที่มีความหนาแน่นต่ำ เพราะการชนของนิวตรอนต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรในบริเวณที่มีความหนาแน่นสูงมีจำนวนมาก หลังการชน นิวตรอนจะเคลื่อนที่ออกไปจากศูนย์กลางของการชน

4.2 กฎของฟิค

(Fick's Law)

กล่าวว่า ถ้าความหนาแน่นของนิวตรอน ณ ที่แห่งหนึ่ง มีค่าสูงกว่าอีกแห่งหนึ่งในเครื่องปฏิกรณ์ จะมีนิวตรอนไหลจากบริเวณที่มีความหนาแน่นสูงไปสู่บริเวณที่มีความหนาแน่นต่ำกว่า และกระแสนิวตรอนจะแปรเปลี่ยนไปตามระยะทาง

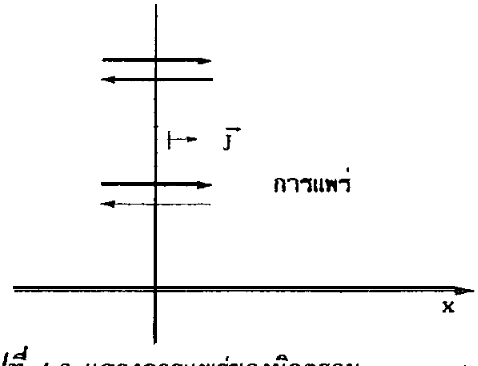
ถ้า $\vec{J}$ คือกระแสนิวตรอน มีหน่วยเป็น นิวตรอน ต่อ ซม.^{2} ต่อวินาที

$$J_x = -D \frac{d\phi}{dx} \qquad \text{..... (4.1)}$$

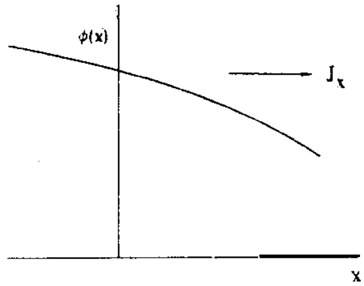
J_x คือกระแสนิวตรอนตามทิศทาง x

คือจำนวนนิวตรอนที่ไหลผ่านพื้นที่ 1 ตารางหน่วยที่ตั้งได้ฉากกับทิศทาง x ในเวลา 1 วินาที

D คือสัมประสิทธิ์ของการแพร่ (diffusion coefficient) มีหน่วยเป็นเซนติเมตร



รูปที่ 4.2 แสดงการแพร่ของนิวตรอน



รูปที่ 4.3 แสดงทิศทางของกระแสนิวตรอน

ในสมการที่ (4.1) จะเห็นว่า ฟลักซ์เกรเดียนต์เป็นลบ แสดงว่านิวตรอนไหลโดยมีจำนวนนิวตรอนลดลง ตามทิศทาง x บวก ดังแสดงในรูป 4.3

เพื่อให้เข้าใจต้นกำเนิดการไหลของนิวตรอน พิจารณานิวตรอนที่ไหลผ่านระนาบตำแหน่ง x = 0 นิวตรอนเหล่านี้ไหลผ่านระนาบจากซ้ายไปยังขวา เป็นผลจากการชนทางซ้ายของระนาบ ในทางตรงข้าม จะมีนิวตรอนไหลจากทางขวาไปทางซ้ายจากการชนทางขวาของระนาบ แต่ฟลักซ์มีค่ามากเมื่อ x มีค่าลบมากขึ้น (ฟลักซ์ทางซ้ายสูงกว่าทางขวา) จึงมีการชนต่อลูกบาศก์เซนติเมตร ต่อวินาที มากกว่าทางขวา เป็นผลให้นิวตรอนส่วนมากกระเจิงจากซ้ายไปยังขวามากกว่าทางอื่น นิวตรอนจึงไหลผ่านระนาบไปทาง x บวก ตามที่ได้ทำนายไว้ในสมการที่ (4.1)

