บทที่ 4
ทฤษฎีการแพร่
(DIFFUSION THEORY)

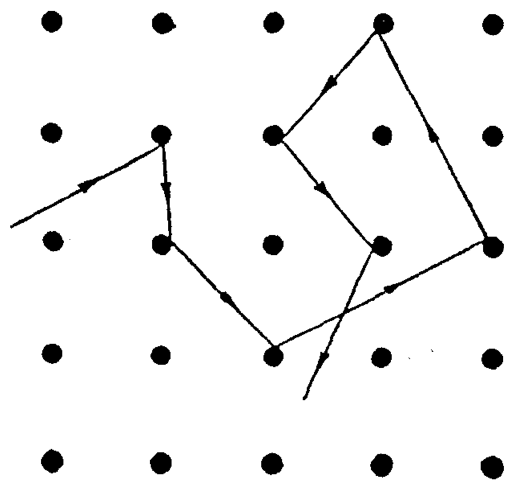
วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาบทนี้แล้วจะสามารถ

1. นำกฎของฟิคมาใช้ได้
2. คำนวณหาความหนาแน่นของนิวตรอน
3. นำทฤษฎีการนำพามาใช้ร่วมกับทฤษฎีการแพร่
4. คำนวณหาการรั่วของนิวตรอน

4.1 มูลฐานของทฤษฎีการแพร่

เมื่อนิวตรอนวิ่งผ่านสสาร เป็นผลให้เกิดการกระเจิงโดยนิวเคลียสของอะตอม ทางเดินของนิวตรอนเป็นเส้นตรง มีลักษณะซิกแซก แต่ละทางเดินมีความยาวต่างกันตามระยะทางที่นิวตรอนเคลื่อนที่ จนกระทั่งเข้าชนกับอีกนิวเคลียสหนึ่งของตัวกลางแล้วถูกจับไป ความยาวของทางเดินของแต่ละนิวตรอนจึงมีการแจกแจงจากศูนย์จนถึงอนันต์สำหรับตัวกลางที่มีขอบเขตไม่จำกัด



***รูปที่ 4.1** แสดงการชนแบบยืดหยุ่นแล้วกระเจิงของนิวตรอนกับนิวคลีไอในตัวกลางที่เป็นของแข็ง*

โดยธรรมชาติแล้ว การแพร่ของนิวตรอนเป็นลักษณะทางสถิติ ทฤษฎีจลน์ของแก๊สได้ถูกนำมาใช้เป็นทฤษฎีมหัพภาค เป็นการแสดงพฤติกรรมของนิวตรอนเป็นจำนวนมาก นิวตรอนมีการแพร่เช่นเดียวกับโมเลกุลของแก๊ส คือจะแพร่จากบริเวณที่มีความหนาแน่นสูงไปยังบริเวณที่มีความหนาแน่นต่ำ เพราะการชนของนิวตรอนต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรในบริเวณที่มีความหนาแน่นสูงมีจำนวนมาก หลังการชน นิวตรอนจะเคลื่อนที่ออกไปจากศูนย์กลางของการชน

4.2 กฎของฟิค

(Fick's Law)

กล่าวว่า ถ้าความหนาแน่นของนิวตรอน ณ ที่แห่งหนึ่ง มีค่าสูงกว่าอีกแห่งหนึ่งในเครื่องปฏิกรณ์ จะมีนิวตรอนไหลจากบริเวณที่มีความหนาแน่นสูงไปสู่บริเวณที่มีความหนาแน่นต่ำกว่า และกระแสนิวตรอนจะแปรเปลี่ยนไปตามระยะทาง

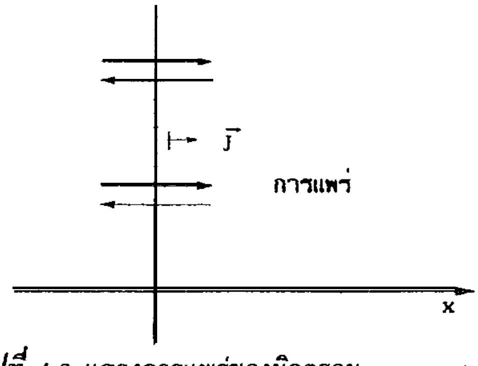
ถ้า $\vec{J}$ คือกระแสนิวตรอน มีหน่วยเป็น นิวตรอน ต่อ ซม.^{2} ต่อวินาที

$$J_x = -D \frac{d\phi}{dx} \qquad \text{..... (4.1)}$$

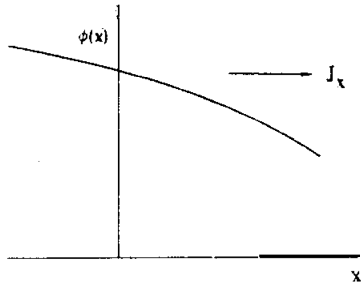
J_x คือกระแสนิวตรอนตามทิศทาง x

คือจำนวนนิวตรอนที่ไหลผ่านพื้นที่ 1 ตารางหน่วยที่ตั้งได้ฉากกับทิศทาง x ในเวลา 1 วินาที

