บทที่ 4
การแปลงรูปของตัวแทน
(Transformations of Representations)

บทที่ 4
การแปลงรูปของตัวแทน

วัตถุประสงค์

1. ให้สามารถทำแบบฝึกหัดเรื่องตัวแทนพิกัดตอนท้ายบทได้
2. ให้สามารถแปลงตัวแทนพิกัดเป็นตัวแทนโมเมนตัม
3. ให้คำนวณระบบควอนตัมอย่างง่ายโดยใช้กลศาสตร์เมทริกซ์
4. ให้แปลงกลับไปกลับมาได้ระหว่างตัวแทนแบบของโชร์ดิงเจอร์และแบบของไฮเซนเบอร์ก

รูปที่ (4-1)

Paul Adrien Maurice Dirac ผู้คิดค้นพีชคณิตของกลศาสตร์ควอนตัม

4.1 บทนำ

ในบทที่ 2 ได้แสดงให้เห็นว่าการหมุนในสามมิติอาจจะแทนได้ด้วยยูนิทารีเมทริกซ์ในสองมิติ อันที่จริงคณิตศาสตร์ของกลศาสตร์ควอนตัมก็คือ เวกเตอร์สเปซซึ่งมีมิติเป็นอนันต์และมีเวกเตอร์มูลฐานซึ่งมีขนาดหนึ่งหน่วย เวกเตอร์มูลฐานแต่ละชุดอาจจะเปลี่ยนแปลงไปมาสู่กันได้ด้วยการแปลงรูปชนิดหนึ่งซึ่งเรียกว่า การแปลงรูปแบบยูนิทารี ซึ่งจะแสดงให้เห็นในบทนี้

ให้ u_k และ v_j เป็นตัวแทนออร์ทอนอร์มอลสองชุด แต่ละชุดมีความสมบูรณ์ จะเห็นว่าชุดของตัวแทนทั้งสองแปลงไปมาหากันได้ดังนี้

$$v_j = \sum_k (T_{jk}^*)^T u_k \tag{4-1}$$

คูณด้วย $(v_i)^T$ แล้วอินทีเกรตได้ผลว่า

$$< v_i|v_j > = \sum_{k,\ell} T_{i\ell}(T_{jk}^*)^T < u_\ell|u_k > \tag{4-2}$$

แต่ว่า

$$\left.\begin{aligned} < v_i|v_j > &= \delta_{ij} \\ < u_\ell|u_k > &= \delta_{\ell k} \end{aligned}\right\} \tag{4-3}$$

ดังนั้น

$$\delta_{ij} = \sum_{k,\ell} T_{i\ell}(T_{jk}^*)^T \delta_{\ell k}$$

$$= \sum_k T_{ik}(T_{jk}^*)^T \tag{4-4}$$

จะเห็นว่าสมการที่ (4-4) คือ สมการเมทริกซ์

$$\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T}}^+ \tag{4-5}$$

สมการที่ (4-5) แสดงว่า $\underline{\underline{T}}^+ = \underline{\underline{T}}^{-1}$ ดังนั้น $\underline{\underline{T}}$ เป็นยูนิทารีเมทริกซ์

4.1.1 คุณสมบัติของยูนิทารีเมทริกซ์

(ก) เวกเตอร์ซึ่งเกิดจากองค์ประกอบทางแนวตั้งหรือแนวนอนของ $n \times n$ ยูนิทารีเมทริกซ์ เป็นเวกเตอร์ซึ่งมีขนาด 1 หน่วย ซึ่งตั้งได้ฉากซึ่งกันและกัน เวกเตอร์ซึ่งเกิดจากองค์ประกอบแนวตั้งทั้งหมด หรือองค์ประกอบแนวนอนทั้งหมดของ $n \times n$ ยูนิทารีเมทริกซ์เป็นฐานออร์ทอนอร์มอล (orthonormal basic) ของเวกเตอร์สเปซซึ่งมี n มิติ

ตัวอย่างที่ 1 ถ้า $\underline{A}$ เป็นยูนิทารีเมทริกซ์ และ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & & \\ a_{31} & \cdots & & & \\ \vdots & & & & \\ \cdot & & & & a_{nn} \end{bmatrix}$

ดังนั้น ให้ $\bar{A}_1 = (a_{11} \;\; a_{12} \;\; a_{13} \;\; \ldots \;\; a_{1n})$

$$\bar{A}_2 = (a_{21} \;\; a_{22} \;\; \ldots \;\; a_{2n})$$

$$\vdots$$

$$\bar{A}_n = (a_{n1} \;\; a_{n2} \;\; \ldots \;\; a_{nn})$$

$\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n$ เป็นฐานออร์ทอนอร์มอลของเวกเตอร์สเปซซึ่งมี n มิติ ชุดหนึ่ง

และให้ $\bar{A}^1 = (a_{11} \;\; a_{21} \;\; \ldots \;\; a_{n1})$

$$\bar{A}^2 = (a_{12} \;\; a_{22} \;\; \ldots \;\; a_{n2})$$

$$\vdots$$

$$\bar{A}^n = (a_{1n} \;\; a_{2n} \;\; \ldots \;\; a_{nn})$$

$\bar{A}^1, \bar{A}^2, \ldots, \bar{A}^n$ เป็นฐานออร์ทอนอร์มอลของเวกเตอร์สเปซซึ่งมี n มิติ อีกชุดหนึ่ง

(ข) inverse กับ transpose ของยูนิทารีเมทริกซ์เป็นยูนิทารีเมทริกซ์

(ค) ผลคูณของยูนิทารีเมทริกซ์เป็นยูนิทารีเมทริกซ์

(ง) ค่าสัมบูรณ์ (absolute value) ของดีเทอร์มิเนนท์ของยูนิทารีเมทริกซ์มีค่าเป็นหนึ่ง

4.1.2 การแปลงรูปของฟังก์ชันคลื่น

ถ้าหากตัวแทนของฟังก์ชันคลื่น ψ ซึ่งมี v_j's เป็นฟังก์ชันมูลฐาน คือ ψ' โดยที่องค์ประกอบของ ψ' หาได้ดังนี้

$$\psi'_j = < v_j|\psi > \tag{4-6}$$

แทนค่า v_j จากสมการที่ (4-1)

$$\psi'_j = \sum_k T_{jk} < u_k|\psi > = \sum_k T_{jk}\psi_k \tag{4-7}$$

ψ_k คือองค์ประกอบของ ψ เมื่อฟังก์ชันมูลฐาน คือ u_k's สมการที่ (4-7) เขียนเป็นรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\bar{\psi}' = \underline{\underline{T}} \cdot \bar{\psi} \tag{4-8}$$

ตัวอย่างที่ 2 สมมติว่ามีโมเมนตัมเชิงมุมสองตัว $\bar{j}_1$ และ $\bar{j}_2$ ทำอันตรกิริยากันในรูปของไดโพลโมเมนต์แม่เหล็กสองตัว ซึ่งมีพลังงานเป็นสัดส่วนกับ $\bar{j}_1 \cdot \bar{j}_2$ จงแสดงว่าฟังก์ชันคลื่น

ซึ่งเป็นฟังก์ชันไอเกนของ $\bar{j}_1 \cdot \bar{j}_2$ เกิดจากการแปลงรูปแบบยูนิทารีของฟังก์ชันคลื่นของ $\bar{j}_1$ และ $\bar{j}_2$

วิธีทำ ให้ฟังก์ชันคลื่นของตัวดำเนินการ $\bar{j}_1$ คือ $\phi_{j_1m_1}$ และฟังก์ชันคลื่นของตัวดำเนินการ $\bar{j}_2$ คือ $\phi_{j_2m_2}$ ดังนั้น รูปหนึ่งของฟังก์ชันคลื่นของตัวแปรทั้งสอง คือ

$$\phi_{j_1m_1}\phi_{j_2m_2} = |\, j_1m_1\, j_2m_2 > \tag{4-9}$$

ให้

$$\begin{aligned} \bar{j}^2 &= (\bar{j}_1+\bar{j}_2)^2 \\ &= \bar{j}_1^2+\bar{j}_2^2+2\,\bar{j}_1\cdot\bar{j}_2 \end{aligned}$$

$$\therefore\quad \bar{j}_1\cdot\bar{j}_2 = \frac{1}{2}(\bar{j}^2-\bar{j}_1^2-\bar{j}_2^2) \tag{4-10}$$