เป็นที่สังเกตว่านิวตรอนไม่ได้ไหลจากบริเวณที่มีฟลักซ์สูงไปยังบริเวณที่มีฟลักซ์ต่ำกว่า แม้ว่าจะเป็นการผลักดันไปในทำนองนั้น แต่เป็นเพราะมีนิวตรอนกระเจิงในทิศทางหนึ่งมากกว่าอีกทิศทางหนึ่ง

โดยทั่วไปแล้ว ฟลักซ์เป็นฟังก์ชันของ 3 ตัวแปร กฎของฟิค จึงเขียนได้ว่า

$$\vec{J} = -D \,\text{grad}\ \phi = -D\nabla\phi \qquad \text{..... (4.2)}$$

เมื่อ $\vec{J}$ คือความหนาแน่นของกระแสนิวตรอน เป็นปริมาณเวกเตอร์ และ

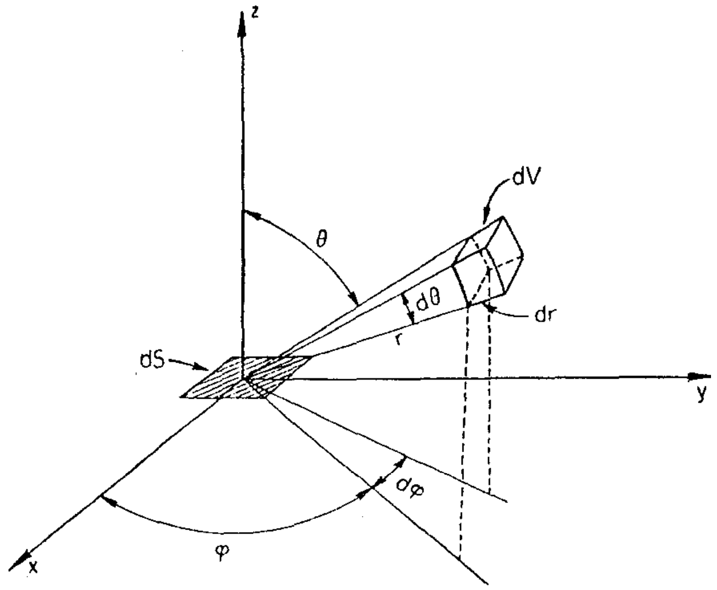
grad คือ เกรเดียนต์ ใช้สัญลักษณ์ ∇ เป็นตัวดำเนินการเกรเดียนต์ (gradient operator)

นัยสำคัญทางฟิสิกส์ของเวกเตอร์ $\vec{J}$ คือ ผลคูณของ $\vec{J}$ กับหน่วยเวกเตอร์ (unit vector) ในทิศทาง x คือ $\vec{a}_x$ จะได้ขนาดของ $\vec{J}$ ในทิศทาง x คือ J_x นั่นคือ

