บทที่ 3
การเปลี่ยนแปลงทางนิวเคลียร์
(ARTIFICIAL NUCLEAR DISINTEGRATION)

จากการทดลองพบว่า เมื่อให้อนุภาคเข้าชนกับนิวไคลด์เบา ๆ จะเกิดธาตุใหม่ และอนุภาคใหม่ พร้อมทั้งส่งพลังงานจำนวนหนึ่งออกมา ดังสมการ

$$X + x \rightarrow Y + y + Q \qquad \text{.....(3.1)}$$

พิจารณาสมการ (3.1)

เลขมวลก่อนเกิดปฏิกิริยา = เลขมวลหลังเกิดปฏิกิริยา

เลขอะตอมก่อนเกิดปฏิกิริยา = เลขอะตอมหลังเกิดปฏิกิริยา

และพลังงานรวมก่อนเกิดปฏิกิริยา = พลังงานรวมหลังเกิดปฏิกิริยา

โมเมนตัมรวมก่อนเกิดปฏิกิริยา = โมเมนตัมรวมหลังเกิดปฏิกิริยา

เมื่อ Q เป็นพลังงานที่เกิดขึ้นในปฏิกิริยา

การคำนวณ

จะคิดว่ามวลทั้งหมดก่อนเกิดปฏิกิริยาจะต้องเท่ากับมวลทั้งหมดหลังเกิดปฏิกิริยา ถ้าต่างกัน แสดงว่า จะต้องมีมวลส่วนหนึ่งได้ถูกทำลายกลายเป็นพลังงานตามกฎของไอส์ไตน์

ถ้า Q เป็นพลังงานที่เกิดขึ้นในปฏิกิริยา จะเรียกว่า ค่าคิว

- Q เป็นบวก แสดงว่า ได้มีการส่งพลังงานออกมา เรียกว่าเป็นปฏิกิริยาคายความร้อน (Exothermic or exoergic)
- Q เป็นลบ แสดงว่า จะต้องให้พลังงานจำนวนหนึ่งเข้าไปในปฏิกิริยา เรียกปฏิกิริยาดูดกลืนความร้อน (Endothermic or endoergic)

จำนวนอิเล็กตรอนในปฏิกิริยาตามสมการที่ (3.1) ก่อนเกิดปฏิกิริยา และหลังเกิดปฏิกิริยามีค่าเท่ากัน จึงใช้มวลของอะตอมแทนมวลของนิวเคลียสได้

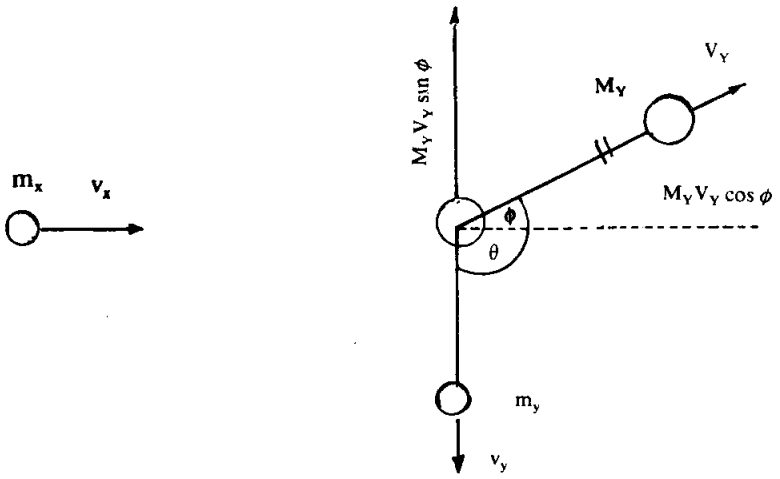
จากสมการที่ (3.1) จะเห็นว่า พลังงานที่เกิดขึ้นนั้นมาจากมวลนิ่ง (rest mass) ที่แตกต่างกัน ระหว่างก่อนเกิดปฏิกิริยาและหลังเกิดปฏิกิริยาเท่านั้น แต่ความจริงอนุภาคที่เข้าชนจะต้องมีพลังงานจลน์เพื่อวิ่งเข้าชนเป้าซึ่งอยู่นิ่ง หลังชนอนุภาคใหม่ที่เกิดขึ้นก็จะกระเด็นออกไปเป็นมุมต่าง ๆ กัน พร้อมด้วยพลังงานจลน์จำนวนหนึ่ง ส่วนนิวเคลียสใหม่ที่เกิดขึ้นก็จะเคลื่อนที่

ไปเล็กน้อย ด้วยเหตุนี้จึงไม่สามารถจะหาพลังงานที่เกิดขึ้นโดยการนำค่าแตกต่างระหว่างมวลทั้งหมดก่อนเกิดปฏิกิริยาและหลังเกิดปฏิกิริยามาคำนวณเพียงอย่างเดียว จะต้องคิดทั้งพลังงานและโมเมนตัมด้วย

พิจารณาอนุภาคมวล m_x ความเร็ว v_x วิ่งเข้าชนเป้า X มวล M_X ซึ่งอยู่นิ่ง ทำให้เกิดนิวเคลียสใหม่ M_Y เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว V_Y เป็นมุม ϕ กับทิศทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่เข้าชน และเกิดอนุภาคใหม่มวล m_y วิ่งออกไปด้วยความเร็ว v_y เป็นมุม θ กับทิศทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่เข้าชน

โดยปกติแล้วมวล m_y อาจกระเด็นออกไปเป็นมุมใด ๆ ก็ได้ คือ θ จะมีค่าตั้งแต่ 0 จนถึง 180° กับทิศทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่วิ่งเข้าชน

กรณี $\theta = 90°$



จากหลักการอนุรักษ์โมเมนตัมคือ

โมเมนตัมรวมก่อนเกิดปฏิกิริยา = โมเมนตัมรวมหลังเกิดปฏิกิริยา

หลังเกิดปฏิกิริยา นิวเคลียสใหม่เคลื่อนที่เป็นมุม ϕ กับทิศทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่เข้าชน

พยายามกำจัดมุม ϕ ออก โดยใช้กฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์ คือ

$$m_x v_x = M_Y V_Y \cos\phi \quad \text{.....(3.2)}$$

$$m_y v_y = M_Y V_Y \sin\phi \quad \text{.....(3.3)}$$

สมการ $(3.2)^2+(3.3)^2$ ทำให้มุม ϕ หมดไป เพราะ $\sin^2\phi+\cos^2\phi = 1$

พลังงานรวมทั้งหมดก่อนเกิดปฏิกิริยา = พลังงานรวมทั้งหมดหลังเกิดปฏิกิริยา

พลังงานที่เกิดขึ้นในปฏิกิริยา หรือค่าคิว คือ

$$Q = E_Y + E_y - E_x \qquad \text{.....(3.4)}$$

E_Y, E_y, E_x เป็นค่าพลังงานของนิวเคลียสใหม่ที่เกิดขึ้น อนุภาคใหม่ที่เกิดขึ้น และอนุภาคที่เข้าชน

