

บทที่ 3
การเปลี่ยนแปลงทางนิวเคลียร์
(ARTIFICIAL NUCLEAR DISINTEGRATION)

จากการทดลองพบว่า เมื่อให้อนุภาคเข้าชนกับนิวไคลด์เบา ๆ จะเกิดธาตุใหม่ และอนุภาคใหม่ พร้อมทั้งส่งพลังงานจำนวนหนึ่งออกมา ดังสมการ

$$X+x \rightarrow Y+y+Q \quad \dots\dots\dots(3.1)$$

พิจารณาสมการ (3.1)

เลขมวลก่อนเกิดปฏิกิริยา = เลขมวลหลังเกิดปฏิกิริยา

เลขอะตอมก่อนเกิดปฏิกิริยา = เลขอะตอมหลังเกิดปฏิกิริยา

และพลังงานรวมก่อนเกิดปฏิกิริยา = พลังงานรวมหลังเกิดปฏิกิริยา

โมเมนตัมรวมก่อนเกิดปฏิกิริยา = โมเมนตัมรวมหลังเกิดปฏิกิริยา

เมื่อ Q เป็นพลังงานที่เกิดขึ้นในปฏิกิริยา

การคำนวณ

จะคิดว่ามวลทั้งหมดก่อนเกิดปฏิกิริยาจะต้องเท่ากับมวลทั้งหมดหลังเกิดปฏิกิริยา ถ้าต่างกัน แสดงว่า จะต้องมียวมวลส่วนหนึ่งได้ถูกทำลายกลายเป็นพลังงานตามกฎของไอสไตน์

ถ้า Q เป็นพลังงานที่เกิดขึ้นในปฏิกิริยา จะเรียกว่า ค่าคิว

Q เป็นบวก แสดงว่า ได้มีการส่งพลังงานออกมา เรียกว่าเป็นปฏิกิริยาคายความร้อน (Exothermic or exoergic)

Q เป็นลบ แสดงว่า จะต้องให้พลังงานจำนวนหนึ่งเข้าไปในปฏิกิริยา เรียกปฏิกิริยาดูดกลืนความร้อน (Endothermic or endoergic)

จำนวนอิเล็กตรอนในปฏิกิริยาตามสมการที่ (3.1) ก่อนเกิดปฏิกิริยา และหลังเกิดปฏิกิริยามีค่าเท่ากัน จึงใช้มวลของอะตอมแทนมวลของนิวเคลียสได้

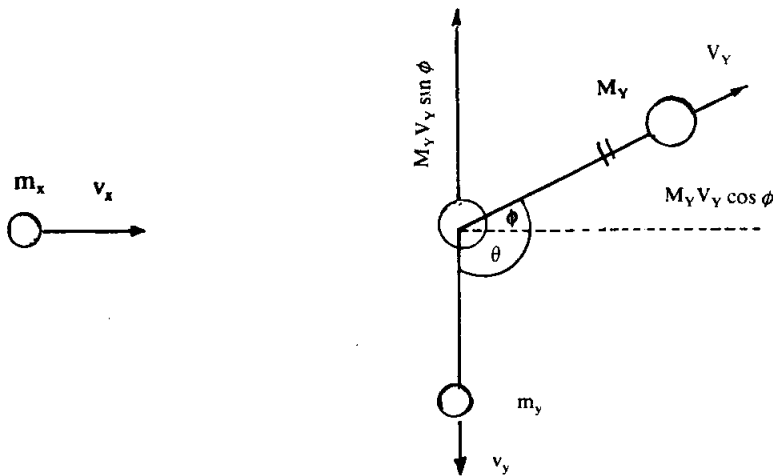
จากสมการที่ (3.1) จะเห็นว่า พลังงานที่เกิดขึ้นนั้นมาจากมวลนิ่ง (rest mass) ที่แตกต่างกัน ระหว่างก่อนเกิดปฏิกิริยาและหลังเกิดปฏิกิริยาเท่านั้น แต่ความจริงอนุภาคที่เข้าชนจะต้องมีพลังงานจลน์เพื่อวิ่งเข้าชนเป้าซึ่งอยู่นิ่ง หลังชนอนุภาคใหม่ที่เกิดขึ้นก็จะกระเด็นออกไปเป็นมุมต่าง ๆ กัน พร้อมด้วยพลังงานจลน์จำนวนหนึ่ง ส่วนนิวเคลียสใหม่ที่เกิดขึ้นก็จะเคลื่อนที่

ไปเล็กน้อย ด้วยเหตุนี้จึงไม่สามารถจะหาพลังงานที่เกิดขึ้นโดยการนำค่าแตกต่างระหว่างมวลทั้งหมดก่อนเกิดปฏิกิริยาและหลังเกิดปฏิกิริยามาคำนวณเพียงอย่างเดียว จะต้องคิดทั้งพลังงานและโมเมนตัมด้วย

พิจารณาอนุภาคมวล m_x ความเร็ว v_x วิ่งเข้าชนเป้า X มวล M_x ซึ่งอยู่นิ่ง ทำให้เกิดนิวเคลียสใหม่ M_Y เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v_Y เป็นมุม ϕ กับทิศทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่เข้าชน และเกิดอนุภาคใหม่มวล m_y วิ่งออกไปด้วยความเร็ว v_y เป็นมุม θ กับทิศทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่เข้าชน

โดยปกติแล้วมวล m_y อาจกระเด็นออกไปเป็นมุมใด ๆ ก็ได้ คือ θ จะมีค่าตั้งแต่ 0 จนถึง 180° กับทิศทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่วิ่งเข้าชน

กรณี $\theta = 90^\circ$



จากหลักการอนุรักษ์โมเมนตัมคือ

โมเมนตัมรวมก่อนเกิดปฏิกิริยา = โมเมนตัมรวมหลังเกิดปฏิกิริยา

หลังเกิดปฏิกิริยา นิวเคลียสใหม่เคลื่อนที่เป็นมุม ϕ กับทิศทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่เข้าชน

พยายามกำจัดมุม ϕ ออก โดยใช้กฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์ คือ

$$m_x v_x = M_Y v_Y \cos \phi \quad \dots\dots\dots(3.2)$$

$$m_y v_y = M_Y v_Y \sin \phi \quad \dots\dots\dots(3.3)$$

สมการ $(3.2)^2 + (3.3)^2$ ทำให้มุม ϕ หดไป เพราะ $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$
 พลังงานรวมทั้งหมดก่อนเกิดปฏิกิริยา = พลังงานรวมทั้งหมดหลังเกิดปฏิกิริยา
 พลังงานที่เกิดขึ้นในปฏิกิริยา หรือค่าคิว คือ

$$Q = E_y + E_y - E_x \quad \dots\dots\dots(3.4)$$

E_y, E_y, E_x เป็นค่าพลังงานของนิวเคลียสใหม่ที่เกิดขึ้น อนุภาคใหม่ที่เกิดขึ้น และอนุภาคที่เข้าชน