แสดงว่า ฟังก์ชันไอเกนของตัวดำเนินการ $\bar{j}_1\cdot\bar{j}_2$ เป็นฟังก์ชันไอเกนของ $\bar{j}^2$, $\bar{j}_1^2$, $\bar{j}_2^2$ และ j_z การที่ฟังก์ชันคลื่นเป็นฟังก์ชันไอเกนของ j_z ด้วยเพราะ $[j_z, j^2] = 0$ การมีฟังก์ชันคลื่นร่วมกันเป็นไปตามทฤษฎีในสัจพจน์ที่ 4 บทที่ 3 ให้ $\psi_{jmj_1j_2}$ เป็นฟังก์ชันไอเกนของ $\bar{j}_1\cdot\bar{j}_2$ ดังนั้น จากสมการที่ (4-7)

$$\psi_{jm\,j_1j_2} = \sum_{m_1m_2} C^{jmj_1j_2}_{j_1m_1j_2m_2}\ \phi_{j_1m_1}\phi_{j_2m_2}$$

หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ของ Dirac ได้ว่า

$$|\, jmj_1j_2 > = \sum_{m_1m_2} < jmj_1j_2 \,|\, j_1m_1j_2m_2 > |\, j_1m_1j_2m_2 > \tag{4-11}$$

เมื่อ $C^{jmj_1j_2}_{j_1m_1j_2m_2} = < jmj_1j_2 \,|\, j_1m_1j_2m_2 >$ เป็นองค์ประกอบของการแปลงรูปแบบยูนิทารีที่ต้องการ $< jmj_1j_2 \,|\, j_1m_1j_2m_2 >$ มีชื่อเรียกว่าสัมประสิทธิ์ของ Clebsch-Gordon หรือสัมประสิทธิ์ของ Wigner

4.1.3 การแปลงรูปของตัวดำเนินการ

สมมติว่าตัวดำเนินการ Q ในตัวแทน v_j เขียนได้ดังนี้

$$Q'_{ij} = < v_i \,|\, Q \,|\, v_j > \tag{4-12}$$

แทนค่า v_i และ v_j จากสมการที่ (4-1)

$$\begin{aligned} Q'_{ij} &= \sum_{k,\ell} T_{i\ell}\,(T^*_{jk})^T < u_\ell \,|\, Q \,|\, u_k > \\ &= \sum_{k,\ell} T_{i\ell}\, Q_{\ell k}\,(T^*_{jk})^T \end{aligned} \tag{4-13}$$

หรือเขียนในรูปของเมทริกซ์ได้ว่า

$$\underline{\underline{Q}}' = \underline{\underline{T}}\cdot\underline{\underline{Q}}\cdot\underline{\underline{T}}^{-1} \tag{4-14}$$

สมการที่ (4-14) เรียกว่าการแปลงรูปแบบ similarity ถ้า $\underline{\underline{T}}$ เป็นยูนิทารีเมทริกซ์ เราเรียกสมการที่ (4-14) ว่าการแปลงรูปแบบยูนิทารี

4.1.4 คุณสมบัติของการแปลงรูปแบบยูนิทารี

คำนิยาม ถ้าหาก $\bar{Y} = \underline{\underline{A}}\cdot\bar{x}$ เป็นการแปลงรูปเชิงเส้นซึ่งมี $\underline{\underline{A}}$ เป็นยูนิทารีเมทริกซ์ การแปลงรูปชนิดนี้เรียกว่า การแปลงรูปแบบยูนิทารี (unitary transformation) ซึ่งมีคุณสมบัติต่อไปนี้

(ก) การแปลงรูปแบบยูนิทารีรักษาขนาดของเวกเตอร์และมุมระหว่างเวกเตอร์

(ข) ถ้า E-basis เป็นฐานออร์ทอนอร์มอลชุดหนึ่ง การแปลงรูปจาก E-basis ไปสู่ Z-basis ทำได้โดย

$$\bar{\psi}' = \underline{\underline{A}}\cdot\bar{\psi} \tag{4-15}$$

$\bar{\psi}'$ เป็นเวกเตอร์ฟังก์ชันซึ่งมีองค์ประกอบขึ้นอยู่กับการเขียนฟังก์ชันคลื่นใน E-basis ส่วน $\bar{\psi}$ เป็นเวกเตอร์ซึ่งองค์ประกอบของเวกเตอร์ขึ้นอยู่กับการเขียนฟังก์ชันคลื่นใน Z-basis และ $\underline{\underline{A}}$ เป็นยูนิทารีเมทริกซ์ ดังนั้น

Z-basis เป็นฐานออร์ทอนอร์มอล $\leftrightarrow$ $\underline{\underline{A}}$ เป็นยูนิทารีเมทริกซ์ (4-16)

(ค) ทฤษฎี สมการเมทริกซ์ไม่เปลี่ยนรูปเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงรูปแบบ similarity

พิสูจน์ ถ้า

$$
\begin{aligned}
\underline{\underline{W}} &= \underline{\underline{Q}}\cdot\underline{\underline{R}} \\
\underline{\underline{T}}\cdot\underline{\underline{W}}\cdot\underline{\underline{T}}^{-1} &= \underline{\underline{T}}\cdot\underline{\underline{Q}}\cdot\underline{\underline{R}}\cdot\underline{\underline{T}}^{-1} \\
&= \underline{\underline{T}}\cdot\underline{\underline{Q}}\cdot\underline{\underline{T}}^{-1}\cdot\underline{\underline{T}}\cdot\underline{\underline{R}}\cdot\underline{\underline{T}}^{-1} \\
\therefore\quad \underline{\underline{W}}' &= \underline{\underline{T}}\cdot\underline{\underline{W}}\cdot\underline{\underline{T}}^{-1} \\
&= \underline{\underline{T}}\cdot\underline{\underline{Q}}\cdot\underline{\underline{T}}^{-1}\cdot\underline{\underline{T}}\cdot\underline{\underline{R}}\cdot\underline{\underline{T}}^{-1} \;=\; \underline{\underline{Q}}'\cdot\underline{\underline{R}}'
\end{aligned}
$$

(ง) ทฤษฎี คุณสมบัติการเป็นเฮอร์มีเชียนของเมทริกซ์ไม่เปลี่ยนไปเมื่อมีการแปลงรูปแบบยูนิทารี

พิสูจน์ สมมติว่า $\underline{\underline{Q}}$ เป็นเฮอร์มีเชียนและ $\underline{\underline{T}}$ เป็นยูนิทารี

$$\therefore\quad (\underline{\underline{T}}\cdot\underline{\underline{Q}}\cdot\mathrm{T}^{-1})^{+} = (\underline{\underline{T}}^{-1})^{+}\cdot(\underline{\underline{Q}})^{+}\cdot(\underline{\underline{T}})^{+} \tag{4-17}$$

แต่เนื่องจาก $\underline{\underline{T}}$ เป็นยูนิทารี ดังนั้น ด้านขวาของ (4-17) กลายเป็น

$$= (\underline{\underline{T}})(\underline{\underline{Q}})^{+}\cdot\underline{\underline{T}}^{-1} = \underline{\underline{T}}\cdot\underline{\underline{Q}}\cdot\underline{\underline{T}}^{-1} \tag{4-18}$$

ขั้นสุดท้ายของสมการ (4-18) ใช้คุณสมบัติความเป็นเฮอร์มีเชียนของ $\underline{\underline{Q}}$

$$\therefore \quad (\underline{\underline{T}}\cdot\underline{\underline{Q}}\cdot\underline{\underline{T}}^{-1})^{+} = \underline{\underline{T}}\cdot\underline{\underline{Q}}\cdot\underline{\underline{T}}^{-1} \qquad \text{Q.E.D.}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงแสดงว่าถ้า E-basis และ Z-basis เป็นชุดของฐานออร์ทอนอร์มอลสองชุด $\underline{\underline{A}}$ เป็นเมทริกซ์ซึ่งแปลง E-basis เป็น Z-basis แล้ว $\underline{\underline{A}}$ เป็นยูนิทารีเมทริกซ์

วิธีทำ ให้ ϕ_1 และ ϕ_2 เป็นฟังก์ชันคลื่นสองฟังก์ชัน ดังนั้น $< \phi_1 \,|\, \phi_2 >$ เป็นความน่าจะเป็นอันหนึ่ง ให้ $\underline{\underline{A}}$ เป็นแมททริกซ์ของการแปลงรูปใด ๆ

$$\therefore \quad < \underline{\underline{A}}\cdot\phi_1 \,|\, \underline{\underline{A}}\cdot\phi_2 > \;=\; < \phi_1 \,|\, \phi_2 > \qquad (4\text{-}19)$$

(4-19) แสดงว่า ความน่าจะเป็นไม่ขึ้นกับการแปลงรูป ทางด้านซ้ายของสมการ (4-19) อาจจะเขียนเสียใหม่ว่า

$$< \phi_1 \,|\, \underline{\underline{A}}^{+}\cdot\underline{\underline{A}} \,|\, \phi_2 > \;=\; < \phi_1 \,|\, \phi_2 > \qquad (4\text{-}20)$$

แสดงว่า $\underline{\underline{A}}^{+}\cdot\underline{\underline{A}} = I$ ซึ่งหมายถึงว่า $\underline{\underline{A}}$ เป็นยูนิทารีเมทริกซ์ Q.E.D.