แต่โมเมนตัมเป็นปริมาณเวกเตอร์ ดังนั้น เมื่อมวลของนิวเคลียสใหม่ และอนุภาคใหม่กระเด็นออกไปจากแนวเดิม จึงจำเป็นต้องคิดทิศทางการเคลื่อนที่ด้วย

ในการทดลอง หลังเกิดปฏิกิริยา นิวเคลียสใหม่ที่เกิดขึ้นเคลื่อนที่ไปเล็กน้อย ทำให้วัดความเร็วได้ยาก ดังนั้น พลังงานของนิวเคลียสใหม่คือ E_Y นั้น จะถูกกำจัดออกให้อยู่ในเทอมของ E_x และ E_y จะได้สูตรตามสมการที่ (3.9) และ (3.10) ในหนังสือตำรา PH 424 คือเมื่อ $\theta = 90°$

$$Q = E_y\left(1+\frac{m_y}{M_Y}\right) - E_x\left(1-\frac{m_x}{M_Y}\right) \qquad \text{.....(3.5)}$$

เมื่อ θ เป็นมุมใด ๆ

$$Q = E_y\left(1+\frac{m_y}{M_Y}\right) - E_x\left(1-\frac{m_x}{M_Y}\right) - \frac{2}{M_Y}(E_x E_y m_x m_y)^{\frac{1}{2}}\cos\theta \qquad \text{.....(3.6)}$$

ในกรณีที่จะต้องคำนวณหาค่า E_x หรือ E_y จะหาค่าคิวได้จาก

$$Q = (M_X + m_x - M_Y - m_y) \text{ เอเอมยู} \times 931.5 \ \frac{\text{เอมอีวี}}{\text{เอเอมยู}} \ \text{เอมอีวี} \qquad \text{.....(3.7)}$$

ในบทนี้ จะสามารถคำนวณหาค่าคิว คือพลังงานที่เกิดขึ้นในปฏิกิริยาต่าง ๆ ได้

การหาพลังงานจลน์ที่น้อยที่สุดของอนุภาคที่ใช้ยิงเข้าไปยังเป้าเพื่อให้เกิดปฏิกิริยา

พลังงานจลน์ที่น้อยที่สุดของอนุภาคที่ใช้ยิงเข้าไปในนิวเคลียส เพื่อให้เกิดปฏิกิริยา เรียกพลังงานเทรสโฮลด์ (Threshold energy) หรือพลังงานขีดเริ่มเปลี่ยน จะทำได้ในปฏิกิริยาที่ต้องให้พลังงานแก่อนุภาคที่ใช้ยิง ค่าคิวจะเป็นลบ

$-Q$ = พลังงานจลน์ของอนุภาคที่ใช้ยิง – พลังงานที่ทำให้นิวเคลียสเชิงประกอบเคลื่อนที่

.....(3.8)

โดยการใช้หลักการอนุรักษ์โมเมนตัม และคิดว่า เมื่ออนุภาคเข้าชนเป้าจะรวมกันเป็นนิวเคลียสเชิงประกอบ

$$m_x v_x = M_{CN} V_{CN}$$

จะหาความเร็วของนิวเคลียสเชิงประกอบให้อยู่ในเทอมของพลังงานของอนุภาคที่เข้าชนได้ เมื่อแทนค่าในสมการที่ (3.8) จะได้

$$Q = \frac{1}{2} m_x v_x^2 - \frac{1}{2} M_{CN} \frac{m_x^2 v_x^2}{M_{CN}^2}$$

จัดสมการใหม่ จะได้

$$E_{th} = -Q\left[1 + \frac{m_x}{M_X}\right] \qquad \text{.....(3.9)}$$

เมื่อ E_{th} คือค่าพลังงานเทรสโฮลด์ จะขึ้นกับมวลของอนุภาคที่เข้าชนเป้า และมวลของเป้าเท่านั้น

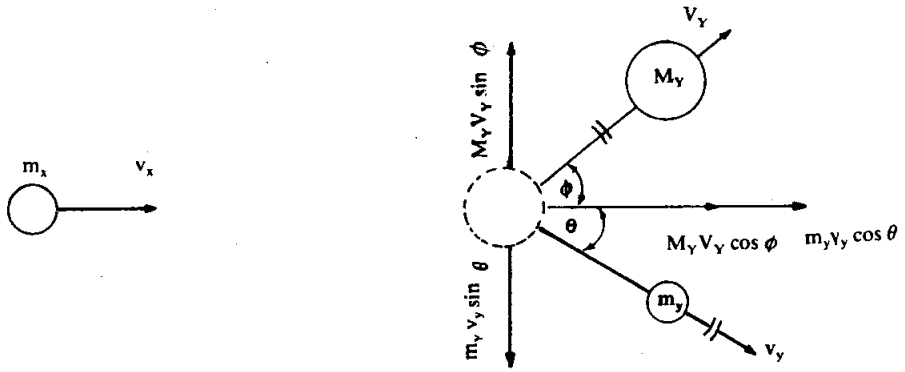
ยังมีปฏิกิริยานิวเคลียร์อีกมากมาย ซึ่งได้ยกตัวอย่างไว้แล้วในหนังสือตำรา PH 424- ควรจะเลือกจดจำไว้บ้างสำหรับบางปฏิกิริยาที่พบบ่อย ๆ

เมื่อศึกษาบทนี้แล้ว จะสามารถเขียนสมการนิวเคลียร์ และหาค่าพลังงานที่เกิดขึ้นในปฏิกิริยา หรือจะต้องให้พลังงานเข้าไปในปฏิกิริยาได้ เมื่อใช้อนุภาคต่าง ๆ เข้าชนเป้า

แบบฝึกหัดบทที่ 3

ข้อ 3.1 **โจทย์** จงหาค่าคิวที่เกิดขึ้นเมื่ออนุภาคมวล m_x ความเร็ว v_x เข้าชนนิวเคลียส X แล้วเกิดนิวเคลียสใหม่มวล M_Y ความเร็ว V_Y กระเด็นออกไปเป็นมุม ϕ กับทิศทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่เข้าชน และอนุภาคใหม่มวล m_y ความเร็ว v_y เคลื่อนที่ไปเป็นมุม θ กับทิศทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่เข้าชน

เฉลย



จากหลักการอนุรักษ์โมเมนตัม

$$m_x v_x = M_Y V_Y \cos\phi + m_y v_y \cos\theta$$

$$m_x v_x - m_y v_y \cos\theta = M_Y V_Y \cos\phi \quad \text{.....(1)}$$

$$m_y v_y \sin\theta = M_Y V_Y \sin\phi \quad \text{.....(2)}$$

$(1)^2 + (2)^2$

$$m_x^2 v_x^2 - 2 m_x v_x m_y v_y \cos\theta + m_y^2 v_y^2 = M_Y^2 V_Y^2$$

$\frac{1}{2} M_Y$ คูณตลอด

$$E_x \cdot \frac{m_x}{M_Y} - \frac{m_x v_x m_y v_y \cos\theta}{M_Y} + E_y \cdot \frac{m_y}{M_Y} = E_Y \quad \text{.....(3)}$$

