

บทที่ 4

นิวตรอนที่เกิดจากการแบ่งแยกตัว และการลดความเร็วของนิวตรอน (Fission Neutrons and Slowing Down of Neutrons)

วัตถุประสงค์

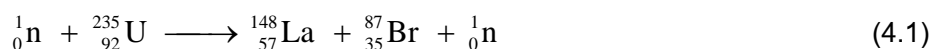
เพื่อให้ศึกษามีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับ

1. นิวตรอนที่เกิดจากการแบ่งแยกตัว
2. การลดความเร็วของนิวตรอน
3. จลนศาสตร์การชน
4. การชนแบบยืดหยุ่น

ในบทนี้จะเริ่มจากการศึกษานิวตรอนที่เกิดจากการแบ่งแยกตัว ซึ่งเป็นตัวสำคัญที่จะทำให้เกิดปฏิกิริยาลูกโซ่ในเครื่องปฏิกรณ์นิวเคลียร์ ซึ่งเชื้อเพลิงนิวเคลียร์จะเกิดได้ดีกับเทอร์มอลนิวตรอน ดังนั้นจะศึกษาว่านิวตรอนที่เกิดจากการแบ่งแยกตัวจะมีพลังงานต่ำลง หรือ มีความเร็วลดลงได้อย่างไร

4.1. นิวตรอนที่เกิดจากการแบ่งแยกตัว (Fission Neutrons)

จากหัวข้อ 3.2 กล่าวถึงผลที่เกิดจากการแบ่งแยกตัว ^{235}U มีได้หลายอย่าง ตัวอย่างสมการ (3.2) และ (3.3) ซึ่งให้นิวตรอนออกมา 2 ตัว และ 3 ตัว ตามลำดับ ผลที่ได้เป็นอย่างอื่นอาจจะเป็น

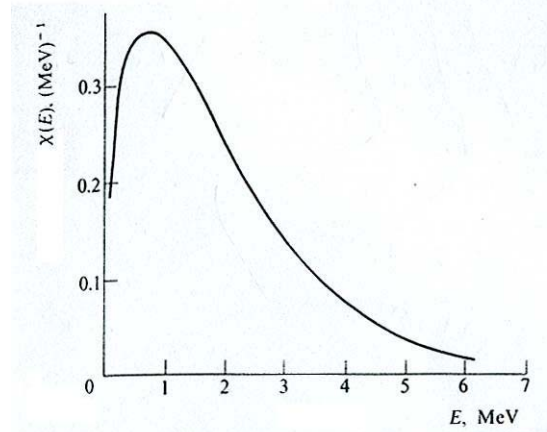


ซึ่งกรณีนี้ให้นิวตรอนออกมา 1 ตัวกรณีการแบ่งแยก ^{235}U จากนิวตรอนช้า เฉลี่ยแล้วเกิดนิวตรอนออกมา ~ 2.4 neutrons/fission โดยใช้สัญลักษณ์ ν ดังที่เห็นในตารางที่ 3-2 ในบทที่ 3

การที่จะเกิดขึ้นส่วนการแบ่งแยกเป็น 2 นิวไคลด์ ดังได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 3.2 จำนวนนิวตรอนที่เกิดขึ้นในแต่ละปฏิกิริยานี้ก็เป็นไปตามหลักการอนุรักษ์ประจุ และ ถือเป็นนิวตรอนที่เกิดขึ้นทันทีทันใด ซึ่งนักวิทยาศาสตร์พบว่า มีประมาณ 99.3% ของนิวตรอนทั้งหมดที่เกิดขึ้น แต่ยังมีนิวตรอนอีกจำนวนหนึ่งที่เกิดภายหลังจากการเกิดเหตุการณ์การแบ่งแยกตัวผ่านไปแล้ว

4.1.1. นิวตรอนที่เกิดทันที (Prompt Neutrons)

นิวตรอนที่เกิดทันทีหรือถูกปลดปล่อยออกมาจากปฏิกิริยาการแบ่งแยกนิวเคลียสที่เกิดจากเทอร์มอลนิวตรอน(thermal fission)จะมีสัดส่วนการเกิดที่ขึ้นกับพลังงาน ตัวอย่างกรณีที่เกิดจาก ^{235}U ให้ดูสเปกตรัมของนิวตรอนที่เกิดทันที (prompt neutron spectrum) ในรูปที่ 4-1 ซึ่งแสดงสัดส่วนที่เกิดขึ้นกับพลังงานนิวตรอน ซึ่งพลังต่ำจะมีสัดส่วนที่เกิดสูง



รูปที่ 4-1 สเปกตรัมของนิวตรอนที่เกิดทันทีจากการแบ่งแยก ^{235}U

เมื่อนิวตรอนพลังงานสูงจะมีสัดส่วนที่เกิดต่ำลง โดยกราฟที่ได้เป็นไปตามการแจกแจงแมกซ์เวลเลียน (Maxwellian distribution) โดยมีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นคือ

$$\chi(E) = \frac{2E^{1/2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{3/2} e^{-E/kT} \quad (4.2)$$

เมื่อ k คือค่าคงที่ของโบลตซ์มันน์ T คือ อุณหภูมิสัมบูรณ์ของสเปกตรัม (K) และ E คือ พลังงานของการแจกแจง มีผู้ทดลองหาฟังก์ชัน (semi-empirical function) เมื่อ $kT = 1.29 \text{ MeV}$ โดย T คำนี้นี้เป็นอุณหภูมิยังผล (effective temperature) จะได้

$$\chi(E) = 0.453 e^{-1.036E} \sinh(2.29E)^{1/2} \quad (4.3)$$

โดยนิวตรอนมีพลังงาน E (MeV) ดังนั้น $\chi(E)dE$ คือ สัดส่วนของนิวตรอนที่เกิดทันที ในช่วงพลังงาน E และ $E + dE$ และเมื่อ $\chi(E)$ คือความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเมื่อรวมตลอดอวกาศทุกช่วงพลังงานสเปกตรัมจะได้เท่ากับ 1 หรือ

$$\int_0^{\infty} \chi(E)dE = 1$$

ดังนั้นเราจะได้พลังงานเฉลี่ย \bar{E} ของนิวตรอนที่เกิดทันทีที่มีค่า

$$\bar{E} = \int_0^{\infty} E\chi(E)dE \quad (4.4)$$

เมื่อใช้สมการ (4.2) จะได้สมการ (1.4) คือ $\bar{E} = \frac{3}{2}kT$ และเมื่อ $kT = 1.29$ MeV จะได้พลังงานเฉลี่ยของนิวตรอนที่เกิดจากการแบ่งแยก (ด้วยเทอร์มอลนิวตรอน) $\bar{E} = 1.935$ MeV แต่ถ้าใช้ฟังก์ชันตามสมการ (4.3) จะได้ 1.98 MeV นิวตรอนที่เกิดทันทีตามสเปกตรัมนี้จะมีพลังงานที่เป็นไปได้มากที่สุด E_p (the most probable energy) โดยดูได้จากยอดกราฟของสเปกตรัม ซึ่งพลังงานที่ตรงยอดกราฟนี้คือ $E_p = 0.73$ MeV

ตารางที่ 4-1 พลังงานเฉลี่ย \bar{E} และ ค่า kT (MeV) ของนิวตรอนที่เกิดจากการแบ่งแยกตัวของไอโซโทปต่างๆ

ก. กรณีนิวตรอนที่เกิดทันที						
ไอโซโทป	²³³ U	²³⁵ U	²³⁹ U			
kT	1.31	1.29	1.41			
\bar{E}	1.965	1.935	2.11			
ข. กรณีนิวตรอนที่เกิดขึ้นภายหลัง						
ไอโซโทป	²³² Th	²³³ U	²³⁵ U	²³⁸ U	²³⁹ Pu	²⁴⁰ Pu
kT	0.37	0.26	0.29	0.37	0.27	0.28
\bar{E}	0.49	0.39	0.43	0.49	0.40	0.42
เมื่อ 1 MeV (kT) = 0.160219 pJ, คิดเป็นอุณหภูมิ 10 ¹¹ K						

ยังมีปัจจัยที่เกี่ยวข้องในการหาค่าดังกล่าวมาข้างบนคือ ยังขึ้นกับชนิดของนิวไคลด์ที่เกิดการแบ่งแยกตัว รวมทั้งพลังงานของนิวตรอนที่เข้าชนด้วย ได้มีการทดลองหาสมการที่เหมาะสมในการคำนวณหาพลังงานเฉลี่ยของนิวตรอนที่เกิดทันที กับ จำนวนเฉลี่ยของนิวตรอนที่เกิดจากการแบ่งแยก (ν) ของนิวไคลด์ซึ่งได้

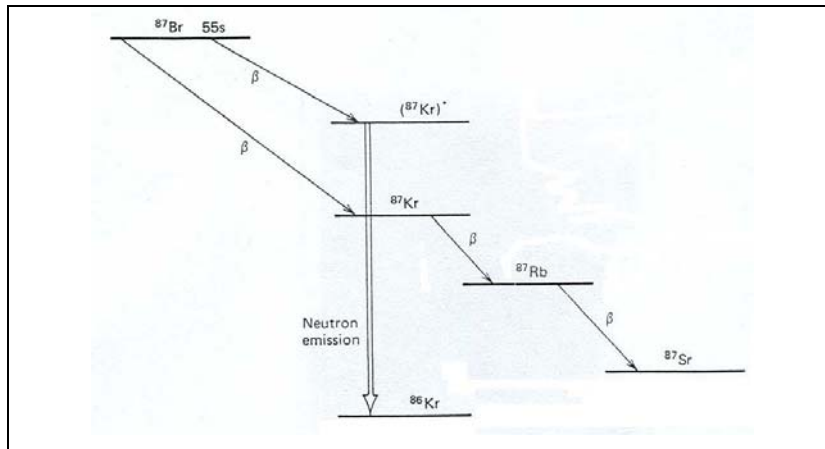
$$\bar{E} = 0.74 + 0.65 (\nu+1)^{1/2} \text{ MeV} \quad (4.5)$$

โดยการพิจารณาว่านิวตรอนที่เกิดมีการกระจายไปในทุกๆทิศทางที่พอๆกัน (isotropically)

พลังงานเฉลี่ยและค่า kT ที่สอดคล้องของนิวตรอนที่เกิดทันทีและของนิวตรอนที่เกิดภายหลัง ให้ดูได้จากตารางที่ 4-1 โดยนิวตรอนที่เกิดขึ้นในภายหลัง ก็ยังคงมีค่าที่แตกต่างกันซึ่งอ้างอิงตามการวิเคราะห์ของนักวิทยาศาสตร์หลายๆท่านที่กำลังศึกษากันอยู่ อย่างไรก็ตามให้ดูเพิ่มเติมจากตารางที่ 4-2 และ รายละเอียดเพิ่มเติมในหัวข้อ 4.1.2 ต่อไป

4.1.2. นิวตรอนที่เกิดขึ้นภายหลัง (Delayed Neutrons)