แต่ไม่เม้นต์เป็นปริมาณเวกเตอร์ ดังนั้น เมื่อมวลของนิวเคลียสใหม่ และอนุภาคใหม่กระเด็นออกไปจากแนวเดิม จึงจำเป็นต้องคิดทิศทางเคลื่อนที่ด้วย

ในการทดลอง หลังเกิดปฏิกิริยา นิวเคลียสใหม่ที่เกิดขึ้นเคลื่อนที่ไปเล็กน้อย ทำให้วัดความเร็วได้ยาก ดังนั้น พลังงานของนิวเคลียสใหม่คือ E_y นั้น จะถูกกำจัดออกให้อยู่ในทอมของ E_x และ E_y จะได้สูตรตามสมการที่ (3.9) และ (3.10) ในหนังสือตำรา PH 424 คือเมื่อ $\theta = 90^\circ$

$$Q = E_y \left(1 + \frac{m_y}{M_Y}\right) - E_x \left(1 - \frac{m_x}{M_Y}\right) \quad \dots\dots\dots(3.5)$$

เมื่อ θ เป็นมุมใด ๆ

$$Q = E_y \left(1 + \frac{m_y}{M_Y}\right) - E_x \left(1 - \frac{m_x}{M_Y}\right) - \frac{2}{M_Y} (E_x E_y m_x m_y)^{\frac{1}{2}} \cos \theta \quad \dots\dots\dots(3.6)$$

ในกรณีที่จะต้องคำนวณหาค่า E_x หรือ E_y จะหาค่าคิวได้จาก

$$Q = (M_x + m_x - M_y - m_y) \text{ เอเอมยู} \times 931.5 \frac{\text{เอเอมอีวี}}{\text{เอเอมยู}} \text{ เอเอมอีวี} \quad \dots\dots\dots(3.7)$$

ในบทนี้ จะสามารถคำนวณหาค่าคิว คือพลังงานที่เกิดขึ้นในปฏิกิริยาต่าง ๆ ได้

การหาพลังงานจลน์ที่น้อยที่สุดของอนุภาคที่ไ้ซิ่งเข้าไปยังเป้าเพื่อให้เกิดปฏิกิริยา

พลังงานจลน์ที่น้อยที่สุดของอนุภาคที่ไ้ซิ่งเข้าไปในนิวเคลียส เพื่อให้เกิดปฏิกิริยาเรียกพลังงานเทอร์สโฮลด์ (Threshold energy) หรือพลังงานขีดเริ่มเปลี่ยน จะทำได้ในปฏิกิริยาที่ต้องให้พลังงานแก่อนุภาคที่ไ้ซิ่ง ค่าคิวจะเป็นลบ

$$-Q = \text{พลังงานจลน์ของอนุภาคที่ใช้ยิง} - \text{พลังงานที่ทำให้นิวเคลียสเชิงประกอบเคลื่อนที่} \dots\dots\dots(3.8)$$

โดยใช้หลักการอนุรักษ์โมเมนตัม และคิดว่า เมื่ออนุภาคเข้าชนเป้าจะรวมกันเป็นนิวเคลียสเชิงประกอบ

$$m_x v_x = M_{CN} V_{CN}$$

จะหาความเร็วของนิวเคลียสเชิงประกอบให้อยู่ในเทอมของพลังงานของอนุภาคที่เข้าชนได้ เมื่อแทนค่าในสมการที่ (3.8) จะได้

$$Q = \frac{1}{2} m_x v_x^2 - \frac{1}{2} M_{CN} \frac{m_x^2 v_x^2}{M_{CN}^2}$$

จัดสมการใหม่ จะได้

$$E_{th} = -Q \left[1 + \frac{m_x}{M_x} \right] \dots\dots\dots(3.9)$$

เมื่อ E_{th} คือค่าพลังงานเทรชโฮลด์ จะขึ้นกับมวลของอนุภาคที่เข้าชนเป้า และมวลของเป้าเท่านั้น

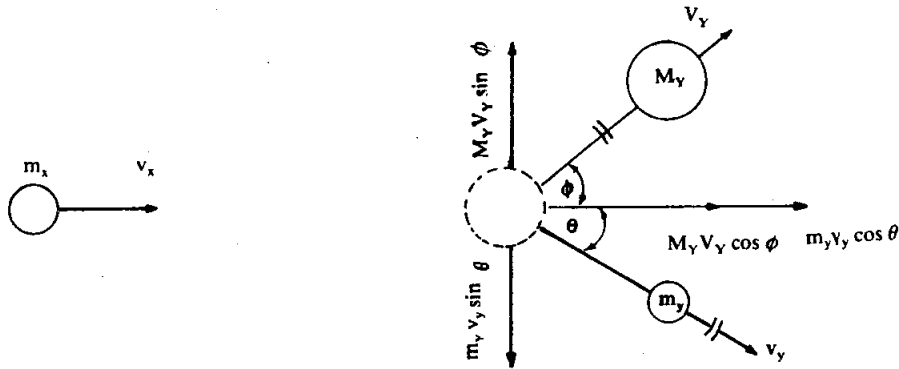
ยังมีปฏิกิริยานิวเคลียร์อีกมากมาย ซึ่งได้ยกตัวอย่างไว้แล้วในหนังสือตำรา PH 424 ควรจะเลือกจดจำไว้บ้างสำหรับบางปฏิกิริยาที่พบบ่อย ๆ

เมื่อศึกษาบทนี้แล้ว จะสามารถเขียนสมการนิวเคลียร์ และหาค่าพลังงานที่เกิดขึ้นในปฏิกิริยา หรือจะต้องให้พลังงานเข้าไปในปฏิกิริยาได้ เมื่อใช้อนุภาคต่าง ๆ เข้าชนเป้า

แบบฝึกหัดบทที่ 3

ข้อ 3.1 โจทย์ จงหาค่าคิ่วที่เกิดขึ้นเมื่ออนุภาคมวล m_x ความเร็ว v_x เข้าชนนิวเคลียส X แล้วเกิดนิวเคลียสใหม่มวล M_Y ความเร็ว V_Y กระเด็นออกไปเป็นมุม ϕ กับทิศทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่เข้าชน และอนุภาคใหม่มวล m_y ความเร็ว v_y เคลื่อนที่ไปเป็นมุม θ กับทิศทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่เข้าชน

เฉลย



จากหลักการอนุรักษ์โมเมนตัม

$$m_x v_x = M_Y V_Y \cos \phi + m_y v_y \cos \theta$$

$$m_x v_x - m_y v_y \cos \theta = M_Y V_Y \cos \phi \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$m_y v_y \sin \theta = M_Y V_Y \sin \phi \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$(1)^2 + (2)^2$$

$$m_x^2 v_x^2 - 2m_x v_x m_y v_y \cos \theta + m_y^2 v_y^2 = M_Y^2 V_Y^2$$

$$\frac{1}{2} M_Y \text{ อนุรักษ์พลังงาน}$$

$$E_x \cdot \frac{m_x}{M_Y} - \frac{m_x v_x m_y v_y \cos \theta}{M_Y} + E_y \cdot \frac{m_y}{M_Y} = E_Y \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$\text{แต่ } Q = E_Y + E_y - E_x \quad \dots\dots\dots(4)$$