แต่ $Q = E_Y + E_y - E_x$ .....(4)

และ $m_x v_x = \sqrt{2 m_x E_x}$, $m_y v_y = \sqrt{2 m_y E_y}$ .....(5)

เอาสมการ (5) แทนในสมการ (3) แล้วแทนในสมการ (4) และจัดใหม่ จะได้

$$Q = E_y\left(1 + \frac{m_y}{M_Y}\right) - E_x\left(1 - \frac{m_x}{M_Y}\right) - \frac{2}{M_Y}(E_x E_y m_x m_y)^{\frac{1}{2}} \cos\theta$$

ข้อ 3.2 **โจทย์** อนุภาคแอลฟาพลังงาน 21.54 เอมอีวี เข้าชน $_{13}Al^{27}$ เกิดโปรตอน พบค่าคิวเท่ากับ -3.22 เอมอีวี จงหาพลังงานของโปรตอนที่เกิดขึ้นในแนวทำมุม 90°

เฉลย

$$_{13}Al^{27} + {}_2He^4 \rightarrow {}_{14}Si^{30} + {}_1H^1 + Q$$

$$Q = E_y\left(1+\frac{m_y}{M_Y}\right) - E_x\left(1-\frac{m_x}{M_Y}\right)$$

$$-3.22 = E_y\left(1+\frac{1}{30}\right) - 21.54\left(1-\frac{4}{30}\right)$$

$$-3.22 = \frac{31}{30}E_y - 21.54\times\frac{26}{30}$$

$$-3.22 = \frac{31}{30}E_y - 18.667998$$

$$\frac{31}{30}E_y = 15.447998$$

$$E_y = 14.9496 \approx 14.95 \text{ เอมอีวี}$$

พลังงานของโปรตอนที่เกิดขึ้น = 14.95 เอมอีวี

ข้อ 3.3 **โจทย์** จงหามวลของ Al^{28} จากปฏิกิริยา $Al^{27}(d, p)Al^{28}$ พบค่าคิวเท่ากับ 5.49 เอมอีวี
กำหนดมวลของ $_{13}Al^{27}$ = 26.981535 เอเอมยู
H^2 = 2.014102 เอเอมยู, H^1 = 1.007825 เอเอมยู

เฉลย

$$_{13}Al^{27} + {}_1H^2 \rightarrow [{}_{14}Si^{29}] \rightarrow {}_{13}Al^{28} + {}_1H^1 + Q$$

มวลของ Al^{28} หาได้จาก $M(Al^{27}) + M(H^2) - m_{(H^1)} - \frac{Q \text{ เอมอีวี}}{931.5}$ เอเอมยู

$$M(Al^{28}) = 26.981535 + 2.0141022 - 1.007825 - \frac{5.49}{931.5}$$

$$= 27.987812 - 0.0058937$$

$$= 27.9819183 \text{ เอเอมยู}$$

มวลของอะลูมิเนียม -28 = 27.9819183 เอเอมยู

ข้อ 3.4 **โจทย์** ในปฏิกิริยา $Al^{27}(\alpha, p)Si^{30}$ กำหนดพลังงานของอนุภาคแอลฟา 4.53 เอมอีวี จงหาพลังงานของโปรตอนที่วัดได้ในแนวทำมุม 90° กับทิศทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคแอลฟา

กำหนดมวลในหน่วยเอเอมยูของ

$_{13}Al^{27} = 26.981536,$

$_{2}He^{4} = 4.0026036,$ $\qquad$ $_{1}H^{1} = 1.0078252$

$_{14}Si^{30} = 29.973761$

เฉลย

$$_{13}Al^{27} + {}_{2}He^{4} \rightarrow {}_{14}Si^{30} + {}_{1}H^{1}$$

หาค่า Q $= [M(Al^{27}) + M(He^{4}) - M(Si)^{30} - m_{(H^{1})}]931.5$

$= [26.981536 + 4.0026036]931.5 - [29.973761 + 1.0078252]931.5$

$= [30.9841396 - 30.9815862]931.5$

$= 2.5534 \times 10^{-3} \times 931.5$

$= 2.378$ เอมอีวี

$$Q = E_y\left(1 + \frac{m_y}{M_Y}\right) - E_x\left(1 - \frac{m_x}{M_Y}\right)$$

$$2.378 = E_y\left(1 + \frac{1}{30}\right) - 4.53\left(1 - \frac{4}{30}\right)$$

$$2.378 = E_y\left(\frac{31}{30}\right) - 4.53\left(\frac{26}{30}\right)$$

$$31\ E_y = 30 \times 2.378 + 4.53 \times 26$$

$$= 71.34 + 117.78$$

$$E_y = \frac{189.12}{31} = 6.1 \text{ เอมอีวี}$$

พลังงานของโปรตอน = 6.1 เอมอีวี

ข้อ 3.5 **โจทย์** จากปฏิกิริยา $_{13}Al^{27}(n, \alpha)_{11}Na^{24}$

(ก) จงเขียนปฏิกิริยาให้สมบูรณ์

(ข) หาค่าคิวในปฏิกิริยา และบอกด้วยว่าเป็นปฏิกิริยาชนิดใด

(ค) กำหนดให้นิวตรอนมีพลังงาน 5 เอมอีวีเข้าทำปฏิกิริยา จงหาพลังงานของอนุภาคแอลฟาที่เกิดขึ้นในแนวทำมุม 90° กับทิศทางการเคลื่อนที่ของนิวตรอน

(ง) จงหาค่าพลังงานของนิวตรอนที่น้อยที่สุดที่จะทำให้เกิดปฏิกิริยา กำหนดมวลในหน่วยเอเอมยูของ

$_{13}Al^{27}$ = 26.981535, $_{2}He^{4}$ = 4.0026036

$_{11}Na^{24}$ = 23.990967, $_{0}n^{1}$ = 1.0086654

เฉลย

(ก) $_{13}Al^{27} + {}_{0}n^{1} \rightarrow {}_{11}Na^{24} + {}_{2}He^{4} + Q$

(ข) $Q = [M(Al^{27}) + m({}_{0}n^{1}) - M(Na^{24}) - M(He^{4})]931.5$ เอมอีวี

$= [26.981535 + 1.0086654 - 23.990967 - 4.0026036]931.5$

$= -3.3702 \times 10^{-3} \times 931.5$

$= -3.13934$ เอมอีวี

เป็นปฏิกิริยาดูดกลืนพลังงาน (Endoergic reaction)