D คือสัมประสิทธิ์ของการแพร่ (diffusion coefficient) มีหน่วยเป็นเซนติเมตร



รูปที่ 4.2 แสดงการแพร่ของนิวตรอน



รูปที่ 4.3 แสดงทิศทางของกระแสนิวตรอน

ในสมการที่ (4.1) จะเห็นว่า ฟลักซ์เกรเดียนต์เป็นลบ แสดงว่านิวตรอนไหลโดยมีจำนวนนิวตรอนลดลง ตามทิศทาง x บวก ดังแสดงในรูป 4.3

เพื่อให้เข้าใจต้นกำเนิดการไหลของนิวตรอน พิจารณานิวตรอนที่ไหลผ่านระนาบตำแหน่ง $x = 0$ นิวตรอนเหล่านี้ไหลผ่านระนาบจากซ้ายไปยังขวา เป็นผลจากการชนทางซ้ายของระนาบ ในทางตรงข้าม จะมีนิวตรอนไหลจากทางขวาไปทางซ้ายจากการชนทางขวาของระนาบ แต่ฟลักซ์มีค่ามากเมื่อ x มีค่าลบมากขึ้น (ฟลักซ์ทางซ้ายสูงกว่าทางขวา) จึงมีการชนต่อลูกบาศก์เซนติเมตร ต่อวินาที มากกว่าทางขวา เป็นผลให้นิวตรอนส่วนมากกระเจิงจากซ้ายไปยังขวามากกว่าทางอื่น นิวตรอนจึงไหลผ่านระนาบไปทาง x บวก ตามที่ได้ทำนายไว้ในสมการที่ (4.1)

เป็นที่สังเกตว่านิวตรอนไม่ได้ไหลจากบริเวณที่มีฟลักซ์สูงไปยังบริเวณที่มีฟลักซ์ต่ำกว่า แม้ว่าจะเป็นการผลักดันไปในทำนองนั้น แต่เป็นเพราะมีนิวตรอนกระเจิงในทิศทางหนึ่งมากกว่าอีกทิศทางหนึ่ง

โดยทั่วไปแล้ว ฟลักซ์เป็นฟังก์ชันของ 3 ตัวแปร กฎของฟิค จึงเขียนได้ว่า

$$\vec{J} = -D \,\text{grad}\; \phi = -D\nabla\phi \qquad \text{..... (4.2)}$$

เมื่อ $\vec{J}$ คือความหนาแน่นของกระแสนิวตรอน เป็นปริมาณเวกเตอร์ และ

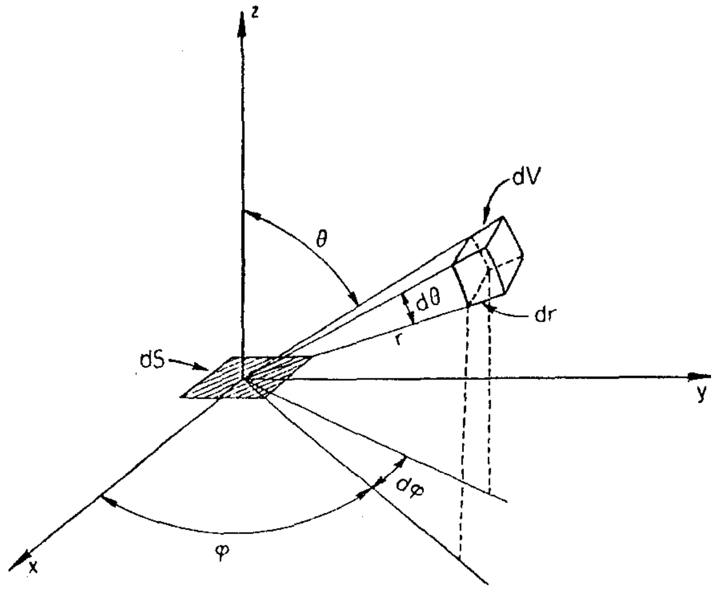
grad คือ เกรเดียนต์ ใช้สัญลักษณ์ ∇ เป็นตัวดำเนินการเกรเดียนต์ (gradient operator)

นัยสำคัญทางฟิสิกส์ของเวกเตอร์ $\vec{J}$ คือ ผลคูณของ $\vec{J}$ กับหน่วยเวกเตอร์ (unit vector) ในทิศทาง x คือ $\vec{a_x}$ จะได้ขนาดของ $\vec{J}$ ในทิศทาง x คือ J_x นั่นคือ