4.2 เวกเตอร์ในสามมิติและเวกเตอร์ในฮิลเบอร์ทสเปซ (Hilbert Space)

เราอาจจะเทียบฟังก์ชันคลื่นกับเวกเตอร์ในสามมิติซึ่งทำให้เห็นคุณสมบัติอันเป็นนามธรรมของฟังก์ชันคลื่นนั้นได้ชัดขึ้นดังนี้

เวกเตอร์ในสามมิติ

4.2.1 การหมุน (rotation)

สมมติว่า $\bar{a} = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix}$

เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ เราอาจจะแปลง $\bar{a}$ ให้เป็น $\bar{a}'$ โดยการหมุนด้วยเมทริกซ์ $\underline{\underline{R}}$ ดังนี้

$$\bar{a}' = \underline{\underline{R}}\cdot\bar{a} \qquad (4.21a)$$

ฟังก์ชันคลื่น

ให้ ψ เป็นฟังก์ชันคลื่นในฮิลเบอร์ทสเปซ ดังนั้น ψ จะมีมิติเป็นอนันต์และอาจจะมีองค์ประกอบเป็นเลขจำนวนเชิงซ้อน เราอาจจะหมุน $\bar{\psi}$ ในฮิลเบอร์ทสเปซได้โดยความสัมพันธ์

$$\bar{\psi}' = \underline{\underline{T}}\cdot\bar{\psi} \qquad (4\text{-}21b)$$

$\underline{\underline{T}}$: ยูนิทารีเมทริกซ์

4.2.2 การคูณแบบสเกลาร์

ถ้า $\bar{a}$ และ $\bar{b}$ เป็นเวกเตอร์สองตัวในสามมิติ ดังนั้น

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta = (\underline{\underline{a}})^T\cdot(\underline{\underline{b}})$$

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \quad (4.22a)$$

ถ้า $|\psi>$ และ $|\phi>$ เป็นฟังก์ชันคลื่นสองฟังก์ชันในฮิลเบอร์ทสเปซ

$$<\psi|\phi> = \sum_{j,k} (\psi_j^*)^T\phi_k <j|k>$$

$$= \sum_k (\psi_k^*)^T \phi_k$$

$$= (\underline{\underline{\Psi}}^*)^T\cdot\underline{\underline{\phi}} \quad (4.22b)$$

4.2.3 ออร์ทอกอนอลลิตี้ (orthogonality)

ถ้า $\bar{a} \perp \bar{b}$ ดังนั้น

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = 0 = \underline{\underline{a}}^T\cdot\underline{\underline{b}} \quad (4.23a)$$

ถ้า $|\psi>$ และ $|\phi>$ เป็นออร์ทอกอนอลกันแล้ว

$$<\psi|\phi> = 0 \quad (4.23b)$$

4.2.4 นอร์มอลไลเซชั่น (normalization)

ถ้า $\bar{a}$ เป็นเวกเตอร์ซึ่งมีความยาวเป็นหนึ่ง

$$\bar{a}\cdot\bar{a} = 1 \leftrightarrow \underline{\underline{a}}^T\cdot\underline{\underline{a}} = \underline{\underline{I}} \quad (4.24a)$$

ถ้า $|\psi>$ เป็นนอร์มอลไลซ์เวกเตอร์ในฮิลเบอร์ทสเปซแล้ว

$$<\psi|\psi> = 1 \quad (4.24b)$$

4.2.5 การสะท้อน (reflection)

การสะท้อนหรือ improper rotation คือการสะท้อนแกนพิกัดในสามมิติ

ไม่มีการแปลงรูปแบบการสะท้อนในฮิลเบอร์ทสเปซ

ข้อเปรียบที่สำคัญอันหนึ่งคือ การหมุนของวัตถุเกร็ง (rigid body rotation) ในการหมุนชนิดนี้ ระบบของเวกเตอร์ชุดหนึ่งจะถูกหมุนทั้งระบบจากพิกัดเดิมไปสู่พิกัดใหม่ การหมุนนี้อาจจะเกิดขึ้นเนื่องจากเราหมุนพิกัดเพียงอย่างเดียว ปล่อยให้ชุดของเวกเตอร์อยู่นิ่ง ๆ ก็ได้ การหมุนอย่างนี้ทำให้เราเปลี่ยนจากฐานออร์ทอนอร์มอลชุดหนึ่งไปสู่อีกชุดหนึ่ง การคูณแบบสเกลาร์ของเวกเตอร์ใด ๆ จะไม่เปลี่ยนแปลง (invariant) เนื่องจากการหมุนนี้

ในฮิลเบอร์ทสเปซ mapping ซึ่งเท่ากับการหมุนของวัตถุเกร็ง ก็คือการแปลงรูปของตัวแทนจากฐานออร์ทอนอร์มอลชุดหนึ่งไปยังอีกชุดหนึ่ง สมมติว่า

$$\psi = \sum_j \psi_j u_j \quad (4\text{-}25)$$

u_i เป็นฐานออร์ทอนอร์มอลชุดหนึ่งในฮิลเบอร์ทสเปซ ให้ ψ' เป็นฟังก์ชันคลื่นเดียวกันในฐานออร์ทอนอร์มอล v_k ดังนั้น

$$\psi' = \underline{\underline{T}}\cdot\psi \tag{4-26}$$

สมมติว่า ϕ เป็นฟังก์ชันคลื่นอีกฟังก์ชันหนึ่งในฐานออร์ทอนอร์มอล u_i และ

$$\phi' = \underline{\underline{T}}\cdot\phi \tag{4-27}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} < \phi' \mid \psi' > &= < T\phi \mid T\psi > \\ &= < \phi \mid \underline{\underline{T}}^{+}\cdot\underline{\underline{T}} \mid \psi > \end{aligned} \tag{4-28}$$

แต่เนื่องจาก $\underline{\underline{T}}$ เป็นยูนิทารีแมททริกซ์ ดังนั้น

$$< \phi' \mid \psi' > = < \phi \mid \psi > \tag{4-29}$$

จากสมการที่ (4-29) แสดงว่า การคูณแบบสเกลาร์ไม่เปลี่ยนในการแปลงรูปแบบยูนิทารี และจากสมการ (4-28) แสดงว่าการแปลงรูปแบบยูนิทารี รักษาคุณสมบัติออร์-ทอกอนอลลิตี้ของเวกเตอร์

4.3 คุณสมบัติของสมการไอเกน

ถ้าหากเรามีสมการไอเกน

$$Q\psi_i = q_i\psi_i \tag{4-30}$$

เราอาจจะเขียนเป็นสมการเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\underline{\underline{Q}}\cdot\psi_i = q_i\,\psi_i \tag{4-31}$$

สมการที่ (4-31) อาจจะเขียนเสียใหม่ได้ดังนี้

$$(\underline{\underline{Q}} - q_i\,\underline{\underline{1}})\cdot\psi_i = 0 \tag{4-31$'$}$$

สมการที่ (4-31)$'$ เป็นสมการเชิงเส้น homogeneous ถ้าหากมิติของสเปซไม่เป็นอนันต์ สมการที่ (4-31)$'$ จะมี solution เมื่อ

$$\det |\underline{\underline{Q}} - q_i\,\underline{\underline{1}}| = 0 \tag{4-32}$$