(ค) $Q = E_y\left(1 + \frac{m_y}{M_Y}\right) - E_x\left(1 - \frac{m_x}{M_Y}\right)$

$-3.139 = E_y\left(1 + \frac{4}{24}\right) - 5\left(1 - \frac{1}{24}\right)$

$-3.139 = \frac{28}{24} \cdot E_y - 5 \times \frac{23}{24}$

$\frac{28}{24}E_y = -3.139 + 4.7916$

$= 1.65$

$E_y = 1.4165$ เอมอีวี

(ง) $E_{th} = -Q\left[1 + \frac{m_x}{M_X}\right]$

$= 3.139\left[\frac{28}{27}\right]$

$= 3.255$ เอมอีวี

ข้อ 3.6 **โจทย์** ดิวทิรอนพลังงาน 1.51 เอมอีวี เข้าชนนิวเคลียส B^{11} พบว่าเกิดอนุภาคแอลฟาพลังงาน 6.37 เอมอีวี ในปฏิกิริยา $B^{11}(d, \alpha)Be^{9}$ จงหาค่าคิว

เมื่อกำหนดให้อนุภาคแอลฟากระเด็นออกมาเป็นมุม 90° กับทิศทางการเคลื่อนที่ของดิวทิรอน

เฉลย

$$_{5}B^{11} + _{1}H^{2} \rightarrow {}_{4}Be^{9} + {}_{2}He^{4} + Q$$

$$Q = E_y\left(1+\frac{m_y}{M_Y}\right) - E_x\left(1-\frac{m_x}{M_Y}\right)$$

$$= 6.37\left(1+\frac{4}{9}\right) - 1.51\left(1-\frac{2}{9}\right)$$

$$= 9.199 - 1.173$$

$$= 8.026 \text{ เอมอีวี}$$

ค่าดิวในปฏิกิริยา = 8.026 เอมอีวี

ข้อ 3.7 **โจทย์** ปฏิกิริยา $B^{11}(d, p)B^{12}$ เกิดขึ้นเมื่อใช้ดิวทิรอนพลังงาน 1.51 เอมอีวี ยิงเข้าไปยังนิวเคลียสของโบรอน จะเกิดอนุภาคโปรตอนวิ่งออกมาทำมุม 90° กับทิศทางการเคลื่อนที่ของลำดิวทิรอน วัดค่าดิวได้ 1.136 เอมอีวี จงหาค่าพลังงานของโปรตอน

เฉลย

$$_{5}B^{11} + _{1}H^{2} \rightarrow {}_{5}B^{12} + {}_{1}H^{1} + Q$$

$$Q = E_y\left(1+\frac{m_y}{M_Y}\right) - E_x\left(1-\frac{m_x}{M_Y}\right)$$

$$1.136 = E_y\left(1+\frac{1}{12}\right) - 1.51\left(1-\frac{2}{12}\right)$$

$$= E_y\left(\frac{13}{12}\right) - 1.51\left(\frac{5}{6}\right)$$

$$\frac{13}{12}E_y = 1.136 + 1.2583 = 2.394$$

$$E_y = 2.21 \text{ เอมอีวี}$$

พลังงานของโปรตอน = 2.21 เอมอีวี

ข้อ 3.8 **โจทย์** จงคำนวณช่วงพลังงานของนิวตรอนที่เกิดขึ้น เมื่อใช้อนุภาคแอลฟาจาก Po^{210} พลังงาน 5.3 เอมอีวี ยิงนิวเคลียสของ Be^{9} กำหนดมวลในหน่วยเอเอมยูของ

$$_{4}Be^{9} = 9.012186, \qquad _{6}C^{12} = 12.00000$$

$$_{2}He^{4} = 4.0026036, \qquad _{0}n^{1} = 1.0086654$$

เฉลย

$$_4Be^9 + {}_2He^4 \rightarrow {}_6C^{12} + {}_0n^1$$

หาค่าคิวจากสมการ

$$\begin{aligned} Q &= M(Be^9) + M(He^4) - M(C^{12}) - m(n^1) \\ &= [9.012186 + 4.0026036 - 12.000000 - 1.0086654]931.5 \\ &= [13.0147896 - 13.0086654]931.5 \\ &= [6.1242 \times 10^{-3}]931.5 \\ &= 5.704 \end{aligned}$$ เอมอีวี

ช่วงพลังงานที่จะเป็นไปได้คือ ตั้งแต่ 0° จนถึง π

$$\theta = 0$$

$$Q = E_y\left(1 + \frac{m_y}{M_Y}\right) - E_x\left(1 - \frac{m_x}{M_Y}\right) - \frac{2}{M_Y}(E_x E_y m_x m_y)^{\frac{1}{2}} \cos 0°$$

$$5.704 = E_y\left(1 + \frac{1}{12}\right) - 5.3\left(1 - \frac{4}{12}\right) - \frac{2}{12}(5.3E_y \times 4 \times 1)^{\frac{1}{2}} \quad \text{.....(1)}$$

$$5.704 = 1.084E_y - 3.53 - \frac{1}{6}(5.3 \times 4E_y)^{\frac{1}{2}}$$

$$9.234 = 1.084E_y - \frac{4.6}{6}\sqrt{E_y}$$

$$1.084E_y - \frac{4.6}{6}\sqrt{E_y} - 9.234 = 0$$

$$E_y - 0.707\sqrt{E_y} - 8.518 = 0$$

$$\sqrt{E_y} = \frac{+0.7 \pm \sqrt{0.49 + 4 \times 8.51}}{2} = \frac{0.7 \pm \sqrt{34.53}}{2}$$

$$\sqrt{E_y} = 3.28$$

$$E_y = 10.75 \text{ เอมอีวี}$$

$$\theta = \pi$$

$$Q = E_y\left(1 + \frac{m_y}{M_Y}\right) - E_x\left(1 - \frac{m_x}{M_Y}\right) - \frac{2}{M_Y}(E_x E_y m_x m_y)^{\frac{1}{2}} \cos 180°$$

แทนค่า $\cos 180° = -1$

จะได้ค่าเหมือนสมการที่ (1) แต่จะต่างกันที่เครื่องหมายเทอมสุดท้ายจะเป็นบวก

$$5.1 = \frac{13}{12}E_y - 3.53 + \frac{4.6}{6}\sqrt{E_y}$$

$$110.76 = 13E_y + 9.2\sqrt{E_y}$$

$$E_y + 0.7\sqrt{E_y} - 8.52 = 0$$

$$\sqrt{E_y} = \frac{-0.7 \pm \sqrt{0.49 + 4 \times 8.52}}{2}$$

$$= -0.35 \pm 2.9398$$

$\sqrt{E_y} = 2.5$ เอมอีวี

$E_y = 6.25$

ช่วงพลังงานของนิวตรอนที่เกิดขึ้นคือ ตั้งแต่พลังงาน 10.75 เอมอีวี จนถึง 6.25 เอมอีวี