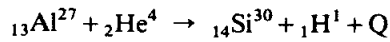
$$\text{และ } m_x v_x = \sqrt{2m_x E_x}, m_y v_y = \sqrt{2m_y E_y} \quad \dots\dots\dots(5)$$

เอาสมการ (5) แทนในสมการ (3) แล้วแทนในสมการ (4) และจัดใหม่ จะได้

$$Q = E_y \left(1 + \frac{m_y}{M_Y}\right) - E_x \left(1 - \frac{m_x}{M_Y}\right) - \frac{2}{M_Y} (E_x E_y m_x m_y)^{\frac{1}{2}} \cos \theta$$

ข้อ 3.2 โจทย์ อนุภาคแอลฟาพลังงาน 21.54 เอมอีวี เข้าชน ${}_{13}\text{Al}^{27}$ เกิดโปรตอน พบค่าควเท่ากับ -3.22 เอมอีวี จงหาพลังงานของโปรตอนที่เกิดขึ้นในแนวทำมุม 90°

เฉลย



$$Q = E_y \left(1 + \frac{m_y}{M_y}\right) - E_x \left(1 - \frac{m_x}{M_y}\right)$$

$$-3.22 = E_y \left(1 + \frac{1}{30}\right) - 21.54 \left(1 - \frac{4}{30}\right)$$

$$-3.22 = \frac{31}{30}E_y - 21.54 \times \frac{26}{30}$$

$$-3.22 = \frac{31}{30}E_y - 18.667998$$

$$\frac{31}{30}E_y = 15.447998$$

$$E_y = 14.9496 \approx 14.95 \text{ เอมอีวี}$$

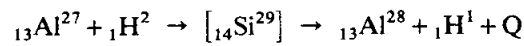
พลังงานของโปรตอนที่เกิดขึ้น = 14.95 เอมอีวี

ข้อ 3.3 โจทย์ จงหามวลของ Al^{28} จากปฏิกิริยา $\text{Al}^{27}(\text{d}, \text{p})\text{Al}^{28}$ พบค่าควเท่ากับ 5.49 เอมอีวี

กำหนดมวลของ ${}_{13}\text{Al}^{27} = 26.981535$ เอเอมยู

$\text{H}^2 = 2.014102$ เอเอมยู, $\text{H}^1 = 1.007825$ เอเอมยู

เฉลย



มวลของ Al^{28} หาได้จาก $M(\text{Al}^{27}) + M(\text{H}^2) - m_{(\text{H}^1)} - \frac{Q \text{ เอมอีวี}}{931.5}$ เอเอมยู

$$M(\text{Al}^{28}) = 26.981535 + 2.0141022 - 1.007825 - \frac{5.49}{931.5}$$

$$= 27.987812 - 0.0058937$$

$$= 27.9819183 \quad \text{เอเอมยู}$$

มวลของอะลูมิเนียม -28 = 27.9819183 เอเอมยู

ข้อ 3.4 โจทย์ ในปฏิกิริยา ${}_{13}\text{Al}^{27}(\alpha, p){}_{14}\text{Si}^{30}$ กำหนดพลังงานของอนุภาคแอลฟา 4.53 เอ็มอีวี จงหาพลังงานของโปรตอนที่ถูกวัดได้ในแนวทำมุม 90° กับทิศทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคแอลฟา

กำหนดมวลในหน่วยเอเอ็มยูของ

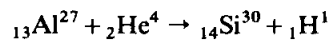
$${}_{13}\text{Al}^{27} = 26.981536,$$

$${}_2\text{He}^4 = 4.0026036,$$

$${}_{14}\text{Si}^{30} = 29.973761$$

$${}_1\text{H}^1 = 1.0078252$$

เฉลย



$$\begin{aligned} \text{หาค่า } Q &= [M(\text{Al}^{27}) + M(\text{He}^4) - M(\text{Si}^{30}) - m_{(\text{H}^1)}]931.5 \\ &= [26.981536 + 4.0026036]931.5 - [29.973761 + 1.0078252]931.5 \\ &= [30.9841396 - 30.9815862]931.5 \\ &= 2.5534 \times 10^{-3} \times 931.5 \\ &= 2.378 \end{aligned}$$

เอ็มอีวี

$$Q = E_y \left(1 + \frac{m_y}{M_y}\right) - E_x \left(1 - \frac{m_x}{M_y}\right)$$

$$2.378 = E_y \left(1 + \frac{1}{30}\right) - 4.53 \left(1 - \frac{4}{30}\right)$$

$$2.378 = E_y \left(\frac{31}{30}\right) - 4.53 \left(\frac{26}{30}\right)$$

$$\begin{aligned} 31 E_y &= 30 \times 2.378 + 4.53 \times 26 \\ &= 71.34 + 117.78 \end{aligned}$$

$$E_y = \frac{189.12}{31} = 6.1$$

เอ็มอีวี

พลังงานของโปรตอน = 6.1 เอ็มอีวี

ข้อ 3.5 โจทย์ จากปฏิกิริยา ${}_{13}\text{Al}^{27}(n, \alpha){}_{11}\text{Na}^{24}$

(ก) จงเขียนปฏิกิริยาให้สมบูรณ์

(ข) หาค่าควในปฏิกิริยา และบอกด้วยว่าเป็นปฏิกิริยาชนิดใด

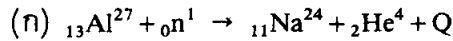
(ค) กำหนดให้นิวตรอนมีพลังงาน 5 เอ็มอีวีเข้าทำปฏิกิริยา จงหาพลังงานของอนุภาคแอลฟาที่เกิดขึ้นในแนวทำมุม 90° กับทิศทางการเคลื่อนที่ของนิวตรอน

(ง) จงหาค่าพลังงานของนิวตรอนที่น้อยที่สุดที่จะทำให้เกิดปฏิกิริยา กำหนดมวลในหน่วยเอเอ็มยูของ

$${}_{13}\text{Al}^{27} = 26.981535, \quad {}_2\text{He}^4 = 4.0026036$$

$${}_{11}\text{Na}^{24} = 23.990967, \quad {}_0n^1 = 1.0086654$$

เฉลย



(ข) $Q = [M(\text{Al}^{27}) + m({}_0n^1) - M(\text{Na}^{24}) - M(\text{He}^4)]931.5$ เอเอ็มอีวี

$$= [26.981535 + 1.0086654 - 23.990967 - 4.0026036]931.5$$

$$= -3.3702 \times 10^{-3} \times 931.5$$

$$= -3.13934$$
 เอเอ็มอีวี

เป็นปฏิกิริยาดูดกลืนพลังงาน (Endoergic reaction)

