บทที่ 3
การลดพลังงานของนิวตรอน

วัตถุประสงค์

เมื่อศึกษาบทนี้แล้วจะสามารถ

1. เปรียบเทียบการชนระหว่างนิวตรอนกับธาตุใดๆ ในระบบปฏิบัติการ และระบบศูนย์กลางมวล เพื่อคำนวณหาพลังงานของนิวตรอนหลังชนกับธาตุใดๆ ได้
2. คำนวณหาอัตราส่วนลดความเร็วได้

3.1 พลังงานที่สูญเสียไปในการชนแล้วกระเจิง

(Energy Loss in Scattering Collisions)

ปฏิกิริยาระหว่างนิวตรอนกับสสารต่างจากอนุภาคที่มีประจุหรือรังสีแกมมา เพราะนิวตรอนเป็นอนุภาคที่ไม่มีประจุ พลังงานที่นิวตรอนสูญเสียไปแต่ละครั้งของการชนหาได้จากหลักการอนุรักษ์พลังงาน และหลักการอนุรักษ์โมเมนตัม มี 2 ระบบที่ใช้อ้างอิงเพื่อศึกษาการชนของนิวตรอนกับนิวเคลียสของอะตอมแล้วกระเจิง คือ

3.1.1 ระบบปฏิบัติการ หรือ L-System (Laboratory system) มีหลักการดังนี้

ขณะเกิดการชน นิวตรอนวิ่งเข้าชนเป้าซึ่งอยู่นิ่ง

หลังการชน นิวตรอนและนิวเคลียสกระเด็นไปข้างหน้าทำมุมกับทิศทางการเคลื่อนที่ของนิวตรอนก่อนเกิดการชน ไม่มีข้อกำหนดที่แน่นอนว่า นิวตรอนกระเจิงไปข้างหน้าในทิศทางใด

3.1.2 ระบบศูนย์กลางมวล หรือ C-System (Center of mass system)

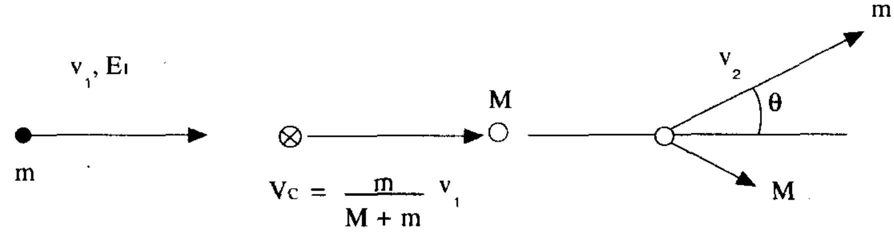
ขณะเกิดการชน ทั้งนิวตรอนและนิวเคลียสของเป้าวิ่งเข้าหากัน

หลังการชน ศูนย์กลางมวลของนิวตรอนและนิวเคลียสของเป้าหยุดนิ่ง หลังจากนั้นก็กระเจิงออกไปในทิศทางตรงกันข้าม มุมกระเจิง คือมุมระหว่างทิศทางการเคลื่อนที่ของนิวตรอนก่อนและหลังชน 1 ครั้ง

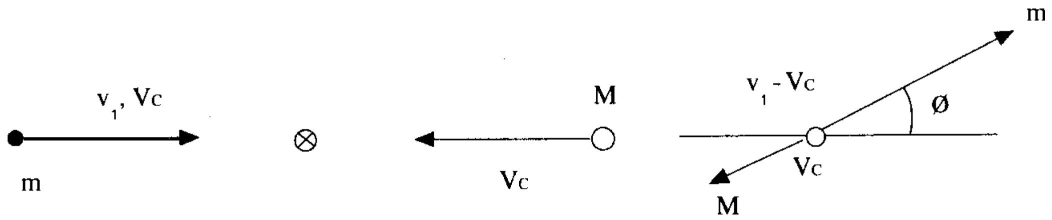
ความสัมพันธ์ระหว่างระบบปฏิบัติการ และระบบศูนย์กลางมวลได้แสดงไว้ในรูปที่ 3.1

ระบบปฏิบัติการ

ก่อนชน นิวตรอนมวล m, เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v_1, โมเมนตัม mv_1, พลังงาน E_1 และนิวเคลียส M, อยู่นิ่ง



ระบบปฏิบัติการก่อนชน ระบบปฏิบัติการหลังชน



ระบบศูนย์กลางมวลก่อนชน ระบบศูนย์กลางมวลหลังชน

รูปที่ 3.1 *การชนแบบยืดหยุ่นแล้วกระเจิงระหว่างนิวตรอนกับนิวเคลียส อธิบายในระบบปฏิบัติการ และอ้างอิงระบบศูนย์กลางมวล*

ความเร็วของศูนย์กลางมวลคือ Vc

$$Vc = \frac{m}{M + m} v_1 \qquad \text{...... (3.1)}$$

หลังชน นิวตรอนเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v_2, พลังงาน E_2 แล้วกระเจิงออกไปทำมุม θ กับทิศทางการเคลื่อนที่เดิม และนิวเคลียสกระเด็นออกไปเป็นมุมมุมหนึ่งจากทิศทางเดิมของนิวตรอน