สมมติว่ามิติ คือ n ดังนั้น สมการที่ (4-32) อาจจะเขียนเสียใหม่ได้ดังนี้

$$q_i^n + c_1 q_i^{n-1} + \ldots + c_n = 0 \tag{4-33}$$

ทางด้านซ้ายมือของสมการที่ (4-33) เรียกว่า characteristic polynomial ซึ่งอาจจะเขียนในรูปของรากได้ดังนี้

$$(q - q_1)(q - q_2)\ldots(q - q_n) = 0 \tag{4-34}$$

เทียบสมการที่ (4-33) และ (4-34) จะเห็นว่า

$$c_1 \equiv -\sum_i q_i \tag{4-35}$$

$$c_n \equiv (-1)^n \pi_i q_i = (-1)^n q_1 q_2 \ldots q_n \tag{4-36}$$

จาก (4-32) และ (4-33) จะเห็นว่า trace หรือ spur ของ $\underline{\underline{Q}}$ ซึ่งมีคำนิยามดังนี้

$$\mathrm{tr}\,\underline{\underline{Q}} \equiv \sum_i Q_{ii} \tag{4-37}$$

$$\mathrm{tr}\,\underline{\underline{Q}} = -c_1 \quad \text{และจากสมการที่ (4-35)}$$

$$\mathrm{tr}\,\underline{\underline{Q}} = -c_1 = \sum_i q_i \tag{4-38}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงแสดงว่า $\mathrm{tr}\,\underline{\underline{Q}} = -c_1$ ในกรณีที่ Q เป็น 3×3 เมทริกซ์

วิธีทำ จากสมการที่ (4-32)

$$\begin{vmatrix} Q_{11}-q_j & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22}-q_j & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33}-q_j \end{vmatrix} = 0$$

ดังนั้น
$$(Q_{11}-q_j)\begin{vmatrix} Q_{22}-q_j & Q_{23} \\ Q_{32} & Q_{33}-q_j \end{vmatrix} - Q_{12}\begin{vmatrix} Q_{21} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{33}-q_j \end{vmatrix}$$
$$+ Q_{13}\begin{vmatrix} Q_{21} & Q_{22}-q_j \\ Q_{31} & Q_{32} \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \; (Q_{11}-q_j)\{(Q_{22}-q_j)(Q_{33}-q_j) - Q_{23}Q_{32}\}$$
$$- Q_{12}\{Q_{21}(Q_{33}-q_j) - Q_{23}Q_{31}\}$$
$$+ Q_{13}\{Q_{32}Q_{21} - Q_{31}(Q_{22}-q_j)\} = 0$$

$$\therefore \; (Q_{11}-q_j)(Q_{22}-q_j)(Q_{33}-q_j) - (Q_{11}-q_j)Q_{23}Q_{32}$$
$$- (Q_{22}-q_j)Q_{13}Q_{31} - (Q_{33}-q_j)Q_{12}Q_{21} + Q_{12}Q_{23}Q_{31} + Q_{13}Q_{32}Q_{21} = 0$$

$$q_j^3 - (Q_{11}+Q_{22}+Q_{33})q_j^2 + \{\quad\}q_j + \ldots = 0 \tag{4-39}$$

เทียบสมการที่ (4-39) กับสมการที่ (4-33) จะเห็นว่า

$$-c_1 = \mathrm{tr}\,\underline{\underline{Q}} \qquad \text{Q.E.D.}$$

4.3.1 ทฤษฎี ทุก ๆ $n \times n$ แมททริกซ์ $\underline{\underline{Q}}$ จะคล้ายคลึงกับ triangular matrix ซึ่งมีค่าไอเกนของแมททริกซ์ $\underline{\underline{Q}}$ บนเส้นทแยงมุม

คำนิยาม triangular matrix $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \cdots \\ 0 & 0 & A_{33} & \cdots \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \end{bmatrix}$

พิสูจน์ ให้ค่าไอเกนของ $\underline{\underline{Q}}$ คือ $q_1; q_2, \ldots, q_n$ ให้ $\bar{X}_i$ เป็นฟังก์ชันไอเกนซึ่งมีขนาดเป็นหนึ่งของ $\underline{\underline{Q}}$ โดยมีค่าไอเกน q_i ให้ $\bar{X}_1$ เป็นแถวตั้งแถวแรกของ non-singular matrix $\underline{\underline{R}}_1$ ดังนั้นแถวตั้งแถวแรกของ $\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{R}}_1$ คือ (R_1 เป็นเมทริกซ์ที่จะใช้ทำการแปลงเมทริกซ์ Q)

$$\underline{\underline{Q}} \cdot \bar{X}_1 = q_1 \bar{X}_1$$

แถวตั้งแถวแรกของ $\underline{\underline{R}}_1^{-1} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{R}}_1$ คือ $\underline{\underline{R}}_1^{-1} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \bar{X}_1 = (q_1, 0, 0, \ldots)^T$

หรือเขียนในรูปของแมททริกซ์

$$\underline{\underline{R}}_1^{-1} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{R}}_1 = \begin{bmatrix} q_1 & B_1 \\ 0 & \underline{\underline{Q}}_1 \end{bmatrix} \qquad (4\text{-}40)$$

โดยที่ $\underline{\underline{Q}}_1$ มีออร์เดอร์เป็น $n-1$

$$\therefore \quad \det(q\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{R}}^{-1} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{R}}) = \det \begin{bmatrix} q - q_1 & -B_1 \\ 0 & q\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{Q}}_1 \end{bmatrix}$$
$$= (q - q_1) \det(q\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{Q}}_1)$$

โดยทำนองเดียวกัน เราอาจจะหาค่า q_2 จาก $\underline{\underline{Q}}_1$ แล้วจัดให้เป็น triangular matrix ขบวนการนี้อาจจะทำซ้ำไปเรื่อย ๆ จนในที่สุดแมททริกซ์ $\underline{\underline{Q}}$ จะถูกเปลี่ยนเป็น triangular matrix โดยมีค่าไอเกนอยู่เฉพาะบนเส้นทแยงมุม Q.E.D.

4.3.2 ทฤษฎี จงแสดงว่า $\det \underline{\underline{Q}} = (-1)^n c_n = q_1 q_2 \ldots q_n$ (4-41)

พิสูจน์ จากข้อ 4.3.1 จะเห็นว่า

$$\det \underline{\underline{Q}} = q_1 \det \underline{\underline{Q}}_1 = q_1 q_2 \det \underline{\underline{Q}}_2$$
$$= \ldots = q_1 q_2 \ldots q_n$$

และจากสมการ (4-34) และ (4-33)

$$q_1 q_2 \ldots q_n = (-1)^n c_n \qquad \text{Q.E.D.}$$

เนื่องจากสมการเมทริกซ์ไม่เปลี่ยนเมื่อมีการแปลงรูปแบบ similarity โดยทำนองเดียวกันสมการไอเกน (4-30) ย่อมไม่เปลี่ยนไปเมื่อมีการแปลงรูปแบบ similarity ดังนั้น จะเห็นว่าค่าไอเกนของเมทริกซ์ย่อมไม่เปลี่ยนและ characteristic polynomial ย่อมไม่เปลี่ยนไปด้วย โดยทำนองเดียวกัน trace และดีเทอร์มีเนนท์ของเมทริกซ์ย่อมไม่เปลี่ยนไปเมื่อมีการแปลงรูปแบบ similarity

4.3.3 ทฤษฎี เฮอร์มีเชียนแมททริกซ์ $\underline{\underline{Q}}$ อาจจะแปลงให้อยู่ในรูปของแมททริกซ์ซึ่งมีค่าไอเกนบนเส้นทแยงมุมเท่านั้น

พิสูจน์ ให้ $\underline{\underline{Q}}\cdot\bar{\psi} = q_j\bar{\psi}$

แปลง $\bar{\psi}$ ดังนี้ $\bar{\psi} = \underline{\underline{T}}\cdot\bar{\psi}'$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad \underline{\underline{Q}}\cdot\underline{\underline{T}}\cdot\bar{\psi}' &= q_j\, \underline{\underline{T}}\cdot\bar{\psi}' \\
&= q_j\, \underline{\underline{I}}\cdot\underline{\underline{T}}\cdot\bar{\psi}' \\
&= \underline{\underline{T}}\cdot\underline{\underline{I}}\cdot(q_j\bar{\psi}') \\
\therefore\quad \underline{\underline{Q}}\cdot\underline{\underline{T}} &= \underline{\underline{T}}\cdot\underline{\underline{I}}\, q_j \\
&= \underline{\underline{T}}\cdot\underline{\underline{Q}}d
\end{aligned}$$

เมื่อ $\underline{\underline{Q}}d = \underline{\underline{I}}\, q_j$ เป็นแมททริกซ์ซึ่งมีค่าบนเส้นทแยงมุมเป็นค่าไอเกน

$$\therefore\quad \underline{\underline{T}}^{-1}\cdot\underline{\underline{Q}}\cdot\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^{+}\cdot\underline{\underline{Q}}\cdot\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{Q}}d \qquad \text{Q.E.D.}$$

ตัวอย่างที่ 5 ให้ $S_z = \hbar\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \phi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