(ค) $Q = E_y \left(1 + \frac{m_y}{M_y}\right) - E_x \left(1 - \frac{m_x}{M_x}\right)$

$$-3.139 = E_y \left(1 + \frac{4}{24}\right) - 5 \left(1 - \frac{1}{24}\right)$$

$$-3.139 = \frac{28}{24} E_y - 5 \times \frac{23}{24}$$

$$\frac{28}{24} E_y = -3.139 + 4.7916$$

$$= 1.65$$

$$E_y = 1.4165$$
 เอเอ็มอีวี

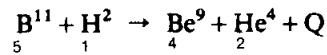
(ง) $E_{th} = -Q \left[1 + \frac{m_x}{M_x}\right]$

$$= 3.139 \left[\frac{28}{27}\right]$$

$$= 3.255$$
 เอเอ็มอีวี

ข้อ 3.6 โจทย์ นิวตรอนพลังงาน 1.51 เอเอ็มอีวี เข้าชนนิวเคลียส B^{11} พบว่าเกิดอนุภาคแอลฟา พลังงาน 6.37 เอเอ็มอีวี ในปฏิกิริยา $\text{B}^{11}(\text{d}, \alpha)\text{Be}^9$ จงหาค่าคิ
เมื่อกำหนดให้อนุภาคแอลฟากระเด็นออกมาเป็นมุม 90° กับทิศทางการเคลื่อนที่
ของนิวตรอน

เฉลย



$$Q = E_y \left(1 + \frac{m_y}{M_y}\right) - E_x \left(1 - \frac{m_x}{M_y}\right)$$

$$= 6.37 \left(1 + \frac{4}{9}\right) - 1.51 \left(1 - \frac{2}{9}\right)$$

$$= 9.199 - 1.173$$

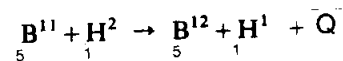
$$= 8.026$$

เอมอีวี

ค่าควในปฏิกิริยา = 8.026 เอมอีวี

ข้อ 3.7 โจทย์ ปฏิกิริยา $\text{B}^{11}(\text{d}, \text{p})\text{B}^{12}$ เกิดขึ้นเมื่อใช้ดิวเทรียมพลังงาน 1.51 เอมอีวี ยิ่งเข้าไปยังนิวเคลียสของโบรอน จะเกิดอนุภาคโปรตอนวิ่งออกมาทำมุม 90° กับทิศทางการเคลื่อนที่ของลำดิวเทรียม วัดค่าควได้ 1.136 เอมอีวี จงหาค่าพลังงานของโปรตอน

เฉลย



$$Q = E_y \left(1 + \frac{m_y}{M_y}\right) - E_x \left(1 - \frac{m_x}{M_y}\right)$$

$$1.136 = E_y \left(1 + \frac{1}{12}\right) - 1.51 \left(1 - \frac{2}{12}\right)$$

$$= E_y \left(\frac{13}{12}\right) - 1.51 \left(\frac{5}{6}\right)$$

$$\frac{13}{12}E_y = 1.136 + 1.2583 = 2.394$$

$$E_y = 2.21$$

เอมอีวี

พลังงานของโปรตอน = 2.21

เอมอีวี

ข้อ 3.8 โจทย์ จงคำนวณช่วงพลังงานของนิวตรอนที่เกิดขึ้น เมื่อใช้อ่อนุภาคแอลฟาจาก Po^{210} พลังงาน 5.3 เอมอีวี ยิ่งนิวเคลียสของ Be^9 กำหนดมวลในหน่วยเอมยูของ

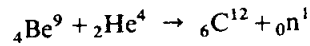
$${}^9_4\text{Be} = 9.012186,$$

$${}^{12}_6\text{C} = 12.00000$$

$${}^4_2\text{He} = 4.0026036,$$

$${}^1_0\text{n} = 1.0086654$$

เฉลย



หาค่าคิวจากสมการ.

$$\begin{aligned} Q &= M(\text{Be}^9) + M(\text{He}^4) - M(\text{C}^{12}) - m(\text{n}^1) \\ &= [9.012186 + 4.0026036 - 12.000000 - 1.0086654]931.5 \\ &= [13.0147896 - 13.0086654]931.5 \\ &= [6.1242 \times 10^{-3}]931.5 \\ &= 5.704 \end{aligned}$$

เอมอีวี

ช่วงพลังงานที่จะเป็นไปได้คือ ตั้งแต่ 0° จนถึง π

$$\theta = 0$$

$$Q = E_y \left(1 + \frac{m_y}{M_Y}\right) - E_x \left(1 - \frac{m_x}{M_Y}\right) - \frac{2}{M_Y} (E_x E_y m_x m_y)^{\frac{1}{2}} \cos 0^\circ$$

$$5.704 = E_y \left(1 + \frac{1}{12}\right) - 5.3 \left(1 - \frac{4}{12}\right) - \frac{2}{12} (5.3 E_y \times 4 \times 1)^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots(1)$$

$$5.704 = 1.084 E_y - 3.53 - \frac{1}{6} (5.3 \times 4 E_y)^{\frac{1}{2}}$$

$$9.234 = 1.084 E_y - \frac{4.6}{6} \sqrt{E_y}$$

$$1.084 E_y - \frac{4.6}{6} \sqrt{E_y} - 9.234 = 0$$

$$E_y - 0.707 \sqrt{E_y} - 8.518 = 0$$

$$\sqrt{E_y} = \frac{+0.7 \pm \sqrt{0.49 + 4 \times 8.51}}{2} = \frac{0.7 \pm \sqrt{34.53}}{2}$$

$$\sqrt{E_y} = 3.28$$

$$E_y = 10.75$$

เอมอีวี

$$\theta = \pi$$

$$Q = E_y \left(1 + \frac{m_y}{M_Y}\right) - E_x \left(1 - \frac{m_x}{M_Y}\right) - \frac{2}{M_Y} (E_x E_y m_x m_y)^{\frac{1}{2}} \cos 180^\circ$$

แทนค่า $\cos 180^\circ = -1$

จะได้ค่าเหมือนสมการที่ (1) แต่จะต่างกันที่เครื่องหมายเทอมสุดท้ายจะเป็นบวก

$$5 \cdot 1 = \frac{13E_y}{12} - 3.53 + \frac{4.6}{6} \sqrt{E_y}$$

$$110.76 = 13E_y + 9.2\sqrt{E_y}$$

$$E_y + 0.7\sqrt{E_y} - 8.52 = 0$$

$$\sqrt{E_y} = \frac{-0.7 \pm \sqrt{0.49 + 4 \times 8.52}}{2}$$

$$= -0.35 \pm 2.9398$$

$$\sqrt{E_y} = 2.5$$

เอมอีวี

$$E_y = 6.25$$

ช่วงพลังงานของนิวตรอนที่เกิดขึ้นคือ ตั้งแต่พลังงาน 10.75 เอมอีวี จนถึง 6.25 เอมอีวี

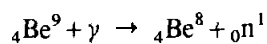
ข้อ 3.9 โจทย์ จากปฏิกิริยา ${}_4\text{Be}^9(\gamma, n){}_4\text{Be}^8$ จงหาค่าคิว และพลังงานเทรสโฮลด์