ระบบศูนย์กลางมวล

ก่อนชน นิวตรอนเคลื่อนที่ไปทางขวาด้วยความเร็ว v_1 - Vc

$$v_1 - Vc = \frac{M}{M + m} v_1 \qquad (3.2)$$

นิวเคลียสเคลื่อนที่ไปทางซ้ายด้วยความเร็ว Vc

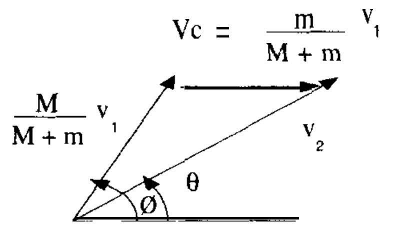
$$Vc = \frac{m}{M + m} v_1$$

หลังชน โมเมนตัมรวม = 0 = โมเมนตัมรวมก่อนชน

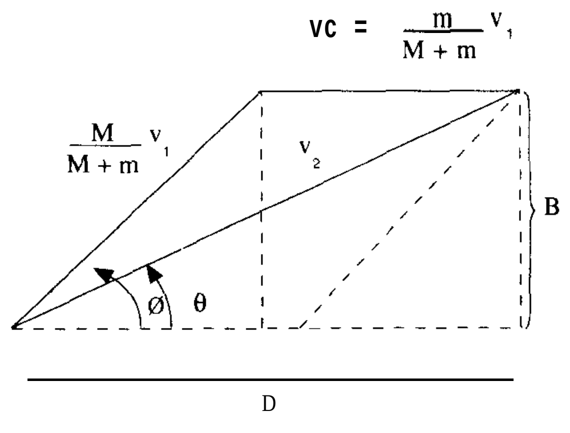
โมเมนตัมรวมทั้งหมดที่วัดในระบบศูนย์กลางมวล คือ

$$m\left(\frac{M}{M+m} v_1\right) - M\left(\frac{m}{M+m} v_1\right) = 0$$

โมเมนตัมเป็นปริมาณเวกเตอร์ ความเร็วของนิวเคลียสมีทิศทางตรงกันข้ามกับความเร็วของนิวตรอน หลังการชน นิวตรอนเคลื่อนที่เป็นมุม ø กับทิศทางการเคลื่อนที่เดิม เนื่องจากมีการอนุรักษ์โมเมนตัม หลังการชน โมเมนตัมรวมต้องเป็นศูนย์ และดังนั้นนิวเคลียสจึงเคลื่อนที่ออกไปด้วยมุม (180 + ø) กับทิศทางการเคลื่อนที่เดิมของนิวตรอน ผู้สังเกตเห็นว่าอนุภาคกับนิวเคลียสเคลื่อนที่ไปในทิศทางตรงกันข้าม ในการชนแบบยืดหยุ่น พลังงานจลน์ยังคงอนุรักษ์ ความเร็วของอนุภาคในระบบศูนย์กลางมวลจะเหมือนกันทั้งก่อนชนและหลังชน นอกจากจะมีการเปลี่ยนแปลงพลังงานจลน์รวมของทั้งสองอนุภาค ผลที่เกิดขึ้นในระบบศูนย์กลางมวล จึงเป็นการเปลี่ยนทิศทางความเร็วเท่านั้น โดยมีขนาดของความเร็วคงเดิม ส่วนในระบบปฏิบัติการ นิวเคลียสเดิมอยู่นิ่ง หลังการชนความเร็วเปลี่ยนแปลง นิวตรอนกระเจิงไปตามมุม θ ความเร็วคือ v_2 ซึ่งเป็นผลรวมทางเวกเตอร์ของความเร็วของนิวตรอนและความเร็วของศูนย์กลางมวลในระบบศูนย์กลางมวล ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วที่ต่างกัน ได้แสดงไว้ในรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 *แสดงแผนผังทางเวกเตอร์สำหรับความเร็วของนิวตรอนหลังการชนในระบบปฏิบัติการ และระบบศูนย์กลางมวล*



รูปที่ 3.3 *แสดงความสัมพันธ์ระหว่างมุมกระเจิงในระบบศูนย์กลางมวลและระบบปฏิบัติการ*

กรณีที่น่าสนใจ คือการหาความเร็วของนิวตรอนหลังชน

เมื่อมุม $\varnothing$ = O, ความเร็วของนิวตรอนคือ

$$v_2 = \frac{M}{M+m} v_1 + \frac{m}{M+m} v_1 = v_1$$

นิวตรอนจะไม่สูญเสียพลังงานในการชน คือ $E_2 = E_1$

เมื่อมุม $\varnothing$ = 180°, ความเร็วของนิวตรอนคือ

$$v_2 = \frac{M}{M+m} v_1 - \frac{m}{M+m} v_1 = \left(\frac{M-m}{M+m}\right) v_1$$

หรือ
$$\frac{(E_2)min}{El} = \frac{\frac{1}{2} mv_2^{\,2}}{\frac{1}{2} mv_2^{\,2}} = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 \qquad (3.3)$$

เมื่อนิวตรอนกระเด็นออกไปเป็นมุม 180° เป็นการชนแบบกลับทิศ (head on collision) นิวตรอนสูญเสียพลังงานมากที่สุด พลังงานของนิวตรอนหลังการชนจึงมีค่าน้อยที่สุด

ตัวอย่างที่ 3.1

จงหาพลังงานของนิวตรอนที่สูญเสียไปในการชนกับตัวกลางคือกราไฟท์ มวล = 12

$$\frac{(E_2)min}{El} = \left(\frac{M-m}{m+m}\right)^2 = \left(\frac{12.1}{12+1}\right)$$

$$= \left(\frac{11}{13}\right)^2 = 0.72$$

แสดงว่า นิวตรอนสูญเสียพลังงาน 28% ในการชนกับนิวเคลียสของคาร์บอน ตัวอย่าง เช่น ถ้าพลังงานเดิมของนิวตรอน คือ 1 เมกะอิเล็กตรอนโวลต์ จะเสียพลังงานไป 0.28 เมกะ-อิเล็กตรอนโวลต์

กรณีที่ใช้ไฮโดรเจนเป็นตัวลดความเร็ว A = 1 สำหรับการชนแบบกลับทิศ จะทำให้นิวตรอนหยุดทันที