$$\vec{J} \cdot \vec{a_x} = J_x$$

J_x จึงเป็น จำนวนนิวตรอนที่ไหลต่อวินาทีต่อหน่วยพื้นที่ที่ตั้งได้ฉากกับทิศทาง x

4.3 การคำนวณหาความหนาแน่นของกระแสนิวตรอน



รูปที่ 4.4 แสดงการคำนวณหาความหนาแน่นของกระแสนิวตรอน

พิจารณาพื้นที่เล็กๆ ds บนระนาบในระบบพิกัด X-Y ดังรูปที่ 4.4

ปริมาตรเล็กๆ dV มีพิกัดทรงกลม r, θ, φ

จำนวนการชนแล้วกระเจิงต่อวินาที คือ $\Sigma_s \phi \cdot dV$

เมื่อ ϕ คือ ฟลักซ์นิวตรอน มีหน่วยเป็นนิวตรอนต่อซม.^{2} ต่อวินาที และ

Σ_s คือ ภาคตัดขวางมหัพภาคสำหรับการกระเจิง มีหน่วยเป็น เซนติเมตร$^{-1}$

เนื่องจากนิวตรอนมีพลังงานเดียว ภาคตัดขวางจุลภาคจึงมีค่าคงที่

หลังการชน นิวตรอนกระเจิงเป็นทรงกลม มีลักษณะสมมาตร นิวตรอนมีความน่าจะเป็นเท่าๆ กันในการกระเด็นออกไปทุกทิศทางจากจุดที่เข้าชน ความน่าจะเป็นที่นิวตรอนในปริมาตร dV กระเจิงในทิศทางที่จะผ่านพื้นที่ ds เป็นส่วนของมุมตัน ที่รองรับพื้นที่ ds ที่จุดกระเจิง มีค่า $\frac{ds \cos \theta}{4 \pi r^2}$

ความน่าจะเป็นสำหรับนิวตรอนที่เคลื่อนที่ภายในมุมตันจนถึงพื้นที่ ds โดยไม่เกิดการชนคือ $e^{-\Sigma r}$

เมื่อ Σ คือภาคตัดขวางมหัพภาคทั้งหมด คือรวมค่าภาคตัดขวางสำหรับการดูดกลืนและการกระเจิง

ในกรณีที่พิจารณาการแพร่ของนิวตรอน ตัวกลางจะต้องมีการดูดกลืนนิวตรอนต่ำ ดังนั้นจึงประมาณว่า

Σ_a มีค่าน้อย,

ภาคตัดขวางมหัพภาคทั้งหมด จึงแทนด้วย Σ_s

จำนวนนิวตรอนที่กระเจิงจากส่วนเล็กๆ ปริมาตร dV ที่เคลื่อนที่ถึงพื้นที่ ds ต่อวินาที เขียนได้ดังนี้

$$\Sigma_s \, \phi \, dV \quad x \quad \frac{ds \cos\theta}{4\pi r^2} \, e^{-\Sigma_s r}$$

แทนค่า $dV = r^2 \sin\theta \; dr \; d\varphi \, d\theta$ ในพิกัดทรงกลม แล้วจัดใหม่ จะได้

$$\frac{ds}{4\pi} \quad \Sigma_s \, \phi \, e^{-\Sigma_s r} \; \cos\theta \; \sin\theta \; dr \; d\varphi \; d\theta$$

จำนวนนิวตรอนทั้งหมดที่กระเจิงเข้าไปในพื้นที่ ds ต่อวินาทีจากด้านบนคือตามทิศทาง z ลบ หาได้จากการอินทิเกรตจำนวนนิวตรอนที่มาจากปริมาตรเล็กๆ dV ตลอดทั่วทั้งอวกาศที่อยู่เหนือระนาบ X-Y คือทุกค่าของระยะทาง r ระหว่างศูนย์จนถึงอนันต์

สำหรับ φ ระหว่าง ศูนย์ จนถึง 2π และ

สำหรับ θ ระหว่าง ศูนย์ จนถึง $\frac{\pi}{2}$

ถ้า J_- เป็นความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนที่ผ่านพื้นที่ผิว 1 หน่วยต่อหน่วยเวลาตามทิศทาง z ลบ

จำนวนนิวตรอนที่ผ่านพื้นที่ ds ในทิศทางนี้จึงมีค่าเท่ากับ $J_- ds$ หาได้จาก

$$J_- ds = \frac{ds}{4\pi} \Sigma_s \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \phi \, e^{-\Sigma_s r} \cos\theta \; \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \; dr \qquad .....(4.3)$$

การหาค่าอินทิเกรต จะต้องแทนฟลักซ์ ϕ เป็นฟังก์ชันของพิกัดอวกาศ และใช้การกระจายอนุกรมเทเลอร์ (Taylor series) โดยจะใช้อันดับแรกเท่านั้น

$$\phi(x, y, z) = \phi_0 + x\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_0 + y\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_0 + z\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad .(4.4)$$

เลขศูนย์ข้างล่าง หมายถึงการหาค่าที่จุดกำเนิด (origin) บริเวณพื้นที่เล็กๆ ds,

ตัวแปร x, y, z จะแทนได้ในเทอมของพิกัดทรงกลมคือ

$$x = r \sin\theta \cos\varphi$$

$$y = r \sin\theta \sin\varphi$$

$$z = r \cos\theta$$

แต่ในสมการ (4.3) การอินทิเกรตตลอด φ มีขอบเขตตั้งแต่ศูนย์ จนถึง 2π, เทอมที่มี x และ y จึงไม่ได้เกี่ยวข้องด้วยและถูกตัดทิ้ง

