

บทที่ 6

การแพร่นิวตรอนและการหน่วงความเร็ว (Neutron Diffusion and Moderation)

วัตถุประสงค์

เพื่อให้ นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับ

1. กฎของฟิค (Fick's law) และการแพร่นิวตรอน
2. เงื่อนไขขอบเขตของสมการการแพร่
3. วิธีการหาผลเฉลยของสมการการแพร่และสามารถนำไปประยุกต์ใช้งาน
4. การแพร่เทอร์มอลนิวตรอน

ในการออกแบบเครื่องปฏิกรณ์นิวเคลียร์ จำเป็นต้องมีการคำนวณการแจกแจงนิวตรอนที่เกิดขึ้นในระบบซึ่งมักจะเป็นปัญหาที่ยากที่จะคำนวณทิศทางการเคลื่อนที่ของนิวตรอนที่เกิดการชนเข้าไปเข้ามาในเครื่องปฏิกรณ์ อย่างไรก็ตามก็มีการประมาณการแพร่ของนิวตรอนที่เกิดขึ้นเหมือนการแพร่ของแก๊ส ดังนั้นจึงมีการแก้สมการการแพร่ (diffusion equation) ซึ่งในการนำไปใช้งานจริงอาจเรียกการประมาณการแพร่ (diffusion approximation) เพื่อนำมาใช้ในการออกแบบเครื่องปฏิกรณ์

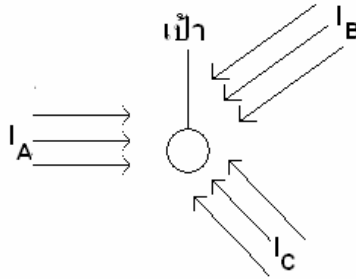
6.1 ฟลักซ์นิวตรอน (Neutron flux)

เมื่อความเข้มข้นของนิวตรอน (I) กระทับกับเป้าหมายจำนวนการชนที่เกิดขึ้นต่อลูกบาศก์เซนติเมตรต่อวินาทีหรืออัตราการเกิดอันตรกิริยาทั้งหมด (total interaction rate) กำหนดเป็น

$$F = \sum_i I \quad [\text{neutrons}/(\text{cm}^3 \cdot \text{s})] \quad (6.1)$$

ตามสมการ (6.1) พิจารณาว่าการชน 1 ครั้ง เกิดจากนิวตรอน 1 ตัวทำปฏิกิริยากับ 1 นิวเคลียส (หรือ 1 อะตอม) จึงอาจแทนจำนวนการชนด้วยจำนวนนิวตรอนที่เข้าชน และ $\sum_i$ คือภาคตัวรวมทุกภาคทั้งหมด

พิจารณาการทดลองตามรูปที่ 6.1 มีลำนิวตรอนหลายลำเข้ากระทบเป้าเล็กๆ ในทิศทางต่างๆ โดยแต่ละทิศทางของลำนิวตรอนมีความเข้มข้นต่างกันแต่เพื่อความสะดวกในการศึกษาให้มีพลังงานเท่ากัน ซึ่งตามความจริงแล้วอันตรกิริยาที่เกิดขึ้นอาจไม่ขึ้นกับมุมที่นิวตรอนเข้าชนกับ



รูปที่ 6-1 ลำนิวตรอนเข้าชนเป้า

นิวเคลียส ดังนั้นสมการ (6.1) จึงเขียนใหม่ได้เป็น

$$\text{อัตราการเกิดอันตรกิริยาทั้งหมด} = F = \sum_i (I_A + I_B + I_C + \dots) \quad (6.2)$$

เมื่อนิวตรอนมีพลังงานเท่ากัน ดังนั้นจากสมการ (2.1) จะได้

$$I_A = n_A v, \quad I_B = n_B v, \quad I_C = n_C v, \dots$$

เมื่อ v คืออัตราเร็วของนิวตรอน ดังนั้นสมการ (6.2) จึงเขียนได้เป็น

$$F = \sum_i (n_A + n_B + n_C + \dots) v \quad (6.3)$$

เมื่อ $n_A, n_B, n_C, \dots$ คือความหนาแน่นของนิวตรอน neutrons/cm³. ในแต่ละลำแสง ถ้าให้ n แทนความหนาแน่นของนิวตรอนทั้งหมดที่กระทบเป้า หรือ $n = n_A + n_B + n_C + \dots$ จะได้สมการ (6.3) เป็น

$$F = \sum_i n v = \sum_i \phi \quad (6.4)$$

เมื่อ ϕ คือฟลักซ์ของนิวตรอนซึ่งมีหน่วยเดียวกับกับความเข้มข้นของนิวตรอนคือ neutrons/(cm².s). สมการ (6.4) เราอาจเรียกว่าคือความหนาแน่นของการชน (collision density) ที่เกิดขึ้นในเป้า

กรณีที่นิวตรอนมีพลังงานที่แตกต่างกัน เราอาจพิจารณา ว่านิวตรอนมีพลังที่แจกแจงเป็นความหนาแน่นของนิวตรอนต่อหน่วยพลังงาน หรือ $n(E)$ ดังนั้น

$$n(E)dE = \text{จำนวนนิวตรอนที่มีพลังงานระหว่าง } E \text{ และ } E + dE$$

ดังนั้นจากสมการ(6.4) อัตราการเกิดอันตรกิริยาของนิวตรอนพลังงานในช่วงดังกล่าวนี้มีค่า

$$dF = \sum_i (E).n(E)dE v(E) \quad (6.5)$$

โดยทุกตัวแปรเป็นฟังก์ชันกับพลังงานหมด ดังนั้นอัตราการเกิดอันตรกิริยาทั้งหมด จึงมีค่า

$$F = \int_0^{\infty} \sum_i (E).n(E)v(E) dE = \int_0^{\infty} \sum_i (E).\phi(E) dE \quad (6.6)$$

โดยที่ $\phi(E) = n(E)v(E)$ เรียกฟลักซ์นิวตรอนที่ขึ้นกับพลังงานหรือฟลักซ์นิวตรอนต่อหน่วยพลังงาน ตามสมการ(6.6) นั้นพิจารณาว่านิวตรอนมีทุกช่วงพลังงานตั้งแต่ 0 ถึง ∞ และพิจารณาทุกอันตรกิริยาที่เกิดขึ้น ถ้าเราพิจารณาจำนวนที่เกิดการชนแบบกระเจิงต่อลูกบาศก์เซนติเมตรต่อวินาที ใชัตัวห้อย s เป็น

$$F_s = \int_0^{\infty} \Sigma_s(E) \cdot \phi(E) dE \quad (6.7)$$

หรือจำนวนที่เกิดจากการดูดกลืนต่อเซนติเมตรต่อวินาที ใชัตัวห้อย a เป็น

$$F_a = \int_0^{\infty} \Sigma_a(E) \cdot \phi(E) dE \quad (6.8)$$

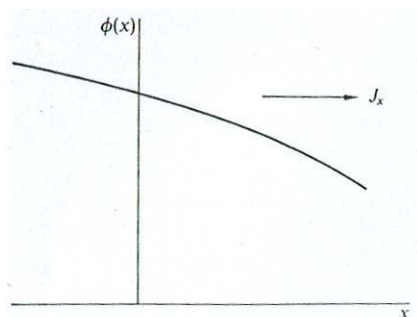
แบบนี้ไปเรื่อย ๆ

6.2 กฎของฟิช (Fisk's Law)

กฎของฟิชได้มาจากพิจารณาว่าสารละลายหรือแก๊สที่มีความเข้มข้นหรือความหนาแน่นในบริเวณหนึ่งมากกว่าบริเวณใกล้เคียงแล้วสารละลายหรือแก๊สนั้นจะแพร่ไปยังบริเวณที่มีความเข้มข้นน้อยกว่าหรือกล่าวได้ว่าอัตราการไหลของของเหลวหรือแก๊สจะเป็นสัดส่วนกับเกรเดียนต์หรือความชันที่ติดลบ (negative gradients) ของความเข้มข้นของสารละลายหรือแก๊สในบริเวณนั้น

พิจารณานิวตรอนจะมีพฤติกรรมคล้ายกันคือนิวตรอนในบริเวณที่มีความหนาแน่น (หรือฟลักซ์) สูงมากกว่าในบริเวณอื่นในเครื่องปฏิกรณ์ จะมีการไหลไปสู่บริเวณที่มีความหนาแน่นต่ำกว่า เมื่อพิจารณาแบบ 1 มิติตามรูปที่ 6.2 เมื่อความหนาแน่นของนิวตรอนมีค่าลดลงตามระยะทางที่เพิ่มขึ้นจะได้กฎของฟิชมีค่า

$$J_x = -D d\phi/dx \quad (6.9)$$



รูปที่ 6-2 ฟลักซ์และกระแสนิวตรอน

เมื่อ J_x คือจำนวนนิวตรอนสุทธิที่ไหลผ่านพื้นที่ในแนวตั้งฉากทิศทาง x ต่อเวลา หรือเป็นฟลักซ์นิวตรอนในทิศทาง x หน่วย neutrons / (cm².s) ส่วน พารามิเตอร์ D คือ สัมประสิทธิ์การแพร่ (diffusion coefficient)

สมการ (6.9) แสดงให้เห็นว่าตามรูป 6-2 จะมีการไหลของนิวตรอนสุทธิไปตามแกน $+x$ ซึ่งเป็นการไหลออกจากบริเวณที่มีความหนาแน่นมากไปยังบริเวณที่มีความหนาแน่นน้อยลงจึงได้ความชันของฟลักซ์ติดลบ และเมื่อพิจารณาจุดเริ่มต้นของการไหลผ่านจากระนาบ $x = 0$ นิวตรอนจะไหลผ่านระนาบนี้จากซ้ายไปขวาอันเป็นผลจากการชนกันในด้านซ้ายของระนาบ ในทางตรงกันข้ามก็มีการไหลของนิวตรอนจากด้านขวาไปซ้ายอันเป็นผลจากการชนกันในด้านขวาของระนาบ แต่เมื่อความหนาแน่นของนิวตรอน ด้านซ้ายมากกว่าด้านขวา จึงมีการชนกันของนิวตรอนต่อลูกบาศก์เซนติเมตรต่อวินาทีด้านซ้ายมากกว่าด้านขวาจึงเป็นผลให้มีผลลัพธ์ของการกระเจิงนิวตรอนในทิศจากซ้ายไปขวา

ในกรณีที่เรานิยามแบบ 3 มิติ จะได้กฎของฟิสิกมีรูปเป็น

$$\vec{J} = -D \text{grad } \phi = -D \nabla \phi \quad (6.10)$$

เมื่อ $\vec{J}$ คือเวกเตอร์ความหนาแน่นของกระแสนิวตรอน (neutron current vector) และ ∇ หรือตัวดำเนินการเกรเดียนต์ (gradient operator) โดย

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

โดยสมการ (6.9) J_x เป็นองค์ประกอบในแนบแกน x หรือทิศ $\hat{i}$ ของ $\vec{J}$

จากสมการ (6.9) และ (6.10) หน่วยของ J_x และ $\vec{J}$ เหมือนกับของ ϕ ดังนั้น D มีหน่วยเป็นความยาวโดยที่การหาที่มาอยู่ยากพอสมควร ผู้สนใจอาจศึกษาเพิ่มเติมจากหนังสืออ้างอิงท้ายเล่มโดยมีค่าประมาณได้คือ

$$D = \bar{x}_{tr} / 3 \quad (6.11)$$

เมื่อ $\bar{x}_{tr}$ คือระยะทางเฉลี่ยของการนำพา (transport mean free path) ซึ่งมีความสัมพันธ์กับภาคตัดขวางการนำพามหภาค (macroscopic transport cross section) Σ_{tr} โดย

$$\bar{x}_{tr} = 1 / \Sigma_{tr} = 1 / [\Sigma_s \{1 - (\cos \theta_L)_{ave}\}] \quad (6.12)$$