กำหนดมวลของ $n^1 = 1.0086654$ เอเอมยู

$\text{Be}^9 = 9.012186$ เอเอมยู,

$\text{Be}^8 = 8.005308$ เอเอมยู

เฉลย



$$\text{ค่าคิว} = [M(\text{Be}^9) - M(\text{Be}^8) - m_{n^1}]931.5$$

$$= [9.012186 - 8.005308 - 1.0086654]931.5$$

$$= [9.012186 - 9.0139734]$$

$$= -0.0017874 \times 931.5$$

$$= -1.6649634$$

เอมอีวี

$$E_{th} = -Q \left[\frac{M_x + m_x}{M_x} \right]$$

$$m_x = 0$$

$$E_{th} = -Q = 1.66$$

เอ็มอีวี

ข้อ 3.10 โจทย์ ในปฏิกิริยา $C^{12}(d, \alpha)B^{10}$ ถ้าพบอนุภาคแอลฟาพลังงาน 8.18 เอ็มอีวี และ 10.84 เอ็มอีวี ในแนวทำมุม 90° และ 60° กับทิศทางการเคลื่อนที่ของดิวเทรียม จงหา

(ก) พลังงานของดิวเทรียม

(ข) ค่าคิวในปฏิกิริยา

เฉลย



$$Q = E_y \left(1 + \frac{m_y}{M_y} \right) - E_x \left(1 - \frac{m_x}{M_y} \right) - \frac{2}{M_y} (E_x E_y m_x m_y)^{\frac{1}{2}} \cos \theta$$

$$\theta = 90^\circ, \cos 90^\circ = 0$$

$$Q = 8.18 \left(1 + \frac{4}{10} \right) - E_x \left(1 - \frac{2}{10} \right) \dots\dots\dots(1)$$

$$\theta = 60^\circ, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$Q = 10.84 \times \frac{7}{5} - \frac{4}{5} E_x - \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} (10.84 \times 2 \times 4)^{\frac{1}{2}} \sqrt{E_x} \dots\dots\dots(2)$$

จากสมการ (1), $Q = 8.18 \times \frac{7}{5} - \frac{4}{5} E_x$

$$= 11.45 - \frac{4}{5} E_x \dots\dots\dots(3)$$

แทนในสมการ (2)

$$11.45 - \frac{4}{5}E_x = 15.176 - \frac{4}{5}E_x - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} (96.72)^2 \sqrt{E_x}$$

$$3.726 = -\frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \times 9.31 \sqrt{E_x}$$

$$0.931 \sqrt{E_x} = 3.726$$

$$\sqrt{E_x} = 4.004$$

$$E_x = 16.03$$

เอมอีวี

จากสมการ (3),

$$Q = 11.45 - \frac{4}{5} \times 16.03 = 11.45 - 12.824 = -1.374$$

เอมอีวี

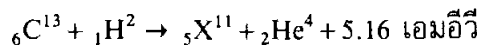
(ก) พลังงานของดิวเทรียม = 16.03 เอมอีวี

(ข) ค่าคิวในปฏิกิริยา = 1.374 เอมอีวี เป็นปฏิกิริยา ดูดกลืนความร้อน

ข้อ 3.11 โจทย์ จงหามวลของธาตุใหม่ที่เกิดขึ้นในปฏิกิริยา $C^{13}(d, \alpha)$ โดยกำหนดค่าคิวเท่ากับ 5.16 เอมอีวี และมวลในหน่วยเอเอ็มยูของ

$${}_6C^{13} = 13.003354, \quad {}_2He^4 = 4.0026036, \quad {}_1H^2 = 2.0141022$$

เฉลย



$$M(X^{11}) = M(C^{13}) + M(H^2) - M(He^4) - \frac{5.16}{931.5}$$

$$= 13.003354 + 2.0141022 - 4.0026036 - 0.0055394$$

เอเอ็มยู

$$= 15.0174562 - 4.0026036 - 0.0055394$$

$$= 11.0148526 - 0.0055394$$

$$= 11.0093132$$

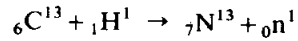
เอเอ็มยู

$$\text{มวลของธาตุใหม่คือ } 11.0093132$$

เอเอ็มยู

ข้อ 3.12 โจทย์ เขียนปฏิกิริยาให้สมบูรณ์แล้วหาค่าคิวสำหรับปฏิกิริยา $C^{13}(p, n)$ โดยมีพลังงานเทรสโฮลด์เท่ากับ 3.236 เอมอีวี

เฉลย



$$Q = -E_{\text{th}} \left(\frac{M_x}{M_x + m_x} \right)$$

$$= -3.236 \left(\frac{13}{13+1} \right)$$

$$= -3.0048$$

ค่าคิว = 3.0048 เมมอีวี เป็นปฏิกิริยาดูดกลืนความร้อน

ข้อ 3.13 โจทย์ จงหาพลังงานเทรสโฮลด์เพื่อให้เกิดปฏิกิริยา $\text{Cu}^{65}(\gamma, n) \text{Cu}^{64}$

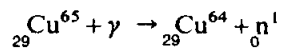
กำหนดมวลของ

$${}_{29}\text{Cu}^{65} = 64.92779 \text{ เอเอมยู},$$

$${}_{29}\text{Cu}^{64} = 63.92976 \text{ เอเอมยู}$$

$${}_0\text{n}^1 = 1.0086654 \text{ เอเอมยู}$$

เฉลย



$$E_{\text{th}} = -Q \left[1 + \frac{m_x}{M_x} \right]$$

$$Q = [64.92779 - 63.92976 - 1.0086654]931.5$$

$$= -0.0106354 \times 931.5$$

$$= -9.9$$

เมมอีวี

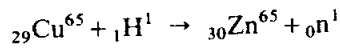
$$E_{\text{th}} = 9.9$$

เมมอีวี

$$\text{พลังงานเทรสโฮลด์} = 9.9 \text{ เมมอีวี}$$

ข้อ 3.14 โจทย์ ในปฏิกิริยาดูดกลืนความร้อน ${}_{29}\text{Cu}^{65}(p, n){}_{30}\text{Zn}^{65}$ พบค่าพลังงานเทรสโฮลด์เท่ากับ 2.164 เมมอีวี จงหาค่าคิวสำหรับสมการนี้

เฉลย



$$-Q = E_{\text{th}} \left(\frac{M_x}{M_x + m_x} \right)$$

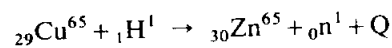
$$-Q = 2.164 \times \frac{65}{66}$$

$$Q = -2.13 \text{ เอมอีวี}$$

$$\text{ค่าควในปฏิกิริยาดูดกลืนความร้อน} = 2.13 \text{ เอมอีวี}$$

ข้อ 3.15 โจทย์ จงหาพลังงานเทรสโลดส์สำหรับปฏิกิริยา ${}_{29}\text{Cu}^{65}(\text{p}, \text{n}){}_{30}\text{Zn}^{65}$ เมื่อค่าควเท่ากับ -2.13 เอมอีวี