เมื่อแทนค่า z ด้วย $r\cos\theta$ ลงในสมการ (4.4) แล้วแทนค่าฟลักซ์จากสมการ (4.4) ลงในสมการ (4.3) และตัด ds ออกทั้งสองข้างจะได้

$$J- = \frac{\Sigma_s}{4\pi}\left[\text{Ø}_0 \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\Sigma_s r} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial \text{Ø}}{\partial z}\right) \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\, e^{-\Sigma_s r} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr \right]$$

$$= \frac{\text{Ø}_0}{4} + \frac{1}{6\Sigma_s}\left(\frac{\partial \text{Ø}}{\partial z}\right)_0 \qquad ..(4.5)$$

สมการ (4.5) จะเป็นความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนทั้งหมดที่เคลื่อนที่จากด้านบนผ่านพื้นที่ ds

ความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนในทิศทาง z บวก คือ J+ จะหาได้ในทำนองเดียวกัน การอินทิเกรตตลอดมุม θ จะเริ่มจาก $\frac{\pi}{2}$ จนถึง π คือจะรวมเพียงอวกาศที่อยู่ใต้ระนาบ X-Y เท่านั้น

ค่า J+ ที่หาได้คือ

$$J+ = \frac{\text{Ø}_0}{4} - \frac{1}{6\Sigma_s}\left(\frac{\partial \text{Ø}}{\partial z}\right)_0 \qquad .....(4.6)$$

ความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนทั้งหมดในทิศทาง z คือ J_z หาได้จากค่าแตกต่างระหว่าง J+ และ J- นั่นคือ

$$J_z = J+ \quad J-$$

$$= \frac{1}{3\Sigma_s}\left(\frac{\partial \text{Ø}}{\partial z}\right)_0 \qquad .....(4.7)$$

แทนค่า $\Sigma_s = \frac{1}{\lambda s}$

เมื่อ λ_s = ทางเดินเฉลี่ยกระเจิง

สมการ (4.5), (4.6), (4.7) สำหรับความหนาแน่นของกระแสนิวตรอน J-, J+ และความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนทั้งหมด ในทิศทาง z, เขียนใหม่ คือ

$$J- = \frac{\phi}{4} + \frac{\lambda_s}{6}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 \quad .....(4.8)$$

$$J+ = \frac{\phi}{4} - \frac{\lambda_s}{6}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 \quad .....(4.9)$$

$$J_z = \frac{\lambda_s}{3}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 \quad .(4.10)$$

สำหรับพื้นที่ส่วนที่อยู่บนระนาบ Y-Z ความหนาแน่น ของกระแสนิวตรอนที่แท้จริงตามทิศทาง x คือ

$$J_x = \frac{\lambda_s}{3}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_0 \quad .....(4.11)$$

และสมการที่ใช้หาความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนในทิศทาง y เมื่อพื้นที่อยู่บนระนาบ X-Z คือ

$$J_y = -\frac{\lambda_s}{3}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_0 \quad ..(4.12)$$

ถ้าส่วนของพื้นที่ไม่ได้ตั้งฉากกับแกนแต่ทำมุม α, β, γ กับแกน X, Y, Z ตามลำดับ ความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนที่แท้จริงที่ผ่านพื้นที่นี้ คือ

$$J = -\frac{\lambda s}{3}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_0 \cos\alpha + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_0 \cos\beta + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 \cos\gamma\right] \quad .....(4.13)$$

สมการ (4.13) จะเป็นสมการ (4.8), (4.9) (4.10) เมื่อแทนค่า α, β, γ เช่น ถ้า α, β เป็นมุม 90° และ γ เป็นมุม 0° สมการ (4.13) จะเป็นสมการ (4.10) คือกระแสนิวตรอนที่ไหลผ่านพื้นที่ส่วนเล็กๆ ที่ตั้งอยู่บนระนาบ X-Y จะเห็นว่าการไหลของกระแสนิวตรอนผ่านหนึ่งหน่วยพื้นที่นั้น ขึ้นกับการจัดพื้นที่ดังที่ได้กล่าวไว้แล้ว

กระแสนิวตรอนเป็นปริมาณเวกเตอร์, ความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนที่แท้จริง คือ $\vec{J}$ เขียนได้ดังนี้

$$\vec{J} = -\frac{\lambda_s}{3}\,\mathrm{grad}\,\phi \quad .....(4.14)$$

4.4 ทฤษฎีการนำพา

(Transport Theory)

เนื่องจากทฤษฎีการแพร่ไม่สามารถจะหาความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนได้ผลอย่างถูกต้องสำหรับการชนระหว่างนิวตรอนกับตัวกลางที่อยู่นิ่งแล้วนิวตรอนกระเจิงไม่ออกรอบตัวในระบบปฏิบัติการ