$$\vec{J} \cdot \vec{a}_x = J_x$$

J_x จึงเป็น จำนวนนิวตรอนที่ไหลต่อวินาทีต่อหน่วยพื้นที่ที่ตั้งได้ฉากกับทิศทาง x

4.3 การคำนวณหาความหนาแน่นของกระแสนิวตรอน



รูปที่ 4.4 แสดงการคำนวณหาความหนาแน่นของกระแสนิวตรอน

พิจารณาพื้นที่เล็กๆ ds บนระนาบในระบบพิกัด X-Y ดังรูปที่ 4.4

ปริมาตรเล็กๆ dV มีพิกัดทรงกลม r, θ, φ

จำนวนการชนแล้วกระเจิงต่อวินาที คือ $\Sigma_s \phi \cdot dV$

เมื่อ ϕ คือ ฟลักซ์นิวตรอน มีหน่วยเป็นนิวตรอนต่อซม.^{2} ต่อวินาที และ

Σ_s คือ ภาคตัดขวางมหัพภาคสำหรับการกระเจิง มีหน่วยเป็น เซนติเมตร$^{-1}$

เนื่องจากนิวตรอนมีพลังงานเดียว ภาคตัดขวางจุลภาคจึงมีค่าคงที่

หลังการชน นิวตรอนกระเจิงเป็นทรงกลม มีลักษณะสมมาตร นิวตรอนมีความน่าจะเป็นเท่าๆ กันในการกระเด็นออกไปทุกทิศทางจากจุดที่เข้าชน ความน่าจะเป็นที่นิวตรอนในปริมาตร dV กระเจิงในทิศทางที่จะผ่านพื้นที่ ds เป็นส่วนของมุมตัน ที่รองรับพื้นที่ ds ที่จุดกระเจิง มีค่า $\dfrac{ds \cos \theta}{4 \pi r^2}$

ความน่าจะเป็นสำหรับนิวตรอนที่เคลื่อนที่ภายในมุมตันจนถึงพื้นที่ ds โดยไม่เกิดการชนคือ $e^{-\Sigma r}$

เมื่อ Σ คือภาคตัดขวางมหัพภาคทั้งหมด คือรวมค่าภาคตัดขวางสำหรับการดูดกลืนและการกระเจิง

ในกรณีที่พิจารณาการแพร่ของนิวตรอน ตัวกลางจะต้องมีการดูดกลืนนิวตรอนต่ำ ดังนั้นจึงประมาณว่า

Σ_a มีค่าน้อย,

ภาคตัดขวางมหัพภาคทั้งหมด จึงแทนด้วย Σ_s

จำนวนนิวตรอนที่กระเจิงจากส่วนเล็กๆ ปริมาตร dV ที่เคลื่อนที่ถึงพื้นที่ ds ต่อวินาที เขียนได้ดังนี้

$$\Sigma_s \, \phi \, dV \quad x \quad \frac{ds \cos\theta}{4\pi r^2} \, e^{-\Sigma_s r}$$

แทนค่า $dV = r^2 \sin\theta \; dr \; d\varphi \, d\theta$ ในพิกัดทรงกลม แล้วจัดใหม่ จะได้

$$\frac{ds}{4\pi} \quad \Sigma_s \, \phi \, e^{-\Sigma_s r} \; \cos\theta \; \sin\theta \; dr \; d\varphi \; d\theta$$

จำนวนนิวตรอนทั้งหมดที่กระเจิงเข้าไปในพื้นที่ ds ต่อวินาทีจากด้านบนคือตามทิศทาง z ลบ หาได้จากการอินทิเกรตจำนวนนิวตรอนที่มาจากปริมาตรเล็กๆ dV ตลอดทั่วทั้งอวกาศที่อยู่เหนือระนาบ X-Y คือทุกค่าของระยะทาง r ระหว่างศูนย์จนถึงอนันต์

สำหรับ φ ระหว่าง ศูนย์ จนถึง 2π และ

สำหรับ θ ระหว่าง ศูนย์ จนถึง $\frac{\pi}{2}$

ถ้า J_- เป็นความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนที่ผ่านพื้นที่ผิว 1 หน่วยต่อหน่วยเวลาตามทิศทาง z ลบ

จำนวนนิวตรอนที่ผ่านพื้นที่ ds ในทิศทางนี้จึงมีค่าเท่ากับ $J_- \, ds$ หาได้จาก

$$J_- \, ds = \frac{ds}{4\pi} \, \Sigma_s \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \phi \, e^{-\Sigma_s r} \cos\theta \; \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \;\; dr \qquad .....(4.3)$$

การหาค่าอินทิเกรต จะต้องแทนฟลักซ์ ϕ เป็นฟังก์ชันของพิกัดอวกาศ และใช้การกระจายอนุกรมเทเลอร์ (Taylor series) โดยจะใช้อันดับแรกเท่านั้น

$$\phi(x, y, z) = \phi_0 + x\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_0 + y\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_0 + z\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad .(4.4)$$