เฉลย



$$E_{\text{th}} = -Q \left[1 + \frac{m_x}{M_x} \right]$$

$$= 2.13 \left[1 + \frac{1}{65} \right]$$

$$= 2.13 \times 1.01$$

$$= 2.16 \text{ เอมอีวี}$$

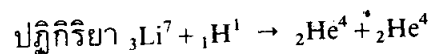
$$\text{พลังงานเทรสโลดส์} = 2.16 \text{ เอมอีวี}$$

ข้อ 3.16 โจทย์ จงเขียนปฏิกิริยา $\text{Li}^7(\text{p}, \alpha)$ ให้สมบูรณ์ แล้วหาค่าควกำหนดมวลของ

$${}_3\text{Li}^7 = 7.016005 \text{ เอมมยู}, \quad {}_1\text{H}^1 = 1.0078252 \text{ เอมมยู}$$

$${}_2\text{He}^4 = 4.0026036 \text{ เอมมยู}$$

เฉลย



$$\text{ค่าคว} = [M(\text{Li}^7) + m_{(\text{H}^1)} - M(\text{He}^4) - M(\text{He}^4)]931.5 \quad \text{เอมอีวี}$$

$$= [7.016005 + 1.0078252 - 2 \times 4.0026036]931.5$$

$$= [8.0238302 - 8.0052072]931.5$$

$$= 0.018623 \times 931.5$$

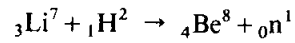
$$= 17.347324 \approx 17.35 \quad \text{เอมอีวี}$$

$$\text{ค่าควในปฏิกิริยา} = 17.35 \quad \text{เอมอีวี}$$

ข้อ 3.17 โจทย์ ดิวทริอัมพลังงาน 10 เอมอีวี วิ่งเข้าชนนิวเคลียสของ ${}^3\text{Li}^7$ พบว่าเกิดนิวตรอนในแนวทำมุม 90° กับลำแสงที่ตกกระทบ จากการคำนวณได้ค่าคิวเท่ากับ 15.02 เอมอีวี จงหา

- (ก) พลังงานของนิวตรอน
- (ข) มุมที่นิวเคลียสใหม่กระเด็นออกมา

เฉลย



$$Q = E_y \left(1 + \frac{m_y}{M_Y}\right) - E_x \left(1 - \frac{m_x}{M_Y}\right)$$

$$15.02 = E_y \left(1 + \frac{1}{8}\right) - 10 \left(1 - \frac{2}{8}\right)$$

$$15.02 = \frac{9}{8}E_y - \frac{60}{8}$$

$$\frac{9}{8}E_y = 15.02 + 7.5$$

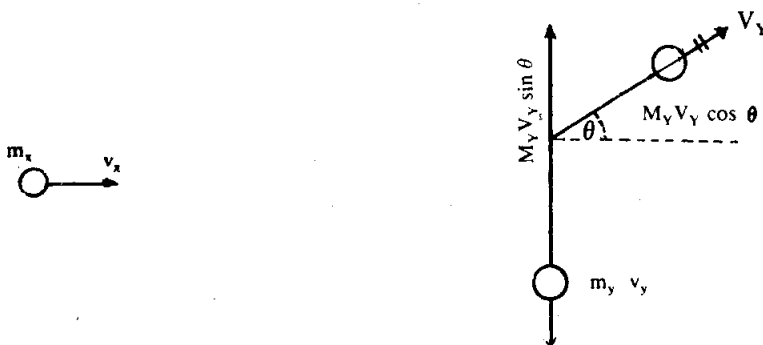
(ก) พลังงานของนิวตรอน, $E_y = 22.52 \times \frac{8}{9} = 20.01$ เอมอีวี

$$Q = E_Y + E_y - E_x$$

$$15.02 = E_Y + 20.01 - 10$$

พลังงานของ Be^8 , $E_Y = 15.02 - 10.01 = 5.01$ เอมอีวี

- (ข) หามุมที่ Be^8 กระเด็นออกมา
จากหลักการอนุรักษ์โมเมนตัม



$$m_x v_x = M_y V_y \cos \theta \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$m_y v_y = M_y V_y \sin \theta \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)}, \quad \frac{m_y v_y}{m_x v_x} = \tan \theta \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{แต่} \quad m_y v_y = \sqrt{2m_y E_y} = \sqrt{2 \times 1 \times 20.01} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$m_x v_x = \sqrt{2m_x E_x} = \sqrt{2 \times 2 \times 10} \quad \dots\dots\dots (5)$$

แทนค่า (4), (5) ในสมการ (3)

$$\tan \theta = \frac{2\sqrt{10}}{2\sqrt{10}} = 1$$

$$\theta = 45^\circ$$

พลังงานของนิวตรอน = 20.01 เอมอีวี

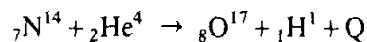
มุมที่นิวเคลียสกระเด็นออกมา = 45°

ข้อ 3.18 โจทย์ จงหาค่าคว ในปฏิกิริยา $N^{14}(\alpha, p)O^{17}$ และตอบด้วยว่าเป็นปฏิกิริยาชนิดใด กำหนดค่ามวลในหน่วยเอเอ็มยูของ

$${}_7N^{14} = 14.0030744, \quad {}_2He^4 = 4.0026036$$

$$O^{17} = 16.999133, \quad H^1 = 1.0078252$$

เฉลย



$$\text{หาค่าคว } Q = [M(N^{14}) + M(He^4) - M(O^{17}) - m_{(H)}]931.5 \quad \text{เอเอ็มอีวี}$$

$$= [14.0030744 + 4.0026036 - 16.999133 - 1.0078252]931.5$$

$$= [18.005678 - 18.0069582]931.5$$

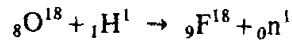
$$= -0.00128 \times 931.5$$

$$= -1.1925 \quad \text{เอเอ็มอีวี}$$

เป็นปฏิกิริยาคูดกลืนความร้อน

ข้อ 3.19 โจทย์ พลังงานเทอร์สโพลด์สำหรับปฏิกิริยา $O^{18}(p, n)F^{18}$ เท่ากับ 2.45 เอมอีวี จงหาค่าควสำหรับปฏิกิริยานี้

เฉลย



$$E_{\text{th}} = -Q \left[1 + \frac{m_x}{M_x} \right]$$

$$2.45 = -Q \left[1 + \frac{1}{18} \right]$$

$$-Q = 2.45 \times \frac{18}{9}$$

$$Q = -2.32$$

เอมอีวี

ค่าคิว = 2.32 เอมอีวี เป็นปฏิกิริยาดูดกลืนความร้อน

ข้อ 3.20 โจทย์ จงหาค่าคิวในปฏิกิริยา $\text{Pb}^{206}(\text{d}, \text{p})\text{Pb}^{207}$

กำหนดมวล (เอเอ็มยู)