เมื่อ Σ_s คือภาคตัดขวางการกระเจิงมหภาคของตัวกลางและ θ_L คือมุมที่นิวตรอนกระเจิงในตัวกลางโดยมี

$$(\cos \theta_L)_{ave} = 2/(3A) \quad (6.13)$$

ซึ่งเป็นค่าที่ได้ตามสมการ(4.42) เป็นค่าโคไซน์เฉลี่ยของมุมการกระเจิงโดยมี A คือ เลขมวลเชิงอะตอมของตัวกลาง

ตัวอย่างที่ 6-1

ภาคตัวขวางของการกระเจิงของคาร์บอนที่เกิดจากนิวตรอนพลังงาน 1 eV มีค่า 4.8 b ให้ประมาณค่าสัมประสิทธิ์การแพร่ของแกรไฟต์ที่พลังงานนี้ เมื่อกำหนดให้ความหนาแน่นอะตอมของแกรไฟต์มีค่า $0.08023 \times 10^{24} \text{ atoms / cm}^3$

วิธีทำ

จากสมการ (6.13) เมื่อใช้เลขมวลเชิงอะตอม $A = 12$ จะได้

$$(\cos \theta_L)_{\text{ave}} = 2 / (3 \times 12) = 0.055$$

และจากสมการ (6.11) และ (6.12) เมื่อแทนค่า $\Sigma_s = N\sigma_s$ ตามแบบสมการ (2.12) ดังนั้นจึงได้สัมประสิทธิ์การแพร่

$$D = 1 \text{ cm} / [3 \times 0.08023 \times 4.8 (1 - 0.055)] = 0.916 \text{ cm}$$

อย่างไรก็ตามจากการทดลองศึกษาพบว่ากฎของฟิคไม่สามารถนำมาใช้ได้ใน

- ก. ตัวกลางที่ดูดกลืนนิวตรอนได้ดี
- ข. ระยะ 3 เท่าของระยะทางเฉลี่ยจากแหล่งกำเนิดหรือจากผิวของตัวกลาง
- ค. เมื่อการกระเจิงของนิวตรอนเป็นแบบไม่เหมือนกันทุกทิศทาง (anisotropic)

ซึ่งเป็นปัญหาที่พบในเครื่องปฏิกรณ์ฯ แต่อย่างไรก็ตามกฎของฟิคและทฤษฎีก็ยังถูกนำมาประมาณค่าสมบัติต่างๆของเครื่องปฏิกรณ์ฯ

6.3 สมการการแพร่นิวตรอน

(The Neutron Diffusion Equation)

พิจารณาปริมาตร V ใดๆ ภายในตัวกลางที่มีนิวตรอนอยู่เมื่อเวลาผ่านไปจำนวนนิวตรอนในปริมาตร V เปลี่ยนไปเมื่อมีการไหลสุทธิของนิวตรอนเข้าหรือออกจากปริมาตรนี้ และนิวตรอนบางส่วนถูกดูดกลืนหรือเมื่อมีแหล่งกำเนิดของนิวตรอนภายในปริมาตรนี้ก็จะปรากฏมีนิวตรอนเพิ่มขึ้น รูปแบบทางคณิตศาสตร์ที่จะอธิบายข้อความดังกล่าวคือสมการของภาวะต่อเนื่อง เมื่อเราละกระบวนการที่นิวตรอนหายไปเนื่องจากการสลายตัวให้อนุภาค β^- ออกมาซึ่งกระบวนการนี้มีครึ่งชีวิตนาน เราจะได้ว่า อัตราการเปลี่ยนจำนวนนิวตรอนในปริมาตร V หาได้จากพจน์ของกระบวนการดังกล่าวมาคือ

อัตราการเปลี่ยนจำนวนนิวตรอนในปริมาตรใดๆ

$$\begin{aligned} &= \text{อัตราการเกิดนิวตรอนในปริมาตรนั้น} - \text{อัตราการดูดกลืนนิวตรอนในปริมาตรนั้น} \\ &\quad - \text{อัตรารั่วไหลของนิวตรอนจากปริมาตรนั้น} \end{aligned} \tag{6.14}$$

ที่นี่เราจะหาแต่ละพจน์ดังกล่าวในสมการ (6.14) โดยให้

V = ปริมาตรที่กำหนด

n = ความหนาแน่นของนิวตรอนที่จุดใด ๆ ในเวลาใด ๆ ในปริมาตร V

จะได้

$$\text{จำนวนนิวตรอนในปริมาตร } V \text{ ที่กำหนด} = \int_V n dV$$

$$\text{อัตราการเปลี่ยนจำนวนนิวตรอน(ในปริมาตร } V) = \frac{\partial}{\partial t} \int_V n dV$$

เมื่อพิจารณาว่า n อาจเปลี่ยนแปลงไปกับทั้งเวลาและตำแหน่งแต่กรณีนี้เราพิจารณาเฉพาะที่จุดใดจุดหนึ่งเราจึงใช้อนุพันธ์ย่อย (partial derivative) เทียบเฉพาะเวลา ดังนั้นจึงอาจเขียนใหม่ได้เป็น

$$\text{อัตราเปลี่ยนจำนวนนิวตรอน(ในปริมาตร } V) = \frac{d}{dt} \int_V n dV \quad (6.15)$$

ต่อไปให้

s = อัตราที่นิวตรอนถูกปล่อยออกมาจากแหล่งกำเนิดต่อลูกบาศก์เซนติเมตร(ในปริมาตร V)

ดังนั้น

$$\text{อัตราการเกิดนิวตรอน(ในปริมาตร } V) = \int_V s dV \quad (6.16)$$

ส่วนอัตราที่นิวตรอนสูญเสียไปเนื่องจากการดูดกลืน (ในปริมาตร V (ต่อลูกบาศก์เซนติเมตรมีค่าเท่ากับ $\Sigma_a \phi$ เมื่อ Σ_a คือภาคตัดขวางการดูดกลืนมหภาค และ ϕ คือฟลักซ์นิวตรอน ดังนั้น

$$\text{อัตราการดูดกลืนนิวตรอน (ในปริมาตร } V) = \int_V \Sigma_a \phi dV \quad (6.17)$$

ต่อไปพิจารณาอัตราการไหลเข้าและออกจากปริมาตร V เมื่อ

$\vec{J}$ = เวกเตอร์ความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนบนผิวปริมาตร V

$\hat{n}$ = เวกเตอร์หนึ่งหน่วยมีทิศตั้งฉากออกจากผิว

จะได้

$$\text{อัตราที่นิวตรอนไหลผ่านในทิศตั้งฉากผิวต่อตารางเซนติเมตร} = (\vec{J} \cdot \hat{n})$$

โดยอัตราการรั่วไหลตามสมการนี้อาจมีค่าบวกหรือลบ ดังนั้น

$$\text{อัตราการรั่วไหล(ผ่านพื้นผิว } A \text{ ทั้งของปริมาตร)} = \int_A (\vec{J} \cdot \hat{n}) dA \quad (6.18a)$$

อาศัยทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ (Divergence theorem) (แปลงอินทิกรัลพื้นผิว (surface integral) เป็นอินทิกรัลปริมาตร (volume integral) หรือ

$$\int_A (\vec{J} \cdot \hat{n}) dA = \int_V (\nabla \cdot \vec{J}) dV$$

ดังนั้นสมการ (6.18a) (จึงเขียนใหม่ได้เป็น

$$\text{อัตราการรั่วไหล (ออกจากปริมาตร V)} = \int_V (\nabla \cdot \vec{J}) dV \quad (6.18b)$$

ดังนั้นจะได้สมการของภาวะต่อเนื่อง โดยการแทนสมการ (6.15), (6.16), (6.17) และ (6.18) ลงในสมการ (6.14) จะได้

$$\int_V \frac{\partial n}{\partial t} dV = \int_V s dV - \int_V \sum_a \phi dV - \int_V (\nabla \cdot \vec{J}) dV \quad (6.19a)$$

สมการ (6.19) แสดงอินทิกรัลปริมาตรเดียวกัน ดังนั้นอาจเอาออกหมดตลอดได้เหลือเฉพาะปริพันธ์ (integrand) ในแต่ละพจน์จึงเหลือ

$$\frac{\partial n}{\partial t} = s - \sum_a \phi - \nabla \cdot \vec{J} \quad (6.19b)$$

สมการ (6.19) คือสมการทั่วไปของภาวะต่อเนื่อง ถ้าความหนาแน่นของนิวตรอนไม่เป็นฟังก์ชันกับเวลาหรือ $\frac{\partial n}{\partial t}$ สมการ (6.19 b) (จึงกลายเป็น

$$\nabla \cdot \vec{J} + \sum_a \phi - s = 0 \quad (6.20)$$

เรียกสมการ(6.20) ว่าสมการของภาวะต่อเนื่องสถานะคงตัว (steady-state equation of continuity)

เราสามารถหาสมการการแพร่นิวตรอน ได้โดยการแทนค่ากฎของฟิค ตามสมการ (6.10) ลงในสมการของภาวะต่อเนื่องสมการ (6.19 b) (เมื่อสมมุติว่า สัมประสิทธิ์ของการแพร่ D ไม่เป็นฟังก์ชันของตำแหน่งแล้วจะได้

$$D \nabla^2 \phi - \sum_a \phi + s = \frac{\partial n}{\partial t} \quad (6.21)$$

เมื่อ ∇^2 คือ ตัวดำเนินการลาปลาเซียน (Laplacian operator (ซึ่งมีรูปแบบต่างๆ ตามระบบพิกัดที่พิจารณา และเมื่อสมการ $\phi = nv$ โดย v คืออัตราเร็วของนิวตรอน ดังนั้น สมการ (6.21) จึงอาจเขียนได้เป็น

$$D \nabla^2 \phi - \sum_a \phi + s = \frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (6.22)$$

ถ้าเราพิจารณากรณีที่พลักซ์นิวตรอนไม่เปลี่ยนแปลงไปกับเวลาแล้วจะได้ $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ ดังนั้นจะเหลือ

$$D \nabla^2 \phi - \sum_a \phi + s = 0 \quad (6.23)$$

สมการ (6.23) เรียกสมการแพร่สถานะคงตัว (steady-state diffusion equation (สมการ (6.23) อาจจัดใหม่เป็น

$$\nabla^2 \phi - (\sum_a / D) \phi + s/D = 0 \quad \text{หรือ} \quad \nabla^2 \phi - \phi/L^2 + s/D = 0 \quad (6.24)$$

โดยพารามิเตอร์ L^2 เรียกพื้นที่การแพร่ (diffusion area (โดยนิยามว่ามีค่า

$$L^2 = D/\Sigma_a \quad (\text{cm}^2) \quad (6.25)$$

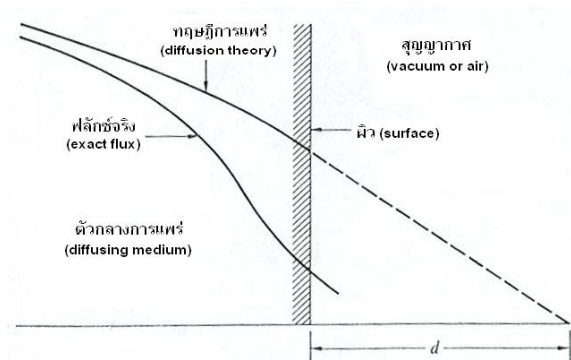
และเรียก L ว่าความยาวการแพร่ (diffusion length)

6.4 เงื่อนไขขอบเขตของสมการการแพร่

(Boundary Conditions of the Diffusion Equation)

