

**บทที่ 5**  
**ตัวดำเนินการโมเมนตัมเชิงมุม**

## บทที่ 5

### ตัวดำเนินการโมเมนตัมเชิงมุม

#### วัตถุประสงค์

1. ให้สามารถคำนวณตัวดำเนินการโมเมนตัมเชิงมุมจากฟังก์ชันคลื่น
2. ให้สามารถคำนวณวงเล็บการสับเปลี่ยนของตัวดำเนินการโมเมนตัม
3. สามารถคำนวณค่าคาดหวังของตัวแทนโมเมนตัม การบวกกันของโมเมนตัม การบวกกันของโมเมนตัมและสปิน
4. สามารถเขียนตัวดำเนินการโมเมนตัมในรูปของเมทริกซ์



รูปที่ (5-1)

Niels Henrick David Bohr ผู้ให้สมมุติฐานว่า โมเมนตัมเชิงมุมในวงโคจรของอิเล็กตรอนในอะตอม ควรจะมีค่าเท่ากับเล็กจำนวนเต็มคูณด้วย  $\hbar (= \frac{h}{2\pi})$

## 5.1 บทนำ

ปริมาณที่เรียกว่าโมเมนตัมเชิงมุมในกลศาสตร์ควอนตัม ไม่ใช่ปริมาณที่วัดได้โดยตรง ซึ่งแตกต่างจากกลศาสตร์แบบฉบับ หากแต่เกิดจากข้อมูลชุดหนึ่ง ซึ่งถ้าหากว่าเราสมมติว่าข้อมูลชุดนี้เกิดจากโมเมนตัมเชิงมุม เราจะได้คำตอบซึ่งตรงกันกับการคาดคะเนทางทฤษฎี ดังเราจะกล่าวถึงในตัวอย่างต่อไป

**ตัวอย่างที่ 1** โมเมนตัมเชิงมุมของแสงโพลาไรซ์ด (polarized light)

ในกลศาสตร์ควอนตัม สปินของโฟตอนมีค่าเท่ากับหนึ่งหน่วยหรือ  $1 \hbar$  เมื่อ  $\hbar$  เป็นค่าคงที่ของพลังค์ (Planck's Constant) หากด้วย  $2\pi$  เราจะใช้การคำนวณตามวิธีของกลศาสตร์แบบฉบับ ในสัจพจน์ที่ 3 กล่าวว่า ถ้าหากเรามีกฎทางกลศาสตร์ควอนตัม ในขอบเขตซึ่งกฎนั้นใช้ได้กับฟิสิกส์แบบฉบับ กฎนั้นจะให้ผลคล้องจองกับฟิสิกส์แบบฉบับ

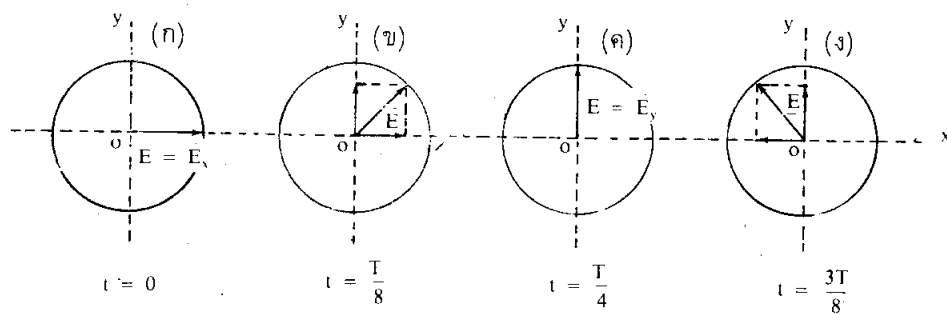
ในกลศาสตร์ควอนตัม ถ้าลำแสงตกกระทบผิวชั่วระยะเวลาหนึ่งมีพลังงาน  $W$  จะมีจำนวนโฟตอนเท่ากับ

$$N = \frac{W}{\hbar \omega} \quad (5-1)$$

โมเมนตัมเชิงมุมของแสงนั้นจะเป็น

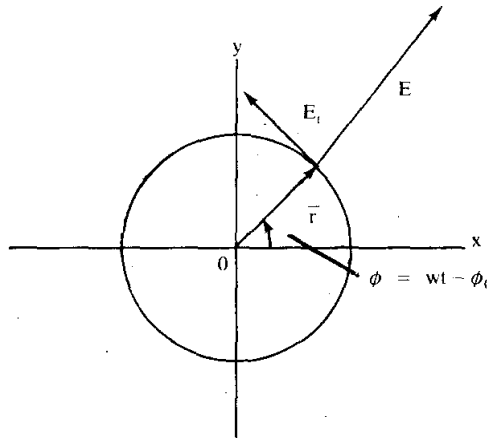
$$J_z = N\hbar = \frac{W}{\omega} \quad (5-2)$$

ในฟิสิกส์แบบฉบับแสงซึ่งมีโพลาไรเซชันเป็นวงกลมบิดขวา (right circularly polarized light) เกิดจากสนามไฟฟ้าซึ่งแกว่งขึ้นลงตามแนวแกน  $x$  และแนวแกน  $y$  โดยที่การเคลื่อนที่ตามแนวแกน  $y$  มีเฟสตาม (lag) แนวแกน  $x$  อยู่  $90^\circ$  ดังรูป (5-2)



รูปที่ (5-2) แสงโพลาไรซ์ดเป็นวงกลมบิดขวา สนามไฟฟ้าตามแนวแกน  $y$  มีเฟสอยู่หลังสนามตามแนวแกน  $x$  อยู่  $90^\circ$

สมมติว่าแสงนี้ตกกระทบบนผนังซึ่งมีอิเล็กตรอนภายในอะตอมที่อาจเคลื่อนที่ได้ตามแบบฮาร์มอนิกชนิดง่าย เมื่อได้รับอิทธิพลของสนามภายนอก สมมติว่าอะตอมนั้นมีลักษณะไอโซทรอปิก (isotropic)\* ดังนั้น อิเล็กตรอนจะมีอิสระในการแกว่งเหมือนกันทั้งในแนวแกน x และแนวแกน y เนื่องจากแสงที่ตกกระทบบนผนังมีสนามไฟฟ้าทางแนวแกน y มีเฟสตามแนวแกน x อยู่  $90^\circ$  การเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนจึงเป็นวงกลมไปด้วย อิเล็กตรอนจะถูกสนามดึงให้ออกจากจุดสมดุล การเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนจะมีเฟสตามการเคลื่อนที่ของสนามลัพธ์  $\vec{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k}$  อยู่เป็นค่า ๆ หนึ่ง สมมติว่าเป็น  $\phi$  (ดูรูป 5-3) เมื่อเวลาผ่านไป  $\vec{E}$  และ  $\vec{r}$  จะเคลื่อนเป็นวงกลมด้วยความถี่เดียวกัน งานที่สนามกระทำบนอิเล็กตรอน ทำให้มีอัตราการไหลของพลังงานไปสู่อิเล็กตรอน ดังนี้



การเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอน รูปที่ (5-3)

$$\frac{dW}{dt} = qE_t v \quad (5-3)$$

เมื่อ  $v$  คือ ความเร็วของอิเล็กตรอน  $E_t$  เป็นองค์ประกอบของสนามซึ่งมีทิศทางกับการเคลื่อนที่ ทอร์ครอบจุดกำเนิด  $0$  ก็คือ  $qE_t r$  ถ้า  $J$  เป็นโมเมนตัมเชิงมุมของอิเล็กตรอนซึ่งเกิดจากโมเมนตัมเชิงมุมของโฟตอน ดังนั้น

$$\frac{dJ}{dt} = qE_t r \quad (5-4)$$

\* isotropic หมายถึง ไม่เลือกว่าจะเคลื่อนไปในทิศใด แต่ละทิศมีความสำคัญเท่ากันหมด

หารสมการที่ (5-4) ด้วยสมการที่ (5-3) ได้ว่า

$$\frac{dJ_z}{dW} = \frac{r}{v} = \frac{1}{\omega} \quad (5-5)$$

$$\therefore \int_0^{J_z} dJ_z = \frac{1}{\omega} \int_0^W dW$$

$$J_z = \frac{W}{\omega} \quad (5-6)$$

สมการที่ (5-6) เท่ากับสมการที่ (5-2) แสดงว่าแสงนี้มีโพลาไรเซชันเป็นวงกลมบิดขวา มีโมเมนตัมเชิงมุม  $\hbar$  ดังนั้น แสงที่มีโพลาไรเซชันเป็นวงกลมบิดซ้ายจะมีโมเมนตัมเชิงมุม  $-\hbar$  ส่วนแสงปกติซึ่งเกิดจากการรวมกันของแสงที่มีโพลาไรเซชันบิดทั้งซ้ายและขวามีสัดส่วนเท่า ๆ กัน จะไม่สามารถวัดโมเมนตัมเชิงมุมได้ เราเรียกแสงปกติว่าเป็นแสงที่มีโพลาไรเซชันตามเส้น จะเห็นว่าโมเมนตัมเชิงมุมของแสงไม่ใช่ปริมาณที่วัดได้โดยตรง

ข้อสังเกตอีกประการหนึ่งก็คือ แสงมีโมเมนตัมเชิงมุม หรือจะเรียกให้ถูกต้องคือ สปิน เท่ากับ 1 หน่วย แต่มีสองสถานะ โดยปกติ ถ้าอนุภาคมีสปิน  $j$  จะมี  $(2j+1)$  สถานะที่เป็นดังนี้เพราะอนุภาคอยู่หนึ่ง ๆ ณ จุดใด ๆ ก็ได้ ส่วนแสงนั้นเคลื่อนที่อยู่ตลอดเวลา ทำให้การหาโมเมนตัมเชิงมุมเป็นไปได้เฉพาะรอบแกนซึ่งเป็นทิศที่แสงเคลื่อนไปเท่านั้น ทำให้แสงมีสองสถานะเท่านั้น

จากตัวอย่างนี้จะเห็นว่า โมเมนตัมเชิงมุม เป็นค่าที่ได้สอดคล้องกับค่าไอเกนของการหมุนของระบบกายภาพที่เราพิจารณา

ในกลศาสตร์แบบฉบับ โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุในวงโคจร (orbital angular momentum) จะเป็นค่าคงที่ ถ้าหากแฮมิลโทเนียนของระบบเป็นค่าคงที่สำหรับการหมุนนั้น ๆ เรากล่าวว่าระบบชนิดนี้มีสมมาตร (symmetry) สำหรับการหมุน ซึ่งหมายถึงว่าวงเล็บของบิวของระหว่างแฮมิลโทเนียนกับโมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุในวงโคจรนั้นเป็นศูนย์ เมื่อปัญหานี้พิจารณากันในเชิงกลศาสตร์ควอนตัม หมายถึงว่า ตัวดำเนินการทั้งสองคือ แฮมิลโทเนียน กับโมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุในวงโคจรสับเปลี่ยนกันได้ ทำให้การวัดปริมาณทั้งสองในระบบควอนตัมนั้นทำได้พร้อมกัน

ความแตกต่างที่สำคัญอีกประการหนึ่งระหว่างกลศาสตร์แบบฉบับและกลศาสตร์ควอนตัมในเรื่องของโมเมนตัมเชิงมุมก็คือ ตัวดำเนินการโมเมนตัมเชิงมุมของแต่ละแกนในพิกัด  $x, y$  และ  $z$  ไม่สามารถสับเปลี่ยนกันได้อีกกับแฮมิลโทเนียนทุก ๆ แกนพร้อมกัน แต่

จะมีตัวดำเนินการเชิงมุมเพียงแกนเดียวที่สับเปลี่ยนกันได้กับแฮมมิลโทเนียน เรามักจะเรียกตัวดำเนินการนี้ว่า  $L_z$

## 5.2 การหาตัวดำเนินการโมเมนตัมเชิงมุม

ในบทที่สองได้แสดงให้เห็นว่าการหมุนของวัตถุเกร็ง อาจจะแทนได้ด้วยเมทริกซ์ในกลศาสตร์ควอนตัมเนื่องจากเราแทนระบบด้วยฟังก์ชันคลื่น ดังนั้น การหมุนไปของระบบจะทำให้มีการเปลี่ยนแปลงในฟังก์ชันคลื่น ซึ่งเราอาจจะแทนด้วยสมการทางกลศาสตร์ควอนตัมได้ ดังนี้

$$\psi' = R(\hat{n}, \theta) \psi \quad (5-7)$$

ตัวดำเนินการยูนิทารี  $R(\hat{n}, \theta)$  จะต้องขึ้นอยู่กับมุม 3 มุม (เราอาจจะใช้มุมของออยเลอร์ก็ได้) มุมสองมุมจะกำหนดทิศทางของเวกเตอร์ซึ่งมีขนาดเป็นหนึ่ง  $\hat{n}$  และอีกมุมหนึ่งคือ มุม  $\theta$  ในที่นี้จะกำหนดขนาดของการหมุนไป และเนื่องจากสภาพทางกายภาพซึ่งบังคับให้  $\lim_{\theta \rightarrow 0} R(\hat{n}, \theta) = I$  ดังนั้นจึงนิยมเขียน  $R(\hat{n}, \theta)$  ดังนี้

$$R(\hat{n}, \theta) = e^{-iS(\hat{n}, \theta)} \quad (5-8)$$

กรณีพิเศษสำหรับการแปลงรูปแบบยูนิทารีก็คือ

$$R(\hat{n}, \theta) = 1 - iS(\hat{n}, \theta) \quad (5-9)$$

เราเรียกการแปลงรูปตามสมการ (5-9) ว่า การแปลงรูปแบบยูนิทารีโดยมีตัวแปรเปลี่ยนไปเพียงเล็กน้อย (infinitesimal unitary transformation)

$$\therefore R\psi = (1 - iS)\psi \quad (5-10)$$

มีคุณสมบัติที่สำคัญประการหนึ่งของตัวดำเนินการโมเมนตัมเชิงมุม ซึ่งเราจะใช้ช่วยในการหาโมเมนตัมเชิงมุม คุณสมบัตินั้นก็คือนำตัวดำเนินการโมเมนตัมเชิงมุม ไม่ขึ้นอยู่กับขนาดมุมของการหมุน จากคุณสมบัติอันนี้ทำให้เราสามารถเขียนฟังก์ชันคลื่นในขอบเขต limit  $\theta \rightarrow 0$  และหาตัวดำเนินการโมเมนตัมสำหรับการเปลี่ยนแปลงนั้น ๆ ได้

ตัวอย่างที่ 2 สมมติว่าเราหมุนวัตถุในระบบควอนตัมไปรอบแกน  $z$  ใน limit  $\theta \rightarrow 0$  จงหาตัวดำเนินการโมเมนตัมซึ่งทำให้เกิดการหมุนนี้