จงหา (1) characteristic polynomial

(2) จงแสดงว่าสมการ (4-36), (4-38) และ (4-41) เป็นจริง

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{S}}_z\cdot\bar{\phi}_i &= q_i\,\bar{\phi}_i \\
\therefore\quad \det(\underline{\underline{S}}_z - \underline{\underline{I}}\, q_i) &= 0 \\
&= \begin{vmatrix} \hbar - q_i & 0 \\ 0 & -\hbar - q_i \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}$$

จะเห็นว่า $(\hbar - q_i)(\hbar + q_i) = 0$: characteristic polynomial

$$q_i = \hbar, -\hbar$$

$$q_i^2 - \hbar^2 = 0$$

$$c_n = -\hbar^2 = (-1)^2(\hbar)(-\hbar) \quad : \text{(4-36) เป็นจริง}$$

$$\mathrm{tr}\, \underset{=}{S}_y = 0 = c_1 \quad : \text{(4-38) เป็นจริง}$$

$$\det \underset{=}{S}_y = -\hbar^2 = (-1)^2(-\hbar^2) \quad : \text{(4-41) เป็นจริง}$$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่าไอเกนและไอเกนเวกเตอร์ของ $\underset{=}{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

$$\det(\underset{=}{A} - q_i \underset{=}{I}) = 0 = \det(q_i \underset{=}{I} - \underset{=}{A})$$

$$= \begin{vmatrix} q-2 & -2 & -1 \\ -1 & q_i - 3 & -1 \\ -1 & -2 & q_i - 2 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \quad q_i^3 - 7q_i^2 + 11q_i - 5 = 0 \qquad (4\text{-}42)$$

$\therefore$ ค่าไอเกน คือ $q_1 = 5,\ q_2 = q_3 = 1$

สำหรับค่า $q_1 = 5$

$$\underset{=}{A} \cdot \underset{=}{X} = q_1 \underset{=}{X} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

ดังนั้น ไอเกนเวกเตอร์ของ $q_1 = 5$ คือ $(1, 1, 1)^T$

สำหรับค่า $q_2 = q_3 = 1$

$$\underset{=}{A} \cdot \underset{=}{X} = q_2 \underset{=}{X} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

ได้ว่า $\quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$

ดังนั้น ไอเกนเวกเตอร์ที่เป็นอิสระเชิงเส้นแก่กันก็คือ $(2, -1, 0)^T$ และ $(1, 0, -1)^T$

พึงสังเกตว่าเราอาจจะเขียน characteristic equation ได้ดังนี้

$$\det(q_i \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}) = q_i^3 + (-1)^1 m_1 q_i^2 + (-1)^2 m_2 q_i^1 + (-1)^3 m_3 q_i^0$$

$$m_1 = 2+3+2 = \text{ค่าตามทแยงของ } \underline{\underline{A}} = 7$$

$$m_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 11$$

$$m_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$\therefore \det(q_i \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}) = q_i^3 - 7q_i^2 + 11q_i - 5 = 0$$

ตัวอย่างที่ 7 ทฤษฎีของเคย์เลย์และแฮมมิลตัน (Cayley-Hamilton Theorem)

(1) ถ้า $\underline{\underline{A}}$ เป็น $n \times n$ **เมทริกซ์** มี $\lambda \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}$ เป็น characteristic matrix มีสมการ characteristic ดังนี้

$$\det |\lambda \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}| = 0 \tag{4-43}$$

จงแสดงว่า $\{(\lambda \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})\}\{\text{adjugate ของ } \underline{\underline{A}}\} = \{\det |\lambda \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}|\}.\underline{\underline{I}}$

พิสูจน์ ถ้า $\underline{\underline{B}}$ เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ใดๆ ให้

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & \dots & & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\text{Adjugate ของ } \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \\ \vdots & & & \\ \beta_{n1} & \dots & & \beta_{nn} \end{bmatrix} \tag{4-43ก}$$

เมื่อ β_{ij} คือ Cofactor ของ b_{ij}

แต่เนื่องจากว่า

$$\underline{\underline{B}} \cdot \text{adjugate } \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots \\ \vdots & & \vdots \\ & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots \\ \vdots & & \vdots \\ & \dots & \beta_{nn} \end{bmatrix} \tag{4-43ข}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11}\beta_{11} + b_{12}\beta_{21} + \dots + b_{1n}\beta_{n1}, \dots \\ b_{21}\beta_{11} + b_{22}\beta_{22} + \dots + b_{2n}\beta_{n1}, \dots \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \det \underline{\underline{B}} & 0 & \dots \\ 0 & \det \underline{\underline{B}} & \\ \vdots & & \end{bmatrix}$$

$$= (\det \underline{\underline{B}}) \cdot \underline{\underline{I}}$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{B}} \cdot \text{adjugate } \underline{\underline{B}} = (\det \underline{\underline{B}}) \cdot \underline{\underline{I}}$$

แสดงว่า $(\lambda \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}) \cdot \text{adjugate}(\lambda \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}) = \left(\det(\lambda \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})\right) \cdot \underline{\underline{I}}$ Q.E.D.

(2) (ซึ่งเราจะไม่พิสูจน์แต่จะทำให้ดูในกรณีหนึ่ง การพิสูจน์เว้นไว้เป็นแบบฝึกหัด)

ถ้า $\phi(\lambda) = \det(\lambda \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}) = 0$ โดยที่ $\underline{\underline{A}}$ เป็น $n \times n$ เมทริกซ์

ดังนั้น $\phi(\underline{\underline{A}}) = 0$

ให้ $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ดังนั้น $\det(\lambda \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0$

$$\underline{\underline{A}}^2 = \begin{bmatrix} 7 & 12 & 6 \\ 6 & 13 & 6 \\ 6 & 12 & 7 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{A}}^3 = \begin{bmatrix} 32 & 62 & 31 \\ 31 & 63 & 31 \\ 31 & 62 & 32 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า $\begin{bmatrix} 32 & 62 & 31 \\ 31 & 63 & 31 \\ 31 & 62 & 32 \end{bmatrix} - 7 \begin{bmatrix} 7 & 12 & 6 \\ 6 & 13 & 6 \\ 6 & 12 & 7 \end{bmatrix} + 11 \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$

4.4 ตัวดำเนินการยูนิทารีในรูปของเอกซ์โปเนนเชียล

ให้ $$e^a \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \qquad (4\text{-}44)$$

จะเห็นว่า $$e^a \times e^b = e^{a+b} \quad \text{ถ้า } [a, b] = 0 \qquad (4\text{-}45)$$

และเนื่องจาก $[a, -a] = 0$ ดังนั้น

$$(e^{a})^{-1} = e^{-a} \tag{4-46}$$

4.4.1 ทฤษฎี $\underline{\underline{A}} = e^{i\underline{\underline{S}}}$ เป็นตัวดำเนินการยูนิทารี ถ้าหาก $\underline{\underline{S}}$ เป็นตัวดำเนินการเฮอร์มีเชียน

พิสูจน์

$$\underline{\underline{A}}^{+} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(i\underline{\underline{S}})^{n}]^{+}}{n!} = \sum_{n} \frac{(-i\underline{\underline{S}}^{+})^{n}}{n!}$$

แต่เนื่องจาก $\underline{\underline{S}}$ เป็นตัวดำเนินการเฮอร์มีเชียน

$$\sum_{n} \frac{(-i\underline{\underline{S}}^{+})^{n}}{n!} = \sum_{n} \frac{(-i\underline{\underline{S}})^{n}}{n!} = e^{-i\underline{\underline{S}}} = \underline{\underline{A}}^{-1}$$

$\underline{\underline{A}}^{+} = \underline{\underline{A}}^{-1}$ แสดงว่า $\underline{\underline{A}}$ เป็นยูนิทารีเมทริกซ์

บทกลับ (ซึ่งจะไม่พิสูจน์)

ถ้า $\underline{\underline{A}} = e^{i\underline{\underline{S}}}$, $\underline{\underline{S}}$ เป็นเฮอร์มีเชียน ดังนั้น $\underline{\underline{A}}$ เป็นยูนิทารี

ทฤษฎี (ซึ่งจะไม่พิสูจน์ให้ดู)

ถ้า $\underline{\underline{S}}_1, \underline{\underline{S}}_2, \ldots$ เป็นเฮอร์มีเชียนแล้ว $e^{i\underline{\underline{S}}_1} e^{i\underline{\underline{S}}_2} \ldots$ **จะเป็นยูนิทารีไม่ว่า** $\underline{\underline{S}}_1, \underline{\underline{S}}_2, \ldots$ **จะ**สับเปลี่ยนกันได้หรือไม่