จากรูปที่ 3.3 จะหาค่าของมุม $\varnothing$ ได้โดยกำหนดให้

$$D = v_1 \left(\frac{M}{M+m}\right) \cos \varnothing + v_1 \left(\frac{m}{M+m}\right),$$

$$B = v_1 \left(\frac{M}{M+m}\right) \sin 0$$

ดังนั้น $v_2^2 \; = \; D^2 + B^2$

$$v_2^2 = \left[v_1\left(\frac{M}{M+m}\right)\cos Ø + v_1\left(\frac{m}{M+m}\right)\right]^2 + \left[v_1\left(\frac{M}{M+m}\right)\sin Ø\right]^2$$

$$v_2^2 = v_1^2\left(\frac{M}{M+m}\right)^2\cos^2 Ø + v_1^2\left(\frac{m}{M+m}\right)^2 + 2\,v_1^2\,\frac{Mm}{(M+m)^2}\cos Ø + v_1^2\left(\frac{M}{M+m}\right)^2\sin^2 Ø$$

$$= \frac{v_1^2}{(M+m)}\left[M^2\cos^2 Ø + m^2 + 2\,Mm\cos Ø + M^2\sin^2 Ø\right]$$

$$= \frac{v_1^2}{(M+m)^2}\left[M^2(\cos^2 Ø + \sin^2 Ø) + m^2 + 2\,Mm\cos Ø\right]$$

$$v_2^2 = \frac{v_1^2}{(M+m)^2}\left[M^2 + m^2 + 2\,Mm\cos Ø\right]$$

อัตราส่วนของพลังงานของนิวตรอนหลังชนและก่อนชนคือ

$$\frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \frac{1}{(M+m)^2}\left[M^2 + m^2 + 2\,Mm\cos Ø\right] \qquad \text{...... (3.4)}$$

อัตราส่วนของมวลของตัวลดความเร็วต่อมวลของนิวตรอนคือ $\frac{M}{m}$ มีค่าเกือบเท่ากับ A เพราะนิวตรอนมีมวลเกือบเท่ากับ 1 สมการ (3.4) จึงเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{A^2 + 2\,A\cos Ø + 1}{(A+1)^2} \qquad \text{...... (3.5)}$$

ถ้ากำหนดให้ α = พารามิเตอร์สำหรับการชน (collision parameter) แสดงถึงการเปลี่ยนแปลงพลังงานสำหรับการชน 1 ครั้ง

$$\alpha = \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 \qquad \text{...... (3.6)}$$

พลังงานที่นิวตรอนสูญเสียไปในการชน 1 ครั้ง คือ

$$\frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{1+\alpha}{2}\right) + \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\cos Ø \qquad \text{. (3.7)}$$

นิวตรอนเสียพลังงานมากที่สุดเมื่อ $\varnothing = 180^\circ$, ซึ่งมีค่า $\cos \varnothing = -1$

$$E_2 = \alpha E_1$$

ถ้า $\varnothing = 0$, $\cos \varnothing = 1$, $E_2 = E_1$

การหาค่าพลังงานเฉลี่ยของนิวตรอนที่กระเจิงออกมาโดยนิวคลีไอเบาๆ สำหรับพลังงานของนิวตรอนที่น่าสนใจในเครื่องปฏิกรณ์นิวเคลียร์ประมาณได้ โดยใช้สูตร

พลังงานเฉลี่ย $$\overline{E_2} = \frac{E_1 + E_2}{2} = \frac{1}{2}(1+\alpha)E_1 \qquad \text{...... (3.8)}$$

พลังงานที่สูญเสียไปเฉลี่ย $$\overline{\Delta E_1} = E_1 - \overline{E_2}$$

$$= E_1 - \frac{1}{2}(1+\alpha)\ E_1$$

$$= \frac{1}{2}\ (1\text{-a})\ E_1 \qquad (3.9)$$

ส่วนของพลังงานที่สูญเสียไปต่อพลังงานเดิม

$$\frac{\overline{\Delta E_1}}{E_1} = \frac{1}{2}(1-\alpha) \qquad \text{...... (3.10)}$$

สมการ (3.10) จะใช้ได้สำหรับนิวคลีไอหนักที่มีพลังงานไม่สูงมากนัก เพราะค่าพลังงานขีดเริ่มเปลี่ยน (threshold energy) สำหรับการกระเจิงแบบไม่ยืดหยุ่นมีค่าต่ำ เป็นผลให้มีการกระเจิงแบบไม่ยืดหยุ่นเกิดขึ้นด้วย แต่สำหรับธาตุเบา พลังงานขีดเริ่มเปลี่ยน สำหรับการกระเจิงแบบไม่ยืดหยุ่นมีค่าสูงมาก จึงไม่ค่อยเกิด ดังนั้นปฏิกิริยาการกระเจิงแบบยืดหยุ่นจึงมีความสำคัญกับนิวเคลียสเบา

ตารางที่ 3.1 แสดงพารามิเตอร์สำหรับการชน

นิวเคลียส	เลขมวล	α	ξ
ไฮโดรเจน	1	0	1.000
น้ำ		*	0.920 †
ดิวทิเรียม	2	0.111	0.725
น้ำหนัก		*	0.509 †
เบอร์ริลเลียม	9	0.640	0.209
คาร์บอน	12	0.716	0.158
ออกซิเจน	16	0.779	0.120
โซเดียม	23	0.840	0.0825
เหล็ก	56	0.931	0.0357
ยูเรเนียม	238	0.983	0.00838