ฟลักซ์นิวตรอน ϕ สามารถหาได้จากการแก้สมการการแพร่ อย่างไรก็ตามต้องทราบเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาก่อน ซึ่งหลายกรณีต้องพิจารณาจากความต้องการฟลักซ์ที่จะเป็นไปตามลักษณะทางกายภาพ ตัวอย่างเช่น ฟลักซ์ที่มีค่าลบหรือมีค่าเป็นจินตภาพจะไม่มี ความหมาย ดังนั้น ϕ จะต้องเป็นจริงไม่เป็นฟังก์ชันที่ติดลบ และมีค่าจำกัดที่จุดที่จำลอง การแจกแจงแหล่งกำเนิดนิวตรอน

ในหลายปัญหานิวตรอนแพร่ในตัวกลางที่มีผิวเปิดสู่ภายนอกกล่าวคือเป็นผิวระหว่าง ตัวกลางและบรรยากาศ ทำให้กฎของฟิคไม่เป็นจริงไปด้วย อย่างไรก็ตามมีการคำนวณที่ถูกต้อง (โดยไม่ใช้ทฤษฎีการแพร่) พบว่า ถ้าฟลักซ์ที่ได้ตามทฤษฎีการแพร่ซึ่งสมมุติว่าหายไปทีระยะน้อย ๆ d พื้นผิวแล้วฟลักซ์ที่ได้จากสมการการแพร่จะมีค่าใกล้เคียงมากกับฟลักซ์ที่คำนวณได้ถูกต้อง ดังกล่าวภายในตัวกลางและบริเวณใกล้ๆผิว ค่ากล่าวของเหตุการณ์นี้ดูรูปที่ 6.3



รูปที่ 6.3 ระยะการประมาณค่านอกช่วง(d) จากผิวของตัวกลางที่มีการแพร่

พารามิเตอร์(parameter)หรือตัวแปรเสริม d มีชื่อเรียกว่าระยะการประมาณค่านอกช่วง (extrapolation distance (และพบว่าแทบทุกกรณีที่ใช้จะมีค่าหาได้จากสมการ

$$d = 0.71 \bar{x}_{tr} \quad (6.26)$$

โดยที่ $\bar{x}_{tr}$ คือระยะทางเฉลี่ยของการนำพา ตามสมการ (6.11) ซึ่งมีค่า

$$\bar{x}_{tr} = 3 D$$

เมื่อ D คือสัมประสิทธิ์การแพร่ (หน่วยความยาว) ดังนั้น d มีค่า

$$d = 2.13 D \quad (6.27)$$

ค่า D ของวัสดุบางอย่างที่ไม่ใช่แก๊สที่มีการวัดได้ให้ดูในหัวข้อ 6.7 ซึ่งพบว่าปกติจะมีค่าน้อยกว่า 1 cm และ มักจะมีค่าน้อยกว่านี้ด้วย ดังนั้นจากสมการ (6.27) จะเห็นว่าระยะ d มีค่าน้อยเมื่อเทียบกับขนาดของเครื่องปฏิกรณ์ส่วนใหญ่แทบทั้งหมด ดังนั้นจึงมีความเป็นไปได้ที่จะสมมุติว่าฟลักซ์มีค่าหายไปที่ผิวจริงของระบบเมื่อมีการแก้สมการการแพร่

นอกจากนี้ยังมีความจำเป็นที่ต้องกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่ผิวร่วมหรือส่วนต่อประสาน (interface) (ระหว่างแกนเครื่องปฏิกรณ์กับตัวสะท้อน เมื่อพิจารณาว่านิวตรอนเคลื่อนที่ข้ามผิวร่วมไปได้โดยไม่มีอุปสรรคจึงไม่เป็นการยากที่จะเห็นว่าทั้งฟลักซ์และองค์ประกอบของกระแสในแนวตั้งฉากผิวยังคงมีอยู่ต่อไปเมื่อข้ามขอบเขต ดังนั้นที่ผิวร่วมระหว่างบริเวณทั้งสอง a และ b จะได้รับความสัมพันธ์ที่ต้องสอดคล้องกับ

$$\phi_a = \phi_b \quad (6.28)$$

และ

$$J_{na} = J_{nb} \quad (6.29)$$

เมื่อ ϕ_a และ ϕ_b คือฟลักซ์คำนวณได้ที่บริเวณผิวร่วม a และ b ตามลำดับ ส่วน J_{na} และ J_{nb} คือองค์ประกอบในแนวตั้งฉากของกระแสนิวตรอนที่คำนวณได้ที่ผิวร่วม a และ b ตามลำดับสมการ (6.28) และ (6.29) บางครั้งเรียกกันว่า เงื่อนไขขอบเขตของผิวร่วม (interface boundary conditions) ซึ่งจะมีการนำไปใช้ในการหาผลเฉลยของสมการการแพร่ที่เกี่ยวข้อง

6.5 ผลเฉลยของสมการการแพร่

(Solutions of the Diffusion Equation)

ต่อไปนี้จะป็นตัวอย่างของการแก้สมการการแพร่กรณีที่ไม่ยุ่งยากตามเงื่อนไขขอบเขตในหัวข้อ 6.4

6.5.1 แหล่งกำเนิดเชิงระนาบขนาดอนันต์ (Infinite Planar Source)

พิจารณาแหล่งกำเนิดเชิงระนาบขนาดอนันต์ที่ปล่อย S [neutrons/(cm² s)] กรณีนี้ให้ฟลักซ์เป็นฟังก์ชันกับ x เท่านั้น โดย x เป็นตำแหน่งที่จะหาฟลักซ์นิวตรอนที่ปลดปล่อยจากแหล่งกำเนิดเชิงระนาบที่ $x = 0$ เท่านั้นโดยไม่มีแหล่งกำเนิดนิวตรอนอื่นอีกสมการการแพร่ (6.24) จึงเขียนได้เป็น

$$d^2\phi(x)/dx^2 - \phi(x)/L^2 = 0, \quad x \neq 0 \quad (6.30)$$

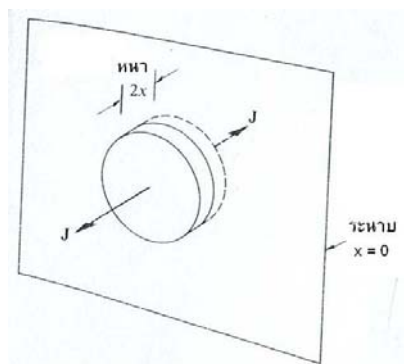
เงื่อนไขขอบเขตในปัญหานี้คือฟังก์ชันมีค่าจำกัดเมื่อ x มีค่าไปทั้งทาง $+x$ และ $-x$ จนถึงระยะอนันต์ โดยสมการ (6.30) นี้มีผลเฉลยเป็น

$$\phi(x) = Ae^{-x/L} + Be^{x/L} \quad (6.31)$$

เมื่อ A และ B คือค่าคงตัวที่จะหาค่าได้โดยอาศัยเงื่อนไขขอบเขตดังกล่าว ตอนนี้เราพิจารณาเฉพาะค่า $+x$ ซึ่งเมื่อพิจารณาพจน์ที่สองของสมการ (6.31) จะเห็นว่าเมื่อ x มีค่ามากขึ้นเรื่อย ๆ จะทำให้ฟังก์ชัน $\phi(x)$ มีค่าไม่จำกัด ดังนั้นเพื่อให้เป็นจริง ต้องให้ $B = 0$ จึงเหลือผลเฉลยเป็น

$$\phi(x) = Ae^{-x/L} \quad (6.32)$$

ในการหาค่า A พิจารณาจากการสมมุติว่ามีกล่องขนาดเล็กพื้นที่ผาหนึ่งหน่วยหนา $2x$ ที่ระนาบแหล่งกำเนิดดังรูปที่ 6.4 เมื่อโจทย์กำหนดว่าแหล่งกำเนิดนิวตรอนเป็นระนาบขนาด



รูปที่ 6.4 กล่องขนาดเล็กในระนาบ $x = 0$ ให้มีพื้นที่ผิวหน้าหนึ่งหน่วยหนา $2x$

อนันต์ดังนั้นจึงไม่มีการไหลสุทธิของนิวตรอนขนานกับแผ่นนี้หรือไหลผ่านด้านข้างของกล่องขนาดเล็กนี้ ดังนั้นอาศัยลักษณะสมมาตร (symmetry) ของปัญหาในทิศทาง x จะมีการไหลสุทธิของนิวตรอนออกจากกล่องขนาดเล็กในทิศตั้งฉากระนาบหรือตั้งฉากกับกล่องขนาดเล็กนี้มีค่า $2J(x)$ เมื่อ

$$J(x) = \text{ความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนที่ระยะ } x$$

ที่ข้อจำกัดเมื่อ $x \rightarrow 0$ อัตราการไหลสุทธิออกจากกล่องจะมีค่าเข้าใกล้ S เมื่อ S คือค่าที่กล่าวมาแล้วตอนต้นซึ่งก็คือความหนาแน่นของนิวตรอนจากแหล่งกำเนิดเชิงระนาบ ดังนั้น

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2J(x) = S$$

หรือ

$$\lim_{x \rightarrow 0} J(x) = S/2 \quad (6.33)$$

สมการ(6.33) นี้เรียกว่าเงื่อนไขของแหล่งกำเนิดนิวตรอน (ซึ่งจะเป็นจริงเฉพาะแหล่งกำเนิดเชิงระนาบที่ให้ $J(x)$ มีลักษณะสมมาตรดังกล่าว)

จากกฎของฟิคจะได้

$$J_x = -D \frac{d\phi(x)}{dx} = (DA/L) e^{-x/L}$$

ดังนั้นที่ $x \rightarrow 0$ จะได้

$$A = SL/(2D)$$

แทนค่า A ลงในสมการ (6.32) จะได้

$$\phi(x) = [SL/(2D)] e^{-x/L}$$

ผลเฉลยที่ได้เป็นจริงกรณี $+x$ อย่างไรก็ตามจากปัญหาที่มีลักษณะสมมาตรฟลักซ์นิวตรอนที่ได้จะมีค่าเหมือนกันที่ตำแหน่ง $\pm x$ ดังนั้นผลเฉลยที่ได้เป็นจริงทุกค่าของ x หาได้จากการแทนค่า x ด้วย $|x|$ ดังนั้นผลเฉลยสุดท้ายจึงเป็น

$$\phi(x) = [SL/(2D)] e^{-|x|/L} \quad (6.34)$$

6.5.2 แหล่งกำเนิดที่เป็นจุด (Point Source)

พิจารณาแหล่งกำเนิดที่เป็นจุด ซึ่งปล่อยนิวตรอนออกมาต่อวินาทีมีค่า S (neutrons/s) ให้นิวตรอนที่ปล่อยออกมามีสมบัติเหมือนกันทุกทิศทาง (isotropic) ในตัวกลางขนาดอนันต์ ถ้าให้จุดกำเนิดนี้อยู่ ณ จุดศูนย์กลางของระบบพิกัดทรงกลมฟลักซ์จึงขึ้นกับเฉพาะระยะ r จากจุดศูนย์กลาง ดังนั้นเมื่อเราใช้ตัวดำเนินการลาปลาเซียน ∇^2 กับระบบนี้จะอยู่ในรูป

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

ดังนั้นจะได้

$$\nabla^2 \phi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} \right) + 0 + 0$$

และจะได้สมการการแพร่เป็น

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} \right) - \phi(r)/L^2 = 0 \quad (6.35)$$

เงื่อนไขของแหล่งกำเนิดตามปัญหานี้หาได้จากการวาดทรงกลมเล็กๆล้อมรอบจุดกำเนิดแล้ว

คำนวณหาจำนวนนิวตรอนสุทธิที่ผ่านผิวทรงกลมรัศมี r ต่อวินาที จะได้ $4\pi r^2 J(r)$ ดังนั้นในข้อจำกัดเมื่อ $r \rightarrow 0$ จะได้ว่า

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^2 J(r) = S/(4\pi) \quad (6.36)$$