4.5 คุณสมบัติการเป็นกรุ๊ปของการแปลงรูปแบบยูนิทารี

สมมติว่า $\underline{\underline{U}}$ และ $\underline{\underline{Q}}$ เป็ เป็นยูนิทารีเมทริกซ์สองตัว จะเห็นว่า

4.5.1 $\underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{W}}$ เป็นยูนิทารีเมทริกซ์ เพราะ

$$(\underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{Q}})^{+} \cdot (\underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{Q}}) = \underline{\underline{Q}}^{+} \cdot \underline{\underline{U}}^{+} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{Q}}^{+} \cdot \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{I}}$$

ดังนั้น $(\underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{Q}})^{+} = (\underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{Q}})^{-1}$ **นี่เป็นคุณสมบัติ** closure

4.5.2 $(\underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{Q}}) \cdot \underline{\underline{W}} = \underline{\underline{U}} \cdot (\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{W}})$ **นี่เป็นคุณสมบัติ** associative

4.5.3 ถ้า $\underline{\underline{I}}$ เป็นไอเดนติตี้เมทริกซ์แล้ว

$$\underline{\underline{I}} \cdot \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{U}}$$

4.5.4 ถ้า $\underline{\underline{U}}$ เป็นยูนิทารีเมทริกซ์แล้ว inverse ของมันคือ

$$\underline{\underline{U}}^{-1} = \underline{\underline{U}}^{+}$$

ดังนั้น การแปลงรูปแบบยูนิทารีมีคุณสมบัติเป็นกรุ๊ป

4.6 เมทริกซ์ซึ่งมีองค์ประกอบเป็นตัวแปรต่อเนื่อง (Continuous Matrix)

ในตอนก่อนเราพูดถึงการแปลงรูปของตัวแทนซึ่งมีฟังก์ชันมูลฐาน (base functions) เป็นชุดที่นับได้ ในตอนนี้เราจะพูดถึงเมทริกซ์ซึ่งมีองค์ประกอบเป็นตัวแปรต่อเนื่อง วิธีต่าง ๆ ก็นำมาจากเมทริกซ์ซึ่งมีองค์ประกอบเป็นตัวแปรนับได้นั่นเอง

4.6.1 ตัวแทนแบบฟูเรียร์ (Fourier representation)

ในสมการที่ (1-101) เรามีตัวดำเนินการซึ่งเป็นฟังก์ชันของ $\bar{r}$ และ $\bar{r}'$ ดังนี้

$$Q(\bar{r}, \bar{r}') = \int \delta(\bar{r} - \bar{r}'')\, Q''\delta(\bar{r}' - \bar{r}'')d\bar{r}'' \qquad (1\text{-}101)$$

Q'' หมายถึงว่าตัวดำเนินการนั้นกระทำบนตัวแปร $\bar{r}''$ เราอาจจะแปลงความหมายให้ Q กระทำบน $\bar{r}'$ ได้ดังนี้

$$Q(\bar{r}, \bar{r}') = \pm \int \delta(\bar{r} - \bar{r}'')\, Q'\, \delta(\bar{r}' - \bar{r}'')\, d\bar{r}'' \qquad (4\text{-}47)$$

คราวนี้ Q กระทำบนตัวแปร $\bar{r}'$ เครื่องหมายบวกลบข้างหน้าแสดงว่า Q อาจจะเป็นคู่ (even) หรือเป็นคี่ (odd) ก็ได้ ถ้า Q เป็นคู่เครื่องหมายจะคงเดิม ถ้า Q เป็นคี่เครื่องหมายจะเปลี่ยนไป จากสมการที่ (4-47) จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} Q(\bar{r}, \bar{r}') &= \pm Q'\delta(\bar{r} - \bar{r}') \\ &= Q\,\delta(\bar{r} - \bar{r}') \end{aligned} \qquad (4\text{-}48)$$

ดังนั้น ตัวดำเนินการอินทีกราลซึ่งเทียบได้กับตัวดำเนินการดิฟเฟอเรนเชียล Q ก็คือ $\int Q\,\delta(\bar{r} - \bar{r}')\, d\bar{r}'$ จะเห็นว่า

$$Q\, f(\bar{r}) = \int Q\,\delta(\bar{r} - \bar{r}')\, f(\bar{r}')\, d\bar{r}' \qquad (4\text{-}49)$$

เราจะแสดงการใช้สมการที่ (4-48) และ (4-49) ทำการเปลี่ยนให้ตัวดำเนินการโมเมนตัมอยู่ในลักษณะที่มีองค์ประกอบบนเส้นทแยงมุมเท่านั้น

กำหนดให้ $$\bar{P} = \frac{\hbar}{i}\bar{\nabla} \qquad (4\text{-}50)$$

เราจะหายูนิทารีเมทริกซ์มาแปลงให้ $\bar{P}$ อยู่ในรูปที่มีองค์ประกอบบนเส้นทแยงมุม การแปลงรูปอย่างนี้เท่ากับการหมุนในสามมิติ

ให้ $\underline{\underline{U}}$ เป็นยูนิทารีเมทริกซ์ซึ่งมีแถวตั้งเป็นฟังก์ชันไอเกนซึ่งมีขนาดเป็นหนึ่ง (normalized eigenfunction) ของตัวดำเนินการ $\bar{P}$ สำหรับในสามมิติ

$$\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}}(\bar{r}, \bar{p})$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{i\bar{p}\bar{r}}{\hbar}\right) \qquad (4\text{-}51)$$

$\underline{\underline{U}}$ ในที่นี้เป็นเมทริกซ์ซึ่งมีองค์ประกอบเป็นตัวแปรต่อเนื่อง มีแถวตั้งเป็นตัวแปร $\bar{p}$ และแถวนอนเป็นตัวแปร $\bar{r}$ Hermitian adjoint ของ $\underline{\underline{U}}$ มีองค์ประกอบซึ่งเป็นสังยุคเชิงซ้อนของ $\underline{\underline{U}}$ โดยที่ $\bar{p}$ และ $\bar{r}$ สลับกัน คือ $\bar{p}$ เป็นแถวนอน และ $\bar{r}$ เป็นแถวตั้ง ตัวดำเนินการ $\bar{P}$ จะทำให้อยู่ในรูปมีองค์ประกอบเฉพาะบนเส้นทแยงมุมได้ดังนี้

$$\underline{\underline{P}}(\bar{p}, \bar{p}') = \int d\bar{r}\, d\bar{r}' \left(\underline{\underline{U}}^*(\bar{r}, \bar{p})\right)^T \left[\frac{\hbar}{i}\bar{\nabla}\right] \delta(\bar{r}-\bar{r}')\, \underline{\underline{U}}(\bar{r}', \bar{p}')$$

$$= \int d\bar{r} \left(\underline{\underline{U}}^*(\bar{r}, \bar{p})\right)^T \left[\frac{\hbar}{i}\bar{\nabla}\right] U(\bar{r}, \bar{p}') \qquad (4\text{-}52)$$

แต่เนื่องจาก

$$\bar{\nabla}\underline{\underline{U}}(\bar{r}, \bar{p}') = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{\frac{3}{2}} \bar{\nabla} \exp\left(\frac{i\bar{p}'\cdot\bar{r}}{\hbar}\right)$$

$$= \frac{i}{\hbar}\bar{p}' \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{i\bar{p}'\cdot\bar{r}}{\hbar}\right)$$

$$= \frac{i}{\hbar}\bar{p}'\underline{\underline{U}} \qquad (4\text{-}53)$$

แทน (4-53) ลงใน (4-52)

$$\underline{\underline{P}}(\bar{p}, \bar{p}') = \bar{p}' \int d\bar{r} \left(\underline{\underline{U}}^*(\bar{r}, \bar{p})\right)^T \underline{\underline{U}}(\bar{r}, \bar{p}')$$

$$= \bar{p}' \int d\bar{r} \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^3 \exp\left\{\left(\frac{i}{\hbar}\right) \underline{r}\cdot(\bar{p}'-\bar{p})\right\}$$

$$= \bar{p}'\,\delta(\bar{p}'-\bar{p}) = \bar{p}\,\delta(\bar{p}'-\bar{p}) \qquad (4\text{-}54)$$

สมการที่ (4-54) คือเมทริกซ์ซึ่งมีองค์ประกอบเฉพาะบนเส้นทแยงมุม

จากสมการที่ (4-48) ถ้าตัวดำเนินการ Q คือตัวดำเนินการตำแหน่ง

นั่นคือ

$$\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{R}}(\bar{r}, \bar{r}') = \bar{r}\,\delta(\bar{r}-\bar{r}') \qquad (4\text{-}55)$$

