

บทที่ 6
สปีน

บทที่ 6 สปีน

วัตถุประสงค์

- ให้คำนวณหาสปีนของระบบอย่างง่าย เช่น อะตอม โปรตอน ฯลฯ ได้
- ให้สามารถตีความ และคำนวณค่าสปีนจากการทดลอง
- ให้สามารถคำนวณระบบควบคุมของสปีนครึ่งหน่วย และสปีนหนึ่งหน่วย ให้เขียนແນมมิลໂທเนียนของระบบได้ และคำนวณค่าไอogenของระบบเหล่านี้ ได้ด้วย

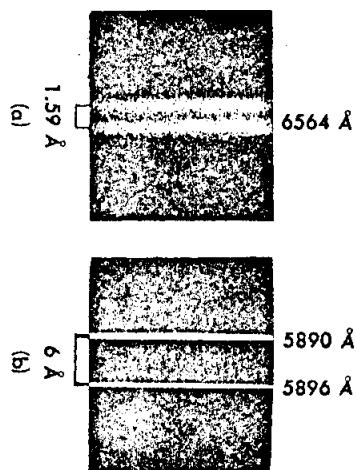


รูปที่ (6-1)

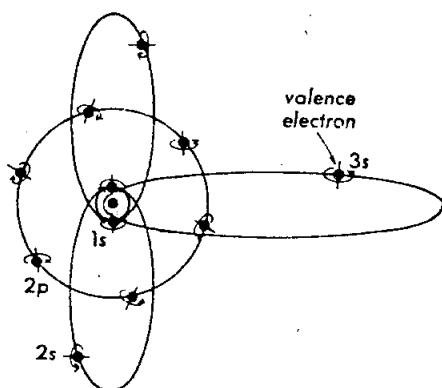
Wolfgang Pauli

ผู้คิดค้นคณิตศาสตร์ของสปีนกับ statistics

6.1 บทนำ



ลักษณะ doublet ของ (a) เส้นスペกตรัมเส้นแรกในอนุกรมของบัลเมอร์ (Balmer series) ของไฮโดรเจน และ (b) เส้นスペกตรัมเส้นแรกของอนุกรม principal (principal series) ของโซเดียม



ภาพจำลองของอะตอมของโซเดียม ตามทฤษฎีของบอร์และซอมเมอร์เฟล์ด แสดงสpinของอิเล็กตรอน

$$: Z = 11$$

ถ้าหากเราสังเกตเส้นスペกตรัมของไฮโดรเจน โซเดียม และโปแตสเซียม ด้วยเครื่องมือที่มีกำลังขยายสูง ๆ จะเห็นว่า เส้นแต่ละเส้นนั้นแตกออกเป็นสองเส้นคู่กัน

ซึ่งเราเรียกว่า fine structure ทฤษฎีที่ใช้อธิบาย fine structure ทฤษฎีแรกคือ งานของ อาร์โนนส์ด์ ชอมเมอร์เฟล์ด (A. Sommerfeld) ซึ่งชอมเมอร์เฟล์ดได้แสดงให้เห็นว่า ถ้าหาก พนาภากความเปลี่ยนแปลงของมวลของอิเล็กตรอนตามทฤษฎีสมพัทธภาพแล้ว จะมีผลทำให้ เส้นสเปกตรัมนั้น แตกออกตามลักษณะที่สังเกตเห็นเป็น fine structure ทฤษฎีของเขานี้ได้รับ สำหรับไฮโดรเจนและไฮเดรียมซึ่งดึงเอาอิเล็กตรอนออกเสียตัวหนึ่ง หรือ สเปกตรัมของรังสี เอ็กซ์ซึ่งเกิดจากอะตอมที่หนัก แต่ต่อมา มิลลิกานและโบเวน (Millikan and Bowen)⁸ กลุ่มนหนึ่ง และลองเด (Landé)⁹ อีกกลุ่มนหนึ่ง ได้แสดงให้เห็นว่าขานาดของพลังงาน ซึ่งเกิดจากการแตกตัว ของเส้นสเปกตรัมของสารแอลคาไล (alkali) มีค่าสูงกว่าพลังงานที่จะคำนวณได้โดยใช้ ทฤษฎีสมพัทธภาพของชอมเมอร์เฟล์ด ต่อมาในปี ค.ศ. 1925 อยเลนเบคและเกาต์สmit (G.E. Uhlenbeck and S. Goudsmit)¹⁰ ก็ได้ตั้งสมมติฐานว่า fine structure ควรจะเกิดจากการที่ อิเล็กตรอนมีสpin

6.2 แมกเนติกโมเมนต์และโมเมนตัมเชิงมุม

ในพิสิกส์แบบฉบับเป็นที่ทราบกันว่า ถ้าหากประจุเคลื่อนที่ในลักษณะพิรือดิครอบ พื้นที่ใด ๆ จะมีแมกเนติกโมเมนต์เท่ากับผลคูณของกระแสรอบพื้นที่นั้น และพื้นที่ที่กระแส ไหลรอบ ซึ่งเขียนได้ว่า

$$\mu = iA \quad (6-1)$$

เมื่อ μ คือ แมกเนติกโมเมนต์; i คือกระแส และ A คือพื้นที่ที่กระแสไฟฟ้าหมุนรอบ เราจะสมมุติว่ากระแสนั้นเกิดจากประจุซึ่งมีมวล m ประจุมีขนาด q เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v ซึ่ง $v \ll c$ (สมมติฐานนี้เป็นจริง สำหรับการหมุนของอิเล็กตรอนในอะตอม ซึ่ง $\frac{v}{c} \approx \frac{e^2}{hc} = \frac{1}{137}$) ดังนั้น โมเมนตัมเชิงมุมของระบบก็คือ

$$J = mvr \quad (6-2)$$

สำหรับกระแสไฟฟ้าในที่นี้ คือ จำนวนประจุต่อหนึ่งหน่วยเวลาซึ่งผ่านจุด ๆ หนึ่ง ในวงจรในอะตอม ถ้าเราสมมติว่าประจุเคลื่อนเป็นวงกลมแล้ว

8. Millikan, R.A. and Bowen, I.S. Phys. Rev. 24 223 (1924)

9. Landé, A. Z.f. Phys. 25, 46 (1924)

10. Uhlenbeck, I. E. and Goudsmit, S. Naturwissenschaften 13, 953 (1925); Nature 117, 264 (1926)

$$i = q \frac{v}{2\pi r} \quad (6-3)$$

แทนค่าสมการ (6-3) ลงใน (6-1)

$$\mu = iA = q \frac{v}{2\pi r} (\pi r^2) = q \frac{vr}{2} \quad (6-4)$$

เมื่อคิดว่า μ และ v เป็นวงเดอร์ จะเห็นว่าวงเดอร์ทั้งสองข้างมีทิศทางเดียวกัน และจากสมการที่ (6-2) และ (6-4) เราจะได้ความสัมพันธ์ ดังนี้

$$\bar{\mu} = \frac{q}{2m} \bar{J} \quad (6-5)$$

สมการที่ (6-5) แม้จะคิดขึ้นตามวิธีทางฟิสิกส์แบบฉบับก็เป็นจริง สำหรับกรณีของอิเล็กตรอนซึ่งหมุนในวงโคจรในกลศาสตร์ควอนตัม ในกรณีนี้

$$\bar{\mu}_e = -\frac{q_e}{2m_e} \bar{J} \quad (\text{วงโคจร}) \quad (6-6)$$

$-q_e$ และ m_e คือ ประจุและมวลของอิเล็กตรอนตามลำดับ สำหรับตัวอิเล็กตรอนspinของอิเล็กตรอนเกิดจากการที่อิเล็กตรอนหมุนรอบตัวเอง และเนื่องจากอิเล็กตรอนมีประจุ จึงคาดหมายว่าจะได้ความสัมพันธ์ตามสมการ (6-5) แต่จากการทดลองพบว่า

$$\bar{\mu} = -\frac{q_e}{m_e} \bar{J} = -\frac{q_e}{m_e} \bar{S} \quad (\text{spin}) \quad (6-7)$$

อัตราส่วนระหว่าง $\bar{\mu}$ และ \bar{J} เป็นสองเท่าของสมการ (6-6) สำหรับอะตอมทั่ว ๆ ไป โดยเม้นตัมเชิงมุมทั้งหมดเกิดจากผลรวมของโมเมนตัมเชิงมุมของอิเล็กตรอนในวงโคจรบวกกับspin ซึ่งในทางฟิสิกส์แบบฉบับไม่มีเหตุผลจะเป็นอย่างนี้ แม้กเนติกโมเมนต์มีทิศตรงกันข้ามพอดีกับโมเมนตัมเชิงมุม ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$\bar{\mu} = -g \left(\frac{q_e}{2m} \right) \bar{J} \quad (6-8)$$

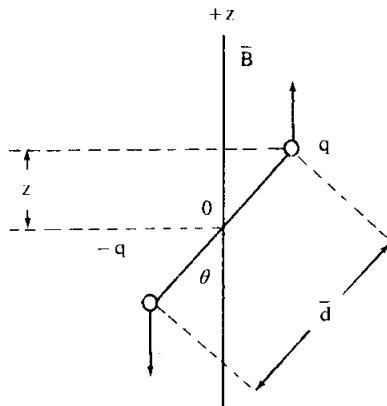
g มีชื่อเรียกว่า Landé g factor ซึ่งมีค่าระหว่าง 1 ถึง 2

สำหรับในนิวเคลียสปรากฏว่า โปรดอนก์หมุนไปตามทางโคจรของมันเหมือนกัน โดยที่แมกเนติกโมเมนต์สำหรับโปรดอนในวงโคจรก็คือ

$$\bar{\mu} = g \left(\frac{q_e}{2m_p} \right) \bar{J} \quad (6-9)$$

m_p คือ มวลของโปรตอน g ในสมการที่ (6-9) คือ nuclear g -factor สำหรับสpinแมกเนติกโมเมนต์ของโปรตอน $g = 2(2.79)$ นิวตรอนมีสpinแมกเนติกโมเมนต์เหมือนกัน อัตราส่วนระหว่างสpinแมกเนติกโมเมนต์ของนิวตรอนกับโนเมนตั้มเชิงมุนของมันเอง คือ $2(-1.93)$ จะเห็นว่านิวตรอนมีลักษณะคล้าย ๆ จะเป็นแม่เหล็กเหมือนกัน

6.3 พลังงานแม่เหล็กสำหรับอะตอม



รูปที่ (6-4) แมกเนติกโมเมนต์ในสนามแม่เหล็ก

ในการคำนวณพลังงานแม่เหล็กของแมกเนติกโมเมนต์ เราแทนแมกเนติกโมเมนต์ด้วยไดโอลโมเมนต์ นั่นคือ

$$\bar{\mu} = q\bar{d} \quad (6-10)$$

ส เป็นปริมาณขั้ดรหัสของข้าวแม่เหล็ก q และ $-q$ ให้จุดกำเนิด (origin) O อยู่ที่กลางของ \bar{s} ให้สนามแม่เหล็ก \bar{B} ชี้ไปในทิศ $+z$ สุมมติว่า \bar{B} มีค่าสมำเสมอ ดังนั้น พลังงานแม่เหล็ก ก็คือ

$$\Delta U = -zqB_z - (-z)(-q)B_z \quad (\text{ดูรูป } 6-4)$$

$$= -2 \frac{d}{2} \cos \theta B_z$$

$$= -q \bar{d} \cdot \bar{B}$$

$$= -\bar{\mu} \cdot \bar{B} \quad (6-11)$$

$$= \mu_B B_z \quad (6-12)$$

แต่จากสมการที่ (6-8)

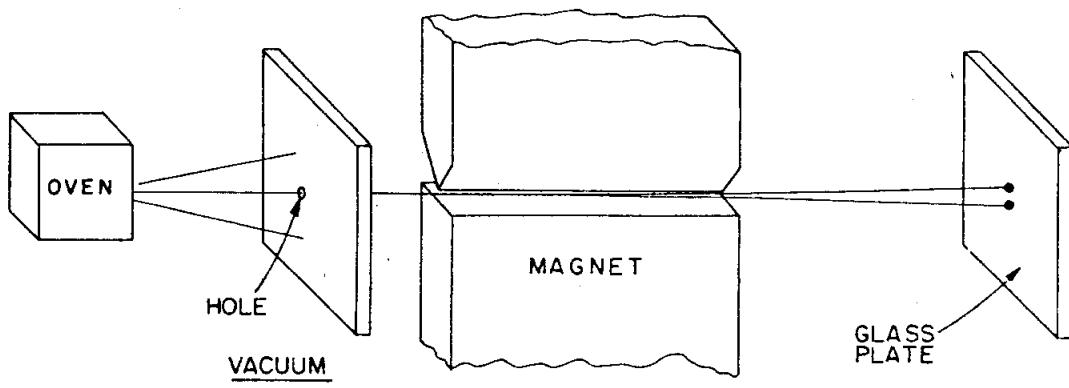
$$\mu_z = -g \left(\frac{q_e}{2m} \right) J_z \quad \text{แทนลงในสมการ (6-12) ได้}$$

$$\Delta U = -g \left(\frac{q_e}{2m} \right) J_z B_z \quad (6-13)$$

ในกลศาสตร์ควอนตัม J_z มีค่าเป็น $j\hbar$, $(j-1)\hbar$, ... ค่า $\frac{q_e}{2m}\hbar$ มีชื่อเฉพาะเรียกว่า Bohr Magneton แทนด้วยสัญลักษณ์

$$\mu_B = \frac{q_e\hbar}{2m} \quad (6-14)$$

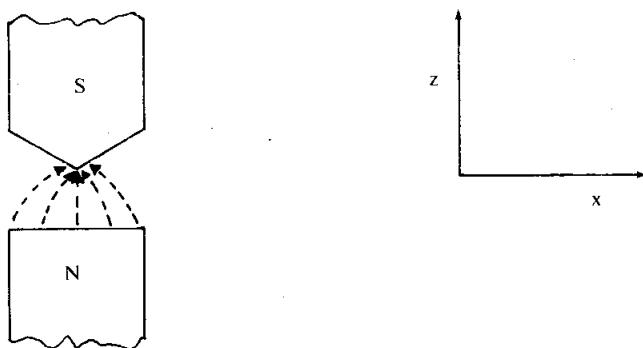
6.4 การทดลองของสเตินและเกอลัก (The Stern-Gerlach Experiment)