เลขศูนย์ข้างล่าง หมายถึงการหาค่าที่จุดกำเนิด (origin) บริเวณพื้นที่เล็กๆ ds,

ตัวแปร x, y, z จะแทนได้ในเทอมของพิกัดทรงกลมคือ

$$x = r \sin\theta \cos\varphi$$

$$y = r \sin\theta \sin\varphi$$

$$z = r \cos\theta$$

แต่ในสมการ (4.3) การอินทิเกรตตลอด φ มีขอบเขตตั้งแต่ศูนย์ จนถึง 2π, เทอมที่มี x และ y จึงไม่ได้เกี่ยวข้องด้วยและถูกตัดทิ้ง
เมื่อแทนค่า z ด้วย $r\cos\theta$ ลงในสมการ (4.4) แล้วแทนค่าฟลักซ์จากสมการ (4.4) ลงในสมการ (4.3) และตัด ds ออกทั้งสองข้างจะได้

$$J- = \frac{\Sigma_S}{4\pi} \Big[\varnothing_0 \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\Sigma_S r} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr$$

$$+ \left(\frac{\partial\varnothing}{\partial z}\right) \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r \, e^{-\Sigma_S r} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr \Big]$$

$$= \frac{\varnothing_0}{4} + \frac{1}{6\Sigma_S}\left(\frac{\partial\varnothing}{\partial z}\right)_0 \qquad ..(4.5)$$

สมการ (4.5) จะเป็นความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนทั้งหมดที่เคลื่อนที่จากด้านบนผ่านพื้นที่ ds
ความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนในทิศทาง z บวก คือ J+ จะหาได้ในทำนองเดียวกัน การอินทิเกรตตลอดมุม θ จะเริ่มจาก $\frac{\pi}{2}$ จนถึง π คือจะรวมเพียงอวกาศที่อยู่ใต้ระนาบ X-Y เท่านั้น
ค่า J+ ที่หาได้คือ

$$J+ = \frac{\varnothing_0}{4} - \frac{1}{6\Sigma_S}\left(\frac{\partial\varnothing}{\partial z}\right)_0 \qquad .....(4.6)$$

ความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนทั้งหมดในทิศทาง z คือ J_z หาได้จากค่าแตกต่างระหว่าง J+ และ J- นั่นคือ

$$J_Z = J+ \quad J-$$

$$= \frac{1}{3\Sigma_S}\left(\frac{\partial\varnothing}{\partial z}\right)_0 \qquad .....(4.7)$$

แทนค่า $\Sigma_S = \frac{1}{\lambda s}$

เมื่อ λ_S = ทางเดินเฉลี่ยกระเจิง

สมการ (4.5), (4.6), (4.7) สำหรับความหนาแน่นของกระแสนิวตรอน J-, J+ และความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนทั้งหมด ในทิศทาง z, เขียนใหม่ คือ

$$J- = \frac{\phi}{4} + \frac{\lambda_s}{6}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 \quad .....(4.8)$$

$$J+ = \frac{\phi}{4} - \frac{\lambda_s}{6}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 \quad .....(4.9)$$

$$J_z = \frac{\lambda_s}{3}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 \quad .(4.10)$$

สำหรับพื้นที่ส่วนที่อยู่บนระนาบ Y-Z ความหนาแน่น ของกระแสนิวตรอนที่แท้จริงตามทิศทาง x คือ

$$J_x = \frac{\lambda_s}{3}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_0 \quad .....(4.11)$$

และสมการที่ใช้หาความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนในทิศทาง y เมื่อพื้นที่อยู่บนระนาบ X-Z คือ

$$J_y = -\frac{\lambda_s}{3}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_0 \quad ..(4.12)$$