ดังได้กล่าวไว้ก่อนหน้านี้แล้วว่า ที่เหลือจากนิวตรอนที่เกิดขึ้นทันทีจากการแบ่งแยกตัวประมาณ 0.7% ของนิวตรอนที่เกิดขึ้นทั้งหมด จะเป็นนิวตรอนที่เกิดขึ้นภายหลัง ซึ่งเกิดขึ้นขึ้นส่วนการแบ่งแยกปฐมภูมิทั้ง 2 ชั้นที่ยังไม่เสถียร บางครั้งก็เกิดจากชิ้นส่วนการแบ่งแยกทุติยภูมิที่ยังไม่เสถียร (unstable secondary fission fragments) ตัวอย่างที่



รูปที่ 4-2 แผนการสลายของ $^{87}_{35}\text{Br}$ ซึ่งจะให้นิวตรอนเกิดขึ้นมาในภายหลัง

รู้จักกันดี คือ ที่เกิดจากปฏิกิริยา (4.1) การสลายตัวของ $^{87}_{35}\text{Br}$ ดังรูปที่ 4-2 ให้อนุภาค β^- ออกมา ซึ่งจะมี 2 กรณีที่เกิดได้คือถ้า β^- ที่สลายออกมาพาพลังงานของการตื่นตัวไปด้วยสัดส่วนที่มากจะทำให้เกิด $^{87}_{36}\text{Kr}$ ที่อยู่ในสถานะตื่นตัวต่ำแล้วจะสลายตัวให้ β^- ออกมากลายเป็น $^{87}_{37}\text{Rb}$ จากนั้นสลาย β^- ต่อเกิดเป็น $^{87}_{38}\text{Sr}$ ที่เสถียรเป็นผลผลิตสุดท้าย (end product) แต่อาจเป็นอีกกรณีหนึ่งคือเมื่อ $^{87}_{35}\text{Br}$ สลาย β^- ออกมาโดยมีพลังงานติดตัวมาเล็กน้อย เป็นผลให้นิวเคลียส $^{87}_{36}\text{Kr}$ ที่เกิดมาอยู่ในสถานะตื่นตัวสูง ทำให้สลายนิวตรอนตัวหนึ่งออกมามีพลังงานใกล้เคียง 0.3 MeV แล้วเกิดเป็น $^{86}_{36}\text{Kr}$ ที่อยู่ในสถานะพื้นหลังปล่อยรังสีแกมมาออกมา นิวตรอนจะถูกปล่อยออกมาในทันทีที่เกิด $^{87}_{36}\text{Kr}$ ดังนั้นช่วงเวลาที่ผ่านไปยังผล (effective delay time) ของกระบวนการเกิดนิวตรอนที่เกิดภายหลังบ่งบอกด้วยครึ่งชีวิตของนิวเคลียสแม่ (parent nucleus) $^{87}_{35}\text{Br}$ ในการสลาย β^- ซึ่งใช้เวลา 55 s

ตารางที่ 4-2 ข้อมูลของนิวตรอนที่เกิดขึ้นภายหลังการแบ่งแยกตัวของ ^{235}U ที่จุดกึ่งโมลนิวตรอน

กลุ่ม (group)	ครึ่งอายุ (half-life, s)	ค่าคงที่การสลาย (λ , s^{-1})		พลังงานเฉลี่ย (MeV)	เศษส่วนของนิวตรอน ที่เกิดภายหลัง (β_n)	เศษส่วนของผลที่ได้ สัมพัทธ์ (β_n/β)	สารตั้งต้น (precursors)
		จำนวน	ทดลอง				
1	54.51	0.0125	0.0127 ± 0.0003	0.25	0.000261	0.038 ± 0.004	^{87}Br
2	21.84	0.0344	0.0317 ± 0.0012	0.46	0.001461	0.213 ± 0.007	^{88}Br , ^{137}I , ^{136}Te , ^{134}Sb , ^{141}Cs
3	6.00	0.139	0.115 ± 0.004	0.40	0.001289	0.188 ± 0.024	^{89}Br , ^{139}I , ^{138}Rb , ^{141}La , ^{87}Se , ^{84}As , ^{89}Rb
4	2.23	0.328	0.311 ± 0.012	0.45	0.002792	0.407 ± 0.010	^{84}As , ^{89}Br , ^{136}Sb , ^{138}Rb , ^{139}I , ^{139}Y , ^{137}Te , ^{140}Cs , ^{89}Y , ^{86}Ga
5	0.496	1.08	1.40 ± 0.12	0.42	0.000878	0.128 ± 0.012	^{87}As , ^{134}Sb , ^{140}Ba , ^{84}Ga , ^{141}I , ^{91}Br , ^{134}Sn , ^{140}Cs , ^{81}Ga , ^{88}As , ^{140}I , ^{147}Ba , ^{89}Se
6	0.179	2.61	3.87 ± 0.55		0.000178	0.026 ± 0.004	^{81}Ga , ^{147}Cs , ^{87}Rb , ^{89}Rb , ^{89}Rb , ^{89}Br , ^{89}Se , ^{89}Rb , ^{89}Rb , ^{140}Cs
					0.006859		

ชั้นส่วนการแบ่งแยก เช่น $^{87}_{35}\text{Br}$ ซึ่งสลาย β^- ออกมาได้นิวเคลียสใหม่ที่ปล่อยนิวตรอนออกมา มักเรียกว่าสารตั้งต้นนิวตรอนที่เกิดขึ้นภายหลัง (delayed neutron precursor) ซึ่งมีจริงมากกว่า 65 ตัว บางตัวให้ดูจากตารางที่ 4-2 ซึ่งแสดงข้อมูลนิวตรอนที่เกิดขึ้นภายหลังกรณีการแบ่งแยกตัวของ ^{235}U จากเทอร์มอลนิวตรอน

จากการศึกษาของนักวิทยาศาสตร์อย่างละเอียด ทำให้สามารถจำแนกสารตั้งต้นนิวตรอนที่เกิดขึ้นภายหลังได้เป็น 6 กลุ่มตามครึ่งอายุของกลุ่ม โดยแต่ละกลุ่มจะมีมากกว่า 1 ไอโซโทป ข้อมูลนิวตรอนที่เกิดขึ้นภายหลังการแบ่งแยกตัวของ ^{235}U ที่ดูตกสลับเทอร์มอลนิวตรอน จากตารางที่ 4-2 ซึ่งแสดงครึ่งอายุ, ค่าคงที่การสลาย (λ) และ พลังงานเฉลี่ยที่เกิดขึ้นจาก 6 กลุ่ม และยังมีเศษส่วนของนิวตรอนที่เกิดขึ้นภายหลัง β_i ซึ่งนิยามว่า

$\beta_i =$ อัตราส่วนของจำนวนนิวตรอนที่เกิดขึ้นภายหลังในกลุ่ม i กับ จำนวนนิวตรอนทั้งหมด ที่ปลดปล่อยออกมาจากการแบ่งแยก

และยังมีเศษส่วนของผลที่ได้สัมพัทธ์ (relative yield fraction) $= \beta_i / \beta$ โดยที่ $\beta = \sum_i \beta_i$

จากตารางที่ 4-2 เราจะสังเกตเห็นว่าพลังงานเฉลี่ยของนิวตรอนที่เกิดขึ้นในภายหลังของแต่ละกลุ่มมีค่าแตกต่างกันและพลังงานของทุกกลุ่มมีค่าน้อยกว่าพลังงานของนิวตรอนที่เกิดขึ้นทันที

จากการทดลองของนักวิทยาศาสตร์ พบว่าสเปกตรัมของนิวตรอนที่เกิดขึ้นในภายหลังจากการแบ่งแยกตัวของ ^{235}U เนื่องจากดูตกสลับเทอร์มอลนิวตรอน คล้ายกับที่เกิดในสเปกตรัมของนิวตรอนที่เกิดขึ้นทันที กล่าวคือสัดส่วนของการเกิดจะมีจำนวนมากที่พลังงานต่ำ และ จะมีจำนวนน้อยลงที่พลังงานสูงเพิ่มขึ้น

4.2 การลดความเร็วของนิวตรอน (Slowing down of Neutrons)

ในเครื่องปฏิกรณ์นิวเคลียร์ทุกเครื่อง พลังงานเฉลี่ยของนิวตรอนที่ทำให้เกิดการแบ่งแยกตัวมีค่าน้อยกว่าพลังงานเฉลี่ยของนิวตรอนที่เกิดจากการแบ่งแยก ตัวอย่างเช่นในเครื่องปฏิกรณ์อุณหภาพ หรือ เครื่องปฏิกรณ์ที่ใช้เทอร์มอลนิวตรอน (thermal reactors) ที่มี ^{235}U เป็นเชื้อเพลิง พลังงานของเทอร์มอลนิวตรอนที่เข้าชนเชื้อเพลิงมีค่าต่ำประมาณ 0.025 eV ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบกับนิวตรอนที่เกิดทันทีจะมีพลังงานอยู่ในระดับ 0.025 – 0.46 MeV เป็นส่วนใหญ่ ส่วนนิวตรอนที่เกิดขึ้นในภายหลังการแบ่งแยก จะมีพลังงานที่ต่ำกว่านี้ แต่ก็ยังคงมีค่าสูงกว่าเทอร์มอลนิวตรอนมาก นิวตรอนที่เกิดจากการแบ่งแยกตัวในเครื่องปฏิกรณ์นิวเคลียร์จะมีพลังงานลดลงเมื่อชนกับอะตอมของเชื้อเพลิง ตัวทำให้เย็นหรือตัวระบายความร้อน (coolant) วัสดุที่เป็นโครงสร้างและตัวหน่วงความเร็วของนิวตรอนหรือมอดเรเตอร์ (moderator) ในแต่ละครั้งที่มีการชนจะมีการสูญเสียพลังงาน

กระบวนการที่ทำให้เกิดการสูญเสียพลังงาน (energy loss) ของนิวตรอนในช่วงที่นิวตรอนมีพลังงานสูง จะแตกต่างไปจากในช่วงที่นิวตรอนมีพลังงานต่ำ (< 1 eV) ดังนั้นจะเป็นการสะดวกถ้าจะแบ่งกระบวนการของการลดความเร็วนิวตรอน ออกเป็น 2 ส่วน คือ

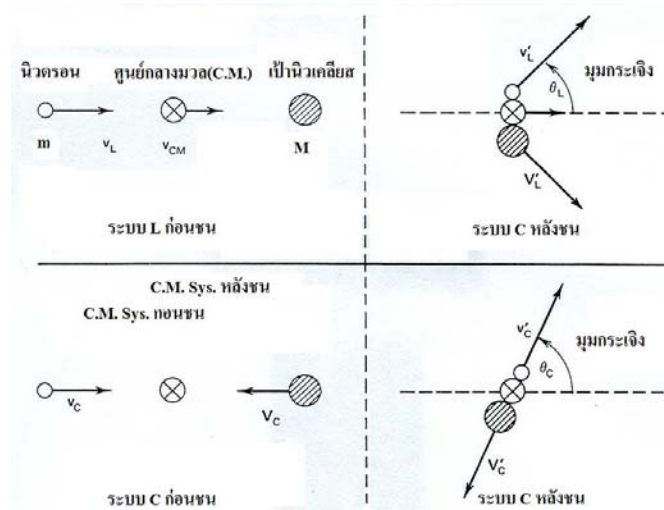
1. จากพลังงานการแบ่งแยก (~ 2 MeV) ลดลงเหลือ 1 eV ส่วนนี้เรียกกันว่าการหน่วงความเร็วนิวตรอน (neutron moderation)
2. จากพลังงาน 1 eV ลดลงเป็นเทอร์มอล ส่วนนี้เรียกกันว่าการทำให้เป็นเทอร์มอล (thermalization)