ในการแก้สมการ (6.35) จะสะดวกขึ้นถ้าแนะนำตัวแปรใหม่ ขึ้นมา โดยให้

$$w = r \phi(r) \quad \text{หรือ} \quad \phi(r) = w/r \quad (6.37)$$

แทนสมการ (6.37) ลงในสมการ (6.35) จะได้

$$d^2w/dr^2 - w/L^2 = 0$$

ซึ่งจะมีผลเฉลยทั่วไปเป็น

$$w = Ae^{-r/L} + Be^{r/L}$$

เปลี่ยนกลับให้เป็น $\phi(r)$ จะได้

$$\phi(r) = w/r = (A/r)e^{-r/L} + (B/r)e^{r/L}$$

เมื่อ A และ B เป็นค่าคงที่ซึ่งจะหาค่าออกมาได้เหมือนในหัวข้อ 6.5.1 ที่ว่า $\phi(r)$ ยังคงมีค่าจำกัด

เมื่อ $r \rightarrow \infty$ ดังนั้น $B = 0$ จึงเหลือ

$$\phi(r) = (A/r)e^{-r/L}$$

จากกฎของฟิสิก จะได้

$$J(r) = -D \frac{d\phi(r)}{dr} = DA \left(\frac{1}{rL} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-r/L}$$

เมื่ออาศัยเงื่อนไขของแหล่งกำเนิดตามสมการ (6.36) จะได้ค่าคงที่

$$A = S/(4\pi D)$$

ดังนั้นฟลักซ์ของนิวตรอนจากแหล่งกำเนิดที่เป็นจุดมีค่า

$$\phi(r) = (S/4\pi Dr)e^{-r/L} \quad (6.38)$$

ตัวอย่างที่ 6-2

แหล่งกำเนิดนิวตรอนที่เป็นจุดในตัวกลางที่เป็นมอดอเรเตอร์ขนาดอนันต์มีค่าฟลักซ์ที่ระยะ r จากจุดกำเนิดที่ปล่อย S (neutrons/s) มีค่าตามสมการ (6.38) โดย L คือความยาวการแพร่ซึ่งเป็นค่าคงที่จงหา

- เวกเตอร์ความหนาแน่นของกระแสนิวตรอน $\vec{J}(\vec{r})$ ในตัวกลาง
- จำนวนนิวตรอนสุทธิที่ไหลผ่านทรงกลมรัศมี r รอบจุดกำเนิดทั้งหมด

วิธีทำ

ก. เนื่องจากแหล่งกำเนิดนิวตรอนเป็นจุด ดังนั้นเวกเตอร์ความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนจึงมีทิศออกจากรังในแนวรัศมีทรงกลมให้เป็นทิศ $\hat{r}$ ดังนั้นจะต้องประกอบ r ของแกรเดียนต์ ∇_r ในพิกัดทรงกลมจึงเหลือเป็น

$$\nabla_r = \hat{r} \frac{d}{dr}$$

เมื่อ $\hat{r}$ คือเวกเตอร์เชิงรัศมีหนึ่งหน่วย (unit radial vector) ดังนั้นจากกฎของฟิสิกส์ทั่วไป สมการ (6.10)

$$\vec{J} = -D \text{grad } \phi = -D \nabla \phi$$

แทนค่า ϕ และ ∇_r ลงไปแทน ∇ จะได้

$$\begin{aligned}\vec{J}(\vec{r}) &= -D \hat{r} \frac{d}{dr} (S/4\pi D r) e^{-r/L} \\ &= \hat{r} (S/4\pi) \left(\frac{1}{rL} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-r/L}\end{aligned}$$

ข. เนื่องจาก $\vec{J}(\vec{r})$ ทุกระยะจะมีทิศตั้งฉากกับผิวทรงกลม จำนวนนิวตรอนสุทธิที่เคลื่อนที่ผ่านต่อหน่วยพื้นที่ของทรงกลมก็คือขนาดของ $\vec{J}(\vec{r})$ ดังนั้นจำนวนนิวตรอนสุทธิที่ไหลผ่านทรงกลมรัศมี r รอบจุดกำเนิดทั้งหมด (หรือผ่านพื้นที่ทรงกลม $4\pi r^2$) มีค่า

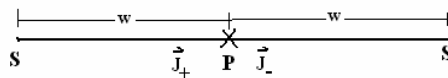
$$4\pi r^2 J(r) = S(1 + r/L) e^{-r/L}$$

ตัวอย่างที่ 6-3

จุดกำเนิดนิวตรอน 2 จุดอยู่ห่างกันเป็นระยะ $2w$ ในตัวกลางที่มีการแพร่ขนาดอนันต์ ให้หาฟลักซ์และกระแสนิวตรอนที่จุดกึ่งกลางระหว่างจุดกำเนิดทั้งสอง เมื่อแต่ละจุดกำเนิดให้ S นิวตรอนต่อวินาที

วิธีทำ

พิจารณารูปของปัญหาในรูปที่ 6-5 จุด P อยู่กึ่งกลางระหว่างจุดกำเนิดนิวตรอน



รูปที่ 6-5 จุด P อยู่กึ่งกลางระหว่างจุดกำเนิดนิวตรอนทั้งสอง

ทั้งสอง ซึ่งแต่ละจุดให้ S นิวตรอนต่อวินาทีและเนื่องจากฟลักซ์เป็นปริมาณสเกลาร์ ฟลักซ์ทั้งหมดที่จุด P จึงเป็นผลรวมของแต่ละจุดกำเนิด นั่นคือจะได้คำตอบ

$$\begin{aligned}\phi(r) &= (S/4\pi Dw) e^{-r/L} + (S/4\pi Dw) e^{-r/L} \\ &= (S/2\pi Dw) e^{-r/L}\end{aligned}$$

เนื่องจากเวกเตอร์ความหนาแน่นของกระแสนิวตรอนจากแหล่งทางซ้ายและขวาของจุด P มีขนาดเท่ากันแต่ทิศทางตรงกันข้ามจึงทำให้กระแสนิวตรอนที่จุด P ซึ่งอยู่ตรงกลางมีค่าเป็นศูนย์

6.5.3 แผ่นแบนไม่มีสิ่งกีดขวางขนาดอนันต์ (Infinite Bare Slab) ที่มีแหล่งกำเนิดเชิงระนาบ อยู่ตรงกลาง

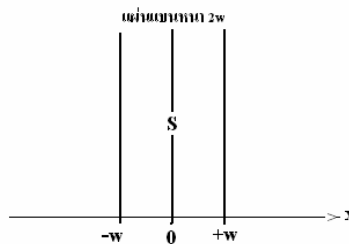
พิจารณาแผ่นแบนไม่มีสิ่งกีดขวางขนาดอนันต์หนา $2w$ ที่ภายในมีแหล่งกำเนิดเชิงระนาบ ขนาดอนันต์อยู่ตรงกลางและปล่อยนิวตรอนออกมาในแนวระนาบ S [neutrons/(cm²s)] โดยให้ แหล่งกำเนิดนิวตรอนนี้อยู่ตรงกลางของระนาบพิภพที่ $x = 0$ ของแผ่นแบนขนาดอนันต์ที่มีความหนาแต่ละ w ดังรูปที่ 6-6

กรณีนี้ใช้สมการการแพร่(6.30) และเงื่อนไขของแหล่งกำเนิดสมการ (6.33) อย่างไรก็ตาม กรณีนี้ฟลักซ์จะต้องหายไปทีระยะการประมาณค่านอกช่วง (extrapolation distance, d) ตามหัวข้อ 6.4 นั่นคือฟลักซ์นิวตรอนจะหายไปทีระยะจากผิวของแผ่นแบนนี้ออกไปทั้งสองด้าน คือระยะจากผิวของแผ่นแบนนี้ออกไปทั้งสองด้าน คือทีระยะ $x = w + d$ และ $x = -(w + d)$ ดังนั้นจะมีเงื่อนไขขอบเขตเป็น

$$\phi(w+d) = \phi(-w-d) = 0$$

เมื่อ x มีค่าบวกจะได้คำตอบทั่วไปของสมการการแพร่ (6.30) มีค่า

$$\phi(x) = Ae^{-x/L} + Be^{x/L} \quad (6.39)$$



รูปที่ 6-6 แผ่นแบนหนา $2w$ ไม่มีสิ่งกีดขวางขนาดอนันต์ที่ตรงกลาง
ระนาบ $x = 0$ มีแหล่งกำเนิดนิวตรอน

ดังนั้นเมื่อพิจารณาตามเงื่อนไขของเขตทีระยะ $x = w + d$ จะได้

$$\phi(w+d) = Ae^{-(w+d)/L} + Be^{(w+d)/L} = 0$$

นั่นคือค่าคงที่

$$B = -Ae^{-2(w+d)/L}$$

แทนค่า B ลงในสมการ (6.39) จะได้

$$\phi(x) = A[e^{-x/L} - e^{x/L-2(w+d)/L}]$$

หาค่าคงที่ A โดยอาศัยเงื่อนไขของแหล่งกำเนิดสมการ (6.33) จะได้

$$A = (SL/2D)[1 + e^{-2(w+d)/L}]^{-1}$$

ดังนั้นเมื่อ x มีค่าบวกจะได้

$$\phi(x) = (SL/2D) [1 + e^{-2(w+d)/L}]^{-1} [e^{-x/L} - e^{(x/L)-2(w+d)/L}]$$

เมื่อพิจารณาจากลักษณะสมมาตรของปัญหา ผลเฉลยจะเป็นจริงทุกค่า x ได้โดยใช้

$|x|$ แทน x ดังนั้น

$$\phi(x) = (SL/2D) [1 + e^{-2(w+d)/L}]^{-1} [e^{-|x|/L} - e^{(|x|/L)-2(w+d)/L}] \quad (6.40)$$

ผลเฉลยนี้อาจทำให้อยู่ในรูปที่สะดวกขึ้นโดยคูณทั้งเศษและส่วนด้วย $e^{(w+d)/L}$ จะได้

$$\phi(x) = (SL/2D) [\sinh\{(w+d-|x|)/L\}] / [\cosh\{(w+d)/L\}] \quad (6.41)$$

เมื่อ $\sinh$ และ $\cosh$ คือฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก (hyperbolic functions) ซึ่งนิยามว่า

$$\sinh \theta = (e^\theta - e^{-\theta})/2$$

$$\cosh \theta = (e^\theta + e^{-\theta})/2$$

ตัวอย่างที่ 6-4

จากกรณีแผ่นแบนขนาดอนันต์ที่ภายในมีแหล่งกำเนิดนิวตรอนเชิงระนาบ ตามหัวข้อ

6.5.3

- ก. จงหาจำนวนนิวตรอนต่อตารางเซนติเมตรต่อวินาทีที่รั่วจากแผ่นแบนนี้ทั้งสองข้าง
- ข. ความน่าจะเป็นที่นิวตรอนจะรั่วออกจากแผ่นแบนนี้

วิธีทำ

- ก. จำนวนนิวตรอนต่อตารางเซนติเมตรต่อวินาทีที่รั่วออกจากแผ่น
= กระแสนิวตรอนที่แผ่นแบน

ตามรูปที่ 6-6 พิจารณาที่ผิว $x = w$ โดยอาศัยกฎของฟิคจะได้

$$\begin{aligned} J(x=w) &= -D \hat{r} \frac{d}{dr} (SL/2D)[1 + e^{-2(w+d)/L}]^{-1} [e^{-|x|/L} - e^{(|x|/L)-2(w+d)/L}]_{x=w} \\ &= (S/2)[\cosh(d/L)]/\cosh[(w+d)/L] \end{aligned}$$