ทฤษฎีการนำพาได้ประมาณว่า ทุกนิวตรอนมีความเร็วเหมือนกัน (พลังงานเดียวกัน), การชนกับนิวคลีไอแล้วกระเจิงไม่พาดพิงถึงการเปลี่ยนแปลงพลังงาน นับว่าเป็นการประมาณที่ดีสำหรับนิวตรอนขณะที่อยู่ในสภาวะสมดุลความร้อน (thermal equilibrium) ในตัวกลางที่มีการดูดกลืนต่ำ

เนื่องจากการชนแล้วกระเจิงเป็นแบบออกรอบตัวในระบบศูนย์กลางมวล แต่ในระบบปฏิบัติการ เป็นการกระเจิงออกไปเป็นมุม θ ค่าเฉลี่ยโคไซน์ของมุมกระเจิงในระบบปฏิบัติการหาได้จาก

$$\bar{\mu} = \frac{2}{3A} \qquad .....(4.15)$$

เมื่อ A คือเลขมวลของนิวเคลียสที่นิวตรอนเข้าชนแล้วกระเจิง

$\bar{\mu}$ จะลดลงเมื่อเลขมวลของนิวเคลียสมีค่าสูงขึ้น

4.5 การหาทางเดินเฉลี่ยการนำพา

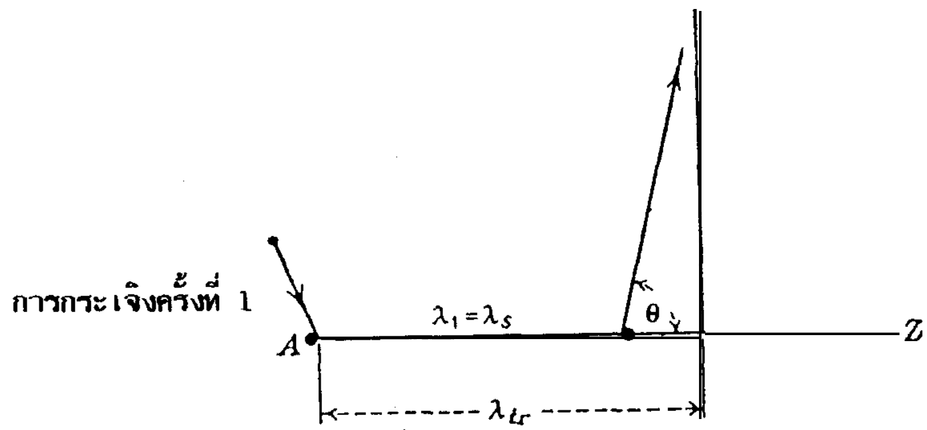
การคำนวณหากระแสนิวตรอนที่ได้กล่าวมาแล้วนั้น ได้สมมุติว่า ระยะทางเฉลี่ยที่นิวตรอนเคลื่อนที่ไประหว่างการชนแล้วกระเจิงคือ λ_s และ $\lambda_s = \frac{1}{\Sigma_s}$ จะเป็นจริงเมื่อมีการกระเจิงออกรอบตัว การกระเจิงที่ไม่ออกรอบตัวในระบบปฏิบัติการ คือจะกระเจิงไปข้างหน้า ตามหัวข้อ 3.1 พบว่า ค่าเฉลี่ยของมุมที่กระเจิงขึ้นกับมวลของนิวเคลียสของตัวลดความเร็ว นั่นคือ

$$\overline{\cos\theta} = \frac{2}{3A} \qquad .....(4.16)$$

เมื่อ A คือมวลของนิวเคลียสของตัวลดความเร็ว

ดังนั้น ระยะทางที่นิวตรอนเคลื่อนที่ระหว่างการชนแล้วกระเจิงที่แท้จริง จึงมากกว่าระยะทางที่เป็นทางเดินเฉลี่ย λ_s ด้วยเหตุผลที่ว่า เป็นการกระเจิงที่ไม่ออกรอบตัว

สมมุติว่า นิวตรอนชนนิวเคลียสของตัวลดความเร็ว แล้วกระเจิงไปได้ระยะทาง λ_s ในทิศทาง z, นิวตรอนจะเคลื่อนที่ต่อไป จนเข้าชนนิวเคลียสของตัวลดความเร็วแล้วกระเจิง ทำมุม θ กับทิศทางการเคลื่อนที่เดิม, เคลื่อนที่ไปได้เท่ากับระยะทางเดินเฉลี่ย แล้วจึงเข้าชนกับนิวเคลียสของตัวลดความเร็วต่อไปเรื่อย ๆ



รูปที่ 4.5 การคำนวณหาทางเดินเฉลี่ยการนำพา

ถ้า λ_s คือทางเดินเฉลี่ยกระเจิง และ

λ_{tr} เป็นทางเดินเฉลี่ยการนำพา คือเป็นระยะทางที่แท้จริงที่นิวตรอนเคลื่อนที่ระหว่างการชน