ข้อ 3.9 **โจทย์** จากปฏิกิริยา ${}_4Be^9(\gamma, n){}_4Be^8$ จงหาค่าคิว และพลังงานเทรสโฮลด์

กำหนดมวลของ ${}_0n^1$ = 1.0086654 เอเอมยู

Be^9 = 9.012186 เอเอมยู, Be^8 = 8.005308 เอเอมยู

เฉลย

${}_4Be^9 + \gamma \rightarrow {}_4Be^8 + {}_0n^1$

ค่าคิว $= [M(Be^9) - M(Be^8) - m_{n^1}]931.5$

$= [9.012186 - 8.005308 - 1.0086654]931.5$

$= [9.012186 - 9.0139734]$

$=$ -0.0017874x931.5

$=$ - 1.6649634 เอมอีวี

$$E_{th} = -Q\left[\frac{M_x + m_x}{M_X}\right]$$

$m_x = 0$

$E_{th} = -Q = 1.66$ เอมอีวี

ข้อ 3.10 **โจทย์** ในปฏิกิริยา $C^{12}(d, \alpha)B^{10}$ ถ้าพบอนุภาคแอลฟาพลังงาน 8.18 เอมอีวี และ 10.84 เอมอีวี ในแนวทำมุม 90° และ 60° กับทิศทางการเคลื่อนที่ของดิวทิรอน จงหา

(ก) พลังงานของดิวทิรอน

(ข) ค่าคิวในปฏิกิริยา

เฉลย

$${}_6C^{12} + {}_1H^2 \rightarrow {}_5B^{10} + {}_2He^4$$

$$Q = E_y\left(1 + \frac{m_y}{M_Y}\right) - E_x\left(1 - \frac{m_x}{M_Y}\right) - \frac{2}{M_Y}\,(E_x E_y m_x m_y)^{\frac{1}{2}} \cos\theta$$

$\theta = 90°$, cos 90" = 0

$$Q = 8.18\left(1 + \frac{4}{10}\right) - E_x\left(1 - \frac{2}{10}\right) \qquad \text{.....(1)}$$

$\theta = 60°$, cos 60" = $\frac{1}{2}$

$$Q = 10.84 \times \frac{7}{5} - \frac{4}{5}E_X - \frac{1}{5} \times \frac{1}{2}(10.84 \times 2 \times 4)^{\frac{1}{2}}\sqrt{E_x} \qquad \text{.....(2)}$$

จากสมการ (1), $Q = 8.18 \times \frac{7}{5} - \frac{4}{5}E_x$

$$= 11.45 - \frac{4}{5}\,E_x \qquad \text{.....(3)}$$

แทนในสมการ (2)

$$11.45 - \frac{4}{5}E_x = 15.176 - \frac{4}{5}E_x - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}(86.72)\sqrt[\frac{1}{2}]{E_x}$$

$$3.726 = -\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\times 9.31\sqrt{E_x}$$

$$0.931\sqrt{E_x} = 3.726$$

$$\sqrt{E_x} = 4.004$$

$$E_x = 16.03 \quad \text{เอมอีวี}$$

จากสมการ (3),

$$Q = 11.45 - \frac{4}{5}\times 16.03 = 11.45 - 12.824 = -1.374 \quad \text{เอมอีวี}$$

(ก) พลังงานของดิวทิรอน = 16.03 เอมอีวี

(ข) ค่าดิวในปฏิกิริยา = 1.374 เอมอีวี เป็นปฏิกิริยา ดูดกลืนความร้อน

ข้อ 3.11 **โจทย์** จงหามวลของธาตุใหม่ที่เกิดขึ้นในปฏิกิริยา $C^{13}(d, \alpha)$ โดยกำหนดค่าดิวเท่ากับ 5.16 เอมอีวี และมวลในหน่วยเอเอมยูของ

$$_6C^{13} = 13.003354, \quad _2He^4 = 4.0026036, \quad _1H^2 = 2.0141022$$

เฉลย

$$_6C^{13} + _1H^2 \rightarrow _5X^{11} + _2He^4 + 5.16 \text{ เอมอีวี}$$

$$M(X^{11}) = M(C^{13}) + M(H^2) - M(He^4) - \frac{5.16}{931.5}$$

$$= 13.003354 + 2.0141022 - 4.0026036 - 0.0055394 \quad \text{เอเอมยู}$$

$$= 15.0174562\text{-}4.0026036\text{-}0.0055394$$

$$= 11.0148526 - 0.0055394$$

$$= 11.0093132 \quad \text{เอเอมยู}$$

มวลของธาตุใหม่คือ 11.0093132 เอเอมยู

ข้อ 3.12 **โจทย์** เขียนปฏิกิริยาให้สมบูรณ์แล้วหาค่าดิวสำหรับปฏิกิริยา $C^{13}(p, n)$ โดยมีพลังงานเทรสโฮลด์เท่ากับ 3.236 เอมอีวี

เฉลย

$$_6C^{13} + {}_1H^1 \rightarrow {}_7N^{13} + {}_0n^1$$

$$Q = -E_{th}\left(\frac{M_X}{M_X + m_x}\right)$$

$$= -3.236\left(\frac{13}{13+1}\right)$$

$$= -3.0048$$

ค่าคิว = 3.0048 เอมอีวี เป็นปฏิกิริยาดูดกลืนความร้อน

ข้อ 3.13 **โจทย์** จงหาพลังงานเทรสโฮลด์เพื่อให้เกิดปฏิกิริยา $Cu^{65}(\gamma, n)\ Cu^{64}$

กำหนดมวลของ

$_{29}Cu^{65}$ = 64.92779 เอเอมยู,

$_{29}Cu^{64}$ = 63.92976 เอเอมยู

$_0n^1$ = 1.0086654 เอเอมยู

เฉลย

$$_{29}Cu^{65} + \gamma \rightarrow {}_{29}Cu^{64} + {}_0n^1$$

$$E_{th} = -Q\left[1 + \frac{m_x}{M_X}\right]$$

$$Q = [64.92779 - 63.92976 - 1.0086654]931.5$$

$$= -0.0106354 \times 931.5$$

$$= -9.9 \quad \text{เอมอีวี}$$

E_{th} = 9.9 เอมอีวี

พลังงานเทรสโฮลด์ = 9.9 เอมอีวี

ข้อ 3.14 **โจทย์** ในปฏิกิริยาดูดกลืนความร้อน $_{29}Cu^{65}(p, n)_{30}Zn^{65}$ พบค่าพลังงานเทรสโฮลด์เท่ากับ 2.164 เอมอีวี จงหาค่าคิวสำหรับสมการนี้