† *หมายถึงค่าเฉลี่ยโดยประมาณ*

* *ยังไม่ได้ค่าแน่นอน*

จากสมการ (3.6) และตาราง 3.1 สังเกตได้ว่า ค่าพารามิเตอร์สำหรับการชนมีค่าเป็นศูนย์สำหรับธาตุที่มีค่า $A=1$ คือ ธาตุไฮโดรเจน และเมื่อเลขมวลของธาตุมีค่าเพิ่มขึ้น ค่าพารามิเตอร์สำหรับการชนจะเพิ่มขึ้น

สำหรับธาตุไฮโดรเจน ค่าเฉลี่ยของพลังงานที่สูญเสียไปมีค่าเป็น $\frac{1}{2}$ เท่าของพลังงานเดิม

สำหรับธาตุคาร์บอน, $\alpha = 0.716$

โดยการใช้สมการ (3.10),

พลังงานของนิวตรอนสูญเสียไป $= \frac{1}{2}(1-0.716)$

$= 0.142$ ของพลังงานเดิม

หรือสูญเสียพลังงานในการชน $= 14.2\%$ ของพลังงานเดิม

สำหรับธาตุยูเรเนียม, $\alpha = 0.983$

พลังงานของนิวตรอนที่เข้าชนสูญเสียไป $= \frac{1}{2}(1 - 0.983)$

$= 0.0085$ ของพลังงานเดิม

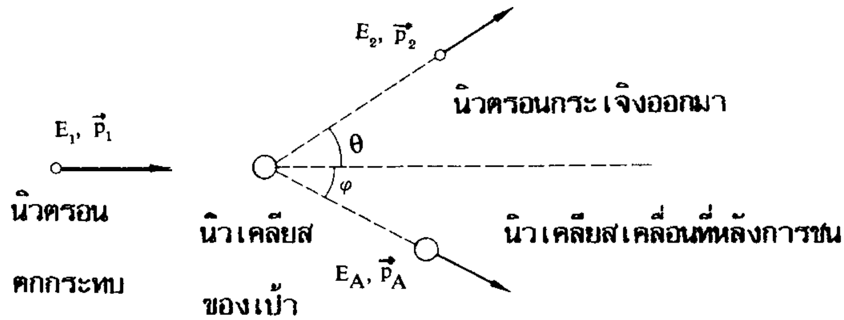
หรือสูญเสียพลังงานในการชน $= 0.85\%$ ของพลังงานเดิม

พอจะสรุปได้ว่า นิวตรอนสูญเสียพลังงานในการชนกับนิวเคลียสหนักน้อยกว่าเมื่อใช้นิวเคลียสเบาเป็นตัวลดความเร็ว

3.2 การหาพลังงานของนิวตรอนหลังการชนในระบบปฏิบัติการ

เมื่อนิวตรอนชนกับนิวเคลียสซึ่งอยู่นิ่ง นิวตรอนจะกระเจิงออกไปเป็นมุมๆ หนึ่ง แล้วนิวเคลียสจะเคลื่อนที่ไปเล็กน้อยจากตำแหน่งเดิมที่มีการชน พลังงานจลน์ของนิวตรอนที่กระเจิงมีค่าน้อยกว่า พลังงานของนิวตรอนที่เข้าชนด้วยปริมาณเท่ากับพลังงานที่ทำให้นิวเคลียสเคลื่อนที่ นิวตรอนจึงสูญเสียพลังงานโดยการชนแบบยืดหยุ่น แต่พลังงานภายในของนิวเคลียสไม่เปลี่ยนแปลง

การหาพลังงานของนิวตรอนหลังการชน ยังคงใช้หลักการอนุรักษ์พลังงานและโมเมนตัม



รูปที่ 3.4 แสดงการชนแบบยืดหยุ่นของนิวตรอนกับนิวเคลียสของเป้า

สมมุติให้ $E_1, \vec{p}_1$ และ $E_2, \vec{p}_2$ เป็นพลังงานจลน์และโมเมนตัมของนิวตรอนก่อนชนและหลังการชนตามลำดับ และ

$E_A, \vec{p}_A$ เป็นพลังงานจลน์และโมเมนตัมของนิวเคลียสที่เคลื่อนที่ตามมุม φ

θ เป็นมุมที่นิวตรอนกระเจิงไป ในระบบปฏิบัติการ (L-system) ตามรูปที่ 3.4

การชนเป็นแบบยืดหยุ่น,

จากหลักการอนุรักษ์พลังงาน

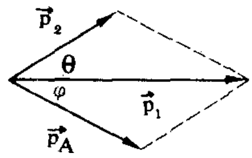
$$E_1 = E_2 + E_A \qquad \text{...... (3.11)}$$

จากหลักการอนุรักษ์โมเมนตัม

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_A$$

ถ้าเขียนเป็นแผนผังทางเวกเตอร์ จะได้ตามรูปที่ 3.5 โดยใช้กฎของโคไซน์

$$p_A^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2\, p_1 p_2 \cos\theta \qquad \text{...... (3.12)}$$



รูปที่ 3.5 แผนผังทางเวกเตอร์ แสดงการอนุรักษ์โมเมนตัม

จากกลศาสตร์แผนเดิม (Classical mechanics)

$$p_A^2 = 2\,ME_A$$

$$p_1^2 = 2\,mE_1$$

$$p_2^2 = 2\,mE_2$$

เมื่อ M และ m เป็นมวลของนิวเคลียส และมวลของนิวตรอน ตามลำดับ สมการ (3.12) เขียนได้ว่า

$$ME_A = mE_1 + mE_2 - 2m\sqrt{E_1 E_2}\cos\theta \qquad \text{...... (3.13)}$$

เมื่อ $\frac{M}{m}$ มีค่าเกือบเท่า A ซึ่งเป็นเลขมวลอะตอมของนิวเคลียส
สมการ (3.13) จึงมีค่าเท่ากับ

$$AE_A = E_1 + E_2 - 2\,m\sqrt{E_1 E_2}\cos\theta$$

แทนค่า E_A จากสมการ (3.11) แล้วจัดใหม่ จะได้

$$(A+1)E_2 - 2\sqrt{E_1 E_2}\cos\theta - (A-1)E_1 = 0$$

เป็นสมการที่มีกำลังสอง (Quadratic equation) ของ $\sqrt{E_2}$ หาผลเฉลย ดังนี้

$$E_2 = \frac{E_1}{(A+1)^2}\left[\cos\theta + \sqrt{A^2 - \sin^2\theta}\right]^2 \qquad \text{...... (3.14)}$$