ถ้าส่วนของพื้นที่ไม่ได้ตั้งฉากกับแกนแต่ทำมุม α, β, γ กับแกน X, Y, Z ตามลำดับ ความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนที่แท้จริงที่ผ่านพื้นที่นี้ คือ

$$J = -\frac{\lambda s}{3}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_0\cos\alpha + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_0\cos\beta + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0\cos\gamma\right] \quad .....(4.13)$$

สมการ (4.13) จะเป็นสมการ (4.8), (4.9) (4.10) เมื่อแทนค่า α, β, γ เช่น ถ้า α, β เป็นมุม 90° และ γ เป็นมุม 0° สมการ (4.13) จะเป็นสมการ (4.10) คือกระแสนิวตรอนที่ไหลผ่านพื้นที่ส่วนเล็กๆ ที่ตั้งอยู่บนระนาบ X-Y จะเห็นว่าการไหลของกระแสนิวตรอนผ่านหนึ่งหน่วยพื้นที่นั้น ขึ้นกับการจัดพื้นที่ดังที่ได้กล่าวไว้แล้ว

กระแสนิวตรอนเป็นปริมาณเวกเตอร์, ความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนที่แท้จริง คือ $\vec{J}$ เขียนได้ดังนี้

$$\vec{J} = -\frac{\lambda_s}{3}\,\mathrm{grad}\,\phi \quad .....(4.14)$$

4.4 ทฤษฎีการนำพา

(Transport Theory)

เนื่องจากทฤษฎีการแพร่ไม่สามารถจะหาความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนได้ผลอย่างถูกต้องสำหรับการชนระหว่างนิวตรอนกับตัวกลางที่อยู่นิ่งแล้วนิวตรอนกระเจิงไม่ออกรอบตัวในระบบปฏิบัติการ

ทฤษฎีการนำพาได้ประมาณว่า ทุกนิวตรอนมีความเร็วเหมือนกัน (พลังงานเดียวกัน), การชนกับนิวคลีไอแล้วกระเจิงไม่พาดพิงถึงการเปลี่ยนแปลงพลังงาน นับว่าเป็นการประมาณที่ดีสำหรับนิวตรอนขณะที่อยู่ในสภาวะสมดุลความร้อน (thermal equilibrium) ในตัวกลางที่มีการดูดกลืนต่ำ

เนื่องจากการชนแล้วกระเจิงเป็นแบบออกรอบตัวในระบบศูนย์กลางมวล แต่ในระบบปฏิบัติการ เป็นการกระเจิงออกไปเป็นมุม θ ค่าเฉลี่ยโคไซน์ของมุมกระเจิงในระบบปฏิบัติการหาได้จาก