เราจะแสดงวิธีหา $\underline{\underline{R}}$ ในรูปของตัวแทนโมเมนตัม (momentum representation) ได้ดังนี้

$$\underline{\underline{R}}(\bar{r}, \bar{r}') = \int d\bar{r}\, d\bar{r}' \left(\underline{\underline{U}}^*(\bar{r}, \bar{p})\right)^T \bar{r}\,\delta(\bar{r}-\bar{r}')\, \underline{\underline{U}}(\bar{r}', \bar{p}')$$

$$= \int d\bar{r} \left(\underline{\underline{U}}^*(\bar{r}, \bar{p})\right)^T \bar{r}\, \underline{\underline{U}}(\bar{r}, \bar{p}') \qquad (4\text{-}56)$$

แต่

$$\bar{r}\left(U^*(\bar{r}, \bar{p})\right)^T = \bar{r}\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{i\bar{p}\cdot\bar{r}}{\hbar}\right)$$

$$= i\hbar\, \bar{\nabla}_{\bar{p}} \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{i\,\bar{p}\cdot\bar{r}}{\hbar}\right)$$

$$= i\hbar\, \bar{\nabla}_{p} \left(\underline{\underline{U}}^*(\bar{r},\bar{p})\right)^{T} \tag{4-57}$$

ดังนั้น สมการที่ (4-56) อาจจะเขียนเสียใหม่ได้ดังนี้

$$R(\bar{r},\bar{r}') = \int d\bar{r}\, i\hbar\, \bar{\nabla}_{\bar{p}} \left(\underline{\underline{U}}^*(\bar{r},\bar{p})\right)^{T} \underline{\underline{U}}(\bar{r},\bar{p}') \tag{4-58}$$

โดยที่

$$\bar{\nabla}_{\bar{p}} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial p_x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial p_y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial p_z} \tag{4-59}$$

อินทีเกรตสมการที่ (4-58) ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$R(\bar{r},\bar{r}') = i\hbar\, \bar{\nabla}_{\bar{p}}\, \delta(\bar{p}'-\bar{p}) \tag{4-60}$$

พึงสังเกตว่าเราเจาะจงที่จะแปลงตัวดำเนินการ $\bar{R}(\bar{r},\bar{r}')$ ให้เป็นตัวดำเนินการของโมเมนตัม $\bar{p}$ ไม่ใช่ $\bar{p}'$ ทั้งนี้เนื่องจากเราแปลงตัวดำเนินการ $\bar{P}(\bar{p},\bar{p}')$ ให้อยู่ในรูปของ $\bar{p}$ และตัวดำเนินการ $\bar{r}$ และ $\bar{p}$ สับเปลี่ยนกันไม่ได้

ต่อไปเราจะหันมาพิจารณาฟังก์ชันคลื่นกันบ้าง ฟังก์ชันคลื่นในตัวแทนโมเมนตัมซึ่งมีค่าเฉพาะบนเส้นทแยงมุม (momentum diagonal representation) ก็ได้จากการแปลงรูปแบบยูนิทารีเหมือนกัน

$$\bar{\psi}(\bar{p}) = \int \left(\underline{\underline{U}}^*(\bar{r},\bar{p})\right)^{T} \cdot \bar{\psi}(\bar{r})\, d\bar{r} \tag{4-61}$$

หรือเขียนเป็นสมการเมทริกซ์

$$\bar{\psi}(\bar{p}) = (\underline{\underline{U}}^*)^{T} \cdot \bar{\psi}(\bar{r}) \tag{4-62}$$

การอินทีเกรตกระทำบนองค์ประกอบของเมทริกซ์ จะเห็นว่า

$$\underline{\underline{U}} \cdot \underline{\psi}(\bar{p}) = \underline{\underline{U}} \cdot (\underline{\underline{U}}^*)^{T} \cdot \underline{\underline{\psi}}(\bar{r}) = \underline{\underline{\psi}}(\bar{r}) \tag{4-63}$$

สมการที่ (4-63) จะเขียนเป็นรูปองค์ประกอบได้ดังนี้

$$\bar{\psi}(\bar{r}) = \int d\bar{p}\, \underline{\underline{U}}(\bar{r},\bar{p}) \cdot \bar{\psi}(\bar{p}) \tag{4-64}$$

จะเห็นว่าผลคูณระหว่างตัวดำเนินการ $\underline{\underline{R}}(\bar{r},\bar{r}')$ และ $\psi(\bar{r})$ ในแบบตัวแทนโมเมนตัมก็คือ

$$\underline{\underline{R}} \cdot \bar{\psi}(\bar{p}) = \int i\hbar\, \bar{\nabla}_{\bar{p}}\, \delta(\bar{p}-\bar{p}')\, \underline{\underline{\psi}}(\bar{p}')\, d\bar{p}'$$

$$= i\hbar\, \bar{\nabla}_{\bar{p}} \cdot \underline{\underline{\psi}}(\bar{p}) \tag{4-65}$$

โดยที่ $\bar{\nabla}_{\bar{p}}$ กระทำบนองค์ประกอบทุก ๆ ตัวของ $\underline{\underline{\psi}}(\bar{p})$

เราอาจจะสรุปเป็นกฎในการแปลงรูปจากตัวแทนตำแหน่งไปเป็นตัวแทนโมเมนตัมดังนี้ แทนฟังก์ชันคลื่นด้วย Fourier transform ของมัน แทนตัวดำเนินการโมเมนตัมด้วย $\bar{p}$ และแทนตัวดำเนินการตำแหน่งด้วย $i\hbar\, \bar{\nabla}_{\bar{p}}$

4.6.2 **รูปของตัวแทนตามแบบของไฮเซนเบอร์ก** (Heisenberg representation) **เมื่อมีรูปเป็นเมทริกซ์ที่มีค่าเฉพาะบนเส้นทแยงมุม** (position diagonal form) **ที่เวลา** $t = 0$

สมมุติว่า แฮมมิลโทเนียนไม่ขึ้นกับเวลาอย่างแจ้งชัด ให้ $\psi(\bar{r}, t)$ เป็นฟังก์ชันคลื่นในตัวแทนตามแบบโชร์ดิงเจอร์ (schrodinger representation) โดยที่

$$H\psi(\bar{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\bar{r}, t) \tag{4-66}$$

เราต้องการแปลงรูปแบบยูนิทารี เพื่อแปลงฟังก์ชันคลื่น $\psi(\bar{r}, t)$ ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันคลื่นที่ไม่ขึ้นกับเวลา นอกจากนี้เราต้องการให้มีค่าเฉพาะค่าตามแนวทแยงเมื่อ $t = 0$ ทำให้การแปลงรูปแบบยูนิทารีที่จะหานั้นต้องเป็น $\underline{\underline{I}}$ เมื่อ $t = 0$ แมททริกซ์ซึ่งสามารถแปลงรูปได้อย่างนี้ก็คือ

$$\exp\left(\frac{i\underline{\underline{H}}t}{\hbar}\right) = \underline{\underline{I}} + \frac{i\underline{\underline{H}}t}{\hbar} + \frac{1}{2!}\left(\frac{i\underline{\underline{H}}t}{\hbar}\right)^2 + \dots \tag{4-67}$$

ถ้า $\underline{\underline{H}}$ เป็นเฮอร์มีเชียน จะเห็นว่าสมการที่ (4-67) เป็นยูนิทารี และสมการนี้เท่ากับ $\underline{\underline{I}}$ เมื่อ $t = 0$ ให้ฟังก์ชันคลื่น $\psi(\bar{r}, t)$ กระจายในรูปของฟังก์ชันไอเกนสำหรับพลังงานได้ดังนี้

$$\psi(\bar{r}, t) = \sum_j c_j \exp\left(-\frac{iE_jt}{\hbar}\right) u_j(\bar{r}) \tag{4-68}$$

เนื่องจาก $u_j(\bar{r})$ เป็นฟังก์ชันไอเกนของพลังงาน ดังนั้น

$$\exp\left(\frac{i\underline{\underline{H}}t}{\hbar}\right) \cdot u_j(\bar{r}) = \exp\left(\frac{iE_jt}{\hbar}\right) u_j(\bar{r}) \tag{4-69}$$

ใช้ตัวดำเนินการในสมการที่ (4-67) กระทำบน $\psi(\bar{r}, t)$ ได้ว่า

$$\exp\left(\frac{i\underline{\underline{H}}t}{\hbar}\right) \psi(\bar{r}, t) = \psi(\bar{r}, 0) = \psi'(\bar{r}) \tag{4-70}$$