เฉลย

$$_{29}Cu^{65} + {}_1H^1 \rightarrow {}_{30}Zn^{65} + {}_0n^1$$

$$-Q = E_{th}\left(\frac{M_X}{M_X + m_x}\right)$$

$$-Q = 2.164 \times \frac{65}{66}$$

$$Q = -2.13 \text{ เอมอีวี}$$

ค่าคิวในปฏิกิริยาดูดกลืนความร้อน = 2.13 เอมอีวี

ข้อ 3.15 **โจทย์** จงหาพลังงานเทรสโฮลด์สำหรับปฏิกิริยา $_{29}Cu^{65}(p, n)_{30}Zn^{65}$ เมื่อค่าคิวเท่ากับ -2.13 เอมอีวี

เฉลย

$$_{29}Cu^{65} + {}_1H^1 \rightarrow {}_{30}Zn^{65} + {}_0n^1 + Q$$

$$E_{th} = -Q\left[1 + \frac{m_x}{M_X}\right]$$

$$= 2.13\left[1 + \frac{1}{65}\right]$$

$$= 2.13 \times 1.01$$

$$= 2.16 \text{ เอมอีวี}$$

พลังงานเทรสโฮลด์ = 2.16 เอมอีวี

ข้อ 3.16 **โจทย์** จงเขียนปฏิกิริยา $Li^7(p, \alpha)$ ให้สมบูรณ์ แล้วหาค่าคิว กำหนดมวลของ

$_3Li^7$ = 7.016005 เอเอมยู, $_1H^1$ = 1.0078252 เอเอมยู

$_2He^4$ = 4.0026036 เอเอมยู

เฉลย

ปฏิกิริยา $_3Li^7 + {}_1H^1 \rightarrow {}_2He^4 + {}^*_2He^4$

ค่าคิว $= [M(Li^7) + m_{(H^1)} - M(He^4) - M(He^4)]931.5$ เอมอีวี

$= [7.016005 + 1.0078252 - 2 \times 4.0026036]931.5$

$= [8.0238302 - 8.0052072]931.5$

$= 0.018623 \times 931.5$

$= 17.347324 \approx 17.35$ เอมอีวี

ค่าคิวในปฏิกิริยา = 17.35 เอมอีวี

ข้อ 3.17 **โจทย์** ดิวทิรอนพลังงาน 10 เอมอีวี วิ่งเข้าชนนิวเคลียสของ $_3Li^7$ พบว่าเกิดนิวตรอนในแนวทำมุม 90° กับลำแสงที่ตกกระทบ จากการคำนวณได้ค่าดิวเท่ากับ 15.02 เอมอีวี จงหา

(ก) พลังงานของนิวตรอน

(ข) มุมที่นิวเคลียสใหม่กระเด็นออกมา

เฉลย

$$_3Li^7 + {}_1H^2 \rightarrow {}_4Be^8 + {}_0n^1$$

$$Q = E_y\left(1+\frac{m_y}{M_Y}\right) - E_x\left(1-\frac{m_x}{M_Y}\right)$$

$$15.02 = E_y\left(1+\frac{1}{8}\right) - 10\left(1-\frac{2}{8}\right)$$

$$15.02 = \frac{9}{8}E_y - \frac{60}{8}$$

$$\frac{9}{8}E_y = 15.02 + 7.5$$

(ก) พลังงานของนิวตรอน, $E_y = 22.52 \times \frac{8}{9} = 20.01$ เอมอีวี

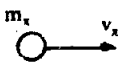
$$Q = E_Y + E_y - E_x$$

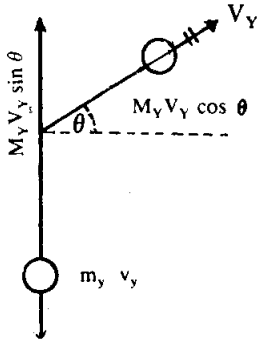
$$15.02 = E_Y + 20.01 - 10$$

พลังงานของ $Be^8, E_Y = 15.02 - 10.01 = 5.01$ เอมอีวี

(ข) หามุมที่ Be^8 กระเด็นออกมา

จากหลักการอนุรักษ์โมเมนตัม





$$m_x v_x = M_Y V_Y \cos\theta \quad \text{..... (1)}$$

$$m_y v_y = M_Y V_Y \sin\theta \quad \text{..... (2)}$$

(2)/(1), $\dfrac{m_y v_y}{m_x v_x} = \tan\theta$ ..... (3)

แต่ $m_y v_y = \sqrt{2 m_y E_y} = \sqrt{2 \times 1 \times 20.01}$ ..... (4)

$m_x v_x = \sqrt{2 m_x E_x} = \sqrt{2 \times 2 \times 10}$ ..... (5)

แทนค่า (4), (5) ในสมการ (3)

$$\tan\theta = \frac{2\sqrt{10}}{2\sqrt{10}} = 1$$

$$\theta = 45^\circ$$

พลังงานของนิวตรอน = 20.01 เอมอีวี

มุมที่นิวเคลียสกระเด็นออกมา = 45°

ข้อ 3.18 **โจทย์** จงหาค่าคิว ในปฏิกิริยา $N^{14}(\alpha, p)O^{17}$ และตอบด้วยว่าเป็นปฏิกิริยาชนิดใด กำหนดค่ามวลในหน่วยเอเอมยูของ

$_7N^{14} = 14.0030744$, $_2He^4 = 4.0026036$

$O^{17} = 16.999133$, $H^1 = 1.0078252$

เฉลย

$$_7N^{14} + {}_2He^4 \rightarrow {}_8O^{17} + {}_1H^1 + Q$$

หาค่าคิว $Q = \left[M(N^{14}) + M(He^4) - M(O^{17}) - m_{(H^1)}\right]931.5$ เอมอีวี

$= \left[14.0030744 + 4.0026036 - 16.999133 - 1.0078252\right]931.5$

$= \left[18.005678 - 18.0069582\right]931.5$

$= -0.00128 \times 931.5$

$= -1.1925$ เอมอีวี

เป็นปฏิกิริยาดูดกลืนความร้อน

ข้อ 3.19 **โจทย์** พลังงานเทรสโฮลด์สำหรับปฏิกิริยา $O^{18}(p, n)F^{18}$ เท่ากับ 2.45 เอมอีวี จงหาค่าคิวสำหรับปฏิกิริยานี้

เฉลย

$$_8O^{18} + _1H^1 \rightarrow {}_9F^{18} + {}_0n^1$$

$$E_{th} = -Q\left[1 + \frac{m_x}{M_x}\right]$$

$$2.45 = -Q\left[1 + \frac{1}{18}\right]$$

$$-Q = 2.45 \times \frac{18}{19}$$

$$Q = -2.32 \quad \text{เอมอีวี}$$

ค่าคิว = 2.32 เอมอีวี เป็นปฏิกิริยาดูดกลืนความร้อน

ข้อ 3.20 **โจทย์** จงหาค่าคิวในปฏิกิริยา $Pb^{206}(d, p)Pb^{207}$

กำหนดมวล (เอเอมยู)