$$\bar{\mu} = \frac{2}{3A} \qquad .....(4.15)$$

เมื่อ A คือเลขมวลของนิวเคลียสที่นิวตรอนเข้าชนแล้วกระเจิง

$\bar{\mu}$ จะลดลงเมื่อเลขมวลของนิวเคลียสมีค่าสูงขึ้น

4.5 การหาทางเดินเฉลี่ยการนำพา

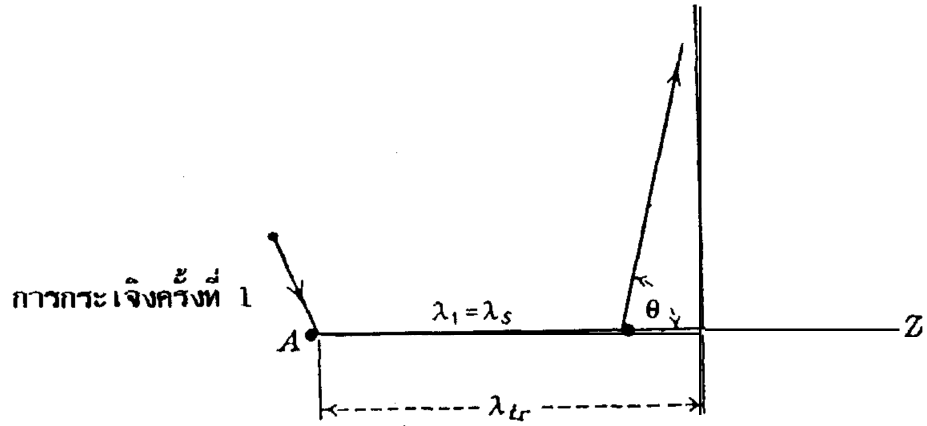
การคำนวณหากระแสนิวตรอนที่ได้กล่าวมาแล้วนั้น ได้สมมุติว่า ระยะทางเฉลี่ยที่นิวตรอนเคลื่อนที่ไประหว่างการชนแล้วกระเจิงคือ λ_s และ $\lambda_s = \frac{1}{\Sigma_s}$ จะเป็นจริงเมื่อมีการกระเจิงออกรอบตัว การกระเจิงที่ไม่ออกรอบตัวในระบบปฏิบัติการ คือจะกระเจิงไปข้างหน้าตามหัวข้อ 3.1 พบว่า ค่าเฉลี่ยของมุมที่กระเจิงขึ้นกับมวลของนิวเคลียสของตัวลดความเร็ว นั่นคือ

$$\overline{\cos\theta} = \frac{2}{3A} \qquad .....(4.16)$$

เมื่อ A คือมวลของนิวเคลียสของตัวลดความเร็ว

ดังนั้น ระยะทางที่นิวตรอนเคลื่อนที่ระหว่างการชนแล้วกระเจิงที่แท้จริง จึงมากกว่าระยะทางที่เป็นทางเดินเฉลี่ย λ_s ด้วยเหตุผลที่ว่า เป็นการกระเจิงที่ไม่ออกรอบตัว

สมมุติว่า นิวตรอนชนนิวเคลียสของตัวลดความเร็ว แล้วกระเจิงไปได้ระยะทาง λ_s ในทิศทาง z, นิวตรอนจะเคลื่อนที่ต่อไป จนเข้าชนนิวเคลียสของตัวลดความเร็วแล้วกระเจิง ทำมุม θ กับทิศทางการเคลื่อนที่เดิม, เคลื่อนที่ไปได้เท่ากับระยะทางเดินเฉลี่ย แล้วจึงเข้าชนกับนิวเคลียสของตัวลดความเร็วต่อไปเรื่อยๆ



รูปที่ 4.5 การคำนวณหาทางเดินเฉลี่ยการนำพา

ถ้า λ_s คือทางเดินเฉลี่ยกระเจิง และ

λ_{tr} เป็นทางเดินเฉลี่ยการนำพา คือเป็นระยะทางที่แท้จริงที่นิวตรอนเคลื่อนที่ระหว่างการชน

ตามรูปที่ 4.5, ค่าเฉลี่ยของระยะทางทั้งหมดที่เกิดจากการกระเจิงของนิวตรอนคือ

$$\lambda_{tr} = \lambda_s + \lambda_s \overline{\cos\theta} + \lambda_s (\overline{\cos\theta})^2 + \lambda_s (\overline{\cos\theta})^3 + ...$$

$$= \lambda_s \ (1 + \overline{\cos\theta} + \overline{\cos\theta}^2 + \overline{\cos\theta}^3 + ...)$$

โดยใช้อนุกรมไบโนเมียล (Binomial series)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ . \ . \ .$$

$$\lambda_{tr} = \frac{\lambda_s}{1 - \overline{\cos\theta}} \qquad .....(4.17)$$

ภาคตัดขวางมหัพภาคกระเจิงของนิวตรอน Σ_s จะถูกแทนด้วย Σ_{tr}, ดังนั้น

$$\Sigma_{tr} = \frac{\Sigma_s}{\overline{\cos\theta}} \qquad .....(4.18)$$

$\overline{\cos\theta}$ คือ ค่าเฉลี่ยของมุมที่กระเจิงไปในระบบปฏิบัติการ แทนด้วยสัญลักษณ์ $\bar{\mu}$