วิธีทำ ให้  $\psi(x, y, z)$  เป็นฟังก์ชันคลื่นก่อนการหมุน  $\psi(x', y', z')$  เป็นฟังก์ชันคลื่นหลังการหมุน ให้มุมที่หมุนไปเป็นมุม  $d\theta$  จากสมการ (5-7) จะเห็นว่า

$$\psi(x', y', z') = R\psi(x, y, z) \quad (5-11)$$

เมทริกซ์ที่แทนการหมุนรอบแกน z ก็คือ 
$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เนื่องจากเราพิจารณาการหมุนซึ่งตัวแปรเปลี่ยนไปเพียงเล็กน้อย มุมที่หมุนเป็นมุม  $d\theta$

เมทริกซ์แสดงการหมุนจึงกลายเป็น 
$$\begin{bmatrix} 1 & d\theta & 0 \\ -d\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า 
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d\theta & 0 \\ -d\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (5-12)$$

เขียนเป็นสมการเชิงเส้น

$$x' = x + yd\theta \quad (5-13a)$$

$$y' = y - xd\theta \quad (5-13b)$$

$$z' = z \quad (5-13c)$$

จากชุดของสมการที่ (5-13) เราอาจจะกระจาย  $\psi(x', y', z')$  ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \psi(x', y', z') &= \psi(x, y, z) + (x' - x) \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, y, z) \\ &\quad + (y' - y) \frac{\partial}{\partial y} \psi(x, y, z) + (z' - z) \frac{\partial}{\partial z} \psi(x, y, z) \\ &\quad + \text{เทอมที่มีกำลังสองหรือมากกว่า ซึ่งจะตัดทิ้งไป} \end{aligned}$$

จากสมการ (5-13a), (5-13b) และ (5-13c)

$$\psi(x', y', z') = \psi(x, y, z) + d\theta \left( y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi(x, y, z) \quad (5-14)$$

กำหนดให้

$$J_z = -i \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$$\begin{aligned} \psi(x', y', z') &= \psi(x, y, z) - iJ_z d\theta \psi(x, y, z) \\ &= (1 - id\theta J_z) \psi(x, y, z) \end{aligned} \quad (5-15)$$

โดยทำนองเดียวกัน ถ้าเราพิจารณาการหมุนรอบแกน x และแกน y ไปเป็นมุม  $d\theta$  เราจะได้ความสัมพันธ์ตามลำดับ ดังนี้

$$\psi(x', y', z') = (1 - id\theta J_x) \psi(x, y, z) \quad (5-16)$$

$$\psi(x', y', z') = (1 - id\theta J_y) \psi(x, y, z) \quad (5-17)$$

และเนื่องจาก  $R(\hat{n}, \theta)$  เป็นตัวดำเนินการยูนิทารี ดังนั้น  $J_x, J_y, J_z$  และ  $S$  ต้องเป็นตัวดำเนินการเฮอร์มีเชียน

จากสมการ (5-15), (5-16) และ (5-17) จะเห็นว่า ถ้าเราหมุนระบบควอนตัมรอบแกนใด ๆ ซึ่ง  $\hat{n}$  เป็นเวกเตอร์ขนาดหนึ่งหน่วยตามแกนนั้นแล้ว

$$\psi(x', y', z') = (1 - i d\theta \hat{n} \cdot \mathbf{J}) \psi(x, y, z) \quad (5-18)$$

$$= (1 - i S) \psi(x, y, z) \quad (5-19)$$

ดังนั้น

$$S(\hat{n}, d\theta) = (\hat{n} \cdot \mathbf{J}) d\theta$$

$$\therefore S(\hat{n}, \theta) = (\hat{n} \cdot \mathbf{J}) \theta \quad (5-20)$$

และ

$$R\psi = e^{-i(\hat{n} \cdot \mathbf{J})\theta} \psi \quad (5-21)$$

ข้อสังเกต ตัวดำเนินการโมเมนตัมตามคำนิยามนี้อาจแปลงรูปเป็นตัวดำเนินการโมเมนตัมเชิงมุมในวงโคจรได้ ดังนี้

$$\hbar \mathbf{J} = \mathbf{L} \quad (5-22)$$

และอาจจะเปลี่ยนเป็นตัวดำเนินการสปินได้ดังนี้

$$\hbar \mathbf{J} = \mathbf{S} \quad (5-23)$$

สำหรับโมเมนตัมเชิงมุมในวงโคจรนั้น มีปรากฏในกลศาสตร์ควอนตัมเบื้องต้น มีฟังก์ชันไอเกนคือ  $Y_{l,m}$  เนื่องจากค่าของ  $l$  เป็นเลขเต็ม ดังนั้น  $Y_{l,m}$  จึงมีค่า ๆ เดียว (single value) แต่ในเรื่องของสปิน เนื่องจากค่าไอเกนอาจมีค่าเป็นครึ่งหนึ่งของเลขจำนวนเต็ม การที่ฟังก์ชันไอเกนจะมีค่า ๆ เดียวเหมือน  $Y_{l,m}$  นั้นเป็นไปได้ ดังนั้น จึงมีการจัดพิกัดขึ้นชุดหนึ่ง สำหรับเรื่องของสปินโดยเฉพาะ เรียกว่าพิกัดของสปิน (Spin coordinates) แต่กฎทางกลศาสตร์ควอนตัมที่เป็นจริงสำหรับ  $\mathbf{L}$  ก็ใช้ได้สำหรับ  $\mathbf{S}$  ด้วย

### 5.3 สรุปกฎทางกลศาสตร์ควอนตัมที่สำคัญสำหรับโมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุในวงโคจร

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (5-24)$$

$$L_x = y p_z - z p_y = -i\hbar \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (5-24a)$$

$$L_y = z p_x - x p_z = -i\hbar \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (5-24b)$$



$$L_z = xp_y - yp_x = -i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (5-24c)$$

$$\bar{L} \times \bar{L} = i\hbar \bar{L} \quad (5-25)$$

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z \quad (5-25a)$$

$$[L_y, L_z] = i\hbar L_x \quad (5-25b)$$

$$[L_z, L_x] = i\hbar L_y \quad (5-25c)$$

$$\bar{L} \times \bar{r} = i\hbar \bar{r} \quad (5-26)$$

$$\bar{L} \times \bar{p} = i\hbar \bar{p} \quad (5-27)$$

สมการที่ (5-26) และ (5-27) อาจจะกระจายได้คล้ายคลึงกับ (5-25)

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \quad (5-28)$$

$$[L^2, \bar{L}] = 0 \quad (5-29)$$

$$[L^2, L_x] = 0 \quad (5-29a)$$

$$[L^2, L_y] = 0 \quad (5-29b)$$

$$[L^2, L_z] = 0 \quad (5-29c)$$

จากสมการที่ (5-25) และ (5-29) แสดงว่าเราอาจจะเลือกฟังก์ชันไอเกนสำหรับ  $L^2$  และตัวดำเนินการ  $L_x$ ,  $L_y$  หรือ  $L_z$  ตัวใดตัวหนึ่งได้เพียงคู่เดียว โดยปกตินิยมเลือก  $L^2$  และ  $L_z$  จาก  $L_x$  และ  $L_y$  เราอาจจะสร้างตัวดำเนินการเพิ่มระดับและตัวดำเนินการลดระดับได้ ดังนี้

$$L_{\pm} = L_x \pm iL_y \quad (5-30)$$

โดยที่  $(L_{\pm})(L_{\mp}) = L^2 - L_z^2 \pm \hbar L_z \quad (5-31)$

$L_+$  คือ ตัวดำเนินการเพิ่มระดับ และ  $L_-$  คือ ตัวดำเนินการลดระดับ

$$[L_z, L_{\pm}] = \pm \hbar L_{\pm} \quad (5-32)$$

$$L_x = i\hbar \left( \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (5-33)$$

$$L_y = i\hbar \left( \cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (5-34)$$

$$L_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (5-35)$$

$$L^2 = -\hbar^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \quad (5-36)$$