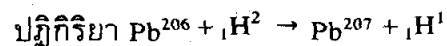
$$\text{Pb}^{206} = 205.97446,$$

$${}_1\text{H}^2 = 2.0141022$$

$$\text{H}^1 = 1.0078252,$$

$$\text{Pb}^{207} = 206.97590$$

เฉลย



$$\text{ค่าคิว, } Q = [M(\text{Pb}^{206}) + M(\text{H}^2) - M(\text{Pb}^{207}) - m_{(\text{H}^1)}]931.5$$

เอมอีวี

$$= [205.97446 + 2.0141022 - 206.97590 - 1.0078252]931.5$$

$$= 4.837 \times 10^{-3} \times 931.5$$

$$= 4.5$$

เอมอีวี

$$\text{ค่าคิวในปฏิกิริยา} = 4.5$$

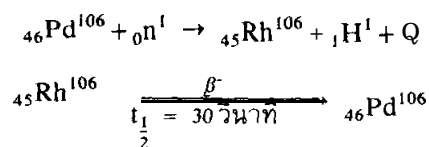
เอมอีวี

ข้อ 3.21 โจทย์ จงหาค่าคิวจากปฏิกิริยา ${}_{46}\text{Pd}^{106}(\text{n}, \text{p}){}_{45}\text{Rh}^{106}$ เมื่อนิวเคลียสที่เกิดขึ้นคือ โรเดียม -106 สลายด้วยครึ่งชีวิต 30 วินาที โดยการส่งอนุภาคเบตา พลังงาน 3.54 เอมอีวี มายังสภาวะกราว์นของพาลลาเดียม -106

กำหนดค่ามวล $m_{(\text{n}^1)} - m_{(\text{H}^1)} = 8.402 \times 10^{-4}$ เอเอ็มยู และจงหาค่าพลังงานเทรสโฮลด์สำหรับปฏิกิริยานี้

เฉลย

ปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นคือ



พลังงานของอนุภาคเบตา = 3.54 เอมอีวี
จากปฏิกิริยา จะได้ว่า

$$m_{n^1} = m_{H^1} + \frac{Q}{931.5} + \frac{3.54}{931.5} \quad \text{เอเอ็มยู}$$

$$Q = 931.5(m_{n^1} - m_{H^1}) - 3.54 \quad \text{เอเอ็มอีวี}$$

$$= 931.5 \times 8.402 \times 10^{-4} - 3.54$$

$$= \mathbf{0.78 - 3.54}$$

$$= \mathbf{-2.76} \quad \text{เอเอ็มอีวี}$$

$$E_{th} = -Q \left(\frac{M_x + m_x}{M_x} \right)$$

$$= +2.76 \times \left(\frac{106+1}{106} \right)$$

$$= 2.76 \times \frac{107}{106} = \mathbf{2.78}$$

พลังงานเทอร์สโวลต์ = 2.78 เอมอีวี

ข้อ 3.22 โจทย์ Si^{28} ถูกยิงด้วยดิวเทรียมพลังงาน 1.8 เอมอีวี ในปฏิกิริยา $\text{Si}^{28}(d, p)\text{Si}^{29}$ จงหาพลังงานของโปรตอนที่เกิดขึ้นในแนวทำมุม 90° กับทิศทางการเคลื่อนที่ของดิวเทรียม กำหนดมวลในหน่วยเอเอ็มยูของ

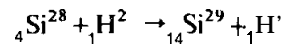
$$\text{Si}^{28} = 21.976927,$$

$$\text{Si}^{29} = 28.976491$$

$$\text{H}^2 = 2.0141022,$$

$$\text{H}^1 = 1.0078252$$

เฉลย



หาค่าคิวในสมการ

$$\begin{aligned} Q &= [M(\text{Si}^{28}) + M(\text{H}^2) - M(\text{Si}^{29}) - m_{(\text{H}^1)}]931.5 : \\ &= [27.976927 + 2.0141022 - 28.976491 - 1.0078252]931.5 \\ &= [29.9910292 - 29.9843162]931.5 \\ &= 6.713 \times 10^{-3} \times 931.5 \\ &= \mathbf{6.25} \end{aligned}$$

เอมอีวี

หาพลังงานของโปรตอนที่ส่งออกมา คือ E_y

$$Q = E_y \left(1 + \frac{m_y}{M_y}\right) - E_x \left(1 - \frac{m_x}{M_y}\right)$$

$$6.25 = E_y \left(1 + \frac{1}{29}\right) - 1.8 \left(1 - \frac{2}{29}\right)$$

$$\frac{30}{29}E_y = 6.25 + 1.8 \times \frac{27}{29}$$

$$E_y = \mathbf{86.25 + 1.6758}$$

$$= \frac{29}{30} \times 7.9258$$

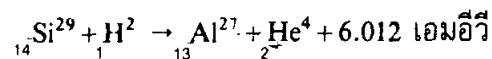
$$= 7.66$$

เอมอีวี

พลังงานของโปรตอนที่ส่งออกมา = 7.66 เอมอีวี

ข้อ 3.23 โจทย์ ในปฏิกิริยา $\text{Si}^{29}(\text{d}, \alpha)\text{Al}^{27}$ วัดค่าคิวได้ 6.012 เอมอีวี กำหนดให้ดิวเทรียมมีพลังงาน 1.8 เอมอีวี จงหาพลังงานของอนุภาคแอลฟาที่ส่งออกมาในแนวทำมุม 90° กับทิศทางการเคลื่อนที่ของดิวเทรียม

เฉลย



$$Q = E_y \left(1 + \frac{m_y}{M_y}\right) - E_x \left(1 - \frac{m_x}{M_y}\right)$$

$$6.012 = E_y \left(1 + \frac{4}{27}\right) - 1.8 \left(1 - \frac{2}{27}\right)$$

$$6.012 = E_y \left(\frac{31}{27} \right) - 1.8 \left(\frac{25}{27} \right)$$

$$\frac{31}{27} E_y = 6.012 + 1.8 \times \frac{25}{27}$$

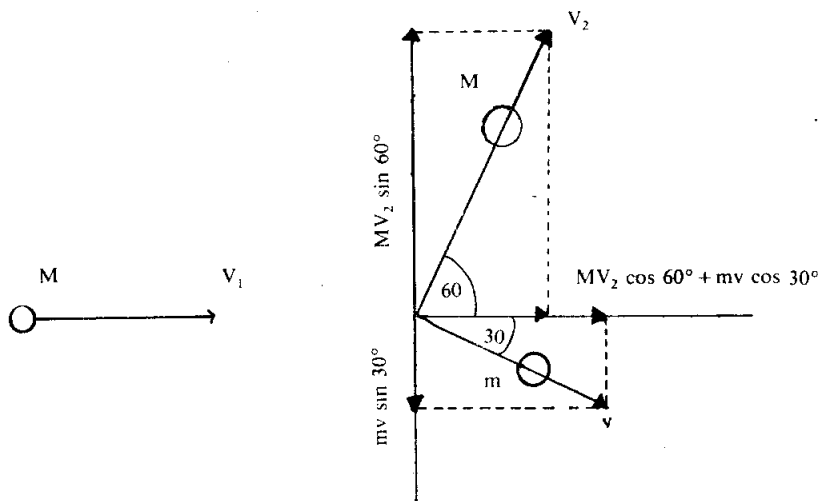
$$31 E_y = 162.324 + 45 = 207.324$$

$$E_y = 6.687 \approx 6.69$$

เอ็มอีวี

พลังงานของอนุภาคแอลฟาที่ส่งออกมา = 6.69 เอ็มอีวี

ข้อ 3.24 โจทย์ เมื่อโปรตอนชนกับอนุภาคแล้วกระเด็นไปในทิศทางทำมุม 60° กับทิศทางการเคลื่อนที่เดิม และอนุภาคที่ถูกชนกระเด็นไปเป็นมุม 30° กับทิศทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่เข้าชน จงหามวลของอนุภาค