ในการพิจารณาการหน่วงความเร็วนิวตรอน จะละทิ้งการเคลื่อนที่แบบเทอร์มอล (thermal motions) และพลังงานยึดเหนี่ยวของอะตอมและให้เป่านิวเคลียสเป็นอิสระและอยู่นิ่ง ให้การชนกันระหว่างนิวตรอนกับนิวเคลียสเป็นแบบลูกบิลเลียด (billiard ball type) อย่างไรก็ตามกรณีพลังงานน้อยกว่า 1 eV พลังงานยึดเหนี่ยวระหว่างอะตอมจะมีความสำคัญมากและจะตัดทิ้งไม่ได้ ยิ่งกว่านั้นพลังงานความร้อน (thermal energy) ของอะตอมจะเป็นสัดส่วนที่สำคัญของพลังงานนิวตรอน ดังนั้นจะไปพิจารณาว่าอะตอมอยู่นิ่งไม่ได้ อย่างไรก็ตามในตำราเล่มนี้จะขอกกล่าวเพียงส่วนแรก อันจะเป็นพื้นฐานในการศึกษาค้นคว้าต่อไป และในส่วนที่สองนั้นผู้อ่านก็สามารถที่จะศึกษาต่อได้ โดยดูจากตำราอ้างอิงท้ายเล่ม

การหน่วงความเร็วนิวตรอนโดยการกระเจิงแบบยืดหยุ่น (neutron moderation by elastic scattering) การพิจารณาการกระเจิงแบบยืดหยุ่นนี้เมื่อนิวตรอนชนกับนิวเคลียส นั่นคือให้นิวเคลียสซึ่งเป็นเป่ามีลักษณะทรงกลมแข็งมีความยืดหยุ่นสมบูรณ์ เราจะพิจารณากระบวนการชนในกรอบอ้างอิงที่แตกต่างกัน 2 กรอบ คือ กรอบอ้างอิงในห้องปฏิบัติการหรือระบบห้องปฏิบัติการ (Laboratory system) ซึ่งการทดลองค่าต่างๆวัดได้ในระบบนี้ อีกระบบได้จากการพิจารณาตามทฤษฎี ซึ่งจะสะดวกและง่ายต่อการเข้าใจกระบวนการกระเจิง คือ กรอบอ้างอิงของศูนย์กลางมวลหรือระบบศูนย์กลางมวล (Center of mass system) ดังนั้นค่าต่างๆที่วัดได้ในระบบห้องปฏิบัติการจะถูกห้อยด้วย L และ ที่วัดได้ในระบบศูนย์กลางมวลจะถูกห้อยด้วย C ซึ่งทั้ง 2 ระบบนั้นก็มีความสัมพันธ์ต่อกันดังจะกล่าวถึงต่อไป

4.2.1 จลนศาสตร์การชน (Collision Kinematics)

พิจารณานิวตรอนมวล m มีความเร็ว V_L วิ่งเข้าชนนิวเคลียสมวล M ซึ่งสมมุติว่าอยู่นิ่งก่อนชน หลังชนให้ความเร็วของนิวตรอนมีค่า V_L' และมีมุมการกระเจิง θ จากแนวเข้าชน หรือ มุมระหว่าง V_L และ V_L' หลังชนนิวเคลียสเคลื่อนที่ออกไป (recoiling nucleus) และระบบศูนย์กลางมวล (ระบบ C) ก.ก่อนชน และ ข.หลังชนด้วยความเร็ว V_L' ให้ดูรูปที่ 4-3 คู่บนเป็นการชนในระบบห้องปฏิบัติการ (ระบบ L) ก.ก่อนชน และ ข.หลังชน ดังนั้นตามหลักการอนุรักษ์พลังงานและโมเมนตัมจะได้



รูปที่ 4-3 การกระเจิงของนิวตรอนแบบยืดหยุ่นในระบบปฏิบัติการ (ระบบ L)

$$m \vec{v}_L = m \vec{v}'_L + M \vec{V}'_L \quad (4.6)$$

และ

$$m v_L^2 = m (v'_L)^2 + M (V'_L)^2 \quad (4.7)$$

เป็นที่น่าสังเกตว่าเวกเตอร์ \vec{V}'_L อยู่ในระนาบที่มี \vec{v}_L และ \vec{V}'_L กล่าวคือนิวเคลียสที่เคลื่อนที่ออกไปอยู่ในระนาบที่มีทั้งนิวตรอนที่เข้ามาและที่กระเจิงออกไป จากสมการ (4.6) และ (4.7) สามารถคำนวณหาความเร็วสุดท้ายหลังชน \vec{V}'_L ใดๆก็ตามจะสะดวกขึ้นถ้าแปลงปัญหานี้ให้อยู่ในระบบศูนย์กลางมวล ในระบบ L เราสมมุติศูนย์กลางมวลของระบบอยู่ที่ \otimes ซึ่งจะเคลื่อนที่ไปด้วยความเร็ว \vec{V}'_{CM} ซึ่งก็เหมือนสมการ (4.6) ซึ่งมีการอนุรักษ์โมเมนตัม เมื่อพิจารณาความเร็วนี้ จะได้การอนุรักษ์โมเมนตัมเป็น

$$m \vec{v}_L = (m+M) \vec{V}'_{CM}$$

จะได้

$$\vec{V}'_{CM} = \left(\frac{m}{m+M} \right) \vec{v}_L = \left(\frac{1}{1+A} \right) \vec{v}_L \quad (4.8)$$

ถ้าให้ $A = M/m =$ อัตราส่วนของมวลนิวเคลียสต่อมวลนิวตรอน

\approx เลขมวลของนิวไคลด์

ในระบบศูนย์กลางมวล (ระบบ C) ความเร็วเริ่มต้นของนิวตรอน \vec{v}_C มีค่า

$$\bar{v}_C = \bar{v}_L - \bar{V}_{CM} = \left(\frac{A}{1+A} \right) \bar{v}_L = \beta \bar{v}_L \quad (4.9)$$

โดยที่ $\beta = \left(\frac{A}{1+A} \right)$ ในทำนองเดียวกันความเร็วของนิวเคลียส \bar{V}_C มีค่า

$$\bar{V}_C = -\bar{V}_{CM} = -\left(\frac{1}{1+A} \right) \bar{v}_L = -\frac{\bar{v}_C}{A} \quad (4.10)$$

จากที่ได้มานี้มีข้อสังเกตว่าในระบบ C อนุภาคทั้งสองเคลื่อนที่เข้าหากันในทิศตรงกันข้าม โดยมีขนาดโมเมนตัมเท่ากันแต่ทิศตรงข้าม จึงทำให้โมเมนตัมสุทธิเป็นศูนย์ ดังนั้นตามหลักการอนุรักษ์โมเมนตัม หลังชนก็ต้องมีโมเมนตัมเป็นศูนย์ หมายถึงอนุภาคทั้งสองจะเคลื่อนที่ออกจากกันในทิศตรงกันข้ามโดยมีขนาดโมเมนตัมเท่ากัน ดังในรูปที่ 4-3 คู่ล่าง ถ้าให้ความเร็วของนิวตรอนและนิวเคลียสหลังชนมีค่า \bar{v}'_C และ \bar{V}'_C ตามลำดับ อาศัยหลักการอนุรักษ์โมเมนตัมจะได้

$$m \bar{v}'_C = -M \bar{V}'_C$$

หรือ

$$\bar{v}'_C = -\frac{M}{m} \bar{V}'_C = -A \bar{V}'_C \quad (4.11)$$

เมื่อ $A = M/m$ ดังสมการ (4.11) และ การอนุรักษ์พลังงานจะได้

$$(\bar{v}_C)^2 + A(\bar{V}_C)^2 = v_C^2 + AV_C^2 \quad (4.12)$$

เมื่อแทนค่า \bar{v}'_C จากสมการ (4.9) และ \bar{V}'_C จากสมการ (4.10) ก็จะทำให้สมการ (4.12) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$(\bar{v}_C)^2 + A(\bar{V}_C)^2 = \beta v_L^2 \quad (4.13)$$

แทนค่า \bar{V}'_C ตามสมการ (4.11) ลงในสมการ (4.13) จะได้

$$v'_C = \beta v_L = v_C \quad (4.14)$$

และอีกกรณีหนึ่งเมื่อแทนค่า \bar{v}'_C จะได้

$$\bar{V}'_C = \left(\frac{1}{A+1} \right) v_L = V_C \quad (4.15)$$

ดังนั้นเราจะเห็นว่าในระบบ C ขนาดความเร็วของนิวตรอน และ ของนิวเคลียส มีค่าคงเดิมไม่เปลี่ยนแปลงหลังการชนมีเพียงทิศทางเท่านั้นที่เปลี่ยนไป เรานิยามมุมที่นิวตรอนกระเจิงไปทำมุม θ_C ในระบบ C หลังชนดังในรูปที่ 4-3 เป็นมุมที่เปลี่ยนไปจากแนวเดิมที่เข้าชน ดังนั้นเมื่อขนาดความเร็วของอนุภาคทั้งสองไม่เปลี่ยน พลังงานจลน์ของทั้งคู่ก็ไม่เปลี่ยนในการชนแบบยืดหยุ่น ในระบบ C

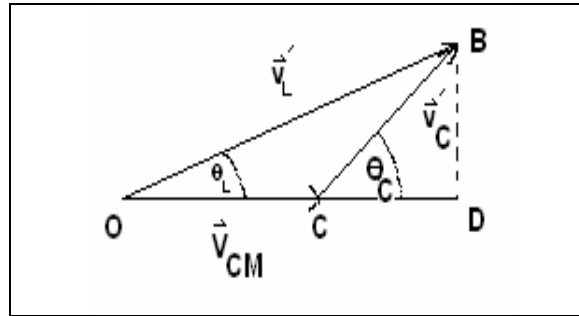
ในการหาพลังงานที่สูญเสียจากการชนของนิวตรอนในระบบ L เราสามารถทำได้โดยการแปลงความเร็วในระบบ C ไปเป็นความเร็วในระบบ L โดยอาศัยว่าระบบ C มีความเร็วของ

$$\vec{V}_{CM}$$

$$\vec{v}'_L = \vec{v}'_C + \vec{V}_{CM} \quad (4.16)$$

หรือ

$$(v'_L)^2 = (v'_C)^2 + V_{CM}^2 + 2v'_C V_{CM} \cos \theta_C \quad (4.17)$$



รูปที่ 4-4 การแปลงความเร็วจากระบบ C ไปเป็นระบบ L

แทนค่า V_{CM} จากสมการ (4.8) และ v'_C จากสมการ (4.14) จะได้

$$(v'_L)^2 = \frac{(1+A^2 + 2A \cos \theta_C)v_L^2}{(1+A)^2} \quad (4.18)$$

ให้ $E = \frac{1}{2}mv_L^2 =$ พลังงานจลน์ของนิวตรอนก่อนชนในระบบ L

$E' = \frac{1}{2}m(v'_L)^2 =$ พลังงานจลน์ของนิวตรอนหลังชนในระบบ L

ดังนั้นจะได้

$$\frac{E'}{E} = \frac{1+A^2 + 2A \cos \theta_C}{(1+A)^2} \quad (4.19)$$

จัดรูปแบบใหม่ จะได้

$$\frac{E'}{E} = 1 - \frac{2A}{(1+A)^2}(1 - \cos \theta_C) \quad (4.20)$$

หรือ

$$\cos \theta_C = 1 - \frac{(1+A)^2}{2A} \left(1 - \frac{E'}{E}\right) \quad (4.21)$$