ถ้า

$$L^2 \psi_{lm} = \ell(\ell+1)\hbar^2 \psi_{lm} \quad (5-37)$$

และ  $L_z \psi_{\ell m_\ell} = m_\ell \hbar \psi_{\ell m_\ell}$  (5-38)

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\ell m_\ell} | L_x | \psi_{\ell m_\ell} \rangle &= \langle \ell m_\ell | L_x | \ell m_\ell \rangle \\ &= \langle \ell m_\ell | L_y | \ell m_\ell \rangle = 0 \end{aligned} \quad (5-39)$$

$$L_x = \frac{1}{2} (L_+ + L_-) \quad (5-40)$$

$$L_y = -\frac{i}{2} (L_+ - L_-) \quad (5-41)$$

$$\begin{aligned} \langle \ell m_\ell | L_x^2 | \ell m_\ell \rangle &= \langle \ell m_\ell | L_y^2 | \ell m_\ell \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \ell m_\ell | L^2 - L_z^2 | \ell m_\ell \rangle \\ &= \frac{1}{2} [\ell(\ell+1) - m^2] \hbar^2 \end{aligned} \quad (5-42)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} \psi_{\ell m_\ell} &= | \ell m_\ell \rangle \equiv Y_{\ell m}(\theta, \phi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(im\phi) \Theta_{\ell m}(\theta) \end{aligned} \quad (5-43)$$

$$\Theta_{\ell m} = (-1)^m \sqrt{\frac{2(\ell+1)(\ell-m)!}{2(\ell+m)!}} \sin^m \theta \left( \frac{d}{d \cos \theta} \right)^m P_\ell(\cos \theta)$$

เมื่อ  $m > 0$

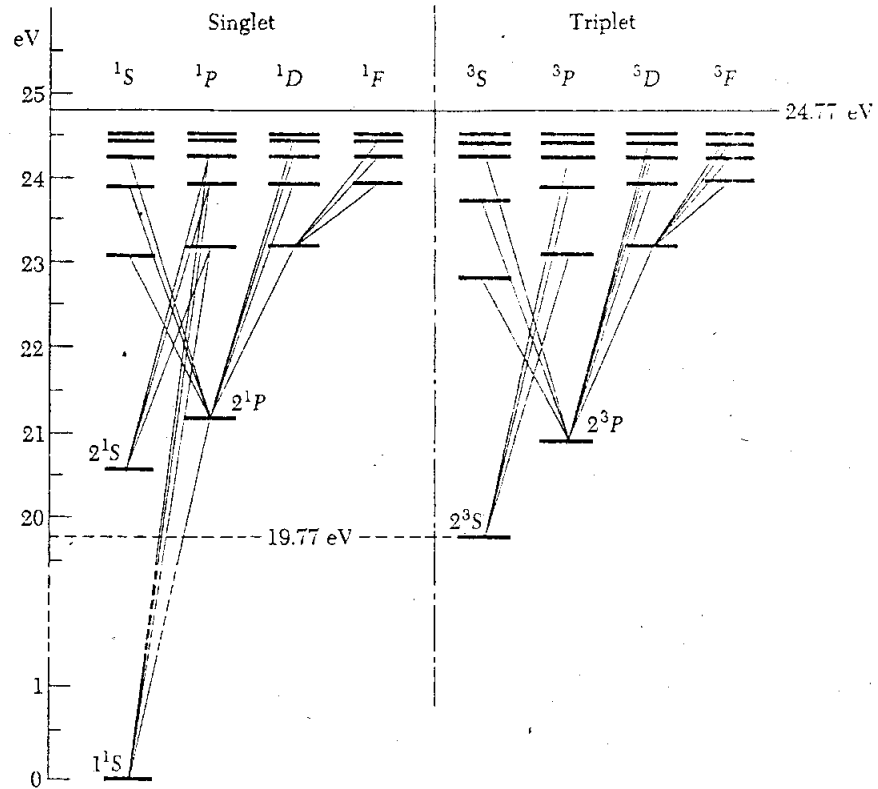
$$= \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-|m|)!}{2(\ell+|m|)!}} \sin^{|m|} \theta \left( \frac{d}{d \cos \theta} \right)^{|m|} P_\ell(\cos \theta)$$

เมื่อ  $m < 0$

(5-44)

รายละเอียดในการพิสูจน์สมการเหล่านี้ นักศึกษาจะพบทวนได้จากกลศาสตร์ควอนตัมเบื้องต้น เมื่ออนุภาคอยู่ในสถานะซึ่งโมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาคในวงโคจรมีค่าแน่นอน จะมีอักษรย่อสำหรับเรียกสถานะนั้น อักษรย่อเหล่านี้มีกำเนิดมาจากการศึกษาสเปกตรัมของสารต่าง ๆ ซึ่งมองเห็นได้ในยุคก่อนกลศาสตร์ควอนตัมซึ่งอาจเขียนได้ดังนี้

- ถ้า  $\ell = 0$  อักษรย่อคือ S ย่อมาจากคำว่า Sharp
- $\ell = 1$  อักษรย่อคือ P ย่อมาจากคำว่า Principle
- $\ell = 2$  อักษรย่อคือ D ย่อมาจากคำว่า Diffuse
- $\ell = 3$  อักษรย่อคือ F ย่อมาจากคำว่า Fine



รูปที่ (5-4) แสดงระดับพลังงานของฮีเลียมในภาวะปกติ

#### 5.4 การบวกกันของโมเมนตัมเชิงมุม

ในตอนนี้จะพูดถึงการบวกกันของโมเมนตัมเชิงมุมใด ๆ ซึ่งเราจะเรียกว่า  $\bar{L}$  และ  $\bar{S}$  ในบทต่อไป  $\bar{L}$  จะหมายถึงโมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุในวงโคจร และ  $\bar{S}$  หมายถึงสปิน แต่ในตอนนี้เราจะคงความหมายเพียงว่า เวกเตอร์ทั้งสองแทนโมเมนตัมเชิงมุมใด ๆ สองตัวเท่านั้น โมเมนตัมเชิงมุมทั้งหมด อาจเขียนได้ ดังนี้

$$\bar{J} = \bar{L} + \bar{S} \tag{5-45}$$

จากสมการ (5-29)  $|\bar{J}^2, J_z\rangle = 0 \tag{5-46}$

เมื่อ  $J^2$  และ  $J_z$  เป็นตัวดำเนินการซึ่งเกิดจาก  $\bar{J}$  ให้ฟังก์ชันไอเกนของ  $J^2$  และ  $J_z$  คือ  $\psi_{jm}$  โดยที่

$$J^2 \psi_{jm} = j(j+1) \hbar^2 \psi_{jm} \quad (5-47)$$

$$J_z \psi_{jm} = m_j \hbar \psi_{jm} \quad (5-48)$$

$j \geq |m_j|$  เป็นเลขบวกอาจจะเป็นจำนวนเต็มหรือครึ่งหนึ่งของจำนวนเต็ม ขึ้นอยู่กับค่า  $L$  และ  $S$

$$J^2 = L^2 + S^2 + 2\vec{L} \cdot \vec{S} \quad (5-49)$$

เนื่องจากตัวดำเนินการ  $L$  และ  $S$  กระทำบนชุดของตัวแปรซึ่งต่างกัน ดังนั้น

$$\begin{aligned} |L^2, \vec{L} \cdot \vec{S}| &= |L^2, L_x S_x + L_y S_y + L_z S_z| \\ &= |L^2, L_x S_x| + |L^2, L_y S_y| + |L^2, L_z S_z| \\ &= |L^2, L_x| S_x + |L^2, L_y| S_y + |L^2, L_z| S_z \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5-50)$$