เฉลย

จากหลักการอนุรักษ์โมเมนตัม

ตามแกน X

$$MV_1 = MV_2 \cos 60^\circ + mv \cos 30^\circ$$

$$MV_1 = \frac{1}{2} MV_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} mv$$

$$2MV_1 = MV_2 + \sqrt{3} mv \quad \dots\dots\dots(1)$$

ตามแกน Y

$$MV_2 \sin 60^\circ = mv \sin 30^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}MV_2 = \frac{1}{2}mv$$

$$mv = \sqrt{3}MV_2$$

$$v = \sqrt{3} \cdot \frac{M}{m} \cdot V_2 \quad \dots\dots\dots(2)$$

แทนค่า v ในสมการ (1)

$$2MV_1 = MV_2 + \sqrt{3}m \cdot \sqrt{3} \frac{M}{m} \cdot V_2$$

$$2MV_1 = MV_2 + 3MV_2 = 4MV_2$$

$$V_1 = 2V_2 \quad \dots\dots\dots(3)$$

จากหลักการอนุรักษ์พลังงาน

$$\frac{1}{2}MV_1^2 = \frac{1}{2}MV_2^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$4 \times \frac{1}{2}MV_2^2 = \frac{1}{2}MV_2^2 + \frac{1}{2}m \cdot 3 \frac{M^2}{m^2} V_2^2$$

$$3MV_2^2 = 3 \frac{M^2}{m} V_2^2$$

$$m = M$$

มวลของอนุภาคที่ถูกชน จะมีค่าเท่ากับมวลของโปรตอน

ข้อ 3.25 โจทย์ สำหรับปฏิกิริยาดูดกลืนพลังงาน A(a, b)B จงแสดงว่า

(ก) ส่วนหนึ่งของพลังงานจลน์ของอนุภาคที่เข้าชน จะต้องนำไปใช้เป็นพลังงานของนิวเคลียสที่เกิดขึ้น และมีค่าเท่ากับ $\frac{M_A}{M_A + m_a} \cdot E_x$

(ข) พลังงานจลน์ของอนุภาคที่เข้าชน จะเสียไปเพื่อใช้ในการเคลื่อนที่ของนิวเคลียสเท่ากับ $\frac{m_a}{M_A + m_a} \cdot E_x$

เมื่อ M_A, m_a คือมวลของ A และ a ตามลำดับ และ E_x คือพลังงานของอนุภาคที่เข้าชน

เฉลย

(ก) หลักการอนุรักษ์โมเมนตัม

$$m_a v_a = M_{CN} V_{CN}$$

$$V_{CN} = \frac{m_a v_a}{M_{CN}}$$

พลังงานจลน์ที่ต้องใช้เป็นพลังงานของนิวเคลียส คือ

$$\begin{aligned} E'_x &= \frac{1}{2} m_a v_a^2 - \frac{1}{2} M_{CN} V_{CN}^2 \\ &= \frac{1}{2} m_a v_a^2 - \frac{1}{2} M_{CN} \frac{m_a^2 v_a^2}{M_{CN}^2} \\ &= E_x \left(1 - \frac{m_a}{M_A + m_a} \right) \\ &= E_x \frac{M_A}{M_A + m_a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ข) พลังงานจลน์ที่ใช้ในการเคลื่อนที่นิวเคลียส} &= E_x - E_x \frac{M_A}{M_A + m_a} \\ &= \frac{m_a}{M_A + m_a} \cdot E_x \end{aligned}$$

ข้อ 3.26 โจทย์ ในปฏิกิริยานิวเคลียร์ เมื่ออนุภาค m_x พลังงาน E_x เข้าชนนิวเคลียสมวล M_x เกิดอนุภาคใหม่ มวล m_y พลังงาน E_y และนิวเคลียสใหม่มวล M_y พลังงาน E_y ถ้า

$$v = \frac{\sqrt{m_x m_y E_x}}{M_y + m_y} \cos \theta, \quad \omega = \frac{Q M_x + E_x (M_y - m_x)}{M_y + m_y}$$

จงแสดงให้เห็นจริงว่า

$$\sqrt{E_y} = v \pm \sqrt{v^2 + \omega}$$

เฉลย

สูตร

$$\begin{aligned} Q &= E_y \left(1 + \frac{m_y}{M_y} \right) - E_x \left(1 - \frac{m_x}{M_y} \right) - \frac{2}{M_y} (m_x m_y E_x E_y)^{\frac{1}{2}} \cos \theta \\ \left(1 + \frac{m_y}{M_y} \right) E_y &= Q + E_x \left(1 - \frac{m_x}{M_y} \right) + \frac{2}{M_y} (m_x m_y E_x E_y)^{\frac{1}{2}} \cos \theta \end{aligned}$$

$$E_y = \frac{Q \cdot M_Y}{M_Y + m_y} + E_x \left[\frac{M_Y - m_x}{M_Y + m_x} \right] + \frac{2}{M_Y + m_y} \sqrt{m_x m_y} \cdot E_x E_y \cos \theta$$

$$\sqrt{E_y}^2 - \frac{2}{M_Y + m_y} \sqrt{m_x \cdot m_y} E_x \sqrt{E_y} \cdot \cos \theta - \left[Q \frac{M_Y}{M_Y + m_y} + \frac{M_Y - m_x}{M_Y + m_x} \cdot E_x \right] = 0$$

$$\sqrt{E_y} = \frac{2}{M_Y + m_y} \sqrt{m_x m_y} E_x \cos \theta \pm \sqrt{\frac{2 \times 2}{(M_Y + m_y)^2} \cdot m_x m_y E_x \cos^2 \theta + \frac{4 Q M_Y}{M_Y + m_y} + \frac{M_Y - m_x}{M_Y + m_x} \cdot E_x}$$

$$= \frac{\sqrt{m_x m_y} \cdot E_x}{M_Y + m_y} \cos \theta \pm \sqrt{\frac{m_x m_y E_x \cos^2 \theta}{(M_Y + m_y)^2} + \frac{Q \cdot M_Y + (M_Y - m_x) E_x}{M_Y + m_y}}$$

$$= v \pm \sqrt{v^2 + \omega}$$