กรณีที่มีการชนกัน เมื่อ θ ประมาณได้ว่าเกือบเท่ากับศูนย์ ใช้สมการ (3.14), $E_2 = E_1$
จะไม่มีการสูญเสียพลังงานในการชน นั่นคือ

เมื่อ $\theta = 0, \quad E_2 = E_1$

เมื่อ $\theta = \pi, \quad E_2 = (E_2)\min$

กรณีนี้นิวตรอนจะกระเด็นกลับทิศ และสูญเสียพลังงานมากที่สุด, โดยใช้สมการ (3.14) จะได้

$$(E_2)\min = \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 E_1 = \alpha\ E_1 \qquad \text{...... (3.15)}$$

เมื่อ

$$\alpha = \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 \qquad \text{...... (3.16)}$$

เรียก α ว่า **พารามิเตอร์สำหรับการชน**

ตัวอย่างที่ 3.2

นิวตรอนพลังงาน 1 เอมอีวีชนกับนิวเคลียสของดิวทิเรียม ทำให้กระเจิงไปเป็นมุม 45°

(ก) จงหาพลังงานของนิวตรอนที่กระเจิง

(ข) จงหาพลังงานของนิวเคลียสที่เคลื่อนที่

(ก) สมการ (3.14),

$$E_2 = \frac{E_1}{(A+1)}\left[\cos\theta + \sqrt{A^2 - \sin^2\theta}\right]^2$$

แทนค่า $E_1 = 1$ เอมอีวี, $A = 2$, $\theta = 45°$

$$E_2 = \frac{1}{(2+1)}\left[\cos 45° + \sqrt{4 - \sin^2 45°}\right]^2$$

$$= \frac{1}{3^2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{4 - \frac{1}{2}}\right]^2$$

$$= \frac{1}{9}\left[0.7071 + \sqrt{3.5}\right]^2$$

$$= \frac{1}{9}\left[0.7071 + 1.87081\right]^2$$

$$= \frac{1}{9}(2.5779)^2$$

$$= \frac{1}{9}(6.6455)$$

$$= 0.738 \text{ เอมอีวี}$$

(ข) สมการ (3.11)

$$E_A = E_1 - E_2$$

$$= 1 - 0.738$$

$$= 0.262 \text{ เอมอีวี}$$

3.3 ความสัมพันธ์ระหว่างมุมที่กระเจิงออกไปในระบบศูนย์กลางมวลและระบบปฏิบัติการ

ความสัมพันธ์ระหว่างมุม ϕ ที่กระเจิงออกไปในระบบศูนย์กลางมวล และมุม θ ที่กระเจิงออกไปในระบบปฏิบัติการ หาได้โดยพิจารณาจากรูปที่ 3.3 ผลจากการคำนวณที่ได้แสดงไว้แล้ว คือ

$$v_2^2 = \frac{v_1^2}{(M+m)^2}\left[M^2 + m^2 + 2\,Mm\cos\phi\right]$$

$$v_2 = \frac{v_1}{M+m}\sqrt{M^2 + m^2 + 2\,Mm\cos\phi}$$

$$\cos\theta = \frac{D}{v_2}$$

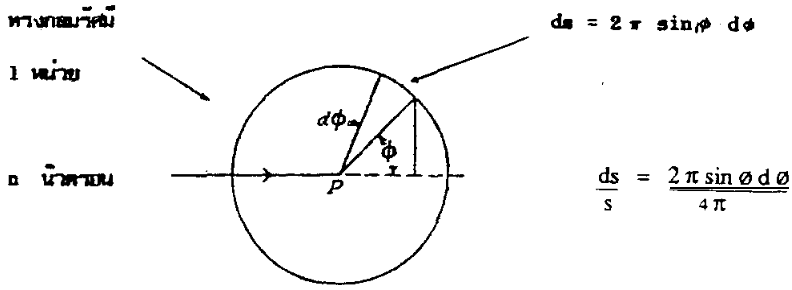
$$\cos\theta = \frac{v_1\left(\frac{M}{M+m}\right)\cos\phi + v_1\left(\frac{m}{M+m}\right)}{\frac{v_1}{(M+m)}\sqrt{M^2 + m^2 + 2\,Mm\cos\phi}}$$

$$\cos\theta = \frac{M\cos\phi + m}{\sqrt{M^2 + m^2 + 2\,Mm\cos\phi}}$$

ถ้า $m = 1$ และ $M = A$

$$\cos\theta = \frac{A\cos\phi + 1}{\sqrt{A^2 + 2A\cos\phi + 1}} \qquad (3.17)$$

การชนในระบบศูนย์กลางมวล เป็นการกระเจิงออกรอบตัวในลักษณะสมมาตร กรณีที่น่าสนใจในการเกิดปฏิกิริยาการแบ่งแยกตัวทางนิวเคลียร์ (nuclear fission) ก็คือการหาค่าเฉลี่ยของมุมที่กระเจิงไปในระบบปฏิบัติการ คือค่าเฉลี่ยของ $\cos\theta$ ซึ่งจะหาค่าโดยการอินทิเกรตสมการ (3.17) ตลอดค่าของมุมกระเจิง ϕ ที่เป็นไปได้ ในระบบศูนย์กลางมวล