จากสมการที่ได้เราจะเห็นว่า เมื่อกำหนดวัสดุชนิดหนึ่งให้ (กำหนด A) พลังงานของนิวตรอนในระบบ L ก่อน และ หลัง การชน (E'/E) จะมีค่าขึ้นกับมุมการกระเจิงในระบบ C ($\cos \theta_C$)

4.2.2 ความสัมพันธ์ระหว่างมุมในระบบห้องปฏิบัติการและระบบ

ศูนย์กลางมวล

ความสัมพันธ์ระหว่างมุมกระเจิงในระบบ C (θ_C) กับ มุมกระเจิงในระบบ L (θ_L) หาได้จาก รูปที่ 4.4 โดย

$$\vec{OD} = \vec{OC} + \vec{CD}$$

หรือ

$$v'_L \cos \theta_L = V_{CM} + v'_C \cos \theta_C \quad (4.22)$$

แทนค่า V_{CM} จากสมการ (4.8) และ v'_C จากสมการ (4.14) จะได้

$$v'_L \cos \theta_L = \frac{(1 + A \cos \theta_C)}{1 + A} v_L$$

ในพจน์พลังงานจะได้

$$\cos \theta_L = \frac{(1 + A \cos \theta_C)}{(1 + A)} \left(\frac{E}{E'} \right)^{1/2} \quad (4.23)$$

เมื่อพิจารณาร่วมกับสมการ (4.19) จะได้สมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างมุม θ_L และ θ_C ตามสมการ

$$\cos \theta_L = \frac{(1 + A \cos \theta_C)}{(1 + A^2 + 2A \cos \theta_C)^{1/2}} \quad (4.24)$$

จากรูปที่ 4-4 จะเห็นว่าโดยทั่วไปแล้ว $\cos \theta_L$ จะมีค่ามากกว่า $\cos \theta_C$ กรณีไฮโดรเจน ($A=1$) จะได้

$$\cos \theta_L = [(1 + \cos \theta_C) / 2]^{1/2} \quad (4.25)$$

ดังนั้นเมื่อนิวตรอนชนกับโปรตอนในระบบ C โดย θ_C แปรผันจาก 0 ถึง π (หรือ $\cos \theta_C$ มีค่าจาก -1 ถึง +1) ทำให้ $\cos \theta_L$ แปรผันจาก 0 ถึง 1 นั้นหมายถึงการกระเจิงของนิวตรอนชนโปรตอน จะมีมุมการกระเจิงสูงสุดในระบบ L มีค่า $\pi/2$

พลังงานที่นิวตรอนสูญเสียไปมีความสัมพันธ์กับมุมของการกระเจิงในระบบ L และ มวลของนิวเคลียสที่เป็นเป้า เพื่อหาความสัมพันธ์นี้ทำได้โดยขจัด $\cos \theta_C$ จากสมการ (4.21) และ (4.23) จะได้

$$(A+1)(E'/E) - (2 \cos \theta_L)(E'/E_i)^{1/2} - (A-1) = 0 \quad (4.26)$$

ดังนั้นเมื่อเทียบกับสมการ (quadratic equation) ทั่วไปจะได้คำตอบของ

$$(E'/E) = \frac{1}{(A+1)^2} \left[\cos \theta_L + \{A^2 - (1 - \cos^2 \theta_L)\}^{1/2} \right]^2 \quad (4.27)$$

โดยคำตอบที่ได้ออกมานี้ไม่เขียนส่วนที่ติดเครื่องหมายลบหน้ารากที่สอง เพื่อประกันว่าอัตราส่วน E'/E ยังคงมีค่าเป็นบวก ตามสมการ (4.27) จะเห็นว่า

$$E'/E = \text{พลังงานหลังชนของนิวตรอน} / \text{พลังงานก่อนชนของนิวตรอน} = E_f/E_i$$

∞ (แปรผันกับ) θ_L และ A

จากสมการ (4.27) เราจึงอาจเขียนใหม่ได้เป็น

$$(E'/E) = F^2(A, \theta_L) \tag{4.28}$$

เมื่อ

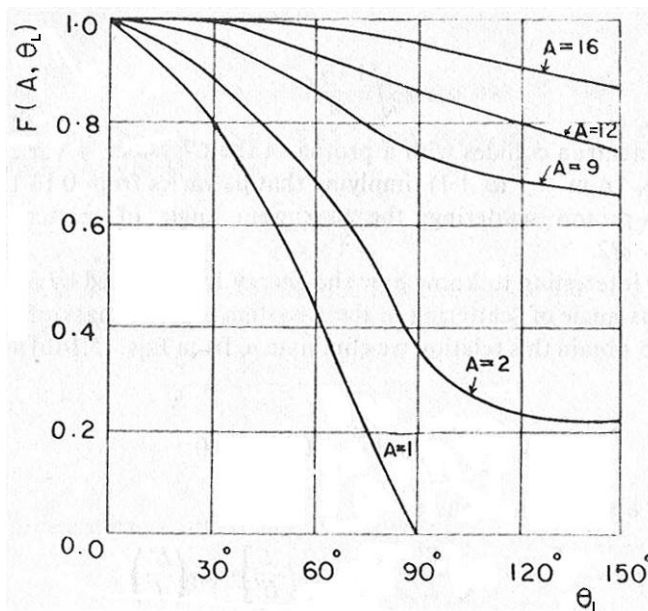
$$F(A, \theta_L) = \frac{1}{(A+1)} [\cos \Theta_L + (A^2 - \sin^2 \Theta_L)^{1/2}] \tag{4.29}$$

ซึ่ง $F(A, \theta_L)$ เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับมวลของนิวเคลียสในเป้าและมุมการกระเจิงในห้องปฏิบัติการ หรือระบบ L เมื่อนำไปเขียนกราฟจะได้ดังรูปที่ 4-5 จะเห็นว่ากรณีไฮโดรเจนหรือโปรตอน $F(A, \theta_L)$ จะหายไปถ้า $\theta_L \geq \pi/2$ แต่นิวเคลียสหนักจะไม่เป็นศูนย์แม้ $\theta > \pi/2$ กรณี $\theta_L = 0$, $F(A, 0) = 1$ ทุกค่า A นั้นหมายถึงนิวตรอนไม่มีการสูญเสียพลังงานเนื่องจากไม่มีการชนกับนิวเคลียส ในทางตรงกันข้ามถ้านิวตรอนเข้ามาชนกับนิวเคลียสแบบตรงตัว (head-on collision) กับ นิวเคลียสหนัก $A \gg 1$ จะทำให้เกิดการกระเจิงในทิศกลับทางเดิม ($\theta_L = \pi$) (ทำให้สมการ (4.29) มีค่า

$$F(A, \pi) = (A-1) / (A+1)$$

และ สมการ (4.28) จะได้ (E'/E) มีค่าต่ำสุดเป็น

$$E'_{\min} / E = (A-1)^2 / (A+1)^2$$



รูปที่ 4-5 กราฟระหว่าง $F(A, \theta_L)$ กับ θ_L สำหรับวัสดุที่มี A ต่างกัน

นั่นคือพลังงานของนิวตรอนหลังชนที่กระเจิงออกไปจะเหลือน้อยที่สุดเป็น

$$E'_{\min} = \infty E \quad (4.30)$$

เมื่อ

$$\infty = (A-1)^2 / (A+1)^2 \quad (4.31)$$

เรียก ∞ ค่าตามสมการ (4.31) ว่า พารามิเตอร์การชน (collosion parameter) กรณีไฮโดรเจน หรือ โปรตอน ที่มี $A = 1$ จะมีพารามิเตอร์การชนเป็นศูนย์ ส่วนนิวเคลียสที่มี A มากๆ หรือเป็น นิวเคลียสหนัก จะมีพารามิเตอร์เข้าใกล้หนึ่ง จากสมการ (4.30) ทำให้เราสรุปได้ว่านิวตรอนที่มี พลังงานเริ่มต้นก่อนชน E จะมีพลังงานเหลือจากการชนแบบยืดหยุ่น อยู่ในช่วง $\infty E \leq E' \leq E$ พลังงานที่สูญเสียของนิวตรอนจะมากที่สุดเมื่อมีการชนแบบตรงตัว หรือ

$$E - E'_{\min} = E - \infty E = (1 - \infty) E \quad (4.32)$$

จากที่ได้มา บอกให้เรารู้ว่านิวตรอนจะสูญเสียพลังงานมากที่สุด จากการชนแบบยืดหยุ่น ครั้งหนึ่งจะมีค่าลดลงเมื่อมวลนิวเคลียสของเป้าหมายเพิ่มขึ้นโดยเฉพาะกรณีโปรตอนที่เป็นเป้าหมาย ทำให้นิวตรอนที่เข้าชนสูญเสียพลังงานจนทั้งหมดในการชนครั้งเดียว

ตัวอย่างที่ 4-1

แกรไฟต์(graphite) มีเลขมวล ($A=12$) ให้หาพารามิเตอร์การชนและพลังงานของนิวตรอนที่ สูญเสียไปมากที่สุด ที่เข้าชนนิวเคลียสของแกรไฟต์ 1 ครั้ง และให้เปรียบเทียบกับของ ^{238}U

วิธีทำ

จากสมการ (4.31) จะได้พารามิเตอร์การชนของแกรไฟต์มีค่า

$$\infty_{\text{C}} = \left(\frac{12-1}{12+1} \right)^2 = 0.716$$

ดังนั้นพลังงานของนิวตรอนที่สูญเสียไปมากที่สุดที่เข้าชนนิวเคลียสแกรไฟต์ 1 ครั้ง ตามสมการ (4.32) จะได้

$$E - E'_{\min} = (1 - 0.716) E = 0.284 E$$

หรือประมาณ 28.4% ของพลังงานนิวตรอนที่เข้าชน ส่วนกรณี ^{238}U จะมี

$$\alpha_{\text{U}} = \left(\frac{238-1}{239+1} \right)^2 = 0.983$$

ดังนั้นพลังงานของนิวตรอนที่สูญเสียไปมากที่สุดที่เข้าชนนิวเคลียส ^{238}U จำนวน 1 ครั้ง มี ค่าประมาณ $(1 - 0.983) E$ หรือประมาณ 1.7% ของพลังงานนิวตรอนที่เข้าชน

จากตัวอย่างที่ 4.1 ทำให้เข้าใจว่าทำไมนิวคลีโอของธาตุเบา เหมาะในการนำไปใช้เป็นตัว หน่วง หรือ มอดเรเตอร์ (moderator) ในเครื่องปฏิกรณ์