โดยทำนองเดียวกัน

$$|S^2, \vec{L} \cdot \vec{S}| = 0 \quad (5-51)$$

เนื่องจาก

$$|\vec{L}, \vec{S}| = 0$$

ดังนั้น

$$|L^2, J^2| = 0 \quad (5-52)$$

$$|S^2, J^2| = 0 \quad (5-53)$$

จะเห็นได้ว่า ตัวดำเนินการ  $J^2, L^2, S^2$  และ  $J_z$  สามารถสับเปลี่ยนกันได้ ทำให้ค่าของตัวดำเนินการทั้งสี่นี้อาจวัดได้พร้อมกัน ดังที่กล่าวไว้ในทฤษฎีในสัจพจน์ที่ 4 ว่าถ้าหากตัวดำเนินการชุดนั้นสามารถสับเปลี่ยนกันได้ ตัวดำเนินการนั้นจะมีฟังก์ชันคลื่นร่วมกัน สมมุติว่าฟังก์ชันคลื่นร่วมกันของตัวดำเนินการชุดนี้คือ  $\psi_{j,m_j,l,s} = |jm_j l s\rangle$  และเนื่องจาก  $L$  และ  $S$  สามารถสับเปลี่ยนกันได้ จึงทำให้ตัวดำเนินการอีกชุดหนึ่ง คือ  $L^2, L_z, S^2$  และ  $S_z$  สามารถสับเปลี่ยนกันได้ จะเห็นว่ายังมีฟังก์ชันคลื่นอีกชุดหนึ่งคือ  $\psi_{l,m_l,s,m_s} = |l m_l s m_s\rangle$  ซึ่งเป็นฟังก์ชันไอเกนร่วมกันของ  $L^2, L_z, S^2$  และ  $S_z$  โดยที่

$$J^2 |jm_j l s\rangle = j(j+1)\hbar^2 |jm_j l s\rangle \quad (5-54)$$

$$J_z |jm_j l s\rangle = m_j \hbar |jm_j l s\rangle \quad (5-55)$$

$$L^2 |jm_j l s\rangle = l(l+1)\hbar^2 |jm_j l s\rangle \quad (5-56)$$

$$S^2 |jm_j l s\rangle = s(s+1)\hbar^2 |jm_j l s\rangle \quad (5-57)$$

$$L^2 |l m_l s m_s\rangle = l(l+1)\hbar^2 |l m_l s m_s\rangle \quad (5-58)$$

$$L_z |l m_l s m_s\rangle = m_l \hbar |l m_l s m_s\rangle \quad (5-59)$$

$$S^2 |l m_l S m_s\rangle = s(s+1)\hbar^2 |l m_l S m_s\rangle \quad (5-60)$$

$$S_z |l m_l S m_s\rangle = m_s \hbar |l m_l S m_s\rangle \quad (5-61)$$

จะเห็นว่าจำนวนสถานะควอนตัม (quantum states) ทั้งหมด เกิดจากการเปลี่ยนค่าของ  $L$ , ไปได้  $(2l+1)$  ค่า และค่าของ  $S$ , ไปได้  $(2s+1)$  ค่า เมื่อกำหนดให้ค่า  $L$  และ  $S$  ชุดหนึ่ง ดังนั้น จำนวนสถานะควอนตัมทั้งหมดของชุดตัวดำเนินการ  $L^2, L_z, S^2$  และ  $S_z$  ก็คือ  $(2l+1)(2s+1)$  สถานะ

ถ้าหากจะย้อนไปพิจารณาชุดของตัวดำเนินการ  $J^2, L^2, S^2$  และ  $J_z$  จะเห็นว่าค่าสูงสุดของ  $m_j$  เกิดขึ้นเมื่อ  $m_l$  และ  $m_s$  เป็นค่าสูงสุด ดังนั้น

$$(m_j)_{\text{ค่าสูงสุด}} = l + s \quad (5-62)$$

สมการที่ (5-62) ให้ค่าสูงสุดของ  $j$  ด้วย นั่นคือ

$$(j)_{\text{ค่าสูงสุด}} = l + s \quad (5-63)$$

สำหรับค่าที่กำหนดให้ของ  $L$  และ  $S$  ชุดหนึ่ง ค่าสูงสุดของ  $m_j$  เกิดขึ้นได้วิธีเดียว ดังนั้นค่าไอเกน  $m_j = j$  จึงเป็น nondegenerate ค่าที่ต่ำลงมาจากหนึ่งของ  $m_j$  ก็คือ

$$m_j = l + s - 1 \quad (5-64)$$

จะเห็นว่าสถานะควอนตัมนี้อาจจะเกิดได้สองวิธี คือ การลดค่า  $m_l$  ลงหนึ่งหน่วย หรือการลดค่า  $m_s$  ลงหนึ่งหน่วย ดังนั้น สถานะควอนตัมนี้จึงเป็น degenerate เมื่อเอาตัวดำเนินการลดระดับกระทำบนสถานะควอนตัม  $|j m_j \ell s\rangle$  ก็จะได้สถานะควอนตัมนี้ เราอาจจะใช้ตัวดำเนินการลดระดับ ทำบน  $|j m_j \ell s\rangle$  ซ้ำ ๆ กัน จนได้สถานะควอนตัมที่ต่ำที่สุด ไม่อาจจะลดค่า  $m_j$  ลงได้อีกแล้ว จำนวนสถานะควอนตัมที่ได้โดยวิธีนี้จะมีจำนวน  $(2j+1)$  สถานะ

ค่าจะ  $j$  ที่ต่ำลงมา ก็คือ

$$j = l + s - 1 \quad (5-65)$$

จะเห็นว่าค่า  $m_j$  ซึ่งเกิดจาก  $j$  ในสมการ (5-65) เป็นค่าหนึ่งในสองค่าของค่า  $m_j$  ซึ่งเรากล่าวถึงหลังสมการ (5-64) เราจะเรียกค่า  $j$  ในสมการ (5-65) ว่า  $j_1$

$$\therefore j_1 = l + s - 1 \quad (5-65)$$

$j_1$  จะให้สถานะควอนตัม  $(2j_1+1)$  สถานะ

จากการจัดค่า  $j$  ดังที่กล่าวมาแล้ว จะเห็นว่า ค่าของ  $j$  จะอยู่ในช่วง ดังนี้

$$(l + s) \geq j \geq |l - s| \quad (5-66)$$

สมมุติว่า  $l > s$  ดังนั้น จำนวนเฉลี่ยของสถานะควอนตัม คือ

$$\frac{2(l+s)+1 + 2(l-s)+1}{2} = (2l+1) \quad (5-67)$$

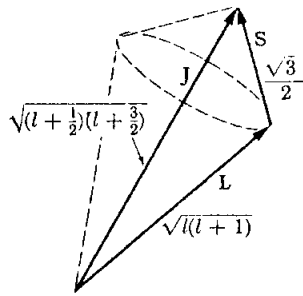
จำนวนค่า  $j$  ทั้งหมด จะหาได้ ดังนี้

$$\ell + s - (\ell - s) + 1 = 2s + 1 \quad (5-68)$$

จะเห็นว่าจำนวนสถานะควอนตัมทั้งหมดคือ  $(2\ell + 1)(2s + 1)$  เท่ากับที่หามาอีกวิธีหนึ่งข้างต้น สำหรับกรณีของสปิน  $\frac{1}{2}$  และโมเมนต์เชิงมุมของอิเล็กตรอนในวงโคจร  $\ell$  ค่าของ  $j$  มีสองค่า คือ

$$j = \ell + \frac{1}{2}, \quad j = \ell - \frac{1}{2} \quad (5-69)$$

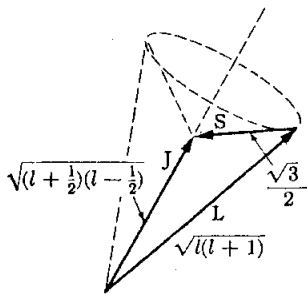
ในบางตำรากรณีที่  $j = \ell + \frac{1}{2}$  นิยมเรียกสถานะนี้ว่าเป็นสถานะที่เกิดจากสปินของอิเล็กตรอน “ขนาน” กับโมเมนต์เชิงมุมในวงโคจร และในกรณีที่  $j = \ell - \frac{1}{2}$  ก็เรียกว่า สปินของอิเล็กตรอน “ขนานย้อนกลับ” (antiparallel) กับโมเมนต์เชิงมุม  $\ell$



$$j = \ell + \frac{1}{2}$$

(5-5 ก)