รูปที่ 3.6 แสดงการคำนวณหาค่าเฉลี่ยของ cos θ

พิจารณารูปที่ 3.6 สมมุติว่ามี n นิวตรอน กระเจิงรอบจุด P ซึ่งอยู่นิ่งในระบบศูนย์กลางมวล เป็นการกระเจิงออกรอบตัว จำนวนนิวตรอนที่กระเจิงระหว่างมุม $\varnothing$ จนถึง $\varnothing + d\varnothing$ จะต้องเป็นอัตราส่วนระหว่างผิวทรงกลมส่วนที่ตัดออกโดยมุมต้นต่อผิวทั้งหมดของทรงกลม

จำนวนนิวตรอนส่วนที่กระเจิงในช่วงมุม $\varnothing$ จนถึง $\varnothing + d\varnothing = \dfrac{2\pi\ n \sin\varnothing\, d\varnothing}{4\pi}$

$$= \frac{n}{2}\sin\varnothing\, d\varnothing \qquad \text{...... (3.18)}$$

ถ้ากำหนดให้ $\overline{\cos\theta}$ หรือ $\bar{\mu}$ คือค่าเฉลี่ยของมุมที่กระเจิง

$$\overline{\cos\theta} = \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos\theta\left[\frac{n}{2}\sin\varnothing\, d\varnothing\right]$$

แทนค่า $\cos\theta$ จากสมการ (3.17) จะได้

$$\overline{\cos\theta} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{A\cos\varnothing + 1}{\sqrt{A^2 + 2A\cos 0 + 1}}\sin 0\, d0$$

แทน $\cos\varnothing = x, \quad dx = -\sin 0\, d0$

$$\overline{\cos\theta} = -\frac{1}{2}\int_1^{-1}\frac{Ax + 1}{\sqrt{A^2 + 2Ax + 1}}\,dx = \frac{2}{3A}$$

หรือ $$\bar{\mu} = \frac{2}{3A} \qquad \text{..... (3.19)}$$

สมการ (3.19) แสดงว่า ถ้ามวลของนิวเคลียสที่ใช้กระเจิงเป็นนิวเคลียสหนัก, $\overline{\cos\theta}$ จะมีค่าน้อย และการกระเจิงในระบบปฏิบัติการเกือบจะเป็นการกระเจิงออกรอบตัว, ในกรณีของกราไฟท์ $\overline{\cos\theta} = 0.056$ การกระเจิงจะไม่เป็นการกระเจิงออกรอบตัวนักในระบบปฏิบัติการ ส่วนนิวเคลียสที่มีมวลเบาเช่น ไฮโดรเจน, $\overline{\cos\theta} = \frac{2}{3}$ การกระเจิงจะมีทิศทางไปข้างหน้าเท่านั้น

3.4 การหาค่าเฉลี่ยของพลังงานที่ลดลงต่อการชน 1 ครั้งของนิวตรอนกับนิวเคลียส

ξ เป็นสัญลักษณ์ที่ใช้ในการคำนวณการลดพลังงานของนิวตรอน มีความหมายว่าเป็นค่าเฉลี่ยของพลังงานที่ลดลงต่อการชน 1 ครั้ง ในรูปของลอกฐานอี เป็นค่าที่ไม่ขึ้นกับพลังงาน

เนื่องจากนิวตรอนพลังงาน E_1 เมื่อเกิดการชนกับนิวเคลียสแล้วมีโอกาสกระเจิงออกไป พลังงานหลังชน E_2 จะอยู่ในระหว่างพลังงาน E_1 จนถึง αE_1 ความน่าจะเป็นของการกระเจิงในช่วงพลังงาน dE_2 ก็คือ อัตราส่วนของ dE_2 ต่อพลังงานที่เป็นไปได้ในช่วง $E_1 - \alpha E_1$

จากสมการ (3.7), $\frac{E_2}{E_1}$ เป็นฟังก์ชันของ $\cos\varnothing$, และทุกค่าของ $\cos\varnothing$, มีความน่าจะเป็นเกิดขึ้นได้เท่าๆ กัน ดังนั้น ถ้ากำหนดให้ PdE_2 คือความน่าจะเป็นที่นิวตรอนพลังงานเดิม E_1 เมื่อชนกับนิวเคลียส 1 ครั้ง แล้วมีพลังงานอยู่ระหว่าง E_2 และ $E_2 + dE_2$

$$PdE_2 = \frac{dE_2}{(1 - a)\ E_1} \tag{3.20}$$

โดยใช้คำจำกัดความของ ξ

$$\xi = \overline{\ln E_1 - \ln E_2} = \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right)_{av}$$

และ

$$\xi = \int_{\alpha E_1}^{E_1} \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) . PdE_2$$

$$= \int_{\alpha E_1}^{E_1} \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) . \frac{dE_2}{(1-\alpha)\ E_1}$$