ตัวอย่างที่ 4.2

นิวตรอนพลังงาน 1 MeV กระเจิงไปเป็นมุม 45° เมื่อชนกับนิวเคลียสคาร์บอน จำนวน 1 ครั้งในห้องปฏิบัติการ ให้คำนวณหาพลังงานสุดท้ายของนิวตรอน และ พลังงานหายไปกี่ % ของพลังงานก่อนชน

วิธีทำ

จากสมการ (4.27)

$$E' = \frac{E}{(A+1)^2} \left[\cos \Theta_L + \left\{ A^2 - (1 - \cos^2 \Theta_L) \right\}^{1/2} \right]^2$$

แทน $E = 1 \text{ MeV}$, $\theta_L = 45^\circ$ และ $A = 12$ จะได้พลังงานสุดท้ายของนิวตรอนหลังชน จำนวน 1 ครั้ง มีค่า $E' = 0.95 \text{ MeV}$ พลังงานหายไป 0.05 MeV คิดเป็น 5% ของพลังงานก่อนชน

4.3 ภาคตัดขวางการกระเจิงแบบยืดหยุ่นเชิงอนุพันธ์

(Differential Elastic Scattering Cross Section)

คำว่าภาคตัดขวางการกระเจิงแบบยืดหยุ่นเชิงอนุพันธ์ $\sigma_s(E \rightarrow E')$ นี้พิจารณาว่าเกิดจากนิวตรอนพลังงาน E เข้าชนนิวเคลียสที่อยู่หนึ่ง แล้วเกิดการกระเจิงแบบยืดหยุ่น ทำให้พลังงานของนิวตรอนเปลี่ยนไปเป็น E' หรือ

$$\sigma_s(E \rightarrow E') = \sigma_s(E) P(E \rightarrow E') \quad (4.33)$$

เมื่อ $\sigma_s =$ ภาคตัดขวางการกระเจิงจุลภาคที่เกิดจากนิวตรอนพลังงาน E

$P(E \rightarrow E') =$ ความน่าจะเป็นที่นิวตรอนพลังงาน E กระเจิงแบบยืดหยุ่นออกไป แล้วมีพลังงานเปลี่ยนเป็น E'

จากหัวข้อ 4.2 พลังงานของนิวตรอนหลังชนอยู่ในช่วง $\alpha E \leq E' \leq E$ ดังนั้นฟังก์ชันความน่าจะเป็น $P(E \rightarrow E')$ จะมีค่าเป็นศูนย์ถ้า E' มีค่าต่างไปจากช่วงดังกล่าว และให้ $P(\cos \theta_c) d \cos \theta_c =$ ความน่าจะเป็นที่นิวตรอนหลังชนกระเจิงไปในระบบ C ในทิศทางที่ cosine อยู่ในช่วง $\cos \theta_c + d \cos \theta_c$ เนื่องจากพลังงานสุดท้าย E' และมุมของการกระเจิงในระบบ C (θ_c) มีความสัมพันธ์หนึ่งเดียวต่อกัน กล่าวคือนิวตรอนที่มีพลังงานอยู่ระหว่าง E' และ $E' + dE'$ จะเป็นนิวตรอนที่กระเจิงไปโดยมีค่า cosine อยู่ระหว่าง $\cos \theta_c$ และ $\cos \theta_c + d \cos \theta_c$ ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

$$P(E \rightarrow E') dE' = P(\cos \theta_c) d \cos \theta_c \quad (4.34)$$

ที่นี้ เราจะสมมุติว่าการกระเจิงของนิวตรอน มีลักษณะสมมาตรแบบทรงกลม (spherically symmetric) ในระบบ C นั่นคือ $P(\cos \theta_c)$ มีค่าคงที่ อย่างไรก็ตามการสมมุตินี้มีการพบว่าเป็นจริงสำหรับไฮโดรเจน จากพลังงานต่ำ จนถึงหลาย MeV แต่สำหรับนิวเคลียสอื่นจะหยุดอยู่ที่

$$\int_{-1}^{+1} P(\cos \Theta_C) d\cos \Theta_C = 1$$

ซึ่งจะได้ $P(\cos \theta_C) = 1/2$ แทนค่าในสมการ (4.34) จะลดรูปเป็น

$$P(E \rightarrow E') dE' = \frac{1}{2} d\cos \Theta_C \quad (4.35)$$

เมื่ออาศัยสมการ (4.21) และ (4.31) เราสามารถเขียนสมการ (4.35) ใหม่ได้เป็น

$$P(E \rightarrow E') = \begin{cases} 1 / [(1-\alpha) E], & \alpha E \leq E' \leq E \\ 0, & E' \text{ ค่าอื่นๆ} \end{cases} \quad (4.36)$$

เป็นข้อสังเกตว่าฟังก์ชันความน่าจะเป็นที่นิยามข้างบนนี้ เมื่อทำให้เป็นปกติจะมีค่าเป็น 1 ด้วย ดังนั้นถ้าการกระเจิงของนิวตรอนเป็นแบบที่มีคุณสมบัติเหมือนกันทุกทิศทาง หรือ ทับศัพท์ว่าไอโซทรอปิก (isotropic) ในระบบ C แล้วความน่าจะเป็นของการกระเจิงจากพลังงานเริ่มต้น E เปลี่ยนเป็น dE' รอบๆ E' ($\alpha E \leq E' \leq E$) มีค่าไม่ขึ้นกับ E'

สมการแสดงภาคตัดขวางการกระเจิงเชิงอนุพันธ์ สำหรับการกระเจิงแบบไอโซทรอปิกในระบบ C หาได้จากสมการ (4.33) และ (4.36) เป็น

$$\sigma_s(E \rightarrow E') = \begin{cases} \sigma_s(E) / (1-\alpha)E, & (\alpha E \leq E' \leq E) \\ 0, & E' \text{ ค่าอื่นๆ} \end{cases} \quad (4.37)$$

4.4 การสูญเสียพลังงานเฉลี่ยต่อการชนและค่าโคไซน์เฉลี่ยของมุมการกระเจิง

(Average Energy Loss per Collision and Average Cosine of the Scattering Angle)

ปริมาณที่น่าสนใจอย่างมากในวิชาฟิสิกส์เครื่องปฏิกรณ์ก็คือการสูญเสียพลังงานเฉลี่ย (ของนิวตรอน) ต่อการชน

$$\Delta E_{ave} = E - E'_{ave} \quad (4.38)$$

เมื่อค่าเฉลี่ยของพลังงานสุดท้าย ต่อ การชน (E'_{ave}) มีค่า

$$E'_{\text{ave}} = \int_{\alpha E}^E E' \rho(E \rightarrow E') dE' = \frac{(1+\alpha)E}{2}$$

ดังนั้นการสูญเสียพลังงานเฉลี่ยต่อการชน

$$\Delta E_{\text{ave}} = \frac{(1-\alpha)E}{2} \quad (4.39)$$

จะเห็นว่าการสูญเสียพลังงานเฉลี่ยของนิวตรอนต่อการชน เป็นสัดส่วนโดยตรงกับพลังงานของนิวตรอนที่ตกกระทบ อย่างไรก็ตามการสูญเสียพลังงานคิดเป็นสัดส่วนเฉลี่ยต่อการชน

$$\frac{\Delta E_{\text{ave}}}{E} = \frac{(1-\alpha)}{2} \quad (4.40)$$

มีค่าไม่ขึ้นกับพลังงานของนิวตรอนที่เข้าชน จากสมการ (4.4) เราจะเห็นว่าในการชนนิวเคลียสไฮโดรเจน (โปรตอน) จำนวน 1 ครั้ง นิวตรอนจะสูญเสียพลังงานเฉลี่ย ประมาณครึ่งหนึ่งของพลังงานเริ่มต้น อย่างไรก็ตามจะสูญเสียประมาณ 14% ของพลังงานเริ่มต้น ถ้าเข้าชนนิวเคลียสคาร์บอน ในการชนกับนิวเคลียส ^{238}U โดยนิวตรอนพลังงาน 2 MeV โดยเฉลี่ยจะสูญเสียพลังงานใกล้ 17 keV ซึ่งหมายถึงน้อยกว่า 1% ของพลังงานเริ่มต้น อย่างไรก็ตามจากการสังเกตพบว่า การสูญเสียพลังงานเฉลี่ยต่อการชนจะมีค่ามากกว่านี้ ($\sim 1\text{MeV}$) จึงชี้ว่าการกระเจิงแบบยืดหยุ่นไม่ใช่กลไกหลัก ที่จะทำให้นิวตรอนสูญเสียพลังงานในเครื่องปฏิกรณ์เร็ว

ค่าโคไซน์เฉลี่ยของมุมการกระเจิงในระบบ C นิยามว่ามีค่า

$$\begin{aligned} (\cos \Theta_C)_{\text{ave}} &= \int_{-1}^{+1} \cos \Theta_C P(\cos \Theta_C) d\cos \Theta_C \\ &= 0 \end{aligned}$$

เมื่อ $P(\cos \Theta_C) = \frac{1}{2}$ กรณีการกระเจิงแบบไอโซทรอปิก

ค่าโคไซน์เฉลี่ยของมุมการกระเจิงในระบบ L คือ

$$\begin{aligned} (\cos \Theta_L)_{\text{ave}} &= \int_{-1}^{+1} \cos \Theta_L P(\cos \Theta_C) d\cos \Theta_C \\ &= \int_{\alpha E}^E \cos \Theta_L P(E \rightarrow E') dE' \end{aligned} \quad (4.41)$$

จากสมการ (4.26) จะได้

$$\cos \Theta_L = \frac{1}{2} \left[(A+1) \left(\frac{E'}{E} \right)^{1/2} - (A-1) \left(\frac{E}{E'} \right)^{1/2} \right]$$

และ สมการ (4.36)

$$\rho(E \rightarrow E') = \frac{1}{(1-\alpha)E} \quad \text{กรณี } \alpha E \leq E' \leq E$$

แทนค่าลงในสมการ (4.41) แล้วอินทิเกรตออกมาจะได้

$$(\cos \Theta_L)_{ave} = \frac{(A+1)}{3(1-\alpha)} (1-\alpha^{1/2})^3$$

และจากสมการ (4.31)

$$\alpha = (A-1)^2 / (A+1)^2$$

แทนค่าลงไปจะได้

$$(\cos \Theta_L)_{ave} = \frac{2}{3A} \tag{4.42}$$

ดังนั้นถ้าการกระเจิงเป็นแบบไอโซทรอปิกในระบบ C แล้วค่า โคไซน์เฉลี่ยของมุมกระเจิงในระบบ L $(\cos \Theta_L)_{ave}$ จะเป็นสัดส่วนผกผันกับมวลอะตอมของนิวคลีไอที่เป็นเป้า พารามิเตอร์การชน (α) และ $(\cos \Theta_L)_{ave}$ ของวัสดุที่มักใช้ในเครื่องปฏิกรณ์นิวเคลียร์ สามารถดูได้จากตารางที่ 4-3 จากตารางที่ 4-3 กรณีไฮโดรเจนจะมีค่า $(\cos \Theta_L)_{ave} = 0.667$ ซึ่งสอดคล้องกับมุม 48° ซึ่งเป็นตัวชี้ว่าการกระเจิงแบบไอโซทรอปิกในระบบ C จะเกิดการเคลื่อนที่ไปข้างหน้าเป็นส่วนใหญ่ ในกรอบอ้างอิงห้องปฏิบัติการ (ระบบ L) ส่วนกรณี ^{235}U จะมีค่า $(\cos \Theta_L)_{ave} = 0.003$ สอดคล้องกับมุมใกล้ $\pi/2$

ตารางที่ 4-3 ค่าพารามิเตอร์การชน (α) และ โคไซน์เฉลี่ยของมุมกระเจิงในระบบ L สำหรับวัสดุที่มักใช้ในเครื่องปฏิกรณ์นิวเคลียร์

วัสดุ	เลขมวล A	α	$(\cos \Theta_L)_{ave}$
^1H	1	0.0	0.667
^2D	2	0.111	0.333
^4He	4	0.360	0.167
^6Li	6	0.510	0.095
^9Be	9	0.640	0.074
^{10}B	10	0.669	0.061
^{12}C	12	0.716	0.056
^{238}U	238	0.983	0.003
H_2O	*	*	0.037
D_2O	*	*	0.033

*not defined.