สถานะซึ่งโมเมนต์เชิงมุมในวงโคจร  $\ell$  “ขนาน” กับสปิน  $\bar{s}$



$$j = \ell - \frac{1}{2}$$

(5-5 ข)

สถานะซึ่งโมเมนต์เชิงมุมในวงโคจร  $\ell$

“ขนานย้อนกลับ” (antiparallel) กับสปิน  $\bar{s}$

รูปที่ (5-5) แสดงการรวมกันแบบเวกเตอร์ของโมเมนต์เชิงมุมในวงโคจรของอิเล็กตรอนกับสปิน จะเห็นว่า การ “ขนาน” และ “ขนานย้อนกลับ” มิได้มีความหมายเหมือนในวิชาเรขาคณิต

### 5.5 ตัวแทนแบบเมทริกซ์ (Matrix Representation) ของตัวดำเนินการโมเมนตัมเชิงมุม

ในกลศาสตร์ควอนตัมเบื้องต้น<sup>7</sup> ได้มีการหาฟังก์ชันไอเกนของตัวดำเนินการโมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุในวงโคจร ซึ่งได้ผลว่า

$$L^2 Y_{\ell, m}(\theta, \phi) = L^2 |\ell m\rangle = \ell(\ell+1)\hbar^2 |\ell m\rangle \quad (5-70)$$

$$L_z Y_{\ell, m}(\theta, \phi) = L_z |\ell m\rangle = m\hbar |\ell m\rangle \quad (5-71)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} \langle \ell m | \ell' m' \rangle &= \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) Y_{\ell' m'}(\theta, \phi) \\ &= \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \end{aligned} \quad (5-72)$$

พึงสังเกตว่า  $\theta$  และ  $\phi$  เป็นตัวแปรในการอินทิเกรต ดังนั้น หากเรามีฟังก์ชันใดๆ ของตัวแปร  $\theta$  และ  $\phi$  เราอาจจะกระจายให้อยู่ในรูปอนุกรมของ spherical harmonics  $Y_{\ell, m}(\theta, \phi)$  ได้ดังนี้

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_{\ell m} a_{\ell m}(r, t) Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (5-73)$$

โดยที่

$$\langle Y_{\ell m} | \psi \rangle = a_{\ell m} \quad (5-74)$$

จากสมการที่ (5-70) เราอาจจะเขียนเมทริกซ์ของ  $L^2$  ได้ดังนี้ (เราจะจำกัดให้  $\ell = 0$  และ 1 เท่านั้น)

$$\langle \ell m | L^2 | \ell' m' \rangle = \ell(\ell+1)\hbar^2 \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$$

$$=$$

$\langle 00   L^2   00 \rangle$	$\langle 00   L^2   11 \rangle$	$\langle 00   L^2   10 \rangle$	$\langle 00   L^2   1-1 \rangle$
$\langle 11   L^2   00 \rangle$	$\langle 11   L^2   11 \rangle$	$\langle 11   L^2   10 \rangle$	$\langle 11   L^2   1-1 \rangle$
$\langle 10   L^2   00 \rangle$	$\langle 10   L^2   11 \rangle$	$\langle 10   L^2   10 \rangle$	$\langle 10   L^2   1-1 \rangle$
$\langle 1-1   L^2   00 \rangle$	$\langle 1-1   L^2   11 \rangle$	$\langle 1-1   L^2   10 \rangle$	$\langle 1-1   L^2   1-1 \rangle$

7. ธีรพันธุ์ ม่วงไทย op cit บทที่ 6

$$= \hbar^2$$

$(\ell = 0) 0$	0	0	0
0	$(\ell = 1) 2$	0	0
0	0	2	0
0	0	0	2

เมทริกซ์ของค่า  $\ell$  ที่สูงขึ้นไป ก็อาจจะเขียนได้โดยทำนองเดียวกัน จากสมการที่ (5-71) เราอาจจะเขียนเมทริกซ์ของ  $L_z$  ได้ดังนี้

$$\langle \ell m | L_z | \ell' m' \rangle = m \hbar \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} \quad (5-76)$$

(และเหมือนกับกรณีของ  $L^2$  เราจะจำกัดให้  $\ell = 0$  และ 1 เท่านั้น)

$$=$$

$\langle 00   L_z   00 \rangle$	$\langle 00   L_z   11 \rangle$	$\langle 00   L_z   10 \rangle$	$\langle 00   L_z   1-1 \rangle$
$\langle 11   L_z   00 \rangle$	$\langle 11   L_z   11 \rangle$	$\langle 11   L_z   10 \rangle$	$\langle 11   L_z   1-1 \rangle$
$\langle 10   L_z   00 \rangle$	$\langle 10   L_z   11 \rangle$	$\langle 10   L_z   10 \rangle$	$\langle 10   L_z   1-1 \rangle$
$\langle 1-1   L_z   00 \rangle$	$\langle 1-1   L_z   11 \rangle$	$\langle 1-1   L_z   10 \rangle$	$\langle 1-1   L_z   1-1 \rangle$

$$= \hbar$$

$0 (\ell = 0)$	0	0	0
0	$1 (\ell = 1)$	0	0
0	0	0	0
0	0	0	-1

เมทริกซ์ของค่า  $\ell$  ที่สูงขึ้น ก็อาจจะหาได้โดยทำนองเดียวกัน จะสังเกตเห็นว่า องค์ประกอบของเมทริกซ์เป็นศูนย์หมด ยกเว้นตัวซึ่งอยู่บนเส้นทแยงจากมุมซ้ายด้านสูงไปสู่มุมขวาด้านต่ำ ทั้งนี้เนื่องจากค่าเฉลี่ยนี้มีเทอม  $\delta_{m m'}$  ส่วนค่าของ  $\ell$  นั้นเริ่มจาก  $\ell = 0$  ทางมุมสูงซ้ายสุด แต่ละเมทริกซ์ที่ต่ำลงมาจากค่า  $\ell$  จะสูงขึ้นทีละหนึ่ง และแต่ละเมทริกซ์ จะมีจำนวนแถว  $2\ell+1$  แถว เป็นเมทริกซ์รูปสี่เหลี่ยม

สำหรับตัวดำเนินการ  $L_x$  และ  $L_y$  อาจจะได้จากตัวดำเนินการลดระดับ และตัวดำเนินการเพิ่มระดับได้ดังนี้ ให้  $L_-$  เป็นตัวดำเนินการลดระดับ



$$L | \ell m \rangle = \sqrt{(\ell+m)(\ell-m+1)} \hbar | \ell m-1 \rangle \quad (5-77)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \langle \ell' m' | L | \ell m \rangle &= \sqrt{(\ell+m)(\ell-m+1)} \hbar \langle \ell' m' | \ell m-1 \rangle \\ &= \sqrt{(\ell+m)(\ell-m+1)} \hbar \delta_{\ell' \ell} \delta_{m' m-1} \end{aligned} \quad (5-78)$$