Pb^{206} = 205.97446, $_1H^2$ = 2.0141022

H^1 = 1.0078252, Pb^{207} = 206.97590

เฉลย

ปฏิกิริยา $Pb^{206} + {}_1H^2 \rightarrow Pb^{207} + {}_1H^1$

ค่าคิว, $Q = \left[M(Pb^{206}) + M(H^2) - M(Pb^{207}) - m_{(H^1)}\right]931.5$ เอมอีวี

$= \left[205.97446 + 2.0141022 - 206.97590 - 1.0078252\right]931.5$

$= 4.837 \times 10^{-3} \times 931.5$

$= 4.5$ เอมอีวี

ค่าคิวในปฏิกิริยา = 4.5 เอมอีวี

ข้อ 3.21 **โจทย์** จงหาค่าคิวจากปฏิกิริยา $_{46}Pd^{106}(n, p)_{45}Rh^{106}$ เมื่อนิวเคลียสที่เกิดขึ้นคือ โรเดียม – 106 สลายด้วยครึ่งชีวิต 30 วินาที โดยการส่งอนุภาคเบตา พลังงาน 3.54 เอมอีวี มายังสภาวะกราวน์ของพาลลาเดียม – 106

กำหนดค่ามวล $m_{(n^1)} - m_{(H^1)} = 8.402 \times 10^{-4}$ เอเอมยู และจงหาค่าพลังงานเทรสโฮลด์สำหรับปฏิกิริยานี้

เฉลย

ปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นคือ

$$_{46}Pd^{106} + {}_{0}n^{1} \rightarrow {}_{45}Rh^{106} + {}_{1}H^{1} + Q$$

$$_{45}Rh^{106} \xrightarrow[t_{\frac{1}{2}} = 30 \text{ วินาที}]{\beta^-} {}_{46}Pd^{106}$$

พลังงานของอนุภาคเบตา = 3.54 เอมอีวี
จากปฏิกิริยา จะได้ว่า

$$m_{n^1} = m_{H^1} + \frac{Q}{931.5} + \frac{3.54}{931.5} \quad \text{เอเอมยู}$$

$$Q = 931.5(m_{n^1} - m_{H^1}) - 3.54 \quad \text{เอมอีวี}$$

$$= 931.5 \times 8.402 \times 10^{-4} - 3.54$$

$$= 0.78 - 3.54$$

$$= -2.76 \quad \text{เอมอีวี}$$

$$E_{th} = -Q\left(\frac{M_X + m_x}{M_X}\right)$$

$$= +2.76 \times \left(\frac{106+1}{106}\right)$$

$$= 2.76 \times \frac{107}{106} = 2.78$$

พลังงานเทรสโฮลด์ = 2.78 เอมอีวี

ข้อ 3.22 **โจทย์** Si^{28} ถูกยิงด้วยดิวทิรอนพลังงาน 1.8 เอมอีวี ในปฏิกิริยา $Si^{28}(d, p)Si^{29}$ จงหาพลังงานของโปรตอนที่เกิดขึ้นในแนวทำมุม 90° กับทิศทางการเคลื่อนที่ของดิวทิรอน กำหนดมวลในหน่วยเอเอมยูของ

Si^{28} = 21.976927, Si^{29} = 28.976491

H^2 = 2.0141022, H^1 = 1.0078252

เฉลย

$$_4Si^{28} + _1H^2 \rightarrow _{14}Si^{29} + _1H^1$$

หาค่าคิวในสมการ

$$Q = [M(Si^{28}) + M(H^2) - M(Si^{29}) - m_{(H^1)}]931.5$$

$$= [27.976927 + 2.0141022 - 28.976491 - 1.0078252]931.5$$

$$= [29.9910292 - 29.9843162]931.5$$

$$= 6.713 \times 10^{-3} \times 931.5$$

$$= 6.25 \text{ เอมอีวี}$$

หาพลังงานของโปรตอนที่ส่งออกมา คือ E_y

$$Q = E_y\left(1 + \frac{m_y}{M_Y}\right) - E_x\left(1 - \frac{m_x}{M_Y}\right)$$

$$6.25 = E_y\left(1 + \frac{1}{29}\right) - 1.8\left(1 - \frac{2}{29}\right)$$

$$\frac{30}{29}E_y = 6.25 + 1.8 \times \frac{27}{29}$$

$$E_y = \$6.25 + 1.6758)$$

$$= \frac{29}{30} \times 7.9258$$

$$= 7.66 \text{ เอมอีวี}$$

พลังงานของโปรตอนที่ส่งออกมา = 7.66 เอมอีวี

ข้อ 3.23 **โจทย์** ในปฏิกิริยา $Si^{29}(d, \alpha)Al^{27}$ วัดค่าคิวได้ 6.012 เอมอีวี กำหนดให้ดิวทิรอนมีพลังงาน 1.8 เอมอีวี จงหาพลังงานของอนุภาคแอลฟาที่ส่งออกมาในแนวทำมุม 90° กับทิศทางการเคลื่อนที่ของดิวทิรอน

เฉลย

$$_{14}Si^{29} + _1H^2 \rightarrow _{13}Al^{27} + _2He^4 + 6.012 \text{ เอมอีวี}$$

$$Q = E_y\left(1 + \frac{m_y}{M_Y}\right) - E_x\left(1 - \frac{m_x}{M_Y}\right)$$

$$6.012 = E_y\left(1 + \frac{4}{27}\right) - 1.8\left(1 - \frac{2}{27}\right)$$

$$6.012 = E_y\left(\frac{31}{27}\right) - 1.8\left(\frac{25}{27}\right)$$

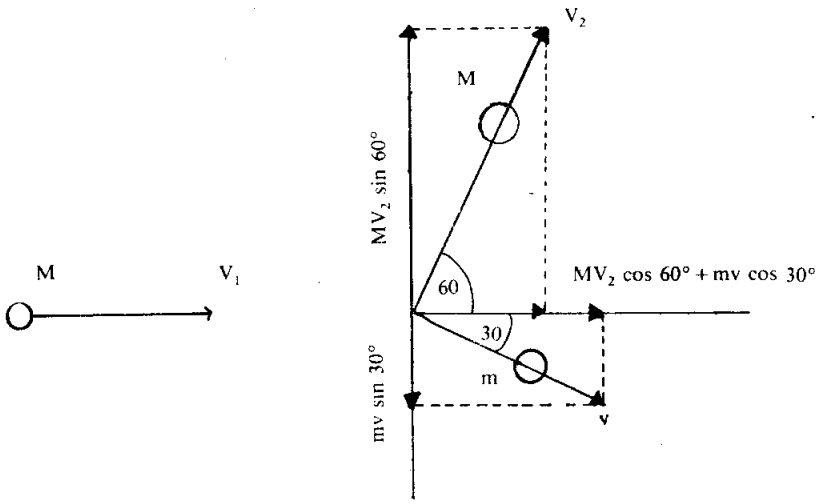
$$\frac{31}{27}E_y = 6.012 + 1.8 \times \frac{25}{27}$$

$$31E_y = 162.324 + 45 = 207.324$$

$$E_y = 6.687 \approx 6.69 \quad \text{เอมอีวี}$$

พลังงานของอนุภาคแอลฟาที่ส่งออกมา = 6.69 เอมอีวี

ข้อ 3.24 **โจทย์** เมื่อโปรตอนชนกับอนุภาคแล้วกระเด็นไปในทิศทางทำมุม 60° กับทิศทางการเคลื่อนที่เดิม และอนุภาคที่ถูกชนกระเด็นไปเป็นมุม 30° กับทิศทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่เข้าชน จงหามวลของอนุภาค