รูปที่ (6-5) เครื่องมือแสดงการทดลองของสเตินและเกอลัก

ในตอนนี้เราจะกล่าวถึงการทดลองสำคัญซึ่งแสดงว่า โมเมนตัมเชิงมุนั้นมีลักษณะเป็นห่วง ๆ (quantized) ไม่ต่อเนื่องกัน สำหรับระบบของอะตอมและอนุภาคมูลฐาน การทดลองนี้คือการทดลองของสเตินและเกอลัก เราจะไม่กล่าวถึงรายละเอียดมากนัก เพราะเรื่องการทดลองนี้มีกล่าวถึงครั้งหนึ่งแล้วในวิชาพิสิกส์ยุคใหม่ หากเราจะเน้นถึงวิธีซึ่งเครื่องมือนี้ช่วยให้เราฐานะปืนและโมเมนตัมเชิงมุนของอะตอม หรืออนุภาคมูลฐาน

การทดลองของสเตินและเกอลัคนัน ทำขึ้นเพื่อหาแมกเนติกโมเมนต์ของอะตอมของเงิน โดยนำเงินมาเผาให้ร้อนจัดในเตา (oven) จนเงินระเหยออกแล้วผ่านเข้าไปในรูที่เจาะไว้ จำลองอะตอมของเงินจะพุ่งผ่านเข้าไปยังช่องซึ่งอยู่ระหว่างขั้วแม่เหล็ก ซึ่งสร้างไว้เป็นพิเศษ สำหรับวัดแมกเนติกโมเมนต์ของมันโดยเฉพาะ จากตอนที่แล้วเราทราบว่าอะตอมซึ่งมีแมกเนติกโมเมนต์ $\bar{\mu}$ จะมีพลังงานแม่เหล็ก $-\bar{\mu} \cdot \bar{B}$ เมื่อผ่านเข้าไปในสนามแม่เหล็ก ถ้าหากสนามแม่เหล็กนั้นมีค่าคงที่ แต่ในการทดลองของสเติน-เกอลัค ค่าของสนามเปลี่ยนไปตามแนวแกน z โดยมีค่าเพิ่มขึ้น ดังนั้นจะมีแรงกระทำต่ออะตอมของเงิน จากสมการที่ (6-11) เราทราบว่าพลังงานที่จุดใด ๆ ในสนาม B, คือ



รูปที่ (6-6) ภาพของขั้วแม่เหล็กในการทดลองของสเตินและเกอลัค

$$\Delta U = -\bar{\mu} \cdot \bar{B} = \mu B \cos \theta$$

เมื่อ θ เป็นมุมระหว่างทิศของสนามและทิศของแมกเนติกโมเมนต์ ดังนี้ แรงตามแนวแกน z ก็คือ

$$F_z = -\frac{\Delta U}{\Delta z}$$

$$\lim \Delta z \rightarrow 0$$

$$= -\frac{\partial U}{\partial z} = \mu \cos \theta \frac{\partial B}{\partial z} \quad (6-15)$$

(แรงคือค่าลบทองเกรเดียนท์ของพลังงานศักย์)

เนื่องจากอะตอมกระจาบออกจากเตาเป็นจำนวนมาก ความน่าจะเป็นของทิศของแมกเนติกโมเมนต์โดยเฉลี่ยจะซึ่งเป็นทุกทิศทุกทางเป็นจำนวนมากเท่า ๆ กัน นั้นหมายความว่า θ

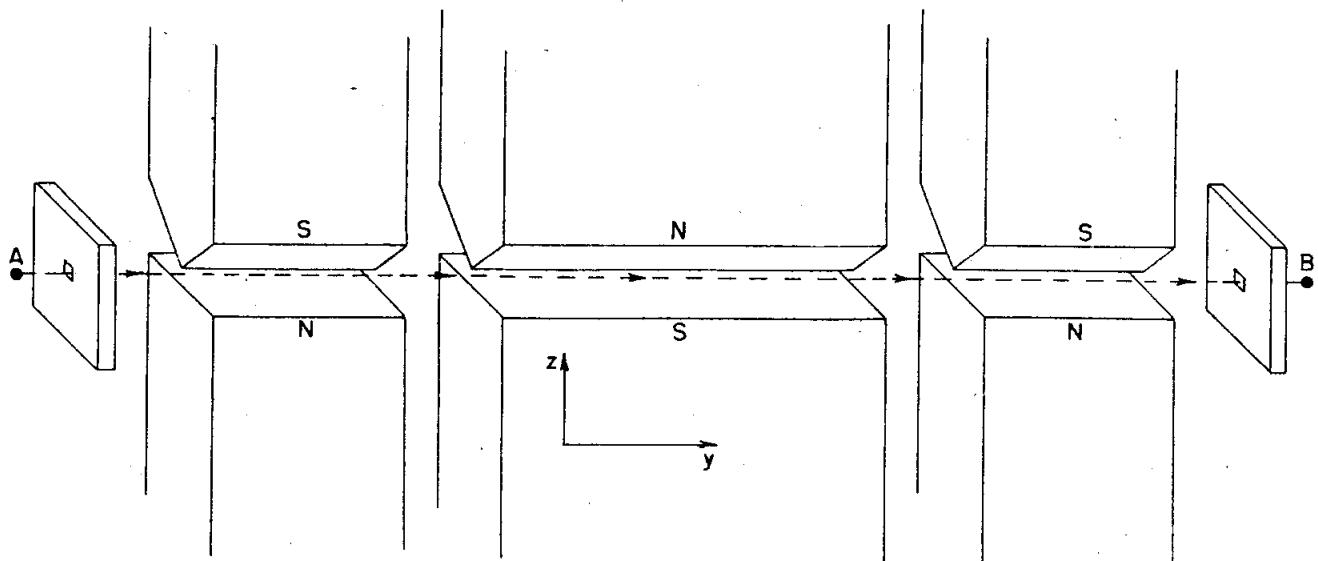
มีค่าทุกค่า อะตอมของเงินอะตอมได้ซึ่งมีพิเศษของแมกเนติกโมเมนต์ซึ่งนานกับระนาบ $x-y$ จะไม่มีแรงกระทำ แต่ถ้าอะตอมได้มีองค์ประกอบของแมกเนติกโมเมนต์ตามแนวแกน z และจะมีแรงกระทำต่ออะตอมนั้น ถ้าองค์ประกอบของแมกเนติกโมเมนต์ซึ่งไปทาง $+z$ แรงจะดึงขึ้นทาง $+z$ ในทางตรงข้ามถ้าองค์ประกอบของแมกเนติกโมเมนต์ซึ่งไปทาง $-z$ จะมีแรงดึงลงทาง $-z$ เนื่องจากอะตอมหงุดหงิดซึ่งไปทุกทิศทาง ทางพิสิกส์แบบฉบับจึงคาดหมายว่า การกระจายของอะตอมตามแนวแกน z จะเป็นเส้นสม่ำเสมอ ความสูงของการกระจายของอะตอมของเงินจะขึ้นอยู่กับขนาดของแมกเนติกโมเมนต์ แต่ปรากฏว่าลักษณะของเงินพุ่งออกจากเครื่องมือของสเดิน-เกอลัค มีเพียงสองลำ ทำให้มีจุดบนแผ่นกระดาษเพียงสองจุดเท่านั้น

6.5 การทดลองทางความคิดของไฟน์มัน

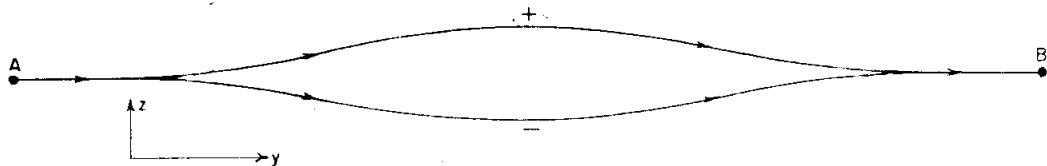
(thought experiment or gedanken experiment)

ในตอนที่แล้วเราพบว่าลักษณะของอะตอมแยกออกเป็นสองพวก จัดว่ากลุ่มของอะตอมเหล่านี้มีสองกลุ่ม กลุ่มนี้งูกผลักขึ้น อีกกลุ่มนี้งูกผลักลง ด้วยแรงขนาดเท่า ๆ กัน ในกลศาสตร์ความอนตัมอะตอมหงุดหงิดสองกลุ่มนั้นนับว่าอยู่ในสถานะเฉพาะหรือสถานะที่กำหนดให้ (definite state) เรียกว่าลักษณะของอะตอมงูกโพลาไรซ์ด

จากการทดลองของสเดิน-เกอลัค ไฟน์มันได้คิดการทดลองขึ้นชนิดหนึ่ง เป็นการทดลองที่ไม่ได้ลงมือทำจริง ๆ (ถ้าหากจะทำจริงคงได้แต่การเตรียมเครื่องมือจะมีความยุ่งยากเป็นพิเศษ) การทดลองของไฟน์มันใช้เครื่องมือดังนี้

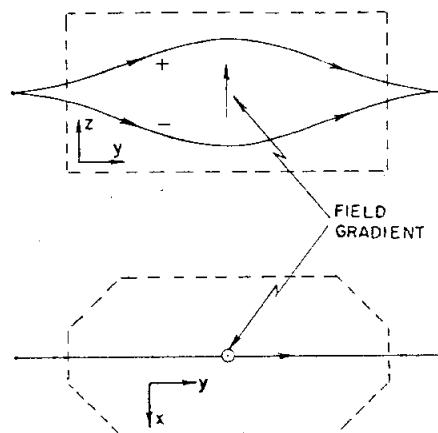


รูปที่ (6-7) การทดลองทางความคิดของไฟน์มันโดยตัดแปลงมาจากเครื่องมือของสเดิน-เกอลัค



รูปที่ (6-8) ทางที่สpin $\frac{1}{2}$ หน่วย ($\frac{1}{2} \text{ h}$) จะเดินผ่านในการทดลองทางความคิดของไฟน์มัน

รูปที่ (6-7) แสดงเครื่องมือของสตีน-เกอลัค ซึ่งไฟน์มันได้ตัดแปลงมาใช้ในการทดลองทางความคิด ซึ่งต่อไปเราจะเรียกเครื่องมือชนิดนี้ว่า เครื่องมือวิเคราะห์สถานะสpinของไฟน์มัน หรือจะเรียกว่า สิ้น ๆ ว่า เครื่องมือวิเคราะห์สpin เครื่องมือนี้ประกอบด้วยคู่ของแม่เหล็กแบบสตีน-เกอลัคสามคู่ แต่ละคู่ทำให้มีสนามแม่เหล็กซึ่งเข้มข้นขึ้นตามแนวแกน z (ดูรูป 6-6) แม่เหล็กคู่แรกทำหน้าที่แยกลำของอะตอมออกเป็นลำย่อย ๆ ถ้าเป็นสpin $\frac{1}{2}$ หน่วยลำของอะตอมจะแบ่งออกเป็นลำย่อย ๆ สองลำ (เพราะสpinครึ่งหน่วยมีสองสถานะความตั้ม) แม่เหล็กอีกคู่หนึ่งมีขนาดเท่ากันแต่มีความยาวเป็นสองเท่า ขั้วของแม่เหล็กกลับเป็นตรงข้ามกัน กับคู่แรก ดังนั้นแม่เหล็กคู่นี้จึงมีหน้าที่ผลักลำของอะตอมในทางตรงกันข้ามกับชุดแรก ลำของอะตอมจะถูกบีบให้วิ่งเข้าหากันอีกรั้งหนึ่ง ส่วนคู่ของแม่เหล็กคู่ที่สาม ทำหน้าที่รวมลำของอะตอมเข้าด้วยกันเหมือนเดิม ทางด้านหน้าของช่องทางเข้า A มีเครื่องมือเร่งให้อะตอมมีความเร็ว ส่วนทางด้านหลังช่อง B มีเครื่องทำให้อะตอมชะลอความเร็ว จนหยุดอยู่กับที่ที่จุด B ดังนั้นเราจึงไม่ต้องเป็นห่วงถึงเรื่องการเคลื่อนที่ของอะตอม แต่เมื่อศึกษาถึงผลซึ่งจะเกิดขึ้นเนื่องจากสpinเพียงอย่างเดียว