เนื่องจากลักษณะสมมาตรจำนวนที่รั่วแต่ละด้านเท่ากันดังนั้นจำนวนที่รั่วทั้งหมดเท่ากับ

$$2J(x=w) = J(x=w) + J(x=-w)$$

$$= S[\cosh(d/L)]/\cosh[(w+d)/L]$$

- ข. ความน่าจะเป็นที่นิวตรอนจะรั่วออกจากแผ่นแบน

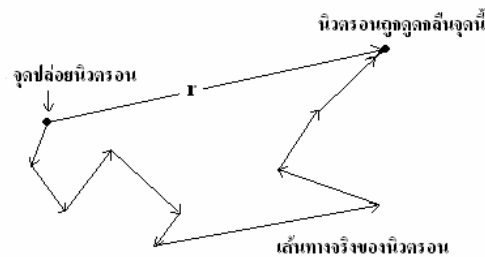
$$= (\text{จำนวนนิวตรอนต่อตารางเซนติเมตรต่อวินาทีที่รั่ว}) /$$

$$(\text{จำนวนนิวตรอนต่อตารางเซนติเมตรต่อวินาทีที่ปล่อยออก})$$

$$= 2J(x=w) / S = [\cosh(d/L)]/\cosh[(w+d)/L]$$

6.6 ความยาวการแพร่ (The Diffusion Length)

เพื่อให้เห็นลักษณะทางกายภาพของการแพร่ เรามาพิจารณาความยาวการแพร่ ซึ่งมักปรากฏในสมการการแพร่และผลเฉลยในปัญหาต่างๆ พิจารณาให้แหล่งกำเนิดนิวตรอนเป็นจุดในมอดอเรเตอร์ขนาดอนันต์ โดยแหล่งกำเนิดที่เป็นจุดนี้ปลดปล่อย S นิวตรอนต่อวินาที ให้นิวตรอนที่ถูกปลดปล่อยออกมานี้มีพลังงานเดียว (monoenergetic neutrons) นิวตรอนแต่ละตัวเคลื่อนที่อย่างยุ่งเหยิงมีเส้นทางซิกแซก (zigzag paths) เนื่องจากการชนไปเรื่อย ๆ ระหว่างการแพร่จนกระทั่งในที่สุดถูกดูดกลืนในตัวกลางที่หน่วงความเร็ว



รูปที่ 6-7 เส้นทางเฉลี่ยของการเคลื่อนที่ (r) ของนิวตรอน
ในตัวกลางที่หน่วงความเร็ว

(moderating medium) ดังรูปที่ 6-7 โดยไม่มีนิวตรอนตัวใดหลุดพ้นเนื่องจากตัวกลางนี้มีขนาดอนันต์

จำนวนนิวตรอนขนาดน้อยๆ dn ที่ถูกดูดกลืนต่อวินาทีในระยะทางจากจุดกำเนิดระหว่าง r และ $r+dr$ ที่กำหนดมีค่า

$$dn = \sum_a \phi(r) dV$$

เมื่อ $\phi(r)$ คือฟลักซ์จากจุดกำเนิดและ $dV = 4\pi r^2 dr$ คือปริมาตรน้อยๆ ของเปลือกเซลล์ทรงกลม (spherical shell) รัศมี r และหนา dr เมื่อใช้ฟลักซ์ $\phi(r)$ จากสมการ (6.38) จะได้

$$dn = (S\Sigma_a/D) r e^{-r/L} dr = (S/L^2) r e^{-r/L} dr$$

เมื่ออาศัยนิยามของ L^2 จากสมการ (6.25) จุดกำเนิดปลดปล่อย S นิวตรอนต่อวินาที และเมื่อ

$$dn = \text{จำนวนนิวตรอนที่ถูกดูดกลืนต่อวินาทีในระยะ } r \text{ และ } r+dr$$

ดังนั้นเราจะได้ความน่าจะเป็นที่นิวตรอนจากแหล่งกำเนิดจะถูกดูดกลืนในระยะ dr คือ

$$p(r)dr = (1/L^2) r e^{-r/L} dr$$

จากรูปที่ 6-7 เราสามารถคำนวณหาระยะทางเฉลี่ยจากแหล่งกำเนิดไปถึงจุดที่นิวตรอนถูกดูดกลืน โดยหาค่าเฉลี่ย r ตลอดการแจกแจงความน่าจะเป็น $p(r)dr$ อย่างไรก็ตามเพื่อความสะดวกในการใช้พบว่าจะได้ประโยชน์มากกว่าถ้าจะหาค่าเฉลี่ยของระยะทางยกกำลังสองนั้นก็คือใช้

$$\begin{aligned}(r^2)_{\text{ave}} &= \int_0^{\infty} r^2 p(r) dr \\ &= (1/L) \int_0^{\infty} r^3 e^{-r/L} dr = 6L^2\end{aligned}$$

หรือ

$$L^2 = (r^2)_{\text{ave}} / 6 \quad (6.42)$$

ตามสมการ (6.42) ความยาวการแพร่ยกกำลังสอง L^2 มีค่าเท่ากับหนึ่งในหกของค่าเฉลี่ยของระยะทางตรงหรือเวกเตอร์ (crow flight) จากจุดกำเนิดนิวตรอนถึงจุดที่นิวตรอนถูกดูดกลืนยกกำลังสอง ถ้า L มีค่ามากแสดงว่านิวตรอนเคลื่อนที่ไปได้มากอันเป็นค่าเฉลี่ยถูกดูดกลืน การวัดค่า L และ L^2 กรณีของเทอร์มอลนิวตรอนให้ดูในหัวข้อ 6.7

6.7 การแพร่เทอร์มอลนิวตรอน (Thermal Neutron Diffusion)

มีการนำเอาวิธีการจัดกลุ่มนิวตรอนกลุ่มเดียว (one-group method) มาใช้ในการแพร่ของเทอร์มอลนิวตรอนเมื่อนิวตรอนถูกหน่วงให้ช้าลงจนมีพลังงานระดับเทอร์มอล ซึ่งมีการแจกแจงพลังงานตามฟังก์ชันแมกซ์เวลเลียน(Maxwellian function)ซึ่งถ้าให้ $n(E)dE$ คือจำนวนนิวตรอนต่อปริมาตรที่มีพลังงานอยู่ระหว่าง $E + dE$ และจะได้

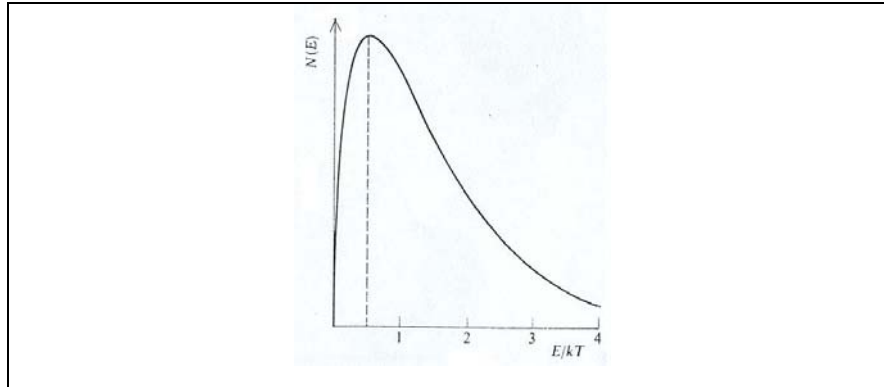
$$n(E) = [2n/(\pi)^{1/2}] (1/kT)^{3/2} E^{1/2} e^{-E/kT} \quad (6.43)$$

เมื่อ n = จำนวนทั้งหมดของนิวตรอนต่อปริมาตร (neutron density)

k = ค่าคงที่ของโมลตซ์มันน์ = 8.617×10^{-5} eV/K

T = อุณหภูมิสัมบูรณ์ของสเปกตรัมของการแจกแจง (K)

สมการ (6.43) นี้เมื่อนำไปเขียนกราฟแล้วจะได้ดังรูปที่ 6-8



รูปที่ 6-8 ฟังก์ชันการแจกแจงแมกซ์เวลเลียน

สมการ(6.43) เริ่มมาจากการพิจารณาอะตอมหรือโมเลกุลแก๊สแต่ก็สามารถนำมาใช้ได้กับของแข็งและของเหลวในอุณหภูมิประมาณ 300 K กรณีนิวตรอน เราจึงนำสมการนี้มาใช้ โดยพิจารณาที่อุณหภูมิห้อง $T_0 = 293.61$ K จะได้พลังงานสูงสุด

$$E_p = kT/2 \quad (6.44)$$

และมีพลังงานเฉลี่ย

$$\bar{E} = (1/n) \int_0^{\infty} E n(E) dE = 3kT/2 \quad (6.45)$$

การรวมพารามิเตอร์ kT ในสมการ (6.44) และ (6.45) มักจะพบบ่อยๆ ในการนำมาใช้ทางนิวเคลียร์ โดยที่

$$kT_0 = 0.0253 \text{ eV} \approx (1/40) \text{ eV} \quad (6.46)$$

จากสมการ(6.4) เมื่อนำมาใช้กับกรณีฟลักซ์นิวตรอนที่ขึ้นกับพลังงานของเทอร์มอลนิวตรอนจะได้

$$\phi(E) = n(E)v(E) = [2n/(\pi)^{1/2}](1/kT)^{3/2} (2/m)^{1/2} E e^{-E/kT} \quad (6.47)$$

ซึ่งได้จากการแทนค่าอัตราเร็วของนิวตรอน $v(E) = (2E/m)^{1/2}$ เมื่อ m คือมวลของนิวตรอน และเมื่อให้

$$\phi_T = \text{ฟลักซ์เทอร์มอลนิวตรอน (one – group thermal flux)}$$

นิยามว่ามีค่าเป็น

$$\phi_T = \int_T \phi(E) dE \quad (6.48)$$

เมื่อ T ที่ห้อยอยู่กับเครื่องหมายอินทิกรัล (integral) แสดงถึงการอินทิเกรตทุกช่วงพลังงานของเทอร์มอลนิวตรอน ซึ่งปกติมักจะขยายถึง $5 kT \approx 0.1 \text{ eV}$ อย่างไรก็ตามค่าเอกซ์โพเนนเชียลใน

$$\phi_T = [2n/(\pi)^{1/2}](1/kT)^{3/2} (2/m)^{1/2} \int_0^{\infty} E e^{-E/kT} dE$$

$$\phi_T = [2n/(\pi)^{1/2}](2kT/m)^{1/2} \quad (6.49)$$

ถึงจุดนี้จะสะดวกขึ้นถ้าให้ E_T แทนพลังงานของนิวตรอนโดย

$$E_T = kT \quad (6.50)$$

และ v_T แทนอัตราเร็วของนิวตรอนโดย

$$v_T = (2E_T/m)^{1/2} \quad (6.51)$$

โดยค่าของ E_T และ v_T เชิงตัวเลขเมื่อแทนค่าคงที่ k ลงไปจะได้

$$E_T = 8.617 \times 10^{-5} \text{ eV} \quad (6.52)$$

และ

$$v_T = 1.284 \times 10^4 \text{ cm/s} \quad (6.53)$$

ดังนั้นสมการ (6.49) จึงเขียนได้เป็น

$$\phi_T = 2nv_T/(\pi)^{1/2} \quad (6.54)$$

ข้อสังเกตให้ตระหนักถึงความแตกต่างระหว่างฟลักซ์เทอร์มอลนิวตรอน ϕ_T ตามสมการ (6.54) และฟลักซ์นิวตรอน $\phi_0 = nv_0$ เมื่อ $v_0 = 2,200 \text{ m/s}$ โดย ϕ_T แทนฟลักซ์ของเทอร์มอลนิวตรอนทั้งหมดรวมเข้าด้วยกันทุกช่วงพลังงานที่เป็นเทอร์มอลนิวตรอนตามสมการ (6.48) ส่วน ϕ_0 เป็นฟลักซ์เทียม (pseudo flux) ซึ่งสมมุติว่าเทอร์มอลนิวตรอนทั้งหมดมีพลังงานเดียว $E_0 = 0.0253 \text{ eV}$ กรณี ϕ_T นั้นเหมาะสมในการคำนวณที่เกี่ยวข้องกับการอธิบายการแพร่ (diffusion) ของเทอร์มอลนิวตรอน ขณะที่ ϕ_0 เหมาะสมในการคำนวณที่เกี่ยวข้องกับการอธิบายอัตราการดูดกลืนของนิวตรอนหรือสรุปว่า