ตามรูปที่ 4.5, ค่าเฉลี่ยของระยะทางทั้งหมดที่เกิดจากการกระเจิงของนิวตรอนคือ

$$\lambda_{tr} = \lambda_s + \lambda_s \overline{\cos\theta} + \lambda_s (\overline{\cos\theta})^2 + \lambda_s (\overline{\cos\theta})^3 + \ldots$$

$$= \lambda_s \;(1 + \overline{\cos\theta} + \overline{\cos\theta}^2 + \overline{\cos\theta}^3 + \ldots..)$$

โดยใช้อนุกรมไบโนเมียล (Binomial series)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

$$\lambda_{tr} = \frac{\lambda_s}{1 - \overline{\cos\theta}} \qquad \ldots..(4.17)$$

ภาคตัดขวางมหัพภาคกระเจิงของนิวตรอน Σ_s จะถูกแทนด้วย Σ_{tr}, ดังนั้น

$$\Sigma_{tr} = \frac{\Sigma_s}{\overline{\cos\theta}} \qquad \ldots..(4.18)$$

$\overline{\cos\theta}$ คือ ค่าเฉลี่ยของมุมที่กระเจิงไปในระบบปฏิบัติการ แทนด้วยสัญลักษณ์ $\bar{\mu}$

4.6 สัมประสิทธิ์ของการแพร่และความหนาแน่นของกระแสนิวตรอน

(Diffusion Coefficient and Neutron Current Density)

โดยการใช้กฎของฟิค ความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนหาได้จาก

$$\vec{J} = -D \text{ grad } \phi$$

สำหรับตัวกลางที่มีการดูดกลืนต่ำ, Σ_a มีค่าน้อย,
สัมประสิทธิ์ของการแพร่หาได้จาก

$$D = \frac{\lambda_{tr}}{3} \qquad \text{....(4.19)}$$

เมื่อ $\lambda_{tr} = \frac{\lambda_S}{1-\bar{\mu}}$

$$D = \frac{1}{3\,\Sigma_S(1-\bar{\mu})} \qquad \text{....(4.20)}$$

เมื่อ $\bar{\mu} = \frac{2}{3A}$ ถ้ามีการกระเจิงออกรอบตัวในระบบศูนย์กลางมวล
สมการที่ใช้แสดงความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนในแนวแกน z คือ

$$J- = \frac{\phi}{4} + \frac{D}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 \qquad \text{....(4.21)}$$

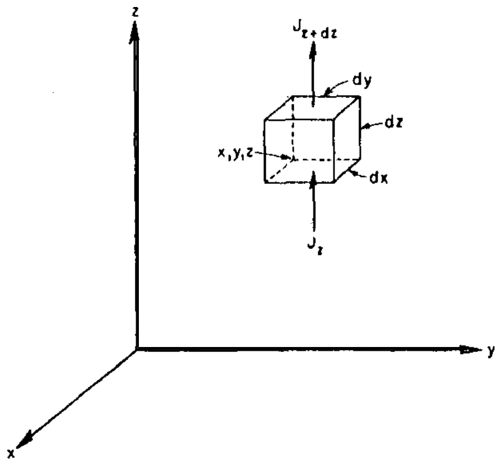
$$J+ = \frac{\phi}{4} - \frac{D}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 \qquad \text{.(4.22)}$$

$$J_Z = -D\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0$$

4.7 การคำนวณการรั่วของนิวตรอน

(Calculation of Neutron Leakage)

อัตราการรั่วของนิวตรอนออกจากปริมาตรเล็กๆ สามารถคำนวณได้ โดยกำหนดให้ปริมาตรเล็กๆ นั้นอยู่ในบริเวณที่มีฟลักซ์นิวตรอน ϕ (x, y, z) เป็นฟังก์ชันของพิกัดอวกาศ



รูปที่ 4.6 การคำนวณการรั่วของนิวตรอน

รูปสี่เหลี่ยมเล็กๆ มีปริมาตร dV, มิติ dx, dy, dz ตั้งอยู่ที่จุด ซึ่งมีพิกัด x, y, z ตามรูปที่ 4.6

พิจารณาพื้นที่ dx.dy ซึ่งขนานกับระนาบ X-Y ทั้งด้านบนและด้านล่าง จำนวนนิวตรอนที่เข้าไปในปริมาตรเล็กๆ จากพื้นที่ด้านล่างต่อวินาทีคือ J_z.dx.dy เมื่อ J_z คือความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนในแนวแกน z

จำนวนนิวตรอนที่ผ่านออกไปจากพื้นที่ส่วนบนคือ J_{z+dz}.dx.dy

อัตราการไหลของกระแสนิวตรอนที่แท้จริงออกจากปริมาตรเล็กๆ ผ่านพื้นที่ขนานกับระนาบ X-Y คือ

$$(J_{z+dz} - J_z)\ dx.dy$$

โดยการใช้กฎของฟิค,

$$(J_{z+dz} - J_z)\ dx\ .\ dy = -D \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z+dz} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z} \right] dx\ dy$$

$$= -D\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\ dx\ \ dy\ \ dz$$

$$= -D\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}.dV \qquad ..(4.24)$$