รูปที่ (6-9) รูปแสดงด้านบนและด้านข้างของการทดลองทางความคิดของไฟน์มัน

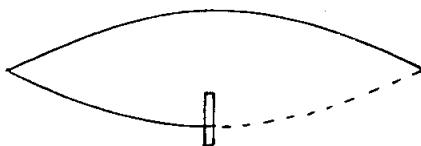
ต่อไปเราจะนำเครื่องมือวิเคราะห์ส핀เหล่านี้มาต่อ กันหลาย ๆ อัน เครื่องมือแต่ละอัน จึงเขียนให้เป็นสัญลักษณ์ได้ดังรูปที่ (6-9) ซึ่งจะเห็นว่าสถานะความตั้มที่สpinชี้ขึ้นจะมีลักษณะ อะตอมวิงตามแนว + และสถานะความตั้มที่สpinชี้ลงจะมีลักษณะของอะตอมวิงตามแนว - เราจะแทนสถานะความตั้มที่สpinชี้ขึ้นด้วยสัญลักษณ์ $|+\rangle$ และสถานะความตั้มที่สpinชี้ลง ด้วยสัญลักษณ์ $|-\rangle$ โดยที่

$$|ij\rangle = \delta_{ij} \quad (6-16)$$

ถ้าหากเราพิจารณาฟังก์ชันคลื่นได ๆ $|\psi\rangle$ และ $\langle\psi|$ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} \langle\psi|\psi\rangle &= \sum_i \langle i|i\rangle \langle i|\psi\rangle \\ &= \langle +|+\rangle \langle +|\psi\rangle + \langle +|- \rangle \langle -|\psi\rangle \quad (6-17) \end{aligned}$$

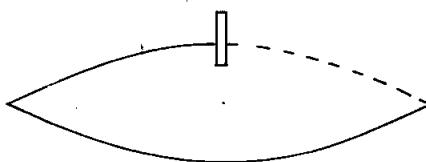
จะเห็นว่าสถานะความตั้มสpinชี้ขึ้นจะแทนได้ด้วยเครื่องมือวิเคราะห์สpin ดังนี้ (ลักษณะของอะตอมในสถานะสpinชี้ลงถูกปิดด้วยเครื่องกันดังรูป 6-10)



รูปที่ (6-10) ลักษณะของอะตอมสpinชี้ลงถูกปิด

ในขณะเดียวกันสถานะความตั้มของสpinชี้ลงจะแทนด้วยเครื่องมือวิเคราะห์สpin ดังนี้ ขณะนี้ลักษณะของอะตอมของสถานะสpinชี้ขึ้นถูกปิดดังรูป (6-11)

รูปที่ (6-11) ลักษณะของอะตอมสpinชี้ขึ้นถูกปิด



จะเห็นว่าเครื่องมือวิเคราะห์สpinแต่ละชุดจะสร้างสถานะฐาน (base states) ของระบบควบคุมตัวที่เรากำลังพิจารณาขึ้น เช่น สมมติว่าเดิมเราใช้เครื่องมือ S วิเคราะห์สถานะ spin เราอาจจะเขียนสถานะควบคุมตามแบบสมการ (4-6) ซึ่งมีว่า

$$\psi'_j = \langle v_j | \psi \rangle \quad (4-6)$$

เราอาจจะเขียนฟังก์ชันคลีน ψ โดยมีชุดสถานะฐานจากเครื่องมือ S ได้ดังนี้

$$\psi_i = \langle iS | \psi \rangle \quad (6-18)$$

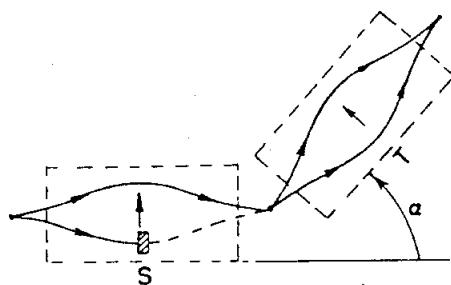
ต่อมาถ้าหากเราต่อเครื่องมือวิเคราะห์ spin T เข้ากับระบบ สถานะควบคุมของ spin ที่ออกมากจะอยู่ในชุดสถานะฐานของเครื่องมือ T นั่นหมายถึงว่าเราเปลี่ยนจากชุดสถานะฐานของเครื่องมือ S ไปสู่ชุดสถานะฐานของเครื่องมือ T ซึ่งเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$\langle jT | \psi \rangle = \sum_i \langle jT | iS \rangle \langle iS | \psi \rangle \quad (6-19)$$

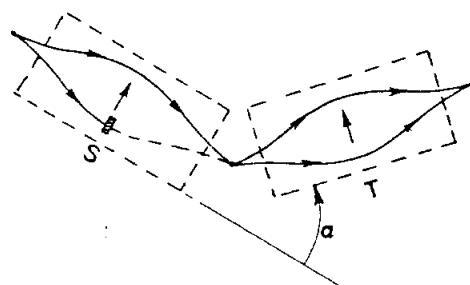
จากสมการที่ (1-23) เราอาจจะเขียนสมการที่ (6-19) เสียใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \langle jT | \psi \rangle &= a'_j = \sum_i R_{ji} a_i \\ &= \sum_i \langle jT | iS \rangle \langle iS | \psi \rangle \end{aligned} \quad (6-20)$$

6.5.1 ความไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อมีการหมุน (Rotational Invariance)



รูปที่ (6-12)



รูปที่ (6-13)

รูปที่ (6-12) และ (6-13) แสดงการทดลองสองการทดลองซึ่งให้ผลเหมือนกัน

ในกลศาสตร์ความตั้ม สมมติว่าเรามีระบบเหมือนที่แสดงในรูป (6-12) และรูป (6-13) ในแต่ละระบบมีเครื่องมือสองเครื่องต่อกัน สมมติว่าเป็นเครื่องมือ S และเครื่องมือ T โดยที่ T ทำมุน α เมื่อเทียบกับ S แต่ในทั้งสองรูป มุนที่เครื่องมือทำกับแนวระดับไม่เหมือนกัน เราจะสร้างสมมติฐานขึ้นว่า จำนวนอนุภาคซึ่งเตรียมจากเครื่องมือ S และปล่อยให้ผ่านเครื่องมือ T ในทั้งสองรูปจะเท่ากัน นั่นคือ ถ้าเครื่องมือวางไปในสเปชเป็นมุนต่างกัน แต่ T และ S ทำมุนระหว่างกันเป็น α เมื่อกันแล้ว จะไม่กระทบต่อผลของการทดลอง : สมมติฐานนี้เรียกว่า ความไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อมีการหมุน

สมมติว่าเราเติมเครื่องมือเข้าไปอีกชุดหนึ่งคือ U เราต้องการที่จะหาความน่าจะเป็นไปได้ของระบบความตั้มซึ่งเตรียมให้อยู่ในสถานะหนึ่งโดยเครื่องมือ S จะไปอยู่อีกสถานะหนึ่งของเครื่องมือ U คำตอบนี้หาได้โดยการหาความเปลี่ยนแปลง จาก S ไปสู่ T และจาก T ไปสู่ U เราจะเรียกสถานะของเครื่องมือ S ว่า ตัวแทน S (S-representation) ตัวแทน T และตัวแทน U ก็มีความหมายคล้ายคลึงกัน ดังนั้น เราจะเปลี่ยนจากตัวแทน S ไปสู่ตัวแทน T ได้ดังนี้

$$a'_i = \sum_j R_{ji}^{IS} a_i \quad (6-21)$$

ให้สมประสงค์ของความน่าจะเป็นซึ่งระบบความตัมจะอยู่ในตัวแทน U เป็น a''_k ดังนี้

$$a''_k = \sum_j R_{kj}^{UI} a'_j \quad (6-22)$$

เราอาจรวมสมการ (6-21) และ (6-22) เพื่อหาความสัมพันธ์จาก U ไปสู่ S โดยตรงได้โดยแทนค่า a'_i ในสมการที่ (6-22) ด้วยสมการ (6-21)

$$a''_k = \sum_i R_{ki}^{UI} \sum_j R_{ji}^{IS} a_i \quad (6-23)$$

$$= \sum_{i,j} R_{ki}^{UI} R_{ji}^{IS} a_i \quad (6-24)$$

สมมติว่าเราไม่จัดให้มีการอุดตันทางเดินของลำอะตอมใน T เลย ทางเดินทุกทางของ T เปิดหมด สถานการณ์นี้อาจจะนับได้ว่าอนุภาคเคลื่อนจากตัวแทน S ไปสู่ตัวแทน U โดยตรง ทั้งหมด ดังนั้น a''_k อาจจะเขียนได้อีกแบบหนึ่ง ดังนี้

$$a''_k = \sum_i R_{ki}^{US} a_i \quad (6-25)$$

สมการที่ (6-24) และ (6-25) แสดงความสัมพันธ์ของ a''_k และ a_i ดังนั้น สมการทั้งสองจะต่างกัน ก็ตรงค่าเฟสเท่านั้น เราจึงอาจจะเขียนความสัมพันธ์ของสมการทั้งสองได้ดังนี้

$$e^{i\phi} R_{ki}^{US} = \sum_i R_{ki}^{UI} R_{ji}^{IS} \quad (6-26)$$

เนื่องจากเราพิจารณาระบบซึ่งมีสองสถานะความตั้ม เราอาจจะขอจัดค่าเฟสเสียงได้ โดยหาตีเกอร์มีเนนท์ของสมการที่ (6-26) และหารเข้ากับสมการที่ (6-26) ดังนี้

$$e^{2\mu i} |R^{US}| = |R^{UT}| |R^{TS}|$$

$$\therefore \frac{R_{ki}^{US}}{\sqrt{|R^{US}|}} = \sum_j \frac{R_{kj}^{UT}}{\sqrt{|R^{UT}|}} \frac{R_{ji}^{TS}}{\sqrt{|R^{TS}|}} \quad (6-27)$$

เราจะเรียกชื่อเทอมต่าง ๆ ในสมการ (6-27) เสียใหม่ ดังนี้

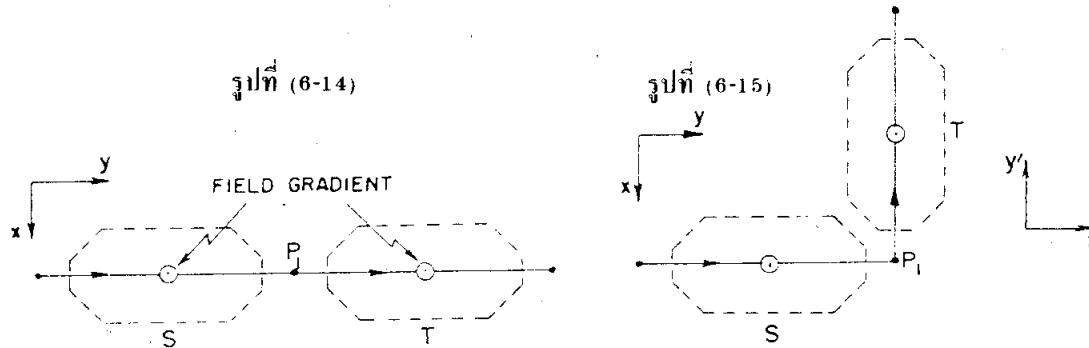
$$\frac{R_{ki}^{US}}{\sqrt{|R^{US}|}} = R_{ki}^{US}; \quad \frac{R_{kj}^{UT}}{\sqrt{|R^{UT}|}} = R_{kj}^{UT}, \quad \frac{R_{ji}^{TS}}{\sqrt{|R^{TS}|}} = R_{ji}^{TS}$$

ด้วยสัญลักษณ์นี้เราอาจจะเขียนสมการ (6-27) ได้ดังนี้ ดังนี้

$$R_{ki}^{US} = \sum_j R_{kj}^{UT} R_{ji}^{TS} \quad (6-28)$$

6.5.2 การหมุนรอบแกน z

เราได้พิจารณาการหมุนมาครั้งหนึ่งในกลศาสตร์แบบฉบับ โดยใช้มุมของอยเลอร์ เป็นตัวแสดงการหมุน ในบทที่ 2 เราได้แสดงให้เห็นว่า การหมุนอาจจะแทนได้ด้วยชุดของ เมทริกซ์ ซึ่งเป็นกรุ๊ป SU(2) ในตอนนี้ท่านศาสตราจารย์ไฟฟ์มันจะแสดงให้เห็นว่า ชุดของ เมทริกซ์นั้นอาจจะหาได้โดยการพิจารณาการต่อ กันของเครื่องมือวิเคราะห์สpinชุดหนึ่ง เราจะเริ่มจากการพิจารณาการหมุนรอบแกน z สมมุติว่าเรามีเครื่องมือวิเคราะห์สpinชุดหนึ่ง ประกอบด้วยเครื่องมือสองตัวคือ S และ T โดยที่การเพิ่มขึ้นของสนาม (field gradient) พุ่งออกจากหน้ากระดาษซึ่งเราจะแทนด้วยสัญลักษณ์หัวลูกศร Θ เครื่องมือ S และ T ต่อ กัน ในแนวแกน y ดังในรูปที่ (6-14)