ϕ_T – ใช้กับการออกแบบเครื่องปฏิกรณ์ (design of a reactor)

ϕ_0 – เหมาะสำหรับนำเครื่องปฏิกรณ์ไปใช้ (using a reactor)

ความสัมพันธ์ระหว่างฟลักซ์ทั้งสองหาจากการเปรียบเทียบค่าทั้งสอง

$$\phi_0 / \phi_T = nv_0 / [2nv_T/(\pi)^{1/2}] = \pi^{1/2} v_0 / (2v_T) \quad (6.55)$$

เมื่อหาค่า v_0 ตามสมการ (6.53) โดยใช้ $T_0 (= 293.61 \text{ K})$ จะได้

$$v_0 = 1.284 T_0^{1/2}$$

เมื่อแทนค่า v_0 และ v_T ลงไปในสมการ (6.55) จะได้

$$\phi_0 / \phi_T = (\pi^{1/2} / 2) (T_0 / T)^{1/2}$$

สัมประสิทธิ์การแพร่ของเทอร์มอลนิวตรอนกลุ่มเดียว (one-group thermal diffusion coefficient) $\bar{D}$ หาจาก

$$\bar{D} = (1/\phi_T) \int_T D(E)\phi(E)dE$$

ค่า $\bar{D}$ ของมอดเรเตอร์บางชนิดดูจากตารางที่ 6-2

สำหรับภาคตัดขวางการดูดกลืนของวัสดุที่เกิดจากเทอร์มอลนิวตรอนกลุ่มเดียว (one-group thermal absorption cross section) $\bar{\Sigma}_a$ มีค่าตามสมการ

$$\bar{\Sigma}_a = (1/\phi_T) \int_T \Sigma_a(E)\phi(E)dE$$

อินทิกรัลนี้ก็คืออัตราการดูดกลืนทั้งหมด กรณีที่เราพิจารณาภาคตัดขวางของวัสดุที่เกิดจากลำนิวตรอนพลังเดี่ยว(monoenergetic beam)ที่พลังงาน E_0 โดยมีความเข้ม $\phi_0 = nv_0$ จะได้อินทิกรัลนี้มีค่า

$$\int_T \Sigma_a(E)\phi(E)dE = g_a(T) \Sigma_a(E_0) \phi_0$$

เมื่อ $g_a(T)$ คือตัวประกอบที่ไม่ผูกพันกับความเร็วของนิวตรอน(non-1/v factor)และ $\Sigma_a(E_0)$ คือภาคตัดขวางการดูดกลืนมหภาคที่พลังงาน 0.0253 eV และ ϕ_0 คือฟลักซ์นิวตรอนที่ความเร็ว 2,200 m/s ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}_a &= g_a(T) \Sigma_a(E_0) \phi_0 / \phi_T \\ &= (\pi^{1/2} / 2) g_a(T) \Sigma_a(E_0) (T_0 / T)^{1/2} \end{aligned} \quad (6.56)$$

ค่า $\bar{\Sigma}_a$ ของมอดเรเตอร์ที่ใช้กันทั่วไปที่ 20 °C กรณีที่ $g_a(T)$ มีค่าเท่ากับหนึ่งดูจากตารางที่ 6-2 ส่วนตัวประกอบที่ไม่ผูกพันกับความเร็วของนิวตรอน $g_a(T)$ ดูจากตารางที่ 6-1

จากนิยามของฟลักซ์เทอร์มอล(นิวตรอน) ϕ_T และพารามิเตอร์ $\bar{D}$ และ $\bar{\Sigma}_a$ ที่เราทราบค่า เราสามารถเขียนสมการการแพร่สำหรับเทอร์มอลนิวตรอน ตามแบบสมการ (6.24)

ตารางที่ 6-1

ตัวประกอบที่ไม่ผูกพันกับความเร็วนิวตรอน(Non-1/v factors)*

T, °C	Cd	In	¹³⁵ Xe	¹⁴⁹ Sm	²³³ U	
	<i>g_a</i>	<i>g_a</i>	<i>g_a</i> [†]	<i>g_a</i>	<i>g_a</i>	<i>g_f</i>
20	1.3203	1.0192	1.1581	1.6170	0.9983	1.0003
100	1.5990	1.0350	1.2103	1.8874	0.9972	1.0011
200	1.9631	1.0558	1.2360	2.0903	0.9973	1.0025
400	2.5589	1.1011	1.1864	2.1854	1.0010	1.0068
600	2.9031	1.1522	1.0914	2.0852	1.0072	1.0128
800	3.0455	1.2123	0.9887	1.9246	1.0146	1.0201
1000	3.0599	1.2915	0.8858	1.7568	1.0226	1.0284

T, °C	²³⁵ U		²³⁸ U	²³⁹ Pu	
	<i>g_a</i>	<i>g_f</i>	<i>g_a</i>	<i>g_a</i>	<i>g_f</i>
20	0.9780	0.9759	1.0017	1.0723	1.0487
100	0.9610	0.9581	1.0031	1.1611	1.1150
200	0.9457	0.9411	1.0049	1.3388	1.2528
400	0.9294	0.9208	1.0085	1.8905	1.6904
600	0.9229	0.9108	1.0122	2.5321	2.2037
800	0.9182	0.9036	1.0159	3.1006	2.6595
1000	0.9118	0.8956	1.0198	3.5353	3.0079

*Based on C. H. Westcott, "Effective Cross Section Values for Well-Moderated Thermal Reactor Spectra," Atomic Energy Commission report AECL-1101, January 1962.
†Based on E. C. Smith *et al.*, *Phys. Rev.* **115**, 1693 (1959).

ซึ่งแสดงการขึ้นกับตำแหน่งด้วยได้เป็น

$$\bar{D} \nabla^2 \phi_T - \bar{\Sigma}_a \phi_T = -s_T \quad (6.57)$$

เมื่อ s_T คืออัตราการปล่อยเทอร์มอลนิวตรอนต่อปริมาตรของแหล่งกำเนิด และเมื่อจัดสมการ (6.57) เสียใหม่ในรูป

$$\nabla^2 \phi_T - \phi_T / L_T^2 = -s_T / D \quad (6.58)$$

โดยที่

$$L_T^2 = \bar{D} / \bar{\Sigma}_a \quad (6.59)$$

เรียกว่าพื้นที่การแพร่เทอร์มอล (นิวตรอน) และ L_T เรียกว่าความยาวการแพร่เทอร์มอล (นิวตรอน) ค่าพารามิเตอร์ทั้งสองนี้ดูจากตารางที่ 6-2

เป็นที่น่าสังเกตว่าสมการ (6.58) มีรูปแบบเหมือนสมการการแพร่ (6.24) สำหรับนิวตรอนพลังงานค่าเดียว ผลเฉลยที่ได้ก็จะเป็นจริงสำหรับเทอร์มอลนิวตรอนโดยแทน D , L^2 และ ϕ ด้วย $\bar{D}$, L_T^2 และ ϕ_T ตามลำดับ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตารางที่ 6-2

ค่าพารามิเตอร์การแพร่เทอร์มอลนิวตรอนของโมเดอเรเตอร์ที่ใช้ทั่วไปที่ 20 °C

มอดอเรเตอร์ (moderator)	ความหนาแน่น ρ , g cm ⁻³	$\bar{D}$, cm	$\bar{\Sigma}_a$, cm ⁻¹	L_T^2 , cm ²	L_T , cm
H ₂ O	1.00	0.16	0.0197	8.1	2.85
D ₂ O†	1.10	0.87	9.3×10^{-5}	9.4×10^3	97
Be	1.85	0.50	1.04×10^{-3}	480	21
Graphite	1.60	0.84	2.4×10^{-4}	3500	59

*Based on *Reactor Physics Constants*, 2nd ed., Argonne National Laboratory report ANL-5800, 1963, Section 3.3.

†D₂O containing 0.25 weight/percent H₂O. These values are very sensitive to the amount of H₂O impurity

ตัวอย่างที่ 6-5

จุดกำเนิดปลดปล่อยปล่อย 10^7 เทอร์มอลนิวตรอนต่อวินาที จุดกำเนิดนี้อยู่ภายในน้ำที่มีขนาดอนันต์ ซึ่งมีความหนาแน่น 1 g/cm³ ที่อุณหภูมิห้อง ให้หาฟลักซ์เทอร์มอลนิวตรอนที่ระยะ 15 cm จากจุดกำเนิด

วิธีทำ

จากสมการ (6.38) เมื่อเปลี่ยนสัญลักษณ์ของพารามิเตอร์เป็นเทอร์มอลนิวตรอนจะได้

$$\phi_T = [S/(4\pi \bar{D} r)] \exp(-r/L_T)$$

แทนค่าพารามิเตอร์ L_T และ $\bar{D}$ จากตารางที่ 6-1 และ $S=10^7$ กับ $r = 15$ cm จะได้

$$\begin{aligned} \phi_T &= [10^7 / (4\pi \times 0.16 \text{ cm} \times 15 \text{ cm})] \exp(-15/2.85) \text{ thermal neutrons/s} \\ &= 1.72 \times 10^3 \text{ thermal neutrons/s} \end{aligned}$$

ค่าพารามิเตอร์ในตารางที่ 6-2 นั้นได้จากพิจารณาความหนาแน่นปกติและอุณหภูมิห้อง สำหรับกรณีที่แตกต่างกัน ขอละไว้ไม่ได้กล่าวถึงในตารางนี้

6.8 การคำนวณการหน่วงนิวตรอนเป็น 2 กลุ่ม

(Two-Group Calculation of Neutrons Moderation)

การคำนวณเกี่ยวกับเครื่องปฏิกรณ์หลายอย่างโดยเฉพาะที่เกี่ยวข้องกับภาวะวิกฤตของเครื่องปฏิกรณ์ที่ใช้เทอร์มอลนิวตรอนหรือเราอาจเรียกทับศัพท์ว่าเทอร์มอลรีแอคเตอร์ (Thermal reactors) จะกล่าวถึงในบทที่ 7 ซึ่งจะพิจารณานิวตรอน 2 กลุ่มเป็นอย่างน้อยเพื่อให้ได้คำตอบออกมาถูกต้องขึ้น การพิจารณานิวตรอนกลุ่มเดียวจำเป็นในการอธิบายเทอร์มอลนิวตรอน ส่วนกลุ่มที่สองหรือกลุ่มนิวตรอนเร็วจะรวมนิวตรอนทั้งหมดที่มีพลังงานสูงกว่าเทอร์มอลนิวตรอนซึ่งเป็นพวกนิวตรอนที่ถูกหน่วงจากระดับพลังงานเริ่มต้นหลังการแบ่งแยกตัวถึงประมาณ 5kT

เพื่อเป็นพื้นฐานการคำนวณในบทที่ 7 จะยกตัวอย่างการนำการแบ่งนิวตรอนเป็น 2 กลุ่มมาใช้โดยมีการคำนวณหาค่าฟลักซ์ 2 กลุ่ม (two-group fluxes) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของระยะทางจากจุดกำเนิดที่ปลดปล่อยนิวตรอนเร็วที่เกิดจากการแบ่งแยกตัว อย่างไรก็ตาม ภาคตัดขวางการดูดกลืนของวัสดุที่ใช้เป็นตัวหน่วงทุกชนิดมีค่าช่องว่างต่ำ โดยเฉพาะกับนิวตรอนที่มีพลังงานเหนือพวกเทอร์มอลนิวตรอน ซึ่งอาจให้ค่าเป็นศูนย์ได้ ซึ่งสมการการแพร่ที่ใช้กับนิวตรอนเร็วที่เหมาะสมจึงให้มีรูปเป็น

$$D_1 \nabla^2 \phi_1 - \Sigma_1 \phi_1 = 0 \quad (6.60)$$

เมื่อ Σ_1 คือภาคตัดขวางของการถ่ายโอนกลุ่ม (group transfer cross section) โดยมีพจน์แหล่งกำเนิดเป็นศูนย์เนื่องจากไม่มีแหล่งกำเนิดอื่นยกเว้นที่จุดกำเนิดของตัวเอง