ทำนองเดียวกัน อัตราการสูญเสียนิวตรอนทางด้านที่ขนานกับระนาบ Y-Z และ X-Z คือ

$$-D\ \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)\ dV$$

และ

$$-D\ \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right)\ dV$$

อัตราการรั่วของนิวตรอนทั้งหมดในปริมาตรเล็กๆ dV หาได้จากผลรวมของเทอมต่างๆ เหล่านี้ และอัตราการรั่วต่อหน่วยปริมาตร จะหาได้โดยการหารด้วย dV ดังนั้น

นิวตรอนที่รั่วออกไปต่อหน่วยปริมาตรต่อวินาที $= -D\ \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\right)$

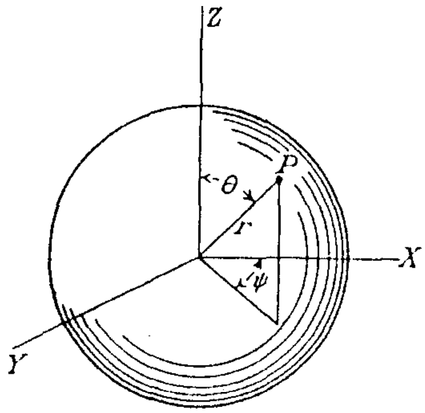
$$= -D\,\nabla^2 \phi \qquad .....(4.25)$$

เมื่อ ∇^2 เป็นสัญลักษณ์ที่ใช้แทนตัวดำเนินการลาปลาซ (Laplacian operator) อัตราการรั่วที่ได้จากสมการ (4.25) เป็นสมการทั่วๆ ไป ภายในขอบเขตของการใช้ทฤษฎีการแพร่ของนิวตรอน

ตัวดำเนินการลาปลาซ ∇^2 จะแทนด้วยพิกัดเฉพาะที่ใช้ในแต่ละปัญหา

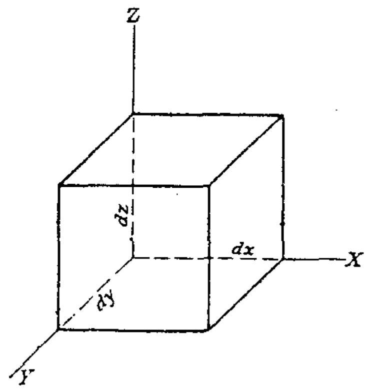
4.8 ตัวดำเนินการลาปลาซ (The Laplacian Operator)

พิกัดทรงกลม (Spherical Coordinates)



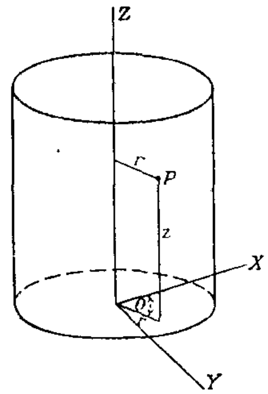
$$\nabla^2 \o = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \o}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \o}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 \o}{\partial \varphi^2}$$

พิกัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Rectangular Coordinates)



$$\nabla^2 \o = \frac{\partial^2 \o}{\partial x^2} + \frac{a20}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \o}{\partial z^2}$$

พิกัดรูปทรงกระบอก (Cylindrical Coordinates)



$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

ตัวอย่างที่ 4.1

ภาคตัดขวางจุลภาคสำหรับการกระเจิงของคาร์บอน มีค่า 4.8 บาร์น จงหาค่าสัมประสิทธิ์การแพร่ของกราไฟท์ ที่พลังงานนี้ กำหนดความหนาแน่นอะตอมของกราไฟท์เท่ากับ 0.08023×10^{24} อะตอม/ซม.^{3}

$$\bar{\mu} = \frac{2}{3A}$$

แทนค่า A = 12,

$$\bar{\mu} = \frac{2}{3 \times 12} = 0.055$$

$$1 - \bar{\mu} = 1 - 0.0555 = 0.9445$$

$$D = \frac{1}{3\Sigma_s\,(1 - \bar{\mu})}$$

$$\Sigma_s = N\,\sigma_s = 0.08023 \times 10^{24} \times 4.8 \times 10^{-24} = 0.3851$$

$$D = \frac{1}{3 \times 0.3851 \times 0.9445}$$

$$= 0.916 \text{ ซม.}$$

ถ้าเลขมวลของนิวเคลียสที่ใช้กระเจิงมีค่าสูง การกระเจิงในระบบปฏิบัติการ จะเหมือนกับในระบบศูนย์กลางมวล เพราะค่า $\bar{\mu}$ มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับหนึ่ง จึงตัดทิ้งได้