ถ้า $x = \frac{E_2}{E_1}$

$$\xi = \frac{1}{1-a} \int_1^{\alpha} \ln x\ .\ dx$$

$$= \frac{1}{1-a}\left[x \ln x - x\right]_1^{\alpha}$$

$$= \frac{1}{1-a}\left[\alpha \ln a - a + 1\right]$$

$$= \frac{1}{1-a}\left[1 - a + a \ln \alpha\right]$$

$$= 1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \alpha$$

แทนค่า α, จะได้

$$\xi = 1 + \frac{\left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 \ln\left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2}{1 - \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2}$$

$$= 1 - \frac{2\,(A-1)^2 \ln \frac{A+1}{A-1}}{4A}$$

$$\xi = 1 - \frac{(A-1)^2}{2A} \ln \frac{A+1}{A-1} \qquad \text{... (3.21)}$$

เมื่อ A คือเลขมวลของนิวเคลียสที่ใช้เป็นเป้า
สำหรับนิวเคลียสที่มีเลขมวลต่ำ

กระจาย ln

$$\frac{A+1}{A-1} = 2\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{3A^3} + \frac{1}{5A^5} + ...\right)$$

$$\xi = 1 - \frac{(A-1)^2}{A}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{3A^3} + \frac{1}{5A^5} \ldots.\right)$$

$$= 1 - \frac{(A^2 - 2A + 1)}{A}\frac{1}{A}\left(1 + \frac{1}{3A^2} + \frac{1}{5A^4} + \ldots.\right)$$

$$= 1 - (1 - \frac{2}{A} + \frac{1}{A^2})(1 + \frac{1}{3A^2})$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{2}{A} + \frac{1}{A^2} + \frac{1}{3A^2} - \frac{2}{3A^3} + \frac{1}{3A^4}\right)$$

ตัวหารมีค่าสูงมาก ผลหารจะมีค่าน้อย จึงตัดเทอมที่มีค่า A^3 ทิ้ง

$$\xi = 1 - (1 - \frac{2}{A} + \frac{1}{A^2} + \frac{1}{3A^2})$$

$$= 1 - 1 + \frac{2}{A} - \frac{1}{A^2} - \frac{1}{3A^2}$$

$$= \frac{2}{A}(1 - \frac{2}{3A})$$

$$= \frac{2}{A\left(\dfrac{1}{1 - \frac{2}{3A}}\right)}$$

กระจาย $\dfrac{1}{1 - \frac{2}{3A}} = 1 + \dfrac{2}{3A} + \left(\dfrac{2}{3A}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{3A}\right)^3 + \left(\dfrac{2}{3A}\right)^4 +$

สำหรับธาตุที่มีค่า A มากกว่า 10, จะตัดเทอมที่มีกำลังสอง, กำลังสาม...ทิ้ง, จึงประมาณได้ว่า

$$\xi = \frac{2}{A + \frac{?}{3}} \qquad \ldots\ldots (3.22)$$

ตัวอย่างที่ 3.3

จงหาค่า ξ สำหรับ คาร์บอน -12

$$\xi = \frac{2}{A + \frac{2}{3}}$$

$$= \frac{2}{12 + \frac{2}{3}} = 0.158$$

3.5 กำลังที่ทำให้นิวตรอนช้าลง และอัตราส่วนลดความเร็ว

.(Slowing-down Power and Moderating Ratio)

เมื่อนิวตรอนชนกับตัวกลาง เพื่อให้พลังงานลดลงจากเดิมจนมีพลังงานตามต้องการ ปรากฏว่า ธาตุที่มีค่า ξ สูง จะทำให้จำนวนครั้งของการชนมีค่าน้อย ธาตุนั้นจึงเหมาะที่จะใช้เป็นวัสดุลดความเร็ว แต่แม้ว่า ค่า ξ จะมีค่ามาก แต่ถ้าความน่าจะเป็นของการกระเจิงที่วัดได้จากค่าภาคตัดขวางของการกระเจิงมีค่าน้อย ก็ไม่เป็นผลดีในการลดความเร็ว

มีการกำหนด กำลังที่ทำให้นิวตรอนช้าลง (slowing down power) ว่าเป็นผลคูณระหว่าง ξ กับค่าภาคตัดขวางมหัพภาคสำหรับการกระเจิงของวัสดุนั้น เขียนได้ว่า

กำลังที่ทำให้นิวตรอนช้าลง $= \xi.\Sigma_s$ ...... (3.23)

เป็นการวัดความเร็วในการลดพลังงานของนิวตรอน และเป็นความสามารถของนิวคลีไอของวัสดุใน 1 ลูกบาศก์เซนติเมตรที่จะทำให้นิวตรอนช้าลง

อย่างไรก็ตาม ยังมีแฟกเตอร์ที่จะต้องพิจารณา คือค่าภาคตัดขวางมหัพภาคสำหรับการดูดกลืนนิวตรอน วัสดุที่มีการดูดกลืนนิวตรอนอย่างแรง ไม่ควรนำมาใช้ในเครื่องปฏิกรณ์ และไม่มีประโยชน์ที่จะนำมาใช้เป็นตัวลดความเร็ว จึงได้กำหนดอัตราส่วนลดความเร็วว่าเป็นอัตราส่วนของกำลังที่จะทำให้นิวตรอนช้าลงต่อภาคตัดขวางมหัพภาคสำหรับการดูดกลืนนิวตรอน เขียนได้ว่า

อัตราส่วนลดความเร็ว $= \dfrac{\xi.\Sigma_s}{\Sigma_a}$ ...... (3.24)

ค่าอัตราส่วนลดความเร็วจะเป็นตัวเลขที่แสดงว่าวัสดุนั้นเป็นตัวลดความเร็วของนิวตรอนได้ดีหรือไม่ ได้แสดงค่าต่างๆ ไว้ในตารางที่ 3.2 เมื่อนิวตรอนเดิมมีพลังงาน 2 เอมอีวี ลดพลังงานลงจนเป็น 0.025 อิเล็กตรอนโวลต์

ตารางที่ 3.2 แสดงคุณสมบัติในการกระเจิงของนิวคลีไอเบา

วัสดุ	ξ	จำนวนการชนเพื่อให้เป็นเทอร์มาล	อัตราส่วนลดความเร็ว
ไฮโดรเจน	1.000	18	66
น้ำ	0.927	19	67
ดิวทิเรียม	0.725	25	มากกว่า 5820
ฮิเลียม	0.525	43	94
ลิเทียม	0.268	67	น้อยมาก
เบอร์ริลเลียม	0.209	86	160
โบรอน	0.171	105	น้อยมาก
คาร์บอน	0.158	114	169
ไนโตรเจน	0.136	132	0.7
ออกซิเจน	0.120	150	487
ฟลูออรีน	0.102	177	มากกว่า 34