ในทฤษฎีเครื่องปฏิกรณ์นิวเคลียร์ (nuclear reactor theory) ซึ่งจะได้กล่าวถึงในบทที่ 7 จำนวนนิวตรอนที่มีความเร็วลดลงเป็นเทอร์มอลนิวตรอนต่อลูกบาศก์เซนติเมตรต่อวินาทีเรียกกันว่าอัตราของความหนาแน่นการลดความเร็ว (slowing-down density) โดยใช้สัญลักษณ์เป็น q_T โดยที่พจน์ $\Sigma_1 \phi_1$ ในสมการ (6.60) มีความหมายเป็น

$\Sigma_1 \phi_1$ = จำนวนนิวตรอนที่กระเจิงต่อลูกบาศก์เซนติเมตรต่อวินาทีจากกลุ่มนิวตรอนเร็ว
ไปเป็นกลุ่มเทอร์มอลนิวตรอน

ดังนั้นจะได้

$$q_T = \Sigma_1 \phi_1 \quad (6.61)$$

ที่นี่เมื่อพิจารณาส่วนที่เป็นเทอร์มอลนิวตรอนนั้นอธิบายได้ด้วยสมการการแพร่เทอร์มอลนิวตรอนสมการ (6.57) หรือ (6.58) อย่างไรก็ตามแหล่งกำเนิดเดียวของเทอร์มอลนิวตรอนในปัญหาดังกล่าวเกิดจากที่มีความเร็วลดลงโดยไม่มีกลุ่มนิวตรอนเร็ว ในกรณีนี้คือ q_T [neutrons/(cm³ s)] ดังนั้นพจน์แหล่งกำเนิดในสมการ (6.57) หรือ (6.58) จึงมีค่า $\Sigma_1 \phi_1$ จึงได้สมการกลุ่มเทอร์มอลนิวตรอน (thermal group equation) เป็น

$$\nabla^2 \phi_T - \phi_T / L_T^2 = \Sigma_1 \phi_1 / D \quad (6.62)$$

ในการหาค่า ϕ_T ในสมการ (6.62) จำเป็นต้องแก้สมการ (6.60) เพื่อหาค่า ϕ_1 เสียก่อนเมื่อพิจารณาว่าปัญหามีลักษณะสมมาตรทั้ง ϕ_1 และ ϕ_T ขึ้นอยู่กับเฉพาะระยะทาง r จากจุดกำเนิดเมื่อหารสมการ (6.60) ตลอดด้วย D_1 และเขียนลาปลาเซียน (Laplacian) ในพิกัดทรงกลมจะได้

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi_1}{dr} \right) - \phi_1 / \tau_T = 0 \quad (6.63)$$

โดยที่

$$\tau_T = D_1 / \Sigma_1 \quad (6.64)$$

พารามิเตอร์ τ_T เกิดขึ้นในหลายๆปัญหาในเครื่องปฏิกรณ์หลายแบบและเรียกกันว่าอายุนิวตรอน (neutron age) ชื่อแปลกนี้มาจากการแสดงให้เห็นว่าเป็นฟังก์ชันกับช่วงเวลาที่นิวตรอนใช้จนมีความเร็วต่ำ อย่างไรก็ตามอายุนี้ไม่ได้มีหน่วยเป็นเวลาเมื่อดูจากสมการ (6.64) จะมีหน่วยเป็น cm^2

เมื่อเปรียบเทียบสมการ (6.63) กับสมการ (6.35) ซึ่งเป็นสมการการแพร่ของนิวตรอนจากจุดกำเนิดแสดงให้เห็นว่าสมการทั้งสองเหมือนกันยกเว้น τ_T ในสมการ (6.63) แทนที่ L^2 ในสมการ (6.35) ดังนั้นผลเฉลยของสมการ (6.63) หาได้จากสมการ (6.38) เพียงแต่เขียน $\tau_T^{1/2}$ แทน L และ D_1 แทน D จะได้

$$\phi_1 = (S/4\pi D_1 r) \exp(-r/\tau_T^{1/2}) \quad (6.65)$$

คงจำได้จากหัวข้อ 6.6 ความยาวการแพร่ยกกำลังสองมีค่าเท่ากับหนึ่งในหกของค่าเฉลี่ยของระยะทางตรงจากจุดกำเนิดไปยังจุดสุดท้ายที่ถูกดูดกลืนยกกำลังสอง ในการพิจารณา τ ก็เช่นเดียวกันโดยยกเว้นว่านิวตรอนไม่ได้ถูกดูดกลืนในกลุ่มนิวตรอนเร็ว นิวตรอนจะกระเจิงออกจากกลุ่มเข้าสู่กลุ่มเทอร์มอลนิวตรอน ดังนั้นพารามิเตอร์ τ_T จึงมีค่าเท่ากับหนึ่งในหกของค่าเฉลี่ยของระยะทางตรงจากจุดกำเนิดนิวตรอนเร็วไปยังจุดที่มีความเร็วลดลงเป็นเทอร์มอลนิวตรอนยกกำลังสองหรือ

$$\tau_T = (r^2)_{\text{ave}} / 6 \quad (6.66)$$

อายุของนิวตรอนตามที่นิยามจากสมการ (6.66) สามารถคำนวณได้จากการทดลอง ค่าที่วัดได้ของ τ_T สำหรับนิวตรอนที่เกิดจากการแบ่งแยกตัวในมอดอเรเตอร์ ชนิดต่างๆดูได้จากตารางที่ 6-3 เมื่อแทนสมการ (6.65) ลงในสมการ (6.62) จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เป็นเอกพันธ์ (inhomogeneous differential equation) ซึ่งมีผลเฉลยเป็น

$$\phi_T = [SL_T^2 / \{4\pi r D (L_T^2 - \tau_T)\}] \{ \exp(-r/L_T) - \exp(-r/\tau_T^{1/2}) \} \quad (6.67)$$

จะเป็นสมการที่บ่งบอกว่าฟลักซ์เทอร์มอลนิวตรอนเป็นผลมาจากจุดกำเนิดที่ให้นิวตรอนเร็วตามทฤษฎีการแบ่งนิวตรอนเป็น 2 กลุ่ม (two-group theory) ขอนั่นว่าสมการ (6.67) นี้ไม่

ตารางที่ 6-3

ค่าคงที่ต่างๆ ของกลุ่มนิวตรอนเร็วสำหรับมอดอเรเตอร์ชนิดต่างๆ

(Fast - group constants for various moderators)			
มอดอเรเตอร์ (moderator)	D_1 , cm	Σ_1 , cm^{-1}	τ_T , cm^2
H ₂ O	1.13	0.0419	~ 27
D ₂ O	1.29	0.00985	131
Be	0.562	0.00551	102
Graphite	1.016	0.00276	368

ถูกต้องจริง ที่จริงรูปแบบการแบ่งเป็น 2 กลุ่มนี้ไม่เหมาะสมที่จะใช้คำนวณการลดความเร็วของนิวตรอนในตัวกลางทั้งหลาย มีวิธีที่ดีกว่าและถูกต้อง(ซึ่งยุ่งยากกว่า)เพื่อคำนวณการลดความเร็วของนิวตรอนจากจุดกำเนิด แต่จะเห็นในบทที่ 7 ว่า รูปแบบการแบ่งเป็น 2 กลุ่มนี้สามารถมาใช้ได้อย่างหยาบๆในการคำนวณอันดับที่หนึ่ง (first-order calculations) ของเครื่องปฏิกรณ์ที่ใช้เทอร์มอลนิวตรอน

อย่างไรก็ตามค่าที่พบจากการทดลองของ τ_T ที่ปรากฏในตารางที่ 6-3 เป็นค่าของมอดูเรเตอร์ที่อุณหภูมิห้องและความดันปกติ ทั้ง D_1 และ Σ_1 ในสมการ (6.64) ไม่เปลี่ยนไปกับอุณหภูมิ แต่ทั้งคู่มีค่าขึ้นกับความหนาแน่น การหาค่า τ_T ที่ความหนาแน่นไม่ปกติให้สังเกตว่า τ_T เหมือนกับ L_T^2 จะแปรผกผันกับความหนาแน่นยกกำลังสอง ดังนั้นค่าของ τ_T ที่ความหนาแน่น ρ กำหนดโดย

$$\tau_T(\rho) = \tau_T(\rho_0) (\rho_0 / \rho)^2 \quad (6.68)$$

เมื่อ $\tau_T(\rho_0)$ คืออายุที่ความหนาแน่น ρ_0

สรุปเนื้อหาในบทที่ 6

1. เมื่อความเข้มข้นของนิวตรอน (I) กระทบกับเป้า อัตราการเกิดอันตรกิริยาทั้งหมด

$$F = \sum_i (I_A + I_B + I_C + \dots) \quad [\text{neutrons}/(\text{cm}^3 \cdot \text{s})]$$

เมื่อ $\sum_i$ คือภาคตัวขวางมหภาคทั้งหมด

2. กรณีที่นิวตรอนมีพลังงานที่แตกต่างกัน อัตราการเกิดอันตรกิริยาทั้งหมด มีค่า

$$F = \int_0^\infty \sum_i(E) \cdot n(E) v(E) dE = \int_0^\infty \sum_i(E) \cdot \phi(E) dE$$

โดยที่ $\phi(E) = n(E)v(E)$ เรียกฟลักซ์นิวตรอนที่ขึ้นกับพลังงานหรือฟลักซ์นิวตรอนต่อหน่วยพลังงาน

3. กฎของฟิคมีว่า $J_x = -D d\phi/dx$ เมื่อ J_x คือจำนวนนิวตรอนสุทธิที่ไหลผ่านพื้นที่ในแนวตั้งฉากทิศทาง x ต่อเวลา พารามิเตอร์ D คือสัมประสิทธิ์การแพร่ ในกรณีที่เราพิจารณาแบบ 3 มิติ จะได้กฎของฟิค มีรูปเป็น

$$\vec{J} = -D \text{grad } \phi = -D \nabla \phi$$

4. ระยะทางเฉลี่ยของการนำพาที่มีความสัมพันธ์กับภาคตัดขวางการนำพามหาภาค Σ_{tr} โดย

$$\bar{x}_{tr} = 1/\Sigma_{tr} = 1/[\Sigma_s \{1 - (\cos \theta_L)_{ave}\}]$$

เมื่อ Σ_s คือภาคตัดขวางการกระเจิงมหาภาคของตัวกลาง และ θ_L คือมุมที่นิวตรอนกระเจิงในตัวกลางโดยมี $(\cos \theta_L)_{ave} = 2/(3A)$ เป็นค่าโคไซน์เฉลี่ยของมุมการกระเจิงโดยมี A คือเลขมวลเชิงอะตอมของตัวกลาง

5. ฟลักซ์ที่ได้ตามทฤษฎีการแพร่ซึ่งสมมติว่าหายไประยะน้อย ๆ d พื้นผิวแล้วฟลักซ์ที่ได้จากสมการการแพร่จะมีค่าใกล้เคียงมากกับฟลักซ์ที่คำนวณได้ถูกต้องภายในตัวกลางและบริเวณใกล้ๆผิว โดยอาศัยความสัมพันธ์ $\bar{x}_{tr} = 3D$ และ $d = 2.13D$