จะเห็นว่า

$$\psi(r, t) = \exp\left(-\frac{i\underline{\underline{H}}t}{\hbar}\right) \psi(\bar{r}, 0) \tag{4-71}$$

ถ้า Q เป็นตัวดำเนินการดิฟเฟอเรนเชียลใด ๆ เราอาจจะแปลงให้อยู่ในรูปซึ่งมีค่าเฉพาะบนเส้นทแยงมุมได้ดังนี้

$$Q' = \exp\left(\frac{iHt}{\hbar}\right) Q \exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right) \tag{4-72}$$

$$\underline{\underline{Q}}(\bar{p}, \bar{p}') = \int d\bar{r}\, \underline{\underline{U}}(\bar{r}, \bar{p}) \cdot \underline{\underline{Q}}' \cdot \underline{\underline{U}}(\bar{r}, \bar{p}) \quad (4\text{-}73)$$

สมการที่ (4-73) เป็นสมการเมทริกซ์ในตัวแทนโมเมนตัมซึ่งมีค่าเฉพาะบนเส้นทแยงมุมเมื่อ $t = 0$

4.7 สรุป

ถ้า u_k และ v_j เป็นเวกเตอร์มูลฐานออร์ทอนอร์มอลสองชุด เวกเตอร์ทั้งสองชุดนั้นจะมีความสัมพันธ์กันดังนี้

$$v_j = \sum_k (T^*_{jk})^T u_k \quad (4\text{-}1)$$

$\underline{\underline{T}}$: เมทริกซ์ยูนิทารี

ถ้า ψ และ ψ' เป็นฟังก์ชันคลื่นสองฟังก์ชัน เราอาจจะหายูนิทารีเมทริกซ์ใด ๆ $\underline{\underline{T}}$ ซึ่งทำให้

$$\bar{\psi}' = \underline{\underline{T}} \cdot \bar{\psi} \quad (4\text{-}8)$$

การแปลงรูปของตัวดำเนินการ $\underline{\underline{Q}}$ ทำได้ดังนี้

$$\underline{\underline{Q}}' = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{T}}^{-1} \quad (4\text{-}14)$$

$\underline{\underline{T}}$: ยูนิทารีเมทริกซ์ใด ๆ

เวกเตอร์ในสามมิติและฟังก์ชันคลื่นในฮิลเบอร์ทสเปซมีความคล้ายคลึงกัน ยกเว้นการแปลงรูปแบบการสะท้อน

สมการไอเกน ค่าไอเกน characteristic polynomial trace และดีเทอร์มิเนนท์ของเมทริกซ์ย่อมไม่เปลี่ยนเมื่อมีการแปลงรูปแบบคล้ายคลึง

การแปลงรูปแบบยูนิทารีมีคุณสมบัติเป็นกรุ๊ป

4.8 คำถามท้ายบท

1. จงแสดงการแปลงรูปของเวกเตอร์มูลฐานออร์ทอนอร์มอล ฟังก์ชันคลื่น และตัวดำเนินการ ?
2. จงแสดงความแตกต่างและความคล้ายคลึงของการแปลงรูปแบบคล้ายคลึงและแบบยูนิทารี ?
3. จงแสดงการเปรียบเทียบคุณสมบัติของเวกเตอร์ในสามมิติและในฮิลเบอร์ทสเปซ ?
4. จงแสดงคุณสมบัติที่เป็นกรุ๊ปส์ของการแปลงรูปแบบยูนิทารี ?

แบบฝึกหัดบทที่ 4

1. กำหนดให้ $\bar{X} = (1+i, -i, 1)^T$, $\bar{Y} = (2+3i, 1-2i, i)^T$

   (ก) จงหา $(\bar{X}^*)^T \cdot \bar{Y}$

   (ข) จงแสดงว่า $\left\{\left((\bar{X}^*)^T \cdot \bar{Y}\right)^*\right\}^T = (\bar{Y}^*)^T \cdot \bar{X}$

   (ค) จงแสดงว่า $(\bar{X}^*)^T \cdot \bar{Y} + (\bar{Y}^*)^T \cdot \bar{X} = 2\,\mathrm{Re}(\bar{X}^*)^T \cdot \bar{Y}$

   (ง) จงแสดงว่า $(\bar{X}^*)^T \cdot \bar{Y} - (\bar{Y}^*)^T \cdot \bar{X} = 2\,\mathrm{Im}(\bar{X}^*)^T \cdot \bar{Y}$

2. ถ้า $|\psi| = \sqrt{(\psi^*)^T \psi}$, ψ และ ϕ เป็นฟังก์ชันคลื่นใด ๆ จงแสดงว่า

   $|\psi\phi| \leqslant |\psi|\,|\phi|$: Schwartz Inequality

3. จงแสดงว่า $\underline{\underline{B}} = (\underline{\underline{A}}^*)^T \cdot \underline{\underline{A}}$ เป็นเฮอร์มีเชียน ถ้าหาก $\underline{\underline{A}}$ เป็น $n \times n$ เมทริกซ์

4. จงหาค่าไอเกนและไอเกนเวกเตอร์ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

   ก. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ **ตอบ** $1, (1, -1, 0)^T$; $2, (2, -1, -2)^T$; $3, (1, -1, -2)^T$

   ข. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ **ตอบ** $-1, (1, 0, 1)^T$; $2, (1, 3, 1)^T$; $1, (3, 2, 1)^T$

5. จงแสดงว่า ค่าไอเกนของยูนิทารีเมทริกซ์คือ 1

6. กำหนดให้ $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ $\underline{\underline{P}}$ ซึ่งทำให้ $\underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{P}}$ มีค่าไอเกนอยู่บนเส้นทแยงมุม

7. กำหนดให้ $\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (ก) จงหาค่าไอเกนและไอเกนเวกเตอร์ของเมทริกซ์ $\underline{\underline{R}}$

   (ข) จงหาเมทริกซ์ $\underline{\underline{T}}$ ซึ่งทำให้ $\underline{\underline{R}}d = \underline{\underline{T}}^{-1} \cdot \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{T}}$ โดยที่เมทริกซ์ $\underline{\underline{T}}$ มีแถวตั้งเป็นไอเกนเวกเตอร์ซึ่งมีขนาดเป็นหนึ่ง (normalized eigenvectors) ของ $\underline{\underline{R}}$

   (ค) จงแสดงว่า ค่าไอเกนของ $\underline{\underline{R}}d$ คือค่าไอเกนของ $\underline{\underline{R}}$ นั่นเอง

8. กำหนดให้ $\underline{\underline{S}}x = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(ก) จงหาเมทริกซ์ $\underline{\underline{T}}$ ซึ่งมีแถวตั้งเป็นไอเกนเวกเตอร์ซึ่งมีขนาดเป็นหนึ่งของ $\underline{\underline{S}}x$ สับเปลี่ยนแถวตั้งของ $\underline{\underline{T}}$ จนกระทั่งได้ค่าตามแนวทแยงเป็นค่าจริงบวก

(ข) จงแสดงว่า $\underline{\underline{T}}$ เป็นยูนิทารีเมทริกซ์ และ $\underline{\underline{T}}^{-1}\cdot\underline{\underline{S}}x\cdot\underline{\underline{T}}$ เป็นเมทริกซ์ซึ่งมีค่าบนเส้นทแยงมุม

(ค) จงแสดงว่าอาจจะทำ $\underline{\underline{T}}$ ให้อยู่ในรูปของตัวดำเนินการในการหมุน นั่นก็คือ

$$\underline{\underline{T}} = \exp\left(\pm \frac{i\pi}{2\hbar}\underline{\underline{S}}y\right)$$

(ง) จงอธิบายการแปลงรูปชนิดนี้เทียบการหมุนในสามมิติ

(จ) จงอธิบายลักษณะการหมุนอันเกิดจากเมทริกซ์ชนิดนี้ใน two dimensional complex function space

9. กำหนดให้ $U_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} H_n\left(x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right)$ เป็นไอเกนฟังก์ชันของของพลังงานของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ในหนึ่งมิติ จงแสดงว่าตัวแทนแบบโมเมนตัมของ $U_n(x)$ คือ

$$\psi_n(p) = U_n\left(\frac{1}{\sqrt{km}}\,p\right)$$

10. แฮมมิลโทเนียนของการหมุนเหวี่ยงตัว (spin precession) ของอิเล็กตรอนในสนามแม่เหล็กเนื่องจากแมกเนติกโมเมนต์ของอิเล็กตรอนคือ $H = -\omega S,$ เมื่อ $\omega = \frac{eB}{mc}