4.6 สัมประสิทธิ์ของการแพร่และความหนาแน่นของกระแสนิวตรอน

(Diffusion Coefficient and Neutron Current Density)

โดยการใช้กฎของฟิค ความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนหาได้จาก

$$\vec{J} = -D \ \text{grad} \ \phi$$

สำหรับตัวกลางที่มีการดูดกลืนต่ำ, Σ_a มีค่าน้อย,
สัมประสิทธิ์ของการแพร่หาได้จาก

$$D = \frac{\lambda_{tr}}{3} \quad ....(4.19)$$

เมื่อ $\lambda_{tr} = \frac{\lambda_S}{1-\bar{\mu}}$

$$D = \frac{1}{3\,\Sigma_S(1-\bar{\mu})} \quad ....(4.20)$$

เมื่อ $\bar{\mu} = \frac{2}{3A}$ ถ้ามีการกระเจิงออกรอบตัวในระบบศูนย์กลางมวล

สมการที่ใช้แสดงความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนในแนวแกน z คือ

$$J- = \frac{\phi}{4} + \frac{D}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_0 \quad ....(4.21)$$

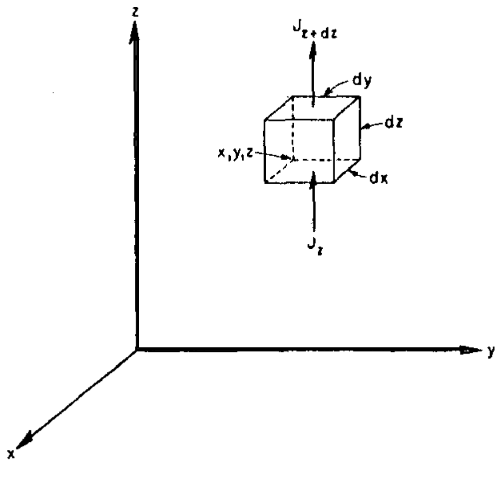
$$J+ = \frac{\phi}{4} - \frac{D}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_0 \quad .(4.22)$$

$$J_z = -D\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_0$$

4.7 การคำนวณการรั่วของนิวตรอน

(Calculation of Neutron Leakage)

อัตราการรั่วของนิวตรอนออกจากปริมาตรเล็กๆ สามารถคำนวณได้ โดยกำหนดให้ปริมาตรเล็กๆ นั้นอยู่ในบริเวณที่มีฟลักซ์นิวตรอน ϕ (x, y, z) เป็นฟังก์ชันของพิกัดอวกาศ



รูปที่ 4.6 การคำนวณการรั่วของนิวตรอน

รูปสี่เหลี่ยมเล็กๆ มีปริมาตร dV, มิติ dx, dy, dz ตั้งอยู่ที่จุด ซึ่งมีพิกัด x, y, z ตามรูปที่ 4.6

พิจารณาพื้นที่ dx.dy ซึ่งขนานกับระนาบ X-Y ทั้งด้านบนและด้านล่าง จำนวนนิวตรอนที่เข้าไปในปริมาตรเล็กๆ จากพื้นที่ด้านล่างต่อวินาทีคือ J_z.dx.dy เมื่อ J_z คือความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนในแนวแกน z

จำนวนนิวตรอนที่ผ่านออกไปจากพื้นที่ส่วนบนคือ J_{z+dz}.dx.dy

อัตราการไหลของกระแสนิวตรอนที่แท้จริงออกจากปริมาตรเล็กๆ ผ่านพื้นที่ขนานกับระนาบ X-Y คือ

$$(J_{z+dz} - J_z)\ dx.dy$$

โดยการใช้กฎของฟิค,

$$(J_{z+dz} - J_z)\, dx\,.\,dy = -D\left[\left(\frac{\partial\text{ø}}{\partial z}\right)_{z+dz} - \left(\frac{\partial\text{ø}}{\partial z}\right)_{z}\right] dx\, dy$$