6. กรณีที่ฟลักซ์นิวตรอนไม่เปลี่ยนแปลงไปกับเวลาแล้ว

$$D \nabla^2 \phi - \Sigma_a \phi + s = 0$$

เรียกสมการแพร่สถานะคงตัว หรือ

$$\nabla^2 \phi - \phi/L^2 + s/D = 0$$

โดย พารามิเตอร์ L^2 เรียกพื้นที่การแพร่ มีค่า $= D/\Sigma_a$ (cm^2)

s = อัตราที่นิวตรอนถูกปล่อยออกมาจากแหล่งกำเนิดต่อลูกบาศก์เซนติเมตร

7. ความยาวการแพร่ยกกำลังสองคือ $L^2 = (r^2)_{ave}/6$ มีค่าเท่ากับหนึ่งในหกของค่าเฉลี่ยของระยะทางตรงหรือเวกเตอร์ (crow flight) จากจุดกำเนิดนิวตรอนถึงจุดที่นิวตรอนถูกดูดกลืนยกกำลังสอง ถ้า L มีค่ามากแสดงว่านิวตรอนเคลื่อนที่ไปได้มากอันเป็นค่าเฉลี่ยถูกดูดกลืน
8. เมื่อนิวตรอนถูกหน่วงให้ช้าลงจนมีพลังงานระดับเทอร์มอลจะมีการแจกแจงพลังงานตามฟังก์ชันแมกซ์เวลเลียน(Maxwellian function)ซึ่งถ้าให้ $n(E)dE$ คือจำนวนนิวตรอนต่อปริมาตรที่มีพลังงานอยู่ระหว่าง $E + dE$ และจะได้

$$n(E) = [2n/(\pi)^{1/2}](1/kT)^{3/2} E^{1/2} e^{-E/kT}$$

เมื่อ n = จำนวนทั้งหมดของนิวตรอนต่อปริมาตร (neutron density)

k = ค่าคงที่ของโบลต์ซมันน์ $= 8.617 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$

T = อุณหภูมิสัมบูรณ์ของสเปกตรัมของการแจกแจง (K)

จะได้พลังงานสูงสุด $E_p = kT/2$ และมีพลังงานเฉลี่ย

$$\bar{E} = (1/n) \int_0^\infty E n(E) dE = 3kT/2$$

$kT_0 = 0.0253 \text{ eV} \approx (1/40) \text{ eV}$ เมื่อ $T_0 = 293.61 \text{ K}$

9. ϕ_T = ฟลักซ์เทอร์มอลนิวตรอน (one – group thermal flux) นิยามว่ามีค่าเป็น

$$\phi_T = \int_T \phi(E) dE$$

เมื่อ T ที่ห้อยอยู่กับเครื่องหมายอินทิกรัล(integral)แสดงถึงการอินทิเกรตทุกช่วงพลังงานของ
เทอร์มอลนิวตรอน ซึ่งปกติมักจะขยายถึง $5 \text{ kT} \approx 0.1 \text{ eV}$

10. ϕ_o เป็นฟลักซ์เทียม (psendo flux) ซึ่งสมมุติว่าเทอร์มอลนิวตรอนทั้งหมดมีพลังงานเดียว
 $E_o = 0.0253 \text{ eV}$ โดย

ϕ_T – ใช้กับการออกแบบเครื่องปฏิกรณ์

ϕ_o – เหมาะสำหรับการนำเครื่องปฏิกรณ์ไปใช้

ความสัมพันธ์ระหว่างฟลักซ์ทั้งสองหาจากการเปรียบเทียบค่าทั้งสอง

$$\phi_o / \phi_T = \pi^{1/2} v_o / (2v_T)$$

11. สมประสิทธิ์การแพร่ของเทอร์มอลนิวตรอนกลุ่มเดียว

$$\bar{D} = (1/\phi_T) \int_T D(E)\phi(E)dE$$

12. ภาคตัดขวางการดูดกลืนของวัสดุที่เกิดจากเทอร์มอลนิวตรอนกลุ่มเดียว

$$\bar{\Sigma}_a = (1/\phi_T) \int_T \Sigma_a(E)\phi(E)dE$$

13. สมการการแพร่สำหรับเทอร์มอลนิวตรอนซึ่งแสดงการขึ้นกับตำแหน่งด้วย

$$\nabla^2 \phi_T - \phi_T / L_T^2 = -s_T / D$$

โดยที่ s_T คืออัตราการปล่อยเทอร์มอลนิวตรอนต่อปริมาตรของแหล่งกำเนิด

$$L_T^2 = \bar{D} / \bar{\Sigma}_a \text{ เรียกว่าพื้นที่การแพร่เทอร์มอล (นิวตรอน)}$$

และ L_T เรียกว่าความยาวการแพร่เทอร์มอล (นิวตรอน)

14. การพิจารณานิวตรอน 2 กลุ่มเป็นอย่างน้อยจะได้คำตอบออกมาถูกต้องยิ่งขึ้น การพิจารณานิวตรอนกลุ่มเดียวจำเป็นในการอธิบายเทอร์มอลนิวตรอน ส่วนกลุ่มที่สองหรือกลุ่มนิวตรอนเร็วจะรวมนิวตรอนทั้งหมดที่มีพลังงานสูงกว่าเทอร์มอลนิวตรอน

แบบฝึกหัดบทที่ 6

6.1 จากสมการ (6.43) จงแสดงว่า

ก. พลังงานสูงสุด $E_p = (1/2) k T$

ข. พลังงานเฉลี่ย $\bar{E} = (3/2) k T$

6.2 นิวตรอน (พลังงาน 1 eV) 2 ลำตัดกันทำมุม 90° ความหนาแน่นของลำนิวตรอนทั้งคู่มีค่า 2×10^8 neutrons / cm^3 ให้คำนวณหา

ก. ความเข้มแต่ละลำนิวตรอน

ข. ฟลักซ์นิวตรอน ณ ตำแหน่งที่ลำนิวตรอนตัดกัน

6.3 เมื่ออัตราการดูดกลืนลำเทอร์มอลนิวตรอน (F_a) สำหรับตัวดูดกลืนที่ไม่ขึ้นกับ $1/v$ (Non- $1/v$ absorber) F_a ขึ้นกับอุณหภูมิของการแจกแจงนิวตรอนของแมกซ์เวลล์ โดยมี

$$F_a = g_a(T) \Sigma_a(E_0) \phi_0$$

ให้หาอัตราที่นิวตรอนถูกดูดกลืนในแผ่นอินเดียม(indium foil)ซึ่งวาง

ณ จุดหนึ่งในเครื่องปฏิกรณ์ที่มีฟลักซ์นิวตรอน(ความเร็ว 2,200 m/s)

$$\phi_0 = 5 \times 10^{12} \text{ neutrons}/(\text{cm}^2 \text{ s}) \quad \text{เมื่อ } g_a(600^\circ \text{C}) = 1.15 \quad \text{อินเดียมมีความหนาแน่น}$$

- อะตอม $N = 0.0383 \times 10^{24}$ atoms/cm³ โดยมี $\sigma_a(E_0) = 194$ b
- 6.4 นิวตรอน 2 ลำโดยลำแรกมีความเข้ม $I_1 = 2 \times 10^{10}$ neutrons/(cm² s) ลำที่สองมีความเข้ม $I_2 = 2 \times 10^{10}$ neutrons/(cm² s) ตัดกันทำมุม 30° ให้คำนวณหาฟลักซ์นิวตรอนและกระแสในบริเวณจุดตัด
- 6.5 ภาคตัดขวางการกระเจิงแบบมหภาคของโบรอนที่นิวตรอนความเร็ว 2, 200m/s มีค่า 0.346 cm⁻¹ ให้ประมาณสัมประสิทธิ์การแพร่ของโบรอนที่พลังงานนี้
- 6.6 มอดูเลเตอร์ชนิดหนึ่งขนาดอนันต์จุดแหล่งกำเนิดนิวตรอนแบบไอโซทรอปิกที่มี การแจกแจงอย่างสม่ำเสมอ(uniformly distributed isotropic sources) ปลดปล่อย S (neutrons / cm³ s) ให้คำนวณหาฟลักซ์สถานะคงตัวและกระแสนิวตรอนที่จุดใด ๆ ในตัวกลาง
- 6.7 ให้ใช้สมการ(6.61) $D = \bar{x}_{tr} / 3$ และสมการ (6.12) $\bar{x} = 1/\Sigma_{tr} = 1/\Sigma_s[1 - (\cos \theta_L)_{ave}]$ ประมาณค่าสัมประสิทธิ์การแพร่ของนิวตรอนพลังงาน 0.0253 eV ใน
- ก. เบอริลเลียม ข. แกรไฟต์
- 6.8 ให้หาอัตราเร็ว(v) (และความหนาแน่นของนิวตรอน(n) พลังงาน 1.5 MeV ในฟลักซ์นิวตรอน 7×10^{13} neutrons/(cm² s)
- 6.9 ให้คำนวณหาความยาวการแพร่(diffusion length) ของเทอร์มอลนิวตรอนที่อุณหภูมิห้องในน้ำที่มีกรดบอริก(boric acid, H₃BO₃)ความเข้มข้น
- ก. 10 g / liter ข. 1 g / liter ค. 0.1 g / liter
- 6.10 ให้คำนวณหาสัมประสิทธิ์การแพร่เทอร์มอลนิวตรอน และ ความยาวการแพร่ของน้ำเกลือ ๆ ทางปล่อยออกของเครื่องปฏิกรณ์แบบน้ำที่มีความดัน(PWR) โดยน้ำมีอุณหภูมิประมาณ 300 °C และความหนาแน่น 0.68 g/cm³ และ ให้หาอายุนิวตรอน(neutron age) ที่เกิดจากการแบ่งแยกตัวได้น้ำ
- 6.11 ฟลักซ์ของนิวตรอน $\phi(r)$ ที่ระยะ r จากจุดกำเนิดที่ปลดปล่อย S neutrons / s ในมอดูเลเตอร์ขนาดอนันต์มีค่า $\phi(r) = (S/4\pi Dr) e^{-r/L}$ เมื่อ L คือ ค่าคงที่ จงหาสมการ
- ก. กระแสนิวตรอนในตัวกลาง
- ข. จำนวนนิวตรอนสุทธิที่ไหลผ่านทรงกลมรัศมี r รอบจุดกำเนิด
- 6.12 ให้หาฟลักซ์และกระแสนิวตรอนที่จุดกึ่งกลางเหนือรูปที่ 6.5 ขึ้นไปเป็นระยะ a
- 6.13 ให้หาค่าการเปลี่ยนพลังงานในรูปลอการิทึมเฉลี่ย ξ และค่าโคไซน์เฉลี่ยของมุมการกระเจิง $(\cos \theta_L)_{ave}$ ของนิวตรอนในเบอริลเลียม (Be-9) นิวตรอนต้องชนกี่ครั้งเพื่อให้พลังงานลดลงจาก 2MeV ไปเป็น 0.0253 eV และให้หาสัมประสิทธิ์การแพร่ D สำหรับนิวตรอนพลังงาน 0.0253 eV ถ้า $\Sigma_s = 0.90$ cm⁻¹

6.14 มอเตอเรเตอร์แบบแผ่นแบนไม่มีสิ่งกีดขวางอนันต์(infinite bare slab) หน้า 2a บรรจุแหล่งกำเนิดนิวตรอนที่มีการแจกแจงอย่างสม่ำเสมอปลดปล่อย $S(\text{neutrons/cm}^3 \text{ s})$ ให้แสดงว่าฟลักซ์ในแผ่นแบนมีค่า

$$\phi = (S/\Sigma_a)[1 - \cosh(x/L)/\cosh\{(a+d)/L\}]$$

เมื่อ x คือระยะที่วัดจากจุดกึ่งกลางแผ่นแบน