การหมุนรอบแกน z เป็นมุม 90°

จะเห็นว่าถ้าหากจำลองอนุภาคสpinครึ่งหน่วยฤกษ์ผลักขึ้นใน T (ไปในทิศ +z) โดยทำนองเดียวกันจำลองอนุภาคซึ่งฤกษ์ผลักลง (ไปทางทิศ -z) ใน S มันก็จะฤกษ์ผลักลงใน T ด้วย ในตอนต่อมาสมมุติว่าเรามุน S และ T ออกจากแนวเดียวกัน (รูปที่ 6-14) ไปอยู่ในแนวที่ตั้งฉากกัน (รูปที่ 6-15) แกน z ยังคงนานกัน (เป็นการหมุนรอบแกน z) จะเห็นว่าถ้าหากเราบังคับให้จำลองอนุภาคสpinครึ่งหน่วยผ่าน S แล้วไปผ่าน T จำลองสpinซึ่งฤกษ์ผลักขึ้นทาง +z ใน S จะฤกษ์ผลักขึ้นทาง +z ใน T จำลองสpinซึ่งฤกษ์ผลักลงใน S ก็จะฤกษ์ผลักลง (ไปทาง -z) ใน T จะเห็นว่าปรากฏการณ์ใน S ก็คือปรากฏการณ์ใน T

ซึ่งเราจะเขียนเป็นภาษาคณิตศาสตร์ได้ว่า

$$|a'^{\uparrow}| = |a^{\uparrow}| \quad (6-29a)$$

$$|a'^{\downarrow}| = |a^{\downarrow}| \quad (6-29b)$$

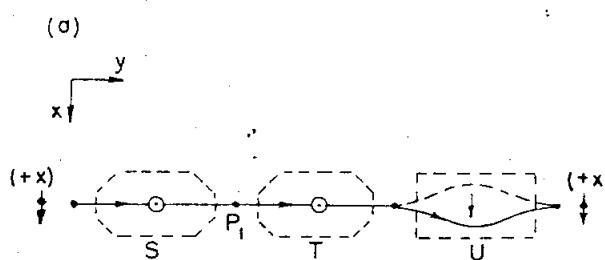
เมื่อ a^{\uparrow} คือ สัมประสิทธิ์ของความน่าจะเป็นชึ่งอนุภาคจะฤกษ์ผลักขึ้นทาง +z ใน S

a'^{\uparrow} คือ สัมประสิทธิ์ของความน่าจะเป็นชึ่งอนุภาคจะฤกษ์ผลักขึ้นทาง +z ใน T

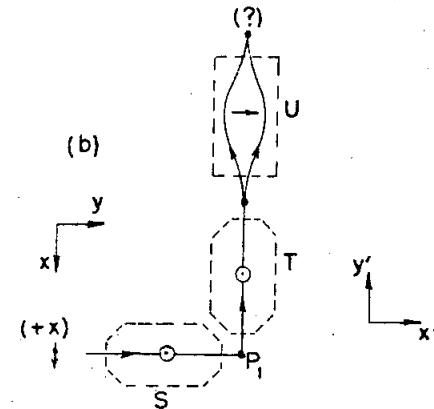
a^{\downarrow} คือ สัมประสิทธิ์ของความน่าจะเป็นชึ่งอนุภาคจะฤกษ์ผลักลงทาง -z ใน S

a'^{\downarrow} คือ สัมประสิทธิ์ของความน่าจะเป็นชึ่งอนุภาคจะฤกษ์ผลักลงทาง -z ใน T

แต่พึงระลึกว่า $a'^{\uparrow} \neq a^{\uparrow}$ และ $a'^{\downarrow} \neq a^{\downarrow}$ เนื่องจากมุมเพสต่างกัน ซึ่งเราจะเห็นได้จากการทดลองดังต่อไปนี้



รูปที่ (6-16)



รูปที่ (6-17)

อนุภาคในสถานะ (+x) มีความแตกต่างกันในรูป (6-16) และ (6-17)

สมมติว่าเราต่อเครื่องมือวิเคราะห์ส핀 U ท้าย T โดยให้เครื่องมือนั้นหมุนจาก T ไป 90° ทำให้ทิศการเพิ่มขึ้นของสนามพุ่งไปทางทิศ +x ดังนั้น ถ้าจัดเครื่องมือดังในรูปที่ (6-16) สำหรับอนุภาคสpinครึ่งหน่วยจะขึ้นไปทาง +x แต่ในรูปที่ (6-17) มันจะขึ้นไปทาง +y ทำให้มีความแตกต่างกันเกิดขึ้น ปัญหาที่ตามมาก็คือ ความแตกต่างนี้เกิดขึ้นได้อย่างไร? เพื่อจะตอบปัญหานี้เราจะเขียนสมการ (6-29a) และ (6-29b) เสียใหม่ดังนี้

$$a'^{\uparrow} = e^{i\lambda} a^{\uparrow} \quad (6-30a)$$

$$a'^{\downarrow} = e^{i\mu} a^{\downarrow} \quad (6-30b)$$

แต่เนื่องจากการเปลี่ยนไปของเฟสเป็นปริมาณเท่ากัน “ไม่กระทบถึงค่าตอบทางพิสิกส์ เราจึงกำหนดให้

$$\lambda' = \lambda - \frac{(\lambda + \mu)}{2}, \quad \mu' = \mu - \frac{(\lambda + \mu)}{2}$$

$$\therefore \lambda' = \frac{\lambda}{2} - \frac{\mu}{2} = -\mu' \quad (6-31)$$

$$\therefore a'^{\uparrow} = e^{i\lambda} a^{\uparrow} \quad (6-32a)$$

$$a'^{\downarrow} = e^{-i\mu'} a^{\downarrow} \quad (6-32b)$$

สมมติว่า ϕ เป็นมุมซึ่งเครื่องมือ T ทำกับเส้นซึ่งต่อระหว่างจุดศูนย์กลางของเครื่องมือ S และจุดศูนย์กลางของเครื่องมือ T ($+ \phi$ เป็นมุมซึ่งเกิดขึ้นตามการหมุนสกรูไปทางทิศ +z) จะเห็นว่าเมื่อ $\phi = 0$ หมายถึง $\lambda' = 0$ (เฟสของความนำจะเป็นใน S และ T ถูกเลือกให้เหมือนกันในครั้งแรกได้ครั้งหนึ่ง) เราจะสมมติว่า λ' เป็นพังค์ชันซึ่งมีความต่อเนื่องกันของตัวแปร ϕ ดังนั้น ถ้าหากเรายับ T ไปเป็นมุมเล็ก ๆ ϵ , λ' ก็จะเป็นมุม $m\epsilon$ โดยที่รายังไม่ทราบว่า m มีค่าเป็นเท่าไร เราอาจจะเขียนสมการที่ (2-32a) และ (2-32b) เสียใหม่ได้ดังนี้

$$a'^{\uparrow} = e^{im\phi} a^{\uparrow} \quad (6-33a)$$

$$a'^{\downarrow} = e^{-im\phi} a^{\downarrow} \quad (6-33b)$$

การหาค่าของ m ทำได้โดยสังเกตว่าถ้าหมุน T ไปเป็นมุม 180° ทุกสิ่งทุกอย่างจะเหมือนเมื่อ T ไม่ได้หมุนเลย แต่ในขณะเดียวกันถ้าหมุน B ไปเพียง 180° ภาวะสpinซึ่งขึ้นจะกลับกับกับทิศทางเดิม ดังนั้น ถ้าหากจะไม่ให้ทิศของสpinใน B ไม่เปลี่ยนแปลง B จะต้อง

หมุนไป 360° เพื่อให้มีความสอดคล้องกันกับสภาพความเป็นจริงของสปิน จึงจำเป็นต้องกำหนดให้ $m = \frac{1}{2}$ ดังนี้

$$a'^{\uparrow} = e^{i\phi/2} a^{\uparrow} \quad (6-34a)$$

$$a'^{\downarrow} = e^{-i\phi/2} a^{\downarrow} \quad (6-34b)$$

จากสมการที่ (6-34a) และ (6-34b) จะเห็นว่า ถ้าหากหมุนเครื่องมือไปเป็นมุม $\phi = 360^\circ$ แล้ว

$$a'^{\uparrow} = -a^{\uparrow} \quad (6-35a)$$

$$a'^{\downarrow} = -a^{\downarrow} \quad (6-35b)$$

เราอาจจะพิจารณาสมการ (6-34a) และ (6-34b) ในรูปของเมทริกซ์ เพราะสมการหงส์สองก็คือสมการที่ (6-21) ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$\begin{vmatrix} a'^{\uparrow} \\ a'^{\downarrow} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a^{\uparrow} \\ a^{\downarrow} \end{vmatrix} \quad (6-36)$$

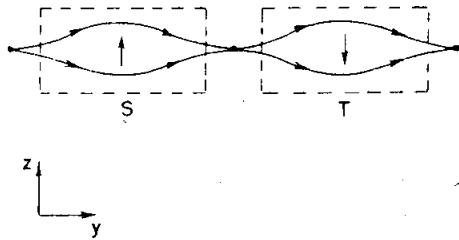
โดยที่ $\underline{\underline{R}}^{TS} = \underline{\underline{R}}_z = \begin{vmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{vmatrix} \quad (6-37)$

และ $\underline{\underline{R}}_z(\phi) = Q_{\phi}$ ในสมการที่ (2-111) นั้นเอง

6.5.3 การหมุนเป็นมุม 180° และ 90° รอบแกน y

การทดลองทางความคิดตอนนี้ของงานศาสตราจารย์ไฟน์มัน คิดขึ้นเพื่อนำไปสู่การหมุนได้ ๆ เช่นที่เราทำการหมุนในสามมิติในบทที่ 2 ดังนั้น บางตอนที่ยังยากเกินไป ก็จะตัดตอนลง ผู้ที่ต้องการอ่านคำอธิบายโดยละเอียดของไฟน์มัน ขอให้ติดตามอ่านได้ในต้นฉบับภาษาอังกฤษ¹¹

11. Feynmann, R.P. and Others, *The Feynmann Lecture on Physics : Quantum Mechanics*, Chapter six.



รูปที่ (6-18) การหมุน 180° รอบแกน y

ในตอนนี้เราจะเริ่มด้วยการหมุนเครื่องมือวิเคราะห์สปิน (รูปที่ 6-9) โดยเราจะหมุนเครื่องมือ T รอบแกนที่ตั้งฉากกับแกน z สมมติว่าเป็นแกน y ไปเป็นมุม 180° ดังในรูปที่ (6-18) เนื่องจากการหมุนเช่นนี้ทำให้ทิศการเพิ่มของสนามและทิศของสนามกลับทางกันจากสมการที่ (6-15) จะเห็นว่า

$$F_z = \mu \cos \theta \frac{\partial B}{\partial z}$$

แต่เนื่องจากว่า $B \rightarrow -B$ และ $\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow -\frac{\partial}{\partial z}$ อันเนื่องมาจากการหมุน 180° ดังนั้น F_z จึงมีค่าคงเดิม เครื่องหมายไม่เปลี่ยน อนุภาคซึ่งวิงชี้นีเมื่อผ่าน S ก็คงวิงชี้นีเมื่อผ่าน T อนุภาคที่วิงลงก็เช่นเดียวกัน แต่ว่าขณะนี้สถานะสปินซึ้งใน S จะเป็นสถานะสปินซึ้งใน T ดังนั้น

$$|a'^{\uparrow}| = |a^{\downarrow}| \text{ และ } |a'^{\downarrow}| = |a^{\uparrow}| \quad (6-38)$$

นั่นก็หมายถึงว่า

$$a'^{\uparrow} = e^{i\beta} a^{\downarrow} \text{ และ } a'^{\downarrow} = e^{i\gamma} a^{\uparrow} \quad (6-39)$$

เนื่องจากเราทราบจากสมการที่ (6-35a) และ (6-35b) ว่า ถ้าหากเราหมุนไปรอบแกน z หรือแกนใด ๆ เราจะได้ค่าอําพนของความนำจะเป็นเป็นลบ ดังนั้น เราจึงหมุน T ต่อไปอีก 180° ซึ่งทำให้

$$a''^{\uparrow} = e^{i\mu} a'^{\downarrow} = e^{i\mu} e^{i\gamma} a^{\uparrow} = -a^{\uparrow}$$

$$\text{และ } a''^{\downarrow} = e^{i\gamma} a'^{\uparrow} = e^{i\gamma} e^{i\mu} a^{\downarrow} = -a^{\downarrow}$$

$$\text{แสดงว่า } e^{i(\beta+\gamma)} = -1$$

$$e^{i\mu} = -e^{-i\gamma} \quad (6-40)$$

ดังนั้น เราอาจจะเขียน (6-39) เสียใหม่ได้ดังนี้

$$a'^{\uparrow} = e^{i\beta} a^{\downarrow} \text{ และ } a'^{\downarrow} = -e^{-i\beta} a^{\uparrow} \quad (6-41)$$

เนื่องจาก β เป็นมุมซึ่งขึ้นอยู่กับการเลือกแกน y ดังนั้น เราอาจจะเลือกแกน y ให้ $\beta = 0$ ถ้าหากเราทำดังนี้แล้ว

$$a'^{\uparrow} = a^{\downarrow} \text{ และ } a'^{\downarrow} = -a^{\uparrow} \quad (6-42)$$

: การหมุน 180° รอบแกน y

เนื่องจากการหมุนไปเป็นมุม 90° สองครั้งรอบแกน y ทำให้ได้ผลเหมือนกับการหมุนครั้งเดียว 180° ทำให้เรขาค่าอพันของความน่าจะเป็นได้ดังนี้
สมมติให้การหมุนไป 90° เป็นครั้งแรก แทนได้ด้วยสมการ

$$\begin{aligned} a'^{\uparrow} &= c_1 a^{\uparrow} + c_2 a^{\downarrow} \\ a'^{\downarrow} &= c_3 a^{\uparrow} + c_4 a^{\downarrow} \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (6-43)$$