3.6 การหาจำนวนครั้งที่นิวตรอนเข้าชนนิวเคลียสแล้วพลังงานลดลงตามต้องการ

ในการชน 1 ครั้ง พลังงานของนิวตรอนลดลงเฉลี่ยคือ $\ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right)_{\text{เฉลี่ย}}$
ถ้า N คือจำนวนครั้งที่นิวตรอนเข้าชนนิวเคลียสแล้วพลังงานลดลงจากพลังงานเดิม E_i จนถึงพลังงานสุดท้าย E_f

$$N \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right)_{\text{เฉลี่ย}} = \ln\frac{E_i}{E_f}$$

$$N = \frac{\ln\frac{E_i}{E_f}}{\ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right)_{\text{เฉลี่ย}}}$$

$$N = \frac{\ln\frac{E_i}{E_f}}{\xi} \qquad \ldots\ldots (3.25)$$

ตัวอย่างที่ 3.4

จงหาพลังงานที่ลดลง เมื่อนิวตรอนพลังงาน 2 เอมอีวี เข้าชนนิวเคลียสของคาร์บอน แล้วพลังงานลดลงจนเป็น 0.033 อิเล็กตรอนโวลต์ และจำนวนครั้งที่นิวตรอนจะต้องเข้าชนกับนิวเคลียสของคาร์บอนจนมีพลังงานตามต้องการ

พลังงานที่ลดลง $= \ln \frac{2 \times 10^6}{0.033} = \ln 6 \times 10^7 = 18$

ξ ของคาร์บอน $= 0.158$

จำนวนครั้งที่นิวตรอนเข้าชนเฉลี่ย $= \frac{18}{0.158} = 114$ ครั้ง

สรุป

1. ในการเปรียบเทียบการชนระหว่างนิวตรอนกับธาตุใดๆ ในระบบปฏิบัติการและระบบศูนย์กลางมวล ทำให้ทราบว่า การชนในระบบศูนย์กลางมวล หลังการชนกับนิวเคลียสแล้ว ศูนย์กลางมวลจะหยุดนิ่ง แล้วจึงกระเจิงออกไปในทิศทางตรงข้าม เป็นการกระเจิงออกรอบตัว ส่วนในระบบปฏิบัติการ หลังจากเกิดการชนกันแล้ว นิวตรอนและนิวเคลียส กระเจิงไปข้างหน้าเป็นมุมต่างๆ กัน

2. การลดความเร็วของนิวตรอน ตามระบบปฏิบัติการ จะได้ว่า เมื่อกระเด็นกลับทิศ $\theta = \pi$

$$E_{2_{min}} = \alpha E_1$$

เมื่อ $\alpha = \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2$

แต่ถ้านิวตรอนกระเจิงออกไปเป็นมุม θ จะสามารถคำนวณหา E_2 ได้จาก

$$E_2 = \frac{E_1}{(A+1)^2}\left[(\cos\theta + \sqrt{A^2 - \sin^2\theta}) \right]^2$$

3. อัตราส่วนลดความเร็ว เป็นค่าที่ขึ้นกับ ξ, Σ_s และ Σ_a ของวัสดุที่จะนำมาใช้เป็นตัวลดความเร็ว

หาได้จาก $\dfrac{\xi\,\Sigma_s}{\Sigma_a}$

เป็นการแสดงว่า วัสดุชนิดใด เหมาะที่จะใช้เป็นตัวลดความเร็ว

แบบฝึกหัด

ข้อ 3.1 นิวตรอนวิ่งเข้าชนเป้าอะลูมิเนียม-27 แบบยืดหยุ่นแล้วกระเจิงเป็นมุม 30° จากทิศทางเดิม จงหาพลังงานของนิวตรอนหลังชน

ข้อ 3.2 นิวตรอน พลังงาน 1 เอมอีวี วิ่งเข้าชนนิวเคลียสของคาร์บอนซึ่งอยู่นิ่งแบบยืดหยุ่น ทำให้กระเจิงไปเป็นมุม 90° กับทิศทางเดิม จงหา

(ก) พลังงานของนิวตรอนที่กระเจิง

(ข) พลังงานของนิวเคลียสที่เคลื่อนที่

(ค) มุมที่นิวเคลียสเคลื่อนที่หลังชน

ข้อ 3.3 นิวตรอนพลังงาน 2 เอมอีวี วิ่งเข้าชนธาตุ เบอร์ริลเลียม-9 ทำให้เสียพลังงานมากที่สุด จงหาพลังงานหลังชน

ข้อ 3.4 จงหาอัตราส่วนลดความเร็ว ของตัวลดความเร็วต่อไปนี้

	มวลอะตอม หรือโมเลกุล	ความหนาแน่น กรัม/ซม.^{3}	จำนวนอะตอม/ซม.^{3} x 10^{24}	σ_a บาร์น	σ_s บาร์น	ξ
Be	9	1.85	0.1237	0.010	7.0	0.209
BeO	25	3.025	0.0728	0.010	6.8	0.173
C	12	1.60	0.0803	0.004	4.8	0.158

ข้อ 3.5 จงหาจำนวนครั้งที่นิวตรอนพลังงาน 2 เอมอีวี วิ่งเข้าชนกับตัวลดความเร็ว ซึ่งเป็น BeO แล้ว ทำให้พลังงานของนิวตรอนลดลงจนเป็น 0.0253 อีวี กำหนด ξ (BeO) = 0.173