เฉลย

จากหลักการอนุรักษ์โมเมนตัม

ตามแกน X

$$MV_1 = MV_2 \cos 60° + mv \cos 30°$$

$$MV_1 = \frac{1}{2}MV_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}mv$$

$$2MV_1 = MV_2 + \sqrt{3}\,mv \quad \text{.....(1)}$$

ตามแกน Y

$$MV_2 \sin 60° = mv \sin 30°$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}MV_2 = \frac{1}{2}mv$$

$$mv = \sqrt{3}\, MV_2$$

$$v = \sqrt{3}\cdot\frac{M}{m}\cdot V_2 \qquad \text{.....(2)}$$

แทนค่า v ในสมการ (1)

$$2MV_1 = MV_2 + \sqrt{3}m\cdot\sqrt{3}\frac{M}{m}\cdot V_2$$

$$2MV_1 = MV_2 + 3MV_2 = 4MV_2$$

$$V_1 = 2V_2 \qquad \text{.....(3)}$$

จากหลักการอนุรักษ์พลังงาน

$$\frac{1}{2}MV_1^2 = \frac{1}{2}MV_2^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$4\times\frac{1}{2}MV_2^2 = \frac{1}{2}MV_2^2 + \frac{1}{2}m\cdot 3\frac{M^2}{m^2}V_2^2$$

$$3MV_2^2 = 3\frac{M^2}{m}V_2^2$$

$$m = M$$

มวลของอนุภาคที่ถูกชน จะมีค่าเท่ากับมวลของโปรตอน

ข้อ 3.25 **โจทย์** สำหรับปฏิกิริยาดูดกลืนพลังงาน A(a, b)B จงแสดงว่า

(ก) ส่วนหนึ่งของพลังงานจลน์ของอนุภาคที่เข้าชน จะต้องนำไปใช้เป็นพลังงานของนิวเคลียสที่เกิดขึ้น และมีค่าเท่ากับ $\frac{M_A}{M_A + m_a}\cdot E_x$

(ข) พลังงานจลน์ของอนุภาคที่เข้าชน จะเสียไปเพื่อใช้ในการเคลื่อนที่ของนิวเคลียสเท่ากับ $\frac{m_a}{M_A + m_a}\cdot E_x$

เมื่อ M_A, m_a คือมวลของ A และ a ตามลำดับ และ

E_x คือพลังงานของอนุภาคที่เข้าชน

เฉลย

(ก) หลักการอนุรักษ์โมเมนตัม

$$m_a v_a = M_{CN} V_{CN}$$

$$V_{CN} = \frac{m_a v_a}{M_{CN}}$$

พลังงานจลน์ที่ต้องใช้เป็นพลังงานของนิวเคลียส คือ

$$E_x' = \frac{1}{2} m_a v_a^2 - \frac{1}{2} M_{CN} V_{CN}^2$$

$$= \frac{1}{2} m_a v_a^2 \; \frac{1}{2} M_{CN} \; \frac{m_a^2 v_a^2}{M_{CN}^2}$$

$$= E_x\left(1 - \frac{m_a}{M_A + m_a}\right)$$

$$= E_x \frac{M_A}{M_A + m_a}$$

(ข) พลังงานจลน์ที่ใช้ในการเคลื่อนที่นิวเคลียส $= E_x - E_x \cdot \frac{M_A}{M_A + m_a}$

$$= \frac{m_a}{M_A + m_a} \cdot E_x$$

ข้อ 3.26 **โจทย์** ในปฏิกิริยานิวเคลียร์ เมื่ออนุภาค m_x พลังงาน E_x เข้าชนนิวเคลียสมวล M_X เกิดอนุภาคใหม่ มวล m_y พลังงาน E_y และนิวเคลียสใหม่มวล M_Y พลังงาน E_Y ถ้า

$$v = \frac{\sqrt{m_x m_y} E_x}{M_Y + m_y} \cdot \cos\theta, \qquad \omega = \frac{Q M_Y + E_x(M_Y - m_x)}{M_Y + m_y}$$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$\sqrt{E_y} = v \pm \sqrt{v^2 + \omega}$$

เฉลย

สูตร

$$Q = E_y\left(1 + \frac{m_y}{M_Y}\right) - E_x\left(1 - \frac{m_x}{M_Y}\right) - \frac{2}{M_Y}(m_x m_y E_x E_y)^{\frac{1}{2}} \cos\theta$$

$$\left(1 + \frac{m_y}{M_Y}\right) E_y = Q + E_x\left(1 - \frac{m_x}{M_Y}\right) + \frac{2}{M_Y}(m_x m_y E_x E_y)^{\frac{1}{2}} \cos\theta$$

$$E_y = \frac{Q \cdot M_Y}{M_Y + m_y} + E_x \left[\frac{M_Y - m_x}{M_Y + m_x}\right] + \frac{2}{M_Y + m_y}\sqrt{m_x m_y \cdot E_x E_y}\cos\theta$$

$$\sqrt{E_y}^2 - \frac{2}{M_Y + m_y}\sqrt{m_x \cdot m_y E_x}\sqrt{E_y}\cdot\cos\theta - \left[Q\frac{M_Y}{M_Y + m_y} + \frac{M_Y - m_x}{M_Y + m_x}\cdot E_x\right] = 0$$

$$\sqrt{E_y} = \frac{\frac{2}{M_Y + m_y}\sqrt{m_x m_y E_x}\cos\theta \pm \sqrt{\frac{2\times 2}{(M_Y + m_y)^2}\cdot m_x m_y E_x \cos^2\theta + \frac{4QM_Y}{M_Y + m_y} + \frac{M_Y - m_x}{M_Y + m_x}\cdot E_x}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{m_x m_y \cdot E_x}}{M_Y + m_y}\cos\theta \pm \sqrt{\frac{m_x m_y E_x \cos^2\theta}{(M_Y + m_y)^2} + \frac{Q \cdot M_Y + (M_Y - m_x)E_x}{M_Y + m_y}}$$

$$= v \pm \sqrt{v^2 + \omega}$$