ในการหมุนต่อไปอีก 90° อพันของความน่าจะเป็นจะอยู่ในรูป

$$\begin{aligned} a''^{\uparrow} &= c_1 a'^{\uparrow} + c_2 a'^{\downarrow} \\ a''^{\downarrow} &= c_3 a'^{\uparrow} + c_4 a'^{\downarrow} \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (6-44)$$

แทนค่าสมการชุดที่ (6-43) ลงในสมการชุด (6-44) จะได้ผลลัพธ์เป็น

$$\begin{aligned} a''^{\uparrow} &= c_1(c_1 a^{\uparrow} + c_2 a^{\downarrow}) + c_2(c_3 a^{\uparrow} + c_4 a^{\downarrow}) \\ a''^{\downarrow} &= c_3(c_1 a^{\uparrow} + c_2 a^{\downarrow}) + c_4(c_3 a^{\uparrow} + c_4 a^{\downarrow}) \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (6-45)$$

แต่จากสมการชุด (6-42) จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} a''^{\uparrow} &= a^{\downarrow} \\ a''^{\downarrow} &= -a^{\uparrow} \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (6-46)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} c_1^2 + c_2 c_3 &= 0 \\ c_1 c_2 + c_2 c_4 &= 1 \\ c_1 c_3 + c_3 c_4 &= -1 \\ c_2 c_3 + c_4^2 &= 0 \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (6-47)$$

จากสมการชุดที่ 1 และชุดที่ 4 ในชุดสมการ (6-47)

$$c_1^2 = c_4^2$$

ซึ่งหมายความว่า $c_1 = \pm c_4$ แต่ถ้า $c_1 = -c_4$ สมการที่ 2 ในชุด (6-47) จะไม่ถูกต้อง

จึงเหลือ

$$c_1 = c_4 \quad (6-48)$$

แทนค่า (6-48) ในสมการที่ 2 ของชุด (6-47) ได้

$$c_2 = \frac{1}{2c_4} \quad (6-49)$$

แทนค่า (6-48) ในสมการที่ 3 ของชุด (6-47) ได้

$$c_3 = -\frac{1}{2c_4} = -c_2 \quad (6-50)$$

แทนสมการ (6-48), (6-49) และ (6-50) ลงในสมการที่ 1 ชุดของสมการ (6-47)

$$\begin{aligned} c_1^2 - \frac{1}{4c_1^2} &= 0 \rightarrow c_1^4 = \frac{1}{4} \\ \therefore c_1 &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{i}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (6-51)$$

ทำให้

$$c_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \mp \frac{i}{\sqrt{2}} \quad (6-52)$$

$$c_3 = \mp\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}} \quad (6-53)$$

$$c_4 = c_1 \quad (6-54)$$

หากเราเขียนสมการที่ (6-43) เสียใหม่ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a' \downarrow \\ a' \uparrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \uparrow \\ a \downarrow \end{bmatrix} \quad (6-43)$$

ดีเทอร์มิเนนท์ของแมกทริกซ์ $\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$ เรียกว่า ดีเทอร์มิเนนท์ของการหมุน ซึ่งจะเป็นค่าลบไม่ได้ ดังนั้นค่าซึ่งมี i (อิมเมจินเนอร์รี) จึงใช้ไม่ได้ ค่าที่ให้การหมุน 90° รอบแกน y คือ

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (6-55)$$

ส่วนค่าอีกชุดหนึ่ง จะแทนการหมุนเป็นมุน -270° แทนค่าสมการ (6-55) ลงใน (6-43)

$$\begin{bmatrix} a' \downarrow \\ a' \uparrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \uparrow \\ a \downarrow \end{bmatrix} \quad : \text{การหมุน } 90^\circ \text{ รอบแกน y} \quad (6-56)$$

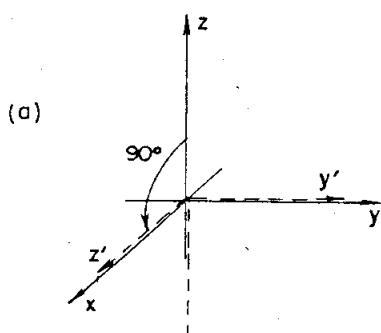
และถ้าหากเราจะหาการหมุนรอบแกน y เป็นมุม -90° (โดยหาค่า $a \uparrow$ และ $a \downarrow$ ในเทอมของ $a' \uparrow$ และ $a' \downarrow$ ในสมการ (6-43)) จะได้ผลลัพธ์

$$\begin{bmatrix} a \uparrow \\ a \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' \uparrow \\ a' \downarrow \end{bmatrix}$$

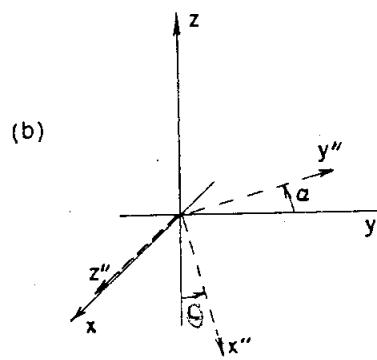
: การหมุน -90° รอบแกน y (6-57)

6.5.4 การหมุนรอบแกน x และการหมุนได้

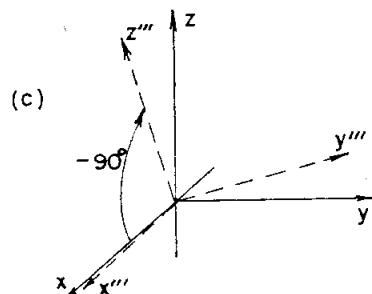
สมมติว่าเราจะหมุนเครื่องมือรอบแกน x เป็นมุม θ เราต้องการจะทราบถึงอับพนของความน่าจะเป็น วิธีทำก็ง่าย (ในเชิงการทดลองทางความคิด) ครั้งแรกเราจะหมุนรอบแกน y เสียก่อนเป็นมุม 90° โดยใช้สมการที่ (6-56) เมื่อหมุนแล้ว สมมติว่าพิกัดเปลี่ยนจาก x, y และ z "ไปเป็น x' , y' และ z' ถัดจากนี้เราจะหมุนรอบแกน z' "ไปเป็นมุม θ สมมติว่าพิกัดเปลี่ยนจาก x' , y' และ z' "ไปเป็น x'' , y'' และ z'' คราวสุดท้ายเรามุนรอบแกน y'' "ไปเป็นมุม -90° ให้พิกัดสุดท้ายเป็น x'' , y'' และ z'' เราจะได้การหมุนรอบแกน x เป็นมุม θ ตามที่ต้องการ เราอาจจะเขียนความเปลี่ยนแปลงของอับพนความน่าจะเป็นเป็นภาษาคณิตศาสตร์ได้ตามลำดับดังนี้ จากสมการ (6-56), (6-36) และ (6-57)



รูปที่ (6-19) หมุนรอบแกน y "ไปเป็นมุม $+90^\circ$



รูปที่ (6-20) หมุนรอบแกน z' ไปเป็นมุม θ



รูปที่ (6-21) หมุนรอบแกน y' ไปเป็นมุม -90°

รูปที่ (6-19), รูปที่ (6-20) และรูปที่ (6-21) แสดงการหมุนรอบแกน x ไปเป็นมุม θ

$$\begin{bmatrix} a''' \uparrow \\ a''' \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \uparrow \\ a \downarrow \end{bmatrix} \quad (6-58)$$

คูณแมทริกซ์ตามลำดับจากขวาไปซ้าย

$$\begin{bmatrix} a''' \uparrow \\ a''' \downarrow \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{i\theta/2}(a \uparrow + a \downarrow) & -e^{-i\theta/2}(-a \uparrow + a \downarrow) \\ e^{i\theta/2}(a \uparrow + a \downarrow) & +e^{-i\theta/2}(-a \uparrow + a \downarrow) \end{bmatrix}$$

ใช้สูตรของอยเลอร์รวมเทอมใหม่

$$\begin{bmatrix} a''' \uparrow \\ a''' \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta/2 & i \sin \theta/2 \\ i \sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \uparrow \\ a \downarrow \end{bmatrix} \quad (6-59)$$

พึงสังเกตว่า $\begin{bmatrix} \cos \theta/2 & i \sin \theta/2 \\ i \sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{bmatrix}$ คือ แมททริกซ์ \underline{Q} , ในสมการที่ (2-114) นั้นเอง จากการ

พิจารณาเครื่องวิเคราะห์สปินของอนุภาคสปินครึ่งหน่วย พบร่วมกับการเปลี่ยนไปของอิเล็กตรอน เป็นไปตามการหมุนโดย 2×2 แมททริกซ์ในยูนิตารีสเปช

ในตอนนี้เราจะพอมองเห็นได้ทันทีว่า สมการการเปลี่ยนแปลงอิเล็กตรอน ความน่าจะเป็นของสปินครึ่งหน่วย อันเกิดจากการหมุนใด ๆ อาจจะเขียนได้โดยใช้แมททริกซ์ \underline{Q} ซึ่งแทนการหมุนใด ๆ ของ 2×2 แมททริกซ์ในยูนิตารีสเปช (สมการที่ 2-119) มาคูณกับ อิเล็กตรอนเดิม นั่นคือ ถ้า

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} a^{\uparrow} \\ a^{\downarrow} \end{bmatrix}, \bar{a}' = \begin{bmatrix} a'^{\uparrow} \\ a'^{\downarrow} \end{bmatrix} \quad (6-60)$$

แล้ว

$$\bar{a}' = \underline{Q} \cdot \bar{a} \quad (6-61)$$

หรือ

$$\begin{bmatrix} a'^{\uparrow} \\ a'^{\downarrow} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i(\psi+\phi)/2} \cos \theta/2 & i e^{i(\psi-\phi)/2} \cos \theta/2 \\ i e^{-i(\psi-\phi)/2} \sin \theta/2 & e^{-i(\psi+\phi)/2} \sin \theta/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{\uparrow} \\ a^{\downarrow} \end{bmatrix} \quad (6-62)$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหา 2×2 แมททริกซ์แทนการหมุนรอบแกน y เป็นมุมใด ๆ

วิธีทำ พิจารณา \underline{Q} จะเห็นว่าการหมุนรอบแกน x ทำได้โดยกำหนดให้ $\phi = 0 = \psi$ ใน สมการที่ (6-59) แมททริกซ์แทนการหมุนรอบแกน x ก็คือ

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta/2 & i \sin \theta/2 \\ i \sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{bmatrix} \quad (6-63)$$

ในการหมุนรอบแกน y เราต้องหมุนรอบแกน z ก่อนเป็นมุม $\frac{\pi}{2}$ แล้วหมุนรอบแกน x (คือ แกน y เก่า) เป็นมุม θ ที่ต้องการ แล้วจึงหมุนรอบแกน z ใหม่เป็นมุม $-\frac{\pi}{2}$ นั่นก็คือ

$$\phi = \frac{\pi}{2}, \theta = \theta, \psi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta/2 & \sin \theta/2 \\ -\sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{bmatrix} \quad (6-64)$$

6.6 สpins เมทริกซ์ของพอลลี (Pauli's Spin Matrices)

6.6.1 สมการคลื่นของระบบควอนตัมเมื่อเวลาผ่านไป

จากสมมติฐานของกลศาสตร์ควอนตัมเรารู้ว่า ระบบควอนตัมใด ๆ อาจจะแทนได้ด้วยพังก์ชันคลื่น ψ สมมติว่าเราต้องการทราบว่า เมื่อเวลาผ่านไป ระบบนั้นจะเป็นอย่างไร? เราอาจจะแก้สมการโซร์ดิงเจอร์ และหาพังก์ชันคลื่นในเวลาถัดมา หรืออาจจะใช้วิธีใหม่ ดังนี้

สมมติว่าที่เวลา t พังก์ชันคลื่นเป็น $\psi(t, t)$ แต่เราจะไม่คำนึงถึงตัวแปร t จะเขียนเป็น $\psi(t)$ ในตอนนี้ เราอาจจะถือว่าเมื่อเวลาผ่านไปขณะหนึ่ง พังก์ชันคลื่นนั้นเปลี่ยนไปเนื่องจากมีตัวดำเนินการมากกระทำต่อพังก์ชันคลื่นนั้น สมมติว่าเรารู้ว่าที่เวลา $t = t_1$ พังก์ชันคลื่นเป็น $\psi(t_1)$ ดังนั้น ในเวลาถัดมา เมื่อ $t = t_2$ พังก์ชันคลื่นจะเป็น $\psi(t_2)$ ให้ $U(t_2, t_1)$ เป็นตัวดำเนินการที่ทำให้พังก์ชันคลื่นเปลี่ยนจาก $\psi(t_1)$ เป็น $\psi(t_2)$ ดังนั้น

$$\psi(t_2) = U(t_2, t_1) \psi(t_1) \quad (6-65)$$

ถ้าหาก $t_1 \rightarrow -\infty$ และ $t_2 \rightarrow +\infty$ U จะมีสัญลักษณ์แทนเป็นพิเศษเรียกว่า S ค่า S คือ เมทริกซ์ S (S-matrix)

$$\psi(t_2 \rightarrow +\infty) = S \psi(t_1 \rightarrow -\infty) \quad (6-66)$$

จากสมการที่ (6-65) สมมติว่า $t_2 = t_1 + \Delta t$ ดังนั้น

$$|\psi(t_1 + \Delta t)\rangle = U(t_1 + \Delta t, t_1) |\psi(t_1)\rangle \quad (6-67)$$