$$\lambda_{tr} = \lambda_s$$

สัมประสิทธิ์การแพร่ที่ได้มาจากทฤษฎีการนำพา จะเหมือนกับที่ได้มาจากทฤษฎีการแพร่

ตัวอย่างที่ 4.2

จงหาทางเดินเฉลี่ยการนำพา สำหรับกราไฟท์ ซึ่งมีเลขมวลเท่ากับ 12 ความหนาแน่นอะตอม = 0.08023 x 10^{24} อะตอม/ซม.^{3}, ภาคตัดขวางจุลภาค สำหรับการกระเจิง = 4.8 บาร์น

$$\lambda_{tr} = \frac{1}{\Sigma s\ (1-\bar{\mu})}$$

$$\bar{\mu} = \frac{1}{3A} = \frac{2}{3 \times 12} = 0.0555$$

$$(1-\bar{\mu}) = (1 - 0.0555) = 0.9445$$

$$\Sigma_S = N\ \sigma_S = 0.08023 \times 4.8$$

$$= 0.3851$$

$$\lambda_{tr} = \frac{1}{0.3851 \times 0.9445}$$

$$= 2.1$$

$$\lambda_S = \frac{1}{\Sigma_S} = 2.6 \text{ ซม.}$$

λ_{tr} จะมีค่ามากกว่า λ_S ประมาณ 3%

ตัวอย่างที่ 4.3

จงเปรียบเทียบทางเดินเฉลี่ยกระเจิงกับทางเดินเฉลี่ยการนำพาสำหรับธาตุไฮโดรเจน

$$\bar{\mu} = \frac{2}{3} \text{ และ}$$

$$(1-\bar{\mu}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{\Sigma_S\ (1-\bar{\mu})}$$

$$\lambda_{tr} = 3\,\lambda_S$$

จะเห็นว่า การแก้สำหรับการกระเจิงที่ไม่ออกรอบตัวนั้นนับว่าสำคัญสำหรับนิวเคลียสที่มีเลขมวลต่ำ

สรุป

1. ทฤษฎีการแพร่ ได้ถูกนำมาใช้ในการคำนวณหาความหนาแน่นของกระแสนิวตรอน ณ ตำแหน่งใดๆ โดยอาศัยกฎของฟิค คือ $\vec{J} = -D \text{ grad } \phi$ ซึ่งได้ให้รายละเอียดไว้แล้ว
2. เพื่อให้การใช้ทฤษฎีการแพร่ถูกต้องยิ่งขึ้น จึงได้นำทฤษฎีการนำพาเข้ามาใช้ร่วมด้วย สัมประสิทธิ์ของการแพร่จึงหาได้จาก

$$D = \frac{\lambda_{tr}}{3}$$

และ
$$\lambda_{tr} = \frac{\lambda_s}{(1 - \bar{\mu})}$$

3. นิวตรอนมีโอกาสรั่วออกไปจากระบบ เมื่อระบบนั้นมีขนาดจำกัด แต่ถ้าเป็นระบบที่มีขนาดอนันต์ การรั่วจะเป็นศูนย์
   เทอมที่ใช้ในการคำนวณหาการรั่วในสมการการแพร่คือ $-D\nabla^2 \phi$

แบบฝึกหัด

ข้อ 4.1 จงหาค่าสัมประสิทธิ์ของการแพร่สำหรับตัวกลางลดความเร็วต่อไปนี้

ตัวลดความเร็ว	ความหนาแน่น กรัม/ซม.^{3}	L ซม.	Σ_a ซม.$^{-1}$
น้ำ	1.00	2.76	2.2×10^{-2}
น้ำหนัก (99.75%D_2O)	1.11	100	8.5×10^{-5}
เบอร์ริลเลียม	1.84	21	1.2×10^{-3}

ข้อ 4.2 จุดกำเนิดวางอยู่ที่จุดศูนย์กลางของทรงกลม รัศมี 10 ซม. ส่งนิวตรอนความแรง 10^8 นิวตรอน/วินาที จงหา

(ก) กระแสนิวตรอนทั้งหมดที่ผิวของทรงกลม

(ข) ความน่าจะเป็นที่นิวตรอนจะรั่วออกไปจากทรงกลมนี้

กำหนด $K = 0.01$ ซม.$^{-1}$

ข้อ 4.3 จุดกำเนิดส่งนิวตรอน Q นิวตรอน/วินาที พบว่าฟลักซ์ที่ตำแหน่งห่างจากจุดกำเนิด r คือ $\phi(r) = \frac{Q}{4\pi D r} . e^{-Kr}$ จงหา

(ก) กระแสนิวตรอนตำแหน่งที่ห่างจากจุดกำเนิด r

(ข) กระแสนิวตรอนทั้งหมดที่ผิวของทรงกลม

ข้อ 4.4 จงเปรียบเทียบทางเดินเฉลี่ยกระเจิงและทางเดินเฉลี่ยการนำพาของธาตุ โดยกำหนดค่าต่างๆ ดังต่อไปนี้

ธาตุ	เลขอะตอม	ความหนาแน่น กรัม/ซม^3	σ_s บาร์น
Be	9	1.85	7
Na	23	0.971	4
Al	27	2.699	1.4
Si	28	2.42	1.7
U	238	19.1	8.9