4.5 การชนแบบยืดหยุ่นในพจน์ของเลธาจี้

(Elastic Collision in Terms of Lethargy)

จากการห้วงนิวตรอนโดยการกระเจิงแบบยืดหยุ่น เราจะสังเกตเห็นว่านิวตรอนสูญเสียพลังงานเป็นเศษส่วนของพลังงานเดิมในแต่ละการชน โดยมีช่องของพลังงานที่สูญเสียเพื่อให้มีความเร็วช้าลงในตัวกลาง ตั้งแต่ประมาณ 10 MeV ลงไป ถึงช่วงของเทอร์มอลนิวตรอน ดังนั้นเพื่อความสะดวกในการศึกษาการห้วงนิวตรอน จึงใช้สเกลพลังงานในรูปลอการิทึม (logarithmic

$$u = \ln(E_0/E) \quad (4.43)$$

เมื่อ E คือ พลังงานของนิวตรอน และ E_0 คือ พลังงานสูงสุดจากแหล่งอ้างอิง จากสมการ (4.43) จะมีค่าเป็นบวกเสมอ และ เราจะสังเกตเห็นว่าเมื่อพลังงานของนิวตรอนลดลง จะทำให้เลขอาร์จีมีค่าเพิ่มขึ้นและแน่นอน ค่าเลขอาร์จีเมื่อพลังงานของนิวตรอนจากแหล่งอ้างอิง $E_0 = 0$ นั่นคือ นิวตรอนอยู่นิ่ง $E = 0$ จะมีค่าไม่แน่นอน (infinite) การเพิ่มของเลขอาร์จี (lethargy gain) ต่อการชน ใช้สัญลักษณ์ U ซึ่ง

$$U = u' - u \quad (4.44)$$

โดย u และ u' คือ เลขอาร์จี ของนิวตรอนก่อนและหลังการชนตามลำดับ ซึ่งเมื่อหาความสัมพันธ์กับพลังงานนิวตรอนจะได้

$$\begin{aligned} U &= \ln(E_0/E') - \ln(E_0/E) \\ &= \ln(E/E') \end{aligned} \quad (4.45)$$

หรือ

$$e^{-U} = (E/E') \quad (4.46)$$

ใช้ความสัมพันธ์ตามสมการ (4.20) จะได้การเพิ่มของ เลขอาร์จี ในรูปของมุมการกระเจิงในระบบ C เป็น

$$e^{-U} = 1 - \frac{2A}{(1+A^2)}(1 - \cos \Theta_C) \quad (4.47)$$

ในรูปของพารามิเตอร์การชน α เป็น

$$e^{-U} = 1 - \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)(1 - \cos \Theta_C) = \frac{1}{2}[(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos \Theta_C] \quad (4.48)$$

ดังนั้นเราจะเห็นว่าไม่เหมือนการสูญเสียพลังงานต่อการชน การเพิ่มเลขอาร์จีต่อการชนจะมีค่าไม่ขึ้นกับพลังงานเริ่มต้น แต่จะเป็นฟังก์ชันกับเลขมวล และ มุมของการกระเจิงในระบบ C สำหรับวัสดุที่กำหนดให้ใดๆ การเพิ่มเลขอาร์จีจะมีค่าสูงสุดเมื่อมีการชนแบบตรงตัว ($\cos \Theta_C = -1$) จะได้

$$U_{\max} = \ln(1/\alpha) \quad (4.49)$$

ดังนั้นจะได้ขอบเขต $0 \leq U \leq \ln(1/\alpha)$ หรืออาจกล่าวว่าเลขอาร์จีของนิวตรอนหลังการกระเจิงจะมีขอบเขตในช่วง $u \leq u' \leq u + \ln(1/\alpha)$

ตัวอย่างที่ 4-3

นิวตรอนพลังงาน 1 MeV กระเจิงเป็นมุม 45° ในการชนกับนิวเคลียส ^2H ในห้องปฏิบัติการ จงหา

- ก.) พลังงานของนิวตรอนที่กระเจิง
- ข.) พลังงานของนิวเคลียสที่เคลื่อนที่ออกไป
- ค.) การเพิ่มเลขอาร์จต่อการชน

วิธีทำ

ก.) จากสมการ (4.27)

$$E' = \frac{E}{(A+1)^2} [\cos \Theta_L + \{A^2 - \sin^2 \Theta_L\}^{1/2}]$$

แทนค่า $E = 1 \text{ MeV}$, $A = 2$, $\Theta_L = 45^\circ$ จะได้

$$E' = 0.738 \text{ MeV}$$

ก.) เนื่องจากการชนเป็นแบบยืดหยุ่น (การชนแบบไม่ยืดหยุ่นจะเกิดกับนิวคลีไอเบาได้ก็ต่อเมื่อมีพลังงานขั้นต่ำ (threshold energy) หลายๆ MeV ดังนั้นจึงไม่เกิดกับ ^2H) จะได้พลังงานจลน์ของนิวเคลียสหลังชนมีค่า $= 1 - 0.738 = 0.262 \text{ MeV}$

ข.) จากสมการ (4.45) จะได้การเพิ่มเลขอาร์จต่อการชน

$$U = \ln(E/E') \\ = \ln(1/0.738) = 0.304$$

ยังมีปริมาณที่น่าสนใจมาก ในวิชาฟิสิกส์เครื่องปฏิกรณ์ ที่เกี่ยวข้องกับพลังงานของนิวตรอน ดังกล่าว คือ การเพิ่มเลขอาร์จเฉลี่ยต่อการชน ซึ่งจะใช้สัญลักษณ์ ξ โดยที่

$$\xi = U_{\text{ave}} = \int_0^{\ln(1/\alpha)} P(u \rightarrow u') U du \quad (4.50)$$

ในการคำนวณหาความน่าจะเป็น $P(u \rightarrow u')$ ของการเปลี่ยนเลขอาร์จ จาก u ไปเป็น u' ในการชนจำนวนหนึ่งครั้ง ซึ่งสังเกตได้จาก $P(u \rightarrow u') du'$ และ $P(E \rightarrow E') dE$ อธิบายปริมาณเดียวกัน หมายถึง

$$P(u \rightarrow u') |du'| = P(E \rightarrow E') |dE'|$$

โดยเครื่องหมายสัมบูรณ์ (absolute sign) แสดงความเป็นจริงที่ว่าความน่าจะเป็นมีค่าเป็นบวกแน่ ดังนั้น

$$P(u \rightarrow u') = P(E \rightarrow E') |dE'/du'| \quad (4.51)$$

เมื่อใช้สมการ (4.43) จะได้สมการ (4.51) ออกมาเป็น

$$P(u_i \rightarrow u_f) = \begin{cases} e^{-u}/(1-\alpha), & u \leq u' \leq u + \ln(1+\alpha) \\ 0, & u' \text{ ค่าอื่นๆ} \end{cases} \quad (4.52)$$

แทนค่าที่ได้ตามสมการ (4.52) ลงในสมการ (4.50) จะได้

$$\xi = \bar{U} = \int_0^{\ln(1/\alpha)} \frac{e^{-U}}{(1-\alpha)} U dU = 1 + \frac{\alpha \ln \alpha}{(1-\alpha)}$$

หรือในพจน์ของเลขมวลจะได้

$$\xi = 1 + \frac{(A-1)^2}{2A} \ln\left(\frac{A-1}{A+1}\right) \quad (4.53)$$

จะเห็นว่าการเพิ่มเลขอาร์จี ต่อการชน ไม่ขึ้นกับพลังงานเริ่มต้นของนิวตรอน กล่าวคือการสูญเสียของนิวตรอนมีเศษส่วนของพลังงานที่คงที่ เช่น กรณีไฮโดรเจนจะมี $\xi = 1$ ดังนั้นการเพิ่มเลขอาร์จี ต่อการชน จะเพิ่มขึ้นเมื่อ A มีค่าเพิ่ม และ เมื่อ A มีค่าโตมาก เราสามารถใช้การขยายอนุกรม

$$\ln\left(1 \pm \frac{1}{A}\right) = \pm \frac{1}{A} - \frac{1}{2A^2} \pm \frac{1}{3A^3} - K$$

เมื่อ A มีค่าโตมาก เราจะสามารถตัดพจน์ตั้งแต่ $1/A^3$ ทิ้งได้ ดังนั้นสมการ (4.53) ในกรณีที่ A มีค่ามาก สมการจะมีค่า

$$\xi = 2 / (A+2/3) \quad (4.54)$$

กรณี A = 2 สมการ (4.54) จะมีความคลาดเคลื่อนประมาณ 3% และจะน้อยลงเมื่อ A มีค่าเพิ่มขึ้น ปริมาณอื่นที่น่าสนใจคือ จำนวนของการชนที่ต้องการ เพื่อให้นิวตรอนมีความเร็วลดลงตามที่ต้องการ กรณีการกระเจิงแบบไอโซทรอปิกในระบบ C จำนวนการชนที่ต้องการ เพื่อเพิ่มเลขอาร์จีเฉลี่ยของนิวตรอนพลังงาน E ให้มีพลังงาน E' กำหนดเป็น

$$\begin{aligned} N_{u,ave} &= \langle N_u \rangle = \frac{\ln(E/E')}{\langle \ln(E/E') \rangle} \\ &= \frac{1}{\xi} \ln(E/E') \end{aligned} \quad (4.55)$$

จำนวนของการชนที่ต้องการ เพื่อเพิ่มเลขอาร์จีเฉลี่ยของนิวตรอน พลังงาน E ให้มีพลังงาน E' ตามสมการ (4.55) นี้จะมีค่าแตกต่างไปจาก จำนวนของการชนที่ต้องการเพื่อให้นิวตรอนมีความเร็วลดลง และมีพลังงานเฉลี่ยค่าหนึ่ง ที่กำหนดเป็น

$$N_{E,ave} = \langle N_E \rangle$$

ซึ่งรูบี (Lawrence Ruby) หาค่าออกมาได้ตามสมการ

$$N_{E,ave} = \langle N_E \rangle = \frac{\ln(E/E')}{\ln[2/(1+\alpha)]} \quad (4.56)$$