ให้ t แทน t_1 คูณสมการ (6-67) ด้วย $\langle i |$ แล้วกระจาย $|\psi(t)\rangle$ บนชุดพังก์ชันมูลฐาน $|j\rangle$ ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\langle i | \psi(t + \Delta t) \rangle = \sum_j \langle i | U(t + \Delta t, t) | j \rangle \langle j | \psi(t) \rangle \quad (6-68)$$

ทางด้านซ้ายของสมการ (6-68) คือ สัมประสิทธิ์ความน่าจะเป็น $a_i(t + \Delta t)$

$$\text{ถ้าให้ } U_{ij}(t + \Delta t, t) = \langle i | U(t + \Delta t, t) | j \rangle$$

$$\text{และ } \langle j | \psi(t) \rangle = a_j(t) \text{ แล้ว}$$

เราอาจจะเขียนสมการ (6-68) เสียใหม่ ดังนี้

$$a_i(t + \Delta t) = \sum_j U_{ij}(t + \Delta t, t) a_j(t) \quad (6-69)$$

ในสมการที่ (6-69) แสดงว่าอัตราของการเปลี่ยนแปลงของความน่าจะเป็นที่เวลา $t + \Delta t$ เป็นผลจากการที่ตัวดำเนินการ U กระทำการต่อชุดของอัตราของการเปลี่ยนแปลงของความน่าจะเป็น $a_j(t)$ เมื่อเวลา t จะเห็นว่า

เมื่อ $\Delta t \rightarrow 0$, $U_{ii} = 1$, $U_{ij} = 0$ และเนื่องจาก U เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น ดังนั้น

$$U_{ij}(t + \Delta t) = \delta_{ij} + K_{ij} \Delta t \quad (6-70)$$

และเนื่องจากเหตุผลทางการคำนวณซึ่งจะปรากฏในตอนท้าย จึงนิยมเขียนสมการที่ (6-70) ดังนี้

$$U_{ij}(t + \Delta t) = \delta_{ij} - \frac{i}{\hbar} H_{ij}(t) \Delta t \quad (6-71)$$

แทนค่าสมการที่ (6-71) ลงในสมการที่ (6-69)

$$\begin{aligned} a_i(t + \Delta t) &= \sum_j \left(\delta_{ij} + \frac{i}{\hbar} H_{ij}(t) \right) a_j(t) \\ &= a_i(t) - \frac{i}{\hbar} \sum_j H_{ij} a_j(t) \Delta t \end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{a_i(t + \Delta t) - a_i(t)}{\Delta t} = - \frac{i}{\hbar} \sum_j H_{ij}(t) a_j(t)$ (6-72)

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a_i(t + \Delta t) - a_i(t)}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial t} a_i = - \frac{i}{\hbar} \sum_j H_{ij}(t) a_j(t)$$

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} a_i = \sum_j H_{ij} a_j \quad (6-73)$$

ทางด้านขวาของสมการ (6-73) H_{ij} คือ องค์ประกอบของแมทริกซ์ แอมมิลโทเนียน และต่อจากนี้ไปเพื่อให้สะดวกในการเขียน H_{ij} เราจะให้สถานะสpinชีล์บันเดนด้วยเลข 1 และสถานะสpinชีล์บันเดนด้วยเลข 2 ดังนั้นในระบบความตั้งของสpinครึ่งหน่วย สมการที่ (6-73) เขียนได้ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} i \hbar \frac{\partial}{\partial t} a_1(t) &= H_{11} a_1(t) + H_{12} a_2(t) \\ i \hbar \frac{\partial}{\partial t} a_2(t) &= H_{21} a_1(t) + H_{22} a_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (6-74)$$

สมการดิฟเฟอเรนเชียลชุด (6-74) อาจจะหาคำตอบได้โดยใช้พังก์ชัน

$$\left. \begin{aligned} a_1(t) &= a_1(0) e^{-i\omega t} \\ a_2(t) &= a_2(0) e^{-i\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (6-75)$$

โดยที่ $i\hbar\omega = E$ แทนค่าสมการชุด (6-75) ลงในสมการชุด (6-74)

$$\left. \begin{array}{l} E a_1(0) = H_{11} a_1(0) + H_{12} a_2(0) \\ E a_2(0) = H_{21} a_1(0) + H_{22} a_2(0) \end{array} \right\} \quad (6-74)'$$

สมการที่ (6-75) แสดงว่าเมื่อเวลาผ่านไป $|a_i(t)^2|$ ไม่เปลี่ยนไปตามเวลา

ทำให้ $(H_{ij}^*)^T = H_{ji}$

จัดสมการที่ (6-74)' เสียใหม่ ดังนี้

$$\left. \begin{array}{l} (E - H_{11}) a_1(0) - H_{12} a_2(0) = 0 \\ - H_{21} a_1(0) + (E - H_{22}) a_2(0) = 0 \end{array} \right\} \quad (6-76)$$

ก่อนจะแก้สมการชุด (6-76) สมมติว่า $H_{12} = H_{21} = 0$ จะเห็นว่า $E = H_{11}$ และ H_{22} แสดงว่า H_{11} และ H_{22} เป็นค่าจริง เป็นพลังงานของระบบเมื่อสมการชุด (6-76) เป็นอิสระเชิงเส้น ต่อกัน

สมการชุด (6-76) เป็นสมการเชิงเส้นของตัวแปร $a_1(0)$ และ $a_2(0)$ ซึ่งตัวแปรทั้งสองจะมีค่าต่างจากศูนย์เมื่อ

$$\begin{vmatrix} (E - H_{11}) - H_{12} \\ - H_{21} (E - H_{22}) \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{นั่นคือ } (E - H_{11})(E - H_{22}) - H_{12} H_{21} = 0$$

$$\text{หรือ } E^2 - (H_{11} + H_{22})E + H_{11} H_{22} - H_{12} H_{21} = 0$$

$$\therefore E = \frac{(H_{11} + H_{22})}{2} \pm \sqrt{\frac{(H_{11} - H_{22})^2}{4} + H_{12} H_{21}} \quad (6-77)$$

เนื่องจาก

$$H_{21} = H_{12}^*$$

จะเห็นว่าทั้งสองค่าของสมการ (6-77) เป็นจริง

$$\left. \begin{array}{l} \text{ให้ } E_I = \frac{H_{11} + H_{22}}{2} + \sqrt{\frac{(H_{11} - H_{22})^2}{4} + H_{12} H_{21}} \\ E_{II} = \frac{H_{11} + H_{22}}{2} - \sqrt{\frac{(H_{11} - H_{22})^2}{4} + H_{12} H_{21}} \end{array} \right\} \quad (6-78)$$

แทนค่าໄอเกน E_I และ E_{II} ลงในสมการ (6-75)

$$\left. \begin{array}{l} a_1^I(t) = a_1^I(0) e^{-(\frac{i}{h}) E_I t} \\ a_2^I(t) = a_2^I(0) e^{-(\frac{i}{h}) E_I t} \end{array} \right. \quad (6-79)$$

$$a_1^H(t) = a_1^H(0) e^{-(\frac{i}{\hbar})E_1 t} \quad (6-80)$$

$$a_2^H(t) = a_2^H(0) e^{-(\frac{i}{\hbar})E_2 t}$$

พังก์ชันไฮเกนของค่าไฮเกนชุดนี้คือ

$$|\psi_1\rangle = (|1\rangle a_1^I(0) + |2\rangle a_2^I(0)) e^{-(\frac{i}{\hbar})E_1 t} \quad (6-81)$$

$$|\psi_2\rangle = (|1\rangle a_1^H(0) + |2\rangle a_2^H(0)) e^{-(\frac{i}{\hbar})E_2 t} \quad (6-82)$$

6.6.2 แอมมิลโทเนียนของสปินครึ่งหน่วยในสนามแม่เหล็ก

เพื่อให้เห็นวิธีที่นักฟิสิกส์ได้นำเมทริกซ์มาใช้แทนสปิน เราจะแก้ปัญหาเฉพาะสักปัญหานึง คือ ปัญหាដของอิเล็กตรอนในสนามแม่เหล็ก ในสมการที่ (6-11) เราทราบว่า พลังงานของอิเล็กตรอนสปินในสนามแม่เหล็กคือ $-\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ ในสมการที่ (6-7) กล่าวว่าแม่กนติก-โนเมนต์ของอิเล็กตรอนมีค่า $\vec{\mu} = -\frac{q_e}{m_e} \vec{S}$ เมื่อ q_e เป็นประจุของ proton m_e เป็นมวลของ อิเล็กตรอน ดังนั้น ถ้าสนามแม่เหล็กซึ่งไปในทิศ $+z$ และ พลังงานจะมีค่าดังนี้

$$\begin{aligned} -\vec{\mu} \cdot \vec{B} &= -\mu_z B_z \\ &= \frac{q_e}{m_e} S_z B_z = \frac{q_e \hbar}{2m_e} B_z, -\frac{q_e \hbar}{2m_e} B_z \end{aligned} \quad (6-83)$$

เพื่อให้สะดวกในการเขียน ให้

$$\mu_z = -\frac{q_e \hbar}{2m_e} \quad (6-83)'$$

ดังนั้น ค่าไฮเกนของพลังงานมีสองค่า คือ $\pm \mu_z B_z$

$$\begin{array}{c} \hline -\mu_z B_z = \frac{q_e \hbar}{zm_e} B_z, \quad S_z \\ \uparrow \text{ทิศเพิ่มขึ้นของพลังงาน} \quad \frac{\hbar}{2} \\ \hline +\mu_z B_z = -\frac{q_e \hbar}{zm_e} B_z \quad -\frac{\hbar}{2} \end{array}$$

รูปที่ (6-22) ค่าของพลังงานสองค่าเกิดจากสปินของอิเล็กตรอนในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอ

จะเห็นว่าในกรณีสมการ (6-74) มีค่าไฮเกนของ H_{11} เป็น $-\mu_z B_z$ และค่าไฮเกน ของ H_{22} เป็น $+\mu_z B_z$ ดังนั้น เราอาจจะเขียนสมการชุด (6-74) เสียใหม่ได้ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} a_1(t) &= E_1 a_1(t) = -\mu_z B_z a_1(t) \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} a_2(t) &= E_2 a_2(t) = \mu_z B_z a_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (6-84)$$

โดยที่

$$H_{11} = -\mu_z B_z, \quad H_{12} = H_{21} = 0 \\ H_{22} = \mu_z B_z$$

สมมติว่าหลังจากนี้เราจะหมุนพิกัดให้ไปอยู่ในพิกัด x' , y' และ z' โดยมีชื่อตามแม่เหล็กอยู่ในทิศทางใด ๆ เนื่องจากการหมุนเป็นการแปลงเชิงเส้น เราจึงแน่ใจว่าองค์ประกอบของสนามแม่เหล็กจะไม่มีเทอมซึ่งเป็นกำลังสอง สมมติฐานที่เราจะใช้เพิ่มคือ การรวมกันของผลของสนามแม่เหล็กจะไปตาม superposition principle สมมติว่าสนามแม่เหล็กใหม่นี้คือ

$$\underline{B}' = B'_x \hat{i} + B'_y \hat{j} + B'_z \hat{k} \quad (6-85)$$

จากสมการที่ (6-85) จะเห็นว่า $B_z = |B'|$ ค่าไอโogen จึงเป็น

$$E_1 = -\mu_z \sqrt{B_x'^2 + B_y'^2 + B_z'^2} \quad (6-86)$$

$$E_2 = +\mu_z \sqrt{B_x'^2 + B_y'^2 + B_z'^2} \quad (6-87)$$

E_1 และ E_2 ในสมการ (6-86) และ (6-87) มีขนาดเท่ากัน มีเครื่องหมายกลับกัน แสดงว่าสปินของอิเล็กตรอนในสนามแม่เหล็กได้ ๆ ทำให้ค่าไอโogenแตกเป็นสองค่า มากและน้อยกว่าค่าไอโogenเดิม (เมื่อยังไม่คำนวนผลอันเกิดจากสปิน) เท่า ๆ กัน พิจารณาจากสมการ (6-78) จะเห็นว่า

$$H_{11} = -H_{22} \quad (6-88)$$

สมการ (6-88) แสดงว่า เทอมก่อนเครื่องหมายรากของ (6-78) เป็นศูนย์ ซึ่งแสดงว่าองค์ประกอบทางแกน z' ของสนาม (ในที่นี้คือ B_z') ให้พลังงานแก่สปินขึ้นและสปินลงเท่ากัน คือ $H_{11} = \mu_z B_z'$ และ $H_{22} = -\mu_z B_z'$ ดังนั้น จากสมการที่ (6-78), (6-86) และ (6-87) เราอาจจะเขียน ความสัมพันธ์ของ H_{ij} และค่าของพลังงานได้ดังนี้

$$\frac{(H_{11} - H_{22})^2}{4} + |H_{12}|^2 = |\mu_z|^2 (B_x'^2 + B_y'^2 + B_z'^2) \quad (6-89)$$