$$= -D\,\frac{\partial^2\text{ø}}{\partial z^2}\ dx\ dy\ dz$$

$$= -D\,\frac{\partial^2\text{ø}}{\partial z^2}.dV \qquad ..(4.24)$$

ทำนองเดียวกัน อัตราการสูญเสียนิวตรอนทางด้านที่ขนานกับระนาบ Y-Z และ X-Z คือ

$$-D\ \left(\frac{\partial^2\text{ø}}{\partial x^2}\right)\ dV$$

และ

$$-D\ \left(\frac{\partial^2\text{ø}}{\partial y^2}\right)\ dV$$

อัตราการรั่วของนิวตรอนทั้งหมดในปริมาตรเล็กๆ dV หาได้จากผลรวมของเทอมต่างๆ เหล่านี้ และอัตราการรั่วต่อหน่วยปริมาตร จะหาได้โดยการหารด้วย dV ดังนั้น

นิวตรอนที่รั่วออกไปต่อหน่วยปริมาตรต่อวินาที $= -D\left(\frac{\partial^2\text{ø}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\text{ø}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\text{ø}}{\partial z^2}\right)$

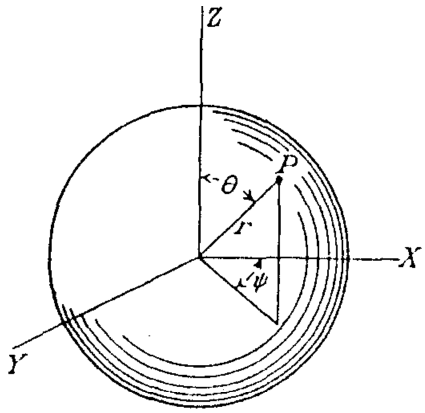
$$= -D\,\nabla^2\text{ø} \qquad .....(4.25)$$

เมื่อ ∇^2 เป็นสัญลักษณ์ที่ใช้แทนตัวดำเนินการลาปลาซ (Laplacian operator) อัตราการรั่วที่ได้จากสมการ (4.25) เป็นสมการทั่วๆ ไป ภายในขอบเขตของการใช้ทฤษฎีการแพร่ของนิวตรอน

ตัวดำเนินการลาปลาซ ∇^2 จะแทนด้วยพิกัดเฉพาะที่ใช้ในแต่ละปัญหา

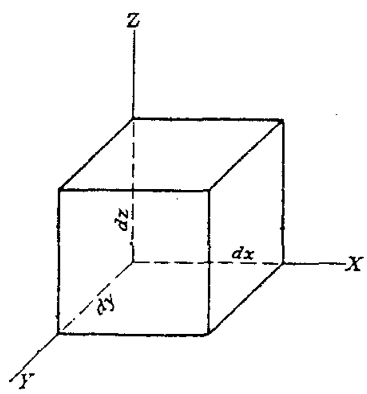
4.8 ตัวดำเนินการลาปลาซ (The Laplacian Operator)

พิกัดทรงกลม (Spherical Coordinates)



$$\nabla^2 \varnothing = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varnothing}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \varnothing}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 \varnothing}{\partial \varphi^2}$$

พิกัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Rectangular Coordinates)



$$\nabla^2 \varnothing = \frac{\partial^2 \varnothing}{\partial x^2} + \frac{a20}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varnothing}{\partial z^2}$$

$$1-\bar{\mu} \quad = \quad - \quad = 0.9445$$

$$D \quad = \quad \frac{1}{3\Sigma_s\,(1-\bar{\mu})}$$

$$\Sigma_s = N\,\sigma_s \quad = \quad 0.08023 \times 10^{24} \times 4.8 \times 10^{-24} = 0.3851$$

$$D \quad = \quad \frac{1}{3 \times 0.3851 \times 0.9445}$$

$$= \quad 0.916 \text{ ซม.}$$