สำหรับวัสดุที่น่าสนใจมีค่า $\langle N_u \rangle$ และ $\langle N_E \rangle$ ซึ่งคำนวณจากสมการ (4.55) และ (4.56) เมื่อ E = 2 MeV และ E' = 1 eV ให้ดูจากตารางที่ 4-5 กรณีไฮโดรเจน สมการ (4.55) คำนวณได้ การชน 15 ครั้ง ขณะที่สมการ(4.56)จะได้ 21 ครั้งความแตกต่างจะค่อยๆลดลงเมื่อ A เพิ่มขึ้น

จากตารางที่ 4-4 จะสังเกตเห็นว่าจำนวนครั้งของการชนจะมีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อ A เพิ่มขึ้น เพื่อให้นิวตรอนมีความเร็วลดลงหรือให้ช้าลง ซึ่งแสดงว่าโดยทั่วไปแล้วถ้า ξ มีค่ามาก วัสดุนั้นก็จะ เป็นมอดอเรเตอร์ที่ดี อย่างไรก็ตาม ξ เป็นเพียงตัววัดบางส่วนของบ่งบอกคุณภาพของมอดอเรเตอร์ยังผล (effective moderator) ยังมีตัวอื่นที่จะช่วยบ่งบอกมอดอเรเตอร์ที่ดี คือ ระยะทางเฉลี่ยของการชนในตัวกลางจะต้องมีค่าน้อย หมายถึง มีภาคตัดขวางการกระเจิงมหภาค Σ_s มีค่ามาก ซึ่งจะทำให้นิวตรอนเกิดการชนบ่อยครั้งขึ้น ในช่วงเวลาหนึ่งที่กำหนดให้ ดังนั้นสำหรับมอดอเรเตอร์ที่ดีจะมีค่าการเพิ่มเลขอาร์จีเฉลี่ยต่อการชน (ξ) คูณกับภาคตัดขวางการกระเจิงแบบมหภาค (Σ_s) มีค่าเพิ่มขึ้น หรือ เรียกผลคูณนี้ว่ากำลังที่ทำให้นิวตรอนช้าลง (slowing down power) โดยกำหนดว่า

$$\text{กำลังที่ทำให้นิวตรอนช้าลง} = \xi \Sigma_s \quad (4.57)$$

ตารางที่ 4-4 พารามิเตอร์การลดความเร็วของวัสดุบางชนิดในเครื่องปฏิกรณ์ทั่วไป

วัสดุ	A	ξ	$\langle N_u \rangle$	$\langle N_E \rangle$	$\xi \Sigma_s$ (cm ⁻¹)	$\xi \Sigma_s / \Sigma_a$
¹ H	1	1.0	15	21	*	*
² D	2	0.726	20	25	*	*
⁴ He	4	0.425	34	38	1.6×10^{-5}	83
⁶ Li	6	0.299	48	52	0.0194	59×10^{-4}
⁹ Be	9	0.207	70	73	0.158	143
¹⁰ B	10	0.187	77	80	0.065	62×10^{-5}
¹² C	12	0.158	92	95	0.060	192
²³⁸ U	238	0.0084	1730	1733	0.003	9×10^{-3}
H ₂ O	*	0.920†	16	19	1.35	71
D ₂ O	*	0.509†	28	31	0.176	5670

* ไม่ได้นิยามไว้ † ค่ายังผล (effective values)

และยังมีตัวประกอบอีกอย่างที่ต้องนำมาพิจารณา คือ ภาคตัดขวางการดูดกลืนมหภาค Σ_a เพราะมอดอเรเตอร์ที่ดีจะต้องมีค่าน้อย มิฉะนั้นแทนที่จะช้าลง กลับถูกดูดกลืนไปเสียก่อน ดังนั้นเมื่อนำไปพิจารณาร่วมกับสมการที่ (4.57) ได้ปริมาณที่เรียกว่า อัตราส่วนที่หน่วงนิวตรอนทำให้นิวตรอนช้าลง หรือ อัตราส่วนมอดอเรติง (moderating ratio) โดย

$$\text{อัตราส่วนมอดอเรติง} = \xi \Sigma_s / \Sigma_a \quad (4.58)$$

ดังนั้นในการพิจารณามอดอเรเตอร์ว่าดีหรือไม่ ต้องพิจารณาทั้งสมการ (4.57) และ (4.58) ตามตารางที่ 4-5 เมื่อดูกรณีฮีเลียม (⁴H) และ น้ำ (H₂O) จะเห็นว่าอัตราส่วนมอดอเรติงของฮีเลียมมีค่ามากกว่าของน้ำ แต่ไม่ใช่มอดอเรเตอร์ที่ดี เพราะมีค่ากำลังที่ทำให้นิวตรอนช้าลงน้อยมาก เช่นเดียวกับกรณีของ ⁶Li และ ¹⁰B ซึ่งทั้งคู่มีกำลังที่ทำให้นิวตรอนช้าลงมีค่ามาก แต่มี

ที่ได้มานี้ เป็นการสมมุติว่าการกระเจิงของนิวตรอน เป็นแบบไอโซทรอปิก ในระบบ ศูนย์กลางมวล ซึ่งไม่ค่อยจะจริงนัก มีการกระเจิงแบบอื่นคือแอนไอโซทรอปี(anisotropy)ซึ่ง จะมีผลกระทบต่อดัชนีเฉลี่ย ซึ่งจะไม่ขอกกล่าวในตำราเล่มนี้ และอีกกรณีหนึ่งคือการหน่วง นิวตรอนจากการกระเจิงแบบไม่ยืดหยุ่นซึ่งการคำนวณค่อนข้างจะซับซ้อน จึงไม่ขอกกล่าวในตำรา เล่มนี้เช่นกัน อย่างไรก็ตามทั้งสองกรณีนี้ ผู้สนใจอาจค้นคว้าเพิ่มเติมได้ในบรรณานุกรมท้ายเล่ม โดยเฉพาะของ Carg, S. et al.,1986. Physics of Nuclear Reactors, Tata McGraw-Hill Publishing Co., Ltd.

สรุปเนื้อหาในบทที่ 4

1. นิวตรอนที่เกิดทันทีที่ถูกปลดปล่อยออกมาจากปฏิกิริยาการแบ่งแยกนิวเคลียสที่เกิดจากเทอร์มอลนิวตรอน
2. ให้ $\chi(E)dE$ คือสัดส่วนของนิวตรอนที่เกิดทันที ในช่วงพลังงาน E และ $E + dE$ และเมื่อ $\chi(E)$ คือความหนาแน่นของความน่าจะเป็นและเมื่อรวมตลอดอวกาศทุกช่วงพลังงานสเปกตรัมจะได้เท่ากับ 1 หรือ
$$\int_0^\infty \chi(E)dE = 1$$
3. พลังงานเฉลี่ย \bar{E} ของนิวตรอนที่เกิดทันทีมีค่า
$$\bar{E} = \int_0^\infty E\chi(E)dE = \frac{3}{2}kT$$
4. ที่เหลือจากนิวตรอนที่เกิดขึ้นทันทีจากการแบ่งแยกตัวประมาณ 0.7% ของนิวตรอนที่เกิดขึ้นทั้งหมดจะเป็นนิวตรอนที่เกิดขึ้นในภายหลังที่เกิดจากชิ้นส่วนการแบ่งแยกปฐมภูมิทั้ง 2 ชั้นที่ยังไม่เสถียร
5. นิวตรอนที่เกิดจากการแบ่งแยกตัวในเครื่องปฏิกรณ์นิวเคลียร์จะมีพลังงานลดลงได้ เมื่อชนกับอะตอมของเชื้อเพลิง ตัวทำให้เย็นหรือตัวระบายความร้อน วัสดุที่เป็นโครงสร้างและตัวหน่วงความเร็วของนิวตรอนหรือมอดเรเตอร์
6. กระบวนการชนในกรอบอ้างอิงที่แตกต่างกัน 2 กรอบ คือ
 1. ระบบห้องปฏิบัติการ(Laboratory system)
 2. ระบบศูนย์กลางมวล (Center of mass system)
7. นิวตรอนมวล m มีความเร็ว \vec{v}_L วิ่งเข้าชนนิวเคลียสมวล M ซึ่งสมมุติว่าอยู่นิ่งก่อนชน หลังชนความเร็วของนิวตรอนมีค่า \vec{v}'_L และมีมุมการกระเจิง θ จากแนวเข้าชน หลังชนนิวเคลียสเคลื่อนที่ออกไปด้วยความเร็ว \vec{v}'_L ในระบบ L ศูนย์กลางมวลของระบบจะเคลื่อนที่ไปด้วยความเร็ว \vec{v}'_{CM} จะได้

$$\vec{v}'_{CM} = \left(\frac{m}{m+M} \right) \vec{v}_L = \left(\frac{1}{1+A} \right) \vec{v}_L \quad \text{เมื่อ } A = M/m \approx \text{เลขมวลของนิวไคลด์}$$

ในระบบศูนย์กลางมวล (ระบบ C) ความเร็วเริ่มต้นของนิวตรอน \vec{v}_C มีค่า

$$\vec{v}_C = \vec{v}_L - \vec{v}'_{CM} = \left(\frac{A}{1+A} \right) \vec{v}_L = \beta \vec{v}_L$$

ความเร็วของนิวเคลียส $\vec{V}'_C = -\vec{v}'_{CM} = -\left(\frac{1}{1+A} \right) \vec{v}_L = -\frac{\vec{v}_L}{A}$

$$\vec{V}'_C = \left(\frac{1}{A+1} \right) \vec{v}_L = \vec{v}_C$$

ในระบบ C ขนาดความเร็วของนิวตรอน และ ของนิวเคลียส มีค่าคงเดิมไม่เปลี่ยนแปลงหลังการชนมีเพียงทิศทางเท่านั้นที่เปลี่ยนไป มุมที่นิวตรอนกระเจิงไปทำมุม θ_C ในระบบ C หลังชนเป็นมุมที่เปลี่ยนไปจากแนวเดิมที่เข้าชน พลังงานจลน์ของทั้งคู่ก็ไม่เปลี่ยนแปลง

8. ให้ $E = \frac{1}{2}mv_L^2 =$ พลังงานจลน์ของนิวตรอนก่อนชนในระบบ L
 $E' = \frac{1}{2}m(v'_L)^2 =$ พลังงานจลน์ของนิวตรอนหลังชนในระบบ L

จะได้

$$\frac{E'}{E} = \frac{1 + A^2 + 2A \cos \Theta_C}{(1 + A)^2}$$

9. ความสัมพันธ์ระหว่างมุมกระเจิงในระบบ C (θ_C) กับ มุมกระเจิงในระบบ L (θ_L) หาได้จาก

$$\cos \theta_L = \frac{(1 + A \cos \theta_C)}{(1 + A)} \left(\frac{E_i}{E_f} \right)^{1/2} \quad (4.23)$$

10. ถ้านิวตรอนเข้ามาชนกับนิวเคลียสแบบตรงตัว (head-on collision) กับนิวเคลียสหนัก

($A \gg 1$) จะทำให้เกิดการกระเจิงในทิศกลับทางเดิม ($\theta_L = \pi$) ได้ (E'/E) มีค่าต่ำสุดเป็น

$$E'_{\min} / E = (A-1)^2 / (A+1)^2$$

นั่นคือพลังงานของนิวตรอนหลังชนที่กระเจิงออกไปจะเหลือน้อยที่สุดเป็น

$$E'_{\min} = \alpha E \quad \text{เมื่อ } \alpha = (A-1)^2 / (A+1)^2 \quad \text{เรียก } \alpha \text{ ว่า พารามิเตอร์การชน}$$