จากการสังเกตว่า เมื่อ $\bar{B} = B_z \hat{k} \rightarrow H_{12} = 0$ และ $H_{11} = -\mu_z B_z' \quad H_{22} = \mu_z B_z'$ เราสรุปได้ว่า

$$H_{12}^* H_{12} = |H_{12}|^2 = |\mu_z|^2 (B_x'^2 + B_y'^2) \quad (6-90)$$

จากสมการ (6-90) เราอาจจะหาค่าตอบ H_{12} ได้สองแบบคือ

$$H_{12} = \mu_z \sqrt{B_x'^2 + B_y'^2} \quad (6-91)$$

หรือ

$$H_{12} = \mu_z (B_x' \pm i B_y') e^{i\delta} \quad (6-91)'$$

แต่สมการ (6-91) ไม่ใช่สมการเชิงเส้น ดังนั้น

$$H_{12} = \mu_z (B'_x \pm i B'_y) e^{i\phi} \quad (6-92)$$

โดยที่ $e^{i\phi}$ บวกค่าเฟส นักฟิสิกส์ในยุคก่อนนิยมใช้ดังนี้

$$\left. \begin{array}{l} H_{12} = -\mu_z (B'_x - i B'_y) \\ H_{21} = -\mu_z (B'_x + i B'_y) \end{array} \right\} \quad (6-93)$$

เราจะไม่เขียน ('') อีก นั้นคือ $B'_i = B_i$ เราอาจจะเขียนแบบมิลโทเนี่ยนสำหรับสpinของอิเล็กตรอนในสนามแม่เหล็กได้ ๆ ได้ดังนี้

$$\left. \begin{array}{l} H_{11} = -\mu B_z, \quad H_{12} = -\mu (B_x - i B_y) \\ H_{21} = -\mu (B_x + i B_y), \quad H_{22} = +\mu B_z \end{array} \right\} \quad (6-94)$$

เมื่อ μ เป็นตัวดำเนินการซึ่งให้ค่าไอกেน μ ,

สมการที่ (6-74) ในกรณีของอิเล็กตรอนสpinในสนามแม่เหล็กคือ

$$\left. \begin{array}{l} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} a_1(t) = -\mu [B_z a_1(t) + (B_x - i B_y) a_2(t)] \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} a_2(t) = -\mu [(B_x + i B_y) a_1(t) - B_z a_2(t)] \end{array} \right\} \quad (6-95)$$

สมการชุด (6-95) อาจจะเขียนในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu B_z & -\mu (B_x - i B_y) \\ -\mu (B_x + i B_y) & +\mu B_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{bmatrix} \quad (6-96)$$

เทียบกับสมการ (6-73) ได้เมทริกซ์ของแม่มิลโทเนี่ยนดังนี้

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} -\mu B_z & -\mu (B_x - i B_y) \\ -\mu (B_x + i B_y) & +\mu B_z \end{bmatrix} \quad (6-97)$$

สมการที่ (6-96) อาจจะเขียนเสียใหม่ได้ดังนี้

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \bar{a} = \underline{H} \cdot \bar{a} \quad (6-96)'$$

หากเรามองย้อนไปยังสมการ (2-84) และ (2-120) ซึ่งเขียนไว้ว่า

$$\begin{aligned} \underline{Q} &= \begin{bmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{bmatrix} \\ &= x\underline{\sigma}_x + y\underline{\sigma}_y + z\underline{\sigma}_z \\ \bar{r} &= (x, y, z) \quad \text{เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ} \end{aligned}$$

จะเห็นว่าเราอาจเขียนสมการ (6-97) เสียใหม่ได้ดังนี้

$$H = -\mu [\underline{\sigma}_x B_x + \underline{\sigma}_y B_y + \underline{\sigma}_z B_z] \quad (6-98)$$

โดยที่ $\underline{\sigma}_x$, $\underline{\sigma}_y$ และ $\underline{\sigma}_z$ เป็นสpinแมทริกซ์ของพอลลี

การคิดใช้สpinแมทริกซ์ของพอลลีในรูปนี้เกิดจาก การศึกษาตัวอย่างเฉพาะตัวอย่างหนึ่งแล้วค่อย ๆ ขยายให้มีขوبเขตกว้างขวางขึ้นเป็นเวชีสำคัญอันหนึ่งในการวิจัยทางฟิสิกส์

6.6.3 คุณสมบัติสำคัญของสpinแมทริกซ์ของพอลลี

สpinแมทริกซ์ของพอลลีใช้อธิบายปรากฏการณ์สpinครึ่งหน่วยหักหมุด จะเห็นว่า พังก์ชันคลื่นของสpinแมgnit โโนเนียน คือ

$$\psi(t) = \begin{bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{bmatrix} \quad (6-99)$$

$$\underline{\sigma}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6-100a)$$

$$\underline{\sigma}_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad (6-100b)$$

$$\underline{\sigma}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (6-100c)$$

ตัวดำเนินการของสpinคือ

$$\underline{S} = \frac{\hbar}{2} \underline{\sigma} \quad (6-101)$$

นั่นคือ $\underline{S}_x = \frac{\hbar}{2} \underline{\sigma}_x$ ฯลฯ \underline{S} มีชื่อเรียกว่า เวกเตอร์ชิกมา โดยที่ $\underline{\sigma} = (\underline{\sigma}_x, \underline{\sigma}_y, \underline{\sigma}_z)$ นับ เป็นเวกเตอร์ที่แปลง คือ องค์ประกอบเป็นแมทริกซ์และองค์ประกอบนี้มีค่าเปลี่ยนไป เมื่อพิจัดเปลี่ยนไป $\underline{\sigma}$ เป็นตัวดำเนินการ 2×2 เมทริกซ์ในยูนิตารีสเปช

6.7 สpinหนึ่งหน่วย (Spin One)

สpinหนึ่งหน่วยมีโมเมนตัมเชิงมุมเป็น \hbar โดยปกติคำแห่งของอนุภาคจะอยู่กับที่ (หมายถึงแมgnit โโนเนียนเกิดจากตัวดำเนินการสpinอย่างเดียว) ดังนั้น สpinจะเปลี่ยนเฉพาะ

ทิศทาง สpin หนึ่งหน่วยจะมีทิศที่สpin ซึ่งสามทิศ (ตาม vector model ของโมเมนตัมเชิงมุน) เราจึงเขียนฟังก์ชันคลื่นได้ดังนี้

$$\psi = \begin{bmatrix} a_1(\bar{r}, t) \\ a_0(\bar{r}, t) \\ a_{-1}(\bar{r}, t) \end{bmatrix} = \psi(\bar{r}, t, \phi_{ms}) \quad (6-102)$$

เราจะไม่เขียนตัวแปร \bar{r}, t ในคราวต่อไป m_s มีค่าสามค่า คือ $0, \pm 1$ เมทริกซ์ของตัวดำเนินการ ซึ่งแทนองค์ประกอบของตัวดำเนินการตามแนวแกน x, y และ z คือ

$$\begin{aligned} \underline{\underline{S}}_x &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{S}}_y &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{S}}_z &= \hbar \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6-103)$$

จะเห็นว่าตัวดำเนินการทั้งสามเป็นเชอร์มีเชียน และ

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = 2\hbar^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2\hbar^2 \underline{\underline{I}} \quad (6-104)$$

จากสมการ (6-102) และสมการชุด (6-103) เราอาจจะเขียนสมการค่าไอลูเกนได้ดังนี้

$$(\underline{\underline{S}}_z - m_s \underline{\underline{I}}) \psi = 0 \quad (6-105)$$

สมการ (6-105) เป็นสมการ homogeneous เชิงเส้น ซึ่งจะมีค่าตอบ ถ้า

$$\det(\underline{\underline{S}}_z - m_s \underline{\underline{I}}) = 0$$

หรือ

$$\begin{vmatrix} \hbar - m_s & 0 & 0 \\ 0 & -m_s & 0 \\ 0 & 0 & -\hbar - m_s \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{ซึ่งให้ค่า } m_s = \hbar, 0, -\hbar \quad (6-106)$$

ค่าเฉลี่ยของตัวดำเนินการ $\underline{\underline{S}_z}$ ที่จุด \bar{r} อาจจะหาได้ดังนี้

$$\langle \underline{\underline{S}_z} \rangle_{\bar{r}} = \frac{\hbar|a_1|^2 + 0|a_0|^2 + (-\hbar)|a_{-1}|^2}{\sum_{m_s} |a_{ms}|^2} \quad (6-107)$$

ซึ่งเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$\langle \underline{\underline{S}_z} \rangle_{\bar{r}} = \frac{(\bar{\psi}^*)^T \cdot \underline{\underline{S}_z} \cdot \bar{\psi}}{(\bar{\psi}^*)^T \cdot \bar{\psi}}$$

แต่ค่าเฉลี่ยทั้งสเปชของ $\underline{\underline{S}_z}$ ก็คือ

$$\langle \underline{\underline{S}_z} \rangle = \frac{\int d\bar{r} (\bar{\psi}^*)^T \cdot \underline{\underline{S}_z} \cdot \bar{\psi}}{\int d\bar{r} (\bar{\psi}^*)^T \cdot \bar{\psi}} \quad (6-108)$$

6.8 การบวกกันของสปินและโมเมนตัมเชิงมุน

ในอีกตอนที่มีอิเล็กตรอนหลาย ๆ ตัว เราทราบจากในวิชาพิสิกส์เบื้องต้นว่าการจัดตัวของโมเมนตัมเชิงมุนมีสองแบบคือ แบบที่เรียกว่า การคัปปลิงแบบ L – S (L – S Coupling) และการคัปปลิงแบบ J – J (J – J Coupling) การคัปปลิงแบบ L – S เกิดในอีกตอนเล็ก ๆ ซึ่งค่าของอันตรกิริยาระหว่างสปินกับโมเมนตัมเชิงมุนของอิเล็กตรอนมีค่าน้อยกว่าอันตรกิริยาคุณลอมบ์ของอิเล็กตรอน ในทางตรงกันข้าม การคัปปลิงของ J – J อันตรกิริยาระหว่างสปินกับโมเมนตัมเชิงมุนของอิเล็กตรอนมีค่ามากกว่าอันตรกิริยาคุณลอมบ์ระหว่างอิเล็กตรอน ถ้าหากเรากำหนดให้

$$\bar{\chi} = \begin{bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{bmatrix} \quad (6-109)$$

$\bar{\chi}$ เป็นเมทริกซ์ฟังก์ชันคลื่น ซึ่งมีชื่อเรียกเป็นพิเศษว่า spinors เราอาจจะสร้างฟังก์ชันคลื่นสำหรับการคัปปลิงแบบ L – S ดังนี้

$$|\ell m_s m_s \rangle = Y_{\ell m}(\theta, \phi) \chi_s m_s \quad (6-110)$$

สำหรับการคัปปลิงแบบ J – J เราอาจจะสร้างฟังก์ชันคลื่นขึ้นได้ดังนี้

$$|jm_j \ell s \rangle = \sum_{m_s m_s} \langle jm_j \ell s | \ell m_s m_s \rangle Y_{\ell m}(\theta, \phi) \chi_{s m_s} \quad (6-111)$$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $|lm_lsm_s> = |lm_l \frac{1}{2} m_s>$ จงหาฟังก์ชันคลื่นห้องหมอด $|jm_j l \frac{1}{2}>$ เท่าที่จะหาได้

วิธีทำ จะเห็นว่าฟังก์ชันคลื่นซึ่งมีค่า j และ m_l สูงสุดจากสมการ (6-11) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} |jm_j l \frac{1}{2}> &= \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} l \frac{1}{2} \right> = Y_{11}(\theta, \phi) \chi_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} \\ &= \left| 11 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right> = |\ell m_l sm_s> \end{aligned} \quad (6-112)$$

ผลรวมไม่มีในที่นี่ เพราะมีฟังก์ชันคลื่นชุดเดียวซึ่งให้ค่า j และ m_l สูงสุดในสมการ (6-11)

ใช้สมการ (5-77) : $J_- |jm_j l \frac{1}{2}> = (j + m_j)^{\frac{1}{2}} (j - m_j + 1)^{\frac{1}{2}} \hbar |j, m_j - 1, l \frac{1}{2}>$

และเนื่องจาก $\bar{J} = \bar{L} + \bar{S} \rightarrow J_- = L_- + S_-$

ให้ตัวดำเนินการ J_- กระทำต่อฟังก์ชันคลื่นในสมการ (6-112) ได้ผลลัพธ์เป็น

$$\begin{aligned} J_- \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} l \frac{1}{2} \right> &= \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \hbar \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} l \frac{1}{2} \right> \\ &= L_- Y_{11}(\theta, \phi) \chi_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} + S_- Y_{11}(\theta, \phi) \chi_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} \\ &= (1+1)^{\frac{1}{2}} (1-1+1)^{\frac{1}{2}} \hbar Y_{10} \chi_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \hbar Y_{11} \chi_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} \\ &= 2^{\frac{1}{2}} \hbar Y_{10} \chi_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} + \hbar Y_{11} \chi_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} \\ \therefore \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} l \frac{1}{2} \right> &= \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{2}} Y_{10} \chi_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{2}} Y_{11} \chi_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

ใช้ J_- กระทำเรื่อยๆไป จะพบว่า

$$\begin{aligned} \left| \frac{3}{2} - \frac{1}{2} l \frac{1}{2} \right> &= \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{2}} Y_{1-1} \chi_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} + \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{2}} Y_{10} \chi_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} \\ \left| \frac{3}{2} - \frac{3}{2} l \frac{1}{2} \right> &= Y_{1-1} \chi_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