สำหรับ  $\ell \geq 0$  และ 1 เราสามารถจะเขียนเป็นเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} &\langle \ell' m' | L | \ell m \rangle \\ &= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \langle 00 | L | 00 \rangle & \langle 00 | L | 11 \rangle & \langle 00 | L | 10 \rangle & \langle 00 | L | 1-1 \rangle \\ \hline \langle 11 | L | 00 \rangle & \langle 11 | L | 11 \rangle & \langle 11 | L | 10 \rangle & \langle 11 | L | 1-1 \rangle \\ \hline \langle 10 | L | 00 \rangle & \langle 10 | L | 11 \rangle & \langle 10 | L | 10 \rangle & \langle 10 | L | 1-1 \rangle \\ \hline \langle 1-1 | L | 00 \rangle & \langle 1-1 | L | 11 \rangle & \langle 1-1 | L | 10 \rangle & \langle 1-1 | L | 1-1 \rangle \\ \hline \end{array} \\ &= \hbar \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 (\ell=0) & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 (\ell=1) & 0 & 0 \\ \hline 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \hline \end{array} \end{aligned}$$

สำหรับตัวดำเนินการเพิ่มระดับ เราอาจจะหาเมทริกซ์ได้โดยพิจารณา

$$\langle \ell m | L_+ | \ell' m' \rangle = (\langle \ell' m' | L_- | \ell m \rangle^*)^T \quad (5-79)$$

เนื่องจาก  $\langle \ell m | L_- | \ell' m' \rangle$  เป็นค่าจริง ดังนั้น องค์ประกอบของเมทริกซ์ของ  $L_+$  ก็คือ

$$\begin{aligned} \langle \ell' m' | L_+ | \ell m \rangle &= \langle \ell m | L_- | \ell' m' \rangle^T \\ &= \sqrt{(\ell-m)(\ell+m+1)} \hbar \delta_{\ell' \ell} \delta_{m' m+1} \end{aligned} \quad (5-80)$$

$$= \hbar \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 (\ell=0) & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 (\ell=1) & \sqrt{2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

จะเห็นว่าเมทริกซ์ของ  $L_+$  เกิดจากการ tranpose เมทริกซ์ของ  $L_-$  และจากสมการที่ (5-40) และ (5-41)

$$L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$$

$$L_y = -\frac{i}{2}(L_+ - L_-)$$

ดังนั้น สำหรับ  $l = 1$

$$\underline{L}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-81)$$

$$\underline{L}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \quad (5-82)$$

### 5.6 ตัวดำเนินการ Class T

ในพีชคณิตของตัวดำเนินการโมเมนตัมที่ผ่านมาจะเห็นว่า มีตัวดำเนินการอยู่กลุ่มหนึ่ง ซึ่งมีคุณสมบัติความสัมพันธ์การสับเปลี่ยนคล้ายคลึงกัน ตัวดำเนินการกลุ่มนี้คือ  $\bar{r}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{J}$  และการคูณแบบเวกเตอร์ของตัวดำเนินการเหล่านี้ มีคุณสมบัติเหมือน  $\bar{r}$  เมื่อเราหมุนพิสัยไปรอบเวกเตอร์นั้น ๆ เวกเตอร์กลุ่มนี้มีชื่อเรียกรวม ๆ ว่า Class T ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้ ให้  $\bar{J}$  เป็นตัวดำเนินการโมเมนตัมเชิงมุมใด ๆ

$$[J_x, T_x] = 0 \quad (5-83a)$$

$$[J_x, T_y] = i\hbar T_z \quad (5-83b)$$

$$[J_x, T_z] = -i\hbar T_y \quad (5-83c)$$

สมการทั้งสามสมการข้างบนนี้อาจจะเขียนรวม ๆ กันได้ว่า

$$[J_i, T_j] = i\hbar \Sigma_{ijk} T_k \quad (5-83)$$

เมื่อ  $\Sigma_{123} = \Sigma_{231} = \Sigma_{312} = 1$  และ  $\Sigma_{132} = \Sigma_{213} = \Sigma_{321} = -1$

ค่านอกนั้นของ  $\Sigma_{ijk}$  เช่น  $\Sigma_{112}$  เป็นศูนย์หมด

$$[J, \bar{T}_1 \cdot \bar{T}_2] = 0 \quad (5-84)$$

คุณสมบัติตามสมการที่ (5-83) และ (5-84) เป็นคุณสมบัติของตัวดำเนินการ Class T กรณีเฉพาะที่สำคัญของสมการ (5-84) ก็คือ

$$[J, T^2] = 0 \quad (5-85)$$

ให้  $T_+ = T_x + iT_y$  (5-86)

จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} [J_z, T_+] &= J_z T_+ - T_+ J_z \\ &= J_z (T_x + iT_y) - (T_x + iT_y) J_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (J_z T_x - T_x J_z) + i(J_z T_y - T_y J_z) \\
&= [J_z, T_x] + i[J_z, T_y] \\
&= i\hbar T_y + \hbar T_x
\end{aligned}$$

$$\therefore [J_z, T_+] = \hbar T_+ \quad (5-87)$$

แสดงว่า  $T_+$  นั้น เป็นตัวดำเนินการยกระดับ ซึ่งขยับค่าทางแกน  $z$  ของโมเมนตัมเชิงมุม ( $m$ ) ขึ้นหนึ่งหน่วย โดยทำนองเดียวกันอาจจะพิสูจน์ได้ว่า

$$[J^2, T_+] = 2\hbar(T_+ J_z - T_z J_+) + 2\hbar^2 T_+ \quad (5-88)$$

นอกจากคุณสมบัติที่กล่าวมาของ  $T_+$  แล้ว ยังมีคุณสมบัติที่สำคัญอื่นคือ ถ้าในภาวะ

ซึ่ง  $m$  มีค่าสูงสุดเท่ากับ  $j$  แล้ว

$$T_+ \psi_{jj} = \text{ค่าคงที่} \times \psi_{j+1, j+1} \quad (5-89)$$

สมการที่ (5-89) อาจจะพิสูจน์ ได้ดังนี้

$$\text{เนื่องจาก} \quad J^2 \psi_{jj} = j(j+1) \hbar^2 \psi_{jj} \quad (5-90)$$

$$\therefore T_+ J^2 \psi_{jj} = j(j+1) \hbar^2 T_+ \psi_{jj} \quad (5-91)$$

แต่เราอาจจะเขียนสมการที่ (5-88) เสียใหม่ได้ดังนี้

$$\{J^2 T_+ - 2\hbar [T_+ J_z - T_z J_+] - 2\hbar^2 T_+\} \psi_{jj} = j(j+1) \hbar^2 T_+ \psi_{jj} \quad (5-92)$$

$$\text{แต่เนื่องจากว่า} \quad J_+ \psi_{jj} = 0$$

$$\text{และ} \quad J_z \psi_{jj} = j \hbar \psi_{jj}$$

ดังนั้น สมการที่ (5-92) จึงกลายเป็น

$$\begin{aligned}
\{J^2 T_+ - 2\hbar^2(j+1)T_+\} \psi_{jj} &= j(j+1) \hbar^2 T_+ \psi_{jj} \\
\therefore J^2(T_+ \psi_{jj}) &= (j+2)(j+1) \hbar^2 (T_+ \psi_{jj})
\end{aligned} \quad (5-93)$$