11. พลังงานที่สูญเสียของนิวตรอนจะมากที่สุดเมื่อมีการชนแบบตรงตัว หรือ

$$E - E'_{\min} = E - \alpha E = (1 - \alpha) E$$

12. การสูญเสียพลังงานเฉลี่ยของนิวตรอนต่อการชน เป็นสัดส่วนโดยตรงกับพลังงานของ

$$\text{นิวตรอนที่ตกกระทบหรือ } \frac{\Delta E_{\text{ave}}}{E} = \frac{(1 - \alpha)}{2}$$

13. ความสะดวกในการศึกษาการหน่วงนิวตรอน จึงใช้สเกลพลังงานในรูปลอการิทึม

(logarithmic energy scale) u ขึ้นมาเรียก เลขอาร์จี (lethargy) เพื่อวัดพลังงานโดย

$$u = \ln(E_0/E)$$

เมื่อ E คือ พลังงานของนิวตรอน และ E_0 คือ พลังงานสูงสุดจากแหล่งอ้างอิง

14. การเพิ่มของเลขอาร์จี (lethargy gain) ต่อการชน $U = u' - u$ โดย u และ u' คือ เลขอาร์จี

ของนิวตรอนก่อนและหลังการชนตามลำดับซึ่งเมื่อหาความสัมพันธ์กับพลังงานนิวตรอนจะได้

$$U = \ln(E_0/E') - \ln(E_0/E) = \ln(E/E') \quad \text{หรือ } e^{-U} = (E/E')$$

15. สำหรับวัสดุที่กำหนดให้ใด ๆ การเพิ่มเลขอาร์จีจะมีค่าสูงสุดเมื่อมีการชนแบบตรงตัว

$$U_{\max} = \ln(1/\alpha)$$

$$\xi = \bar{U} = \int_0^{\ln(1/\alpha)} \frac{e^{-U}}{(1-\alpha)} U dU = 1 + \frac{\alpha \ln \alpha}{(1-\alpha)}$$

หรือในพจน์ของเลขมวลจะได้ $\xi = 1 + \frac{(A-1)^2}{2A} \ln\left(\frac{A-1}{A+1}\right)$

กรณีที่ A มีค่ามาก $\xi = 2 / (A+2/3)$

16. การกระเจิงแบบไอโซทรอปิกในระบบ C จำนวนการชนที่ต้องการเพื่อเพิ่มเลขอาร์จีเฉลี่ยของนิวตรอนพลังงาน E ให้มีพลังงาน E' กำหนดเป็น

$$N_{u,ave} = \langle N_u \rangle = \frac{\ln(E/E')}{\langle \ln(E/E') \rangle} = \frac{1}{\xi} \ln(E/E')$$

17. กำลังที่ทำให้นิวตรอนช้าลง = $\xi \Sigma_s$

อัตราส่วนที่หน่วงนิวตรอนทำให้นิวตรอนช้าลงหรืออัตราส่วนมอดเดอเรติง (moderating ratio)

$$= \xi \Sigma_s / \Sigma_a$$

- 4.1 ถ้าพลังงานจลน์เฉลี่ยของโมเลกุลแก๊สมีค่า $E = (3/2)kT = 0.6 \times 10^{-13} \text{ J}$ เมื่อ k คือค่าคงตัวของโบลต์ซมันน์(Boltzmann's constant) จงหาอุณหภูมิ T
- 4.2 ให้ใช้สมการ(3.10) คำนวณหาค่าพารามิเตอร์ η ที่พลังงานของเทอร์มอลนิวตรอน สำหรับยูเรเนียมที่ได้รับการเสริมสมรรถนะให้มี ^{235}U 1 % 2.5 % และ 90 %
- 4.3 ให้ใช้สมการ(4.9)แสดงว่าพลังงานจลน์ E_C ของนิวตรอนที่เข้าชนนิวเคลียสในระบบศูนย์กลางมวลมีรูปเป็น $E_C = (1/2)\mu_r v_L^2$ เมื่อ $\mu_r = m_n M / (m_n + M)$ คือมวลลดทอน(reduced mass) $v_L =$ อัตราเร็วของนิวตรอนในระบบห้องปฏิบัติการ และให้แสดงว่าสมการนี้สามารถเขียนได้ในรูป $E_C = (1/2)\mu_r v_r^2$ เมื่อ $v_r =$ อัตราเร็วสัมพัทธ์ของนิวตรอนเทียบกับนิวเคลียส
- 4.4 ในการกระเจิงแบบตรงตัว(head-on scattering)ระหว่างนิวตรอน(n)และโปรตอน(p) ในระบบศูนย์กลางมวล ให้แสดงว่ามุมของการกระเจิงในระบบห้องปฏิบัติการมีค่า $86^\circ 59.5'$ เมื่อให้มวลของโปรตอนมีค่า $m_p = 0.99862m_n$ และมุมนี้จะมีค่า $\pi/2$ ถ้าให้ $m_p = m_n$
- 4.5 นิวตรอนเข้าชนนิวเคลียสในระบบห้องปฏิบัติการ ถ้าให้ ϕ_N และ ϕ_n คือ มุมการกระเจิงของนิวเคลียสและนิวตรอนตามลำดับ ในระบบศูนย์กลางมวล ให้แสดงว่า
- $\phi_N = \pi - \phi_n$
 - นิวเคลียสจะเคลื่อนที่ไปข้างหน้าในระบบห้องปฏิบัติการ
 - $\sin \theta_N = [E / \{A(E-E')\}]^{1/2} \sin \theta_n$
เมื่อ θ_N และ θ_n คือมุมการกระเจิงของนิวเคลียสและนิวตรอนตามลำดับ ในระบบห้องปฏิบัติการ และ E และ E' คือพลังงานเริ่มต้นและสุดท้ายของนิวตรอนตามลำดับ
- 4.6 ถ้านิวตรอนที่เกิดจากการแบ่งแยกตัว(fission neutron)พลังงานเฉลี่ย 2 MeV กระเจิงแบบยืดหยุ่นและเป็นแบบไอโซทรอปิกในระบบศูนย์กลางมวล ให้คำนวณหาพลังงานที่นิวตรอนสูญเสียไปในการชนแบบตรงตัว (head-on collision) และ เมื่อมุมการกระเจิงในระบบห้องปฏิบัติการมีค่า 45° ที่เกิดจาก
- อะตอมแกรไฟต์
 - โมเลกุลน้ำหนัก
- 4.7 ในบทที่ 4 ผลที่ได้ต่าง ๆ มาจากการสมมุติว่าให้นิวเคลียสอยู่หนึ่ง ที่นี้ถ้าสมมุติว่านิวตรอนเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v_L เข้าชนนิวเคลียสซึ่งมีมวล A (ในพจน์ของมวลนิวตรอน)ซึ่งกำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว V_L ในระบบห้องปฏิบัติการ
- ให้คำนวณหาความเร็วของศูนย์กลางมวล

ข. ให้แสดงว่าอัตราเร็วของอนุภาคทั้งสองในระบบศูนย์กลางมวลมีค่า

$$v_c' = v_c = \beta v_r \quad \text{เมื่อ} \quad v_r = |(\mathbf{v}_L - \mathbf{v}_L)| \quad \text{คืออัตราเร็วสัมพัทธ์ของระบบ}$$

ห้องปฏิบัติการ และ $\beta = A/(A+1)$

ค. ให้สร้างความสัมพันธ์ระหว่างมุมกระเจิงในระบบศูนย์กลางมวล

ง. ให้แสดงว่าอัตราเร็วสุดท้ายของนิวตรอนในระบบห้องปฏิบัติการ

$$\text{มีค่า} \quad v_L' = [V_{CM}^2 + \beta^2 v_r^2 + 2 V_{CM} v_r \beta \cos \phi]^{1/2}$$

เมื่อ ϕ คือมุมกระเจิงในระบบศูนย์กลางมวล

4.8 ให้คำนวณหาค่า $(\cos \theta_L)_{ave}$ กรณีนิวตรอนพลังงาน 10 MeV เมื่อชนกับ ^{56}Fe , ^{238}U กรณี

ก. การชนแบบยืดหยุ่น ข. การชนแบบไม่ยืดหยุ่น

4.9 ให้คำนวณค่าพลังงานที่ลดลงในรูปแบบลอการิทึมเฉลี่ย (average logarithmic energy decrement) ξ กรณีเบอริลเลียม(beryllium) และน้ำหนัก(heavy water) โดยใช้สมการ(4.53) และ(4.54)

4.10 ในเครื่องปฏิกรณ์แบบน้ำเบาซึ่งใช้ H_2O เป็นมอดเดอเรเตอร์ และ ^{10}B เป็นแท่งควบคุมให้คำนวณหา ก. พลังงานที่ลดลงในรูปแบบลอการิทึมเฉลี่ย ξ ข. จำนวนการชนที่ต้องใช้เพื่อลดความเร็วนิวตรอนที่เกิดจากการแบ่งแยกตัวเฉลี่ยแล้วให้มีพลังงาน 1 eV ค. อัตราส่วนมอดเดอเรเตอร์(moderating ratio)

4.11 ให้แสดงว่านิวตรอนพลังงานเริ่มต้น E_i เข้าชนตรงตัวกับนิวเคลียสเลขมวล A ที่อยู่นิ่ง พลังงานสุดท้ายที่เหลือน้อยที่สุดหลังกระเจิง E_{min} มีค่าประมาณ $E_{min} = E_i (A-1)^2 / (A+1)^2$ และให้ประมาณพลังงานของนิวตรอนตัวนี้หลังการชน ครั้งที่ 1, 2 และ ครั้งที่ j ของการชนที่เกิดติดต่อกันมา ถ้าเป้าเป็น ไฮโดรเจน คาร์บอน และเหล็ก

4.12 นิวตรอนตกกระทบเป้า ^{238}U แล้วกระเจิงแบบยืดหยุ่นไปเป็นมุม $\pi/3$ โดยมีพลังงาน 50 keV ให้คำนวณหาพลังงานก่อนชนของนิวตรอน และให้คำนวณกรณี ชน ^{232}Th และถ้าเป็นการชนแบบไม่ยืดหยุ่นแล้วจะมีพลังงานเหลือเท่าไร

4.13 จะต้องมีการชนกี่ครั้งในมอดเดอเรเตอร์ที่เป็นแกรไฟต์เพื่อให้นิวตรอนพลังงาน 2 MeV ให้กลายเป็นเทอร์มอลนิวตรอน

4.14 สเปกตรัมของนิวตรอนที่เกิดขึ้นทันที(prompt neutron spectrum) $\chi(E)$ จะอยู่ในรูปสมการ

$$\chi(E) = C \exp(-aE) \sinh(bE)^{1/2}$$

เมื่อ a , b และ C คือค่าคงตัว ถ้า $\chi(E)$ มีลักษณะปรกติ(normalized)เท่ากับ 1 ให้ แสดงว่า

$$C = 2(a^3/\pi b)^{1/2} \exp(-b/4a)$$