6.9 สรุป

ความสัมพันธ์ระหว่างแมกเนติกโมเมนต์กับโมเมนตัมเชิงมุ่งในพิสิกส์แบบฉบับ คือ

$$\bar{\mu} = \frac{q}{2m} \bar{J} \quad (6-5)$$

$$\text{สำหรับอิเล็กตรอนในวงโคจร} \quad \bar{\mu}_e = -\frac{q_e}{2m_e} \bar{J} \quad (6-6)$$

$$\text{สำหรับสpinของอิเล็กตรอน} \quad \bar{\mu} = -\frac{q_e}{m_e} \bar{S} \quad (6-7)$$

$$\text{สำหรับโปรตอนในวงโคจร คือ} \quad \bar{\mu} = g \left(\frac{q_e}{2m_p} \right) \bar{J} \quad (6-9)$$

พลังงานของแมกเนติกโมเมนต์ในสนามแม่เหล็ก

$$\Delta U = -g \left(\frac{q_e}{2m} \right) J \cdot B \quad (6-13)$$

สมการที่แทนการหมุนได้ ๆ ของ 2×2 แมทริกซ์ในนิทารีสเปช คือ

$$\begin{vmatrix} e^{i(\psi + \phi)} \cos \frac{\theta}{2} & ie^{i(\psi + \phi)/2} \cos \frac{\theta}{2} \\ ie^{-i(\psi + \phi)/2} \sin \frac{\theta}{2} & e^{-i(\psi + \phi)/2} \sin \frac{\theta}{2} \end{vmatrix}$$

โดยที่ ϕ, θ และ ψ เป็นมุ่งของออยเลอร์

ค่าไอกেนของสpinครึ่งหนึ่งหาได้ดังนี้

$$\begin{aligned} E_I &= \frac{H_{11} + H_{22}}{2} + \sqrt{\frac{(H_{11} - H_{22})^2}{4} + H_{12}H_{21}} \\ E_{II} &= \frac{H_{11} + H_{22}}{2} - \sqrt{\frac{(H_{11} - H_{22})^2}{4} + H_{12}H_{21}} \end{aligned} \quad (6-78)$$

แฮมมิลโโนเนียนของสpinครึ่งหนึ่งหน่วยในสนามแม่เหล็ก คือ

$$H = -\mu |\underline{\sigma}_x B_x + \underline{\sigma}_y B_y + \underline{\sigma}_z B_z| \quad (6-98)$$

โดยที่ $\underline{\sigma}_x, \underline{\sigma}_y$ และ $\underline{\sigma}_z$ เป็นสpin แมทริกซ์ของพอลลี

สำหรับการคัปปิลิงแบบ jj

$$jm_j |s> = \sum_{m_l m_s} < jm_j | s | l m_l s m_s > Y_{lm_l}^{(\theta, \phi)} \chi_s m_s \quad (6-111)$$

6.10 คำ답ท้ายบท

1. จงอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างแมกнетิกโมเมนต์กับโมเมนตัมเชิงมุนของวัตถุในวงโคจร?
2. Bohr magneton คืออะไร?
3. การทดลองของสเติน-เกอลัก ให้ผลซึ่งต่างจากความคาดหมายอย่างไรบ้าง
4. ความไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อมีการหมุนคืออะไร?
5. จงอธิบายการเปลี่ยนไปของฟังก์ชันคลื่นอันเนื่องจากเมทริกซ์ S ?
6. จงอธิบายถึงความแตกต่างกันของการคลัปปิลิงแบบ $j-j$ และ $L-S$?

แบบฝึกหัดบทที่ 6

1. (ก) จงแสดงว่า $\underline{\underline{S}}_i \cdot \underline{\underline{S}}_j + \underline{\underline{S}}_j \cdot \underline{\underline{S}}_i = 0$ เมื่อ i และ j คือ x, y และ z เมื่อ $\underline{\underline{S}}$, คือตัวดำเนินการในสมการที่ (6-101)
 - (ข) จงแสดงว่า $\underline{\underline{S}}^2 = \frac{\hbar^2}{4} \underline{\underline{I}}$ เมื่อ $i = x, y$ และ z
 - (ค) จงหาค่าไอเกนของ $\underline{\underline{S}}$, และ $\underline{\underline{S}}^2$.
 - (ง) จงแสดงว่า $\underline{\underline{S}}_x \cdot \underline{\underline{S}}_y = i \frac{\hbar}{2} \underline{\underline{S}}_z$
 - (จ) จงหาค่า $\underline{\underline{S}}^2$
2. จงแสดงว่าเมมทริกซ์ $\underline{\underline{\sigma}}$, และ σ_y เป็นเชอร์มีเซียน ยูนิการี nonsingular และ anti-commute จงสร้างเมมทริกซ์ $\underline{\underline{\sigma}}_+ = \underline{\underline{\sigma}}_x + i \underline{\underline{\sigma}}_y$ และ $\underline{\underline{\sigma}}_- = \underline{\underline{\sigma}}_x - i \underline{\underline{\sigma}}_y$ นำ $\underline{\underline{\sigma}}_{\pm}$ ไปกระทำบน spinor $\chi_{1, \pm \frac{1}{2}}$ และ $\chi_{1, -\frac{1}{2}}$ สังเกตดูว่ามีผลอะไรเกิดขึ้น
3. อนุภาคตัวหนึ่งมีสปิน $\frac{\hbar}{2}$ ได้มีการวัดครั้งหนึ่งเพื่อหาองค์ประกอบทางแกน z และทางแกน x ของสปินพร้อมๆ กัน จงอธิบายถึงผลที่จะได้ และถ้าหากหลังจากการวัดครั้งนี้แล้วมีการวัดองค์ประกอบของสปินทางแกน y จงหาความน่าจะเป็นช่องผลของการวัดจะได้ว่า $\pm \frac{\hbar}{2}$
คำแนะนำ : สมมติว่าสนามแม่เหล็กซึ่งไปในแนวแกน z ในเครื่องวิเคราะห์ภาวะของสปิน
4. ล้ำของอนุภาคซึ่งมีสปินครึ่งหน่วยวิ่งผ่านเครื่องมือของสเติน-เกอเล็ค ทำให้ล้ำอนุภาคนั้นแบ่งออกเป็นสองลำตามค่าเลขด้านความตั้ม m . ล้ำของอนุภาคล้ำหนึ่งถูกก่อต้นแต่อีกล้ำหนึ่งวิ่งผ่านเครื่องมือของสเติน-เกอเล็ค เครื่องที่สองซึ่งทำมุม α กับสนามแม่เหล็กในเครื่องแรก จงหาขนาดสัมพัทธ์ของอนุภาคซึ่งวิ่งออกจากเครื่องมือเครื่องที่สองเทียบกับอนุภาคซึ่งเข้าไปในเครื่องมือที่หนึ่ง
5. จงแสดงว่าตัวดำเนินการยูนิการี $\exp \left[\left(\frac{i}{\hbar} \right) \theta \hat{\underline{\underline{k}}} \cdot \underline{\underline{S}} \right]$ มีค่าดังนี้

$$\exp \left[\left(\frac{i}{\hbar} \right) \theta \hat{\underline{\underline{k}}} \cdot \underline{\underline{S}} \right] = \cos \frac{\theta}{2} + iz \frac{\hat{\underline{\underline{k}}} \cdot \underline{\underline{S}}}{\hbar} \sin \frac{\theta}{2}$$

เมื่อ $\hat{\underline{\underline{k}}}$ เป็นเวกเตอร์ซึ่งมีขนาดหนึ่งหน่วยซึ่งคงที่ และ $S = \frac{1}{2}$

คำแนะนำ : จงแสดงว่าสมการเป็นจริงเมื่อ $\hat{\underline{\underline{k}}} = \hat{i}, \hat{j}$ และ \hat{k}

6. สมมติว่าอิเล็กตรอนตัวหนึ่งมีแมกเนติกโมเมนต์ $\bar{\mu}$ อยู่ในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอ \bar{B}
- (ก) จงเขียนสมการโดยรูปแบบ $\dot{\bar{r}} = \bar{r} \times \bar{B}$ สำหรับระบบความตั้มนี้
- (ข) สมมติว่า $\bar{B} = B_0 \hat{k}$ เมื่อ $t = 0$ สูญญากาศที่ไปทางแกน $+x$ มีค่า $\frac{\hbar}{2}$
จงหาพังก์ชันคลื่นของระบบความตั้มนี้
- (ค) จงหา precession frequency และแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง precession frequency นี้ กับพังก์ชันคลื่น
7. จงหา $\langle \underline{S}_x \rangle$ และ $\langle \underline{S}_y \rangle$ และถ้าหากว่า $\underline{S}^+ = \underline{S}_x \cos \omega t + \underline{S}_y \sin \omega t$
จงแสดงว่า พังก์ชันคลื่นในข้อ (ข) เป็นไอกenen พังก์ชันของ \underline{S}^+
- คำแนะนำ : อ่าน Dicke, R.H. and Wittke, J.P., *Introduction to Quantum Mechanics*,
1st ed., Mass : Addison - Wesley, 1960, หน้า 193-199
8. อนุภาคสปินหนึ่งหน่วย (\hbar) มีแมกเนติกโมเมนต์ $\bar{\mu}$ อยู่ในสนามแม่เหล็ก \bar{B} ที่เวลา $t = 0$ องค์ประกอบของสปินบนแกนซึ่งทำมุม θ กับทิศของสนามมีค่ารัดได้ $m\hbar$
จงหาความน่าจะเป็นที่ทำให้การวัดครั้งถัดไปจะได้ค่าไอกenen $m'\hbar$?
9. (ก) สมมติว่าอนุภาคตัวหนึ่งมีมวล m ให้

$$\underline{T}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \bar{P} \cdot \underline{\sigma}$$

\bar{P} เป็นตัวดำเนินการโมเมนต์, $\underline{\sigma}$ เป็นแมกทริกซ์ของพอลลี จงแสดงว่า

$$[\underline{T}^{\frac{1}{2}}, \underline{T}] = 0 \text{ และ } [\underline{T}^{\frac{1}{2}}, \bar{P}] = 0, \underline{T} = \frac{1}{2m} \bar{P}^2 \underline{I}$$

$$(ข) \text{ จงแสดงว่า } (\underline{T}^{\frac{1}{2}})^2 = \underline{I}$$

$$(ค) \text{ จงแสดงว่าค่าไอกenen ของ } \underline{T}^{\frac{1}{2}} \text{ คือ } \pm E^{\frac{1}{2}} \text{ เมื่อ } E \text{ คือพลังงานของระบบ}$$

$$(ง) \text{ จงแสดงว่าพังก์ชันคลื่นของ } \underline{T}^{\frac{1}{2}}, \underline{T} \text{ และ } \underline{P} \text{ คือ}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \exp(i \bar{k} \cdot \bar{r}) \quad \text{เมื่อ } a \text{ และ } b \text{ เป็นค่าคงที่}$$

$$(ง) \text{ จงแสดงว่าตัวดำเนินการ parity เป็นสถานะไอกenen ของ } \underline{T}^{\frac{1}{2}} \text{ เป็นสถานะไอกenen}\newline \text{ซึ่งมีเครื่องหมายตรงข้ามกับสถานะไอกenenเดิม}$$

10. ตัวดำเนินการสpinสองตัว คือ $\underline{\underline{S}}_1$ และ $\underline{\underline{S}}_2$ มีพังก์ชันไอกenen เป็น $\alpha(1)$, $\beta(1)$, $\alpha(2)$ และ $\beta(2)$ ตามลำดับ โดยที่

$$\begin{aligned}\underline{\underline{S}}_1 \cdot \alpha(1) &= \frac{\hbar}{2} \alpha(1) & \underline{\underline{S}}_2 \cdot \alpha(2) &= \frac{\hbar}{2} \alpha(2) \\ \underline{\underline{S}}_1 \cdot \beta(1) &= -\frac{\hbar}{2} \beta(1) & \underline{\underline{S}}_2 \cdot \beta(2) &= -\frac{\hbar}{2} \beta(2)\end{aligned}$$

(ก) ถ้า $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}}_1 + \underline{\underline{S}}_2$ และ $\underline{\underline{S}}^2 = \underline{\underline{S}}_1^2 + \underline{\underline{S}}_2^2$, จงสร้างพังก์ชันไอกenen ของ $\underline{\underline{S}}$ และ $\underline{\underline{S}}^2$ จาก $\alpha(i)$ และ $\beta(j)$ เมื่อ $i, j = 1, 2$?

(ข) ถ้า $\chi(1, 2)$ เป็นพังก์ชันไอกenen ซึ่งสร้างได้จากข้อ (ก) $\chi(1, 2)$ เป็น symmetric หรือ antisymmetric ดังนี้

$$\chi(1, 2) = +\chi(2, 1) \quad : \text{symmetric}$$

$$\chi(1, 2) = -\chi(2, 1) \quad : \text{antisymmetric}$$

จงหาว่าพังก์ชันคลื่นใด symmetric พังก์ชันคลื่นใดเป็น antisymmetric?

(ค) จงทำให้ขนาดของพังก์ชันไอกenen ในข้อ (ก) เป็นหนึ่ง

(ง) จงหาค่าไอกenen ของ $\underline{\underline{S}}^2$ และ $\underline{\underline{S}}$, จากพังก์ชันไอกenen ในข้อ ค.

(จ) จงหาพังก์ชันไอกenen และค่าไอกenen ของ $\underline{\underline{S}}_1 \cdot \underline{\underline{S}}_2$