สมการที่ (5-89) จะเป็นจริง ถ้าเราพิสูจน์ได้อีกว่า

$$J_z(T_+ \psi_{jj}) = (j+1)\hbar (T_+ \psi_{jj}) \quad (5-94)$$

จากสมการที่ (5-87) จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}
J_z(T_+ \psi_{jj}) &= T_+ J_z \psi_{jj} + \hbar T_+ \psi_{jj} \\
&= T_+ j \hbar \psi_{jj} + T_+ \hbar \psi_{jj} \\
&= (j+1) \hbar (T_+ \psi_{jj})
\end{aligned}$$

เป็นสมการที่ (5-94) ที่ต้องการ

## 5.7 สรุป

สปินของแสงมีขนาด  $1\hbar$  และมีสองสถานะ แทนที่จะมีสามสถานะเหมือนสปินหนึ่งหน่วยอื่น ๆ ทั้งนี้ เนื่องจากว่าแสงเคลื่อนที่ตลอดเวลา

ถ้า  $\psi'$  เป็นฟังก์ชันคลื่นของระบบหลังการหมุน และ  $\psi$  เป็นฟังก์ชันคลื่นของระบบก่อนการหมุนแล้ว

$$\psi' = R(\hat{n}, \theta) \psi \quad (5-7)$$

เมื่อ  $R(\hat{n}, \theta)$  เป็นตัวดำเนินการยูนิทารี

ถ้ากำหนดให้ 
$$J_r = -i \left( x_p \frac{\partial}{\partial x_q} - x_q \frac{\partial}{\partial x_p} \right) \quad \text{แล้ว}$$

$$R\psi = e^{-i\theta(\hat{n} \cdot \mathbf{J})} \psi \quad (5-21)$$

$$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p} \quad (5-24)$$

$$\bar{L} \times \bar{L} = i\hbar \bar{L} \quad (5-25)$$

$$\bar{L} \times \bar{r} = i\hbar \bar{r} \quad (5-26)$$

$$\bar{L} \times \bar{p} = i\hbar \bar{p} \quad (5-27)$$

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \quad (5-28)$$

$$L_{\pm} = L_x \pm iL_y \quad (5-30)$$

$$\bar{J} = \bar{L} + \bar{S} \quad (5-45)$$

## 5.8 คำถามท้ายบท

1. จำนวนสถานะควอนตัมของตัวดำเนินการโมเมนตัม  $\vec{l}$  มีกี่สถานะ ?
2. การแปลงยูนิทารีซึ่งแทนการหมุนมีตัวแปรเป็นอะไร ?
3. ฟังก์ชันคลื่นของตัวดำเนินการโมเมนตัมของวัตถุในวงโคจรและสปินต่างกันอย่างไร ?
4. ตัวดำเนินการ Class T คืออะไร ?

## แบบฝึกหัดบทที่ 5

1. จงแสดงว่า  $(x + iy) Y_{\ell} = f(r) Y_{\ell+1, \ell+1}$   
 และ  $Y_{\ell m}(\theta, \phi) =$  ค่าคงที่  $x(L_x - iL_y)^{\ell-m} \left(\frac{x+iy}{r}\right)^{\ell} \cdot 1$   
 เมื่อ  $1 = f(r)$   
 $\ell = m = 0$   
 คำแนะนำ ให้อ่านเรื่องตัวดำเนินการ Class T.
2. ตัวหมุนตัวหนึ่งเป็นท่อนวัตถุเบา (สมมติว่าไม่มีมวล) มีความยาว  $d$  ที่ปลายของตัวหมุนมีมวลขนาด  $M$  ติดที่ปลายข้างละก้อน จงหา
  - ก. สมการค่าไอเกนสำหรับพลังงาน (energy-eigenvalue equation)
  - ข. ค่าไอเกน
  - ค. พังก์ชันไอเกน (สมมติว่าไม่มีการสั่น)
3. ในระบบซึ่งมีอนุภาคเพียงตัวเดียว สมมติว่าโมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาคในวงโคจรมีค่าตามพิกัด  $z$  เท่ากับ  $m \hbar$  และกำลังสองของขนาดของมันคือ  $\ell(\ell+1) \hbar^2$  จงแสดงว่า
  - ก.  $\langle |L_x| \rangle = \langle |L_y| \rangle = 0$
  - ข.  $\langle |L_x^2| \rangle = \langle |L_y^2| \rangle = \frac{\ell(\ell+1) \hbar^2 - m^2 \hbar^2}{2}$
4. สำหรับระบบควอนตัมซึ่งมีอนุภาคสองอนุภาค จงแสดงว่า ไม่ว่าแรงที่กระทำต่ออนุภาคทั้งสองนั้นจะเป็นแรงชนิดใด เราอาจจะวัดตัวดำเนินการสองชุดนี้ชุดใดชุดหนึ่งแต่ละชุดพร้อมกัน แต่จะวัดพร้อมกันหมดทั้งสองชุดไม่ได้เลย  
 ตัวดำเนินการชุดที่หนึ่ง :  $L_1^2, L_{1z}, L_2^2, L_{2z}$   
 ตัวดำเนินการชุดที่สอง :  $L_1^2, L_2^2, L^2, L_z$
5. ตัวดำเนินการซึ่งเกี่ยวข้องกับผลคูณขององค์ประกอบทางแกน  $x$  และแกน  $y$  ของโมเมนตัมเชิงมุมคือ  $\frac{1}{2} (L_x L_y + L_y L_x)$ 
  - ก. จงแสดงว่าตัวดำเนินการนี้เป็นเฮอร์มีเชียน
  - ข. สำหรับสถานะซึ่งองค์ประกอบทางแกน  $z$  ของโมเมนตัมเชิงมุมเป็น  $m \hbar$  และขนาดของโมเมนตัมเชิงมุมทั้งหมดเป็น  $\ell(\ell+1) \hbar^2$  จงหาค่าเฉลี่ยของตัวดำเนินการนี้

ค. จงหาค่าเฉลี่ยของกำลังสองของตัวดำเนินการนี้

คำแนะนำ: จงทำให้ตัวดำเนินการนี้อยู่ในรูป  $L_z$

6. ฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคซึ่งมีมวล  $m$  เคลื่อนอยู่ในหลุมโพเทนเชียล ณ เวลาหนึ่ง เขียนได้ดังนี้

$$\psi = (x+y+z) \exp(-\alpha\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

จงหาความน่าจะเป็นซึ่งทำให้การวัด  $L^2$  และ  $L_z$  มีค่า  $2\hbar^2$  และ  $0$  ตามลำดับ

คำแนะนำ:  $L^2 Y_{lm} = 2\hbar^2 Y_{lm}$  และ  $L_z Y_{l0} = 0 Y_{l0}$

7. ก. จงแสดงว่า  $3 \times 3$  เมทริกซ์ของ  $\underline{L}_x$  ซึ่ง  $l = 1$  เป็นไปตามสมการนี้

$$\underline{L}_x(\underline{L}_x + \underline{1}\hbar)(\underline{L}_x - \underline{1}\hbar) = 0$$

ข. จงหาดูว่า ถ้า  $l = 2$  สมการในข้อ ก. จะคงเป็นจริงหรือเปล่า

ค. จงหาดูว่า  $\underline{L}_y$  และ  $\underline{L}_z$  เป็นเหมือนกับข้อ ก. หรือไม่

ง. จงแสดงว่า เมื่อ  $l = 1$

$$\exp\left(\frac{i\theta \underline{L}_x}{\hbar}\right) = (\cos\theta - 1) \frac{\underline{L}_x^2}{\hbar^2} + i \sin\theta \frac{\underline{L}_x}{\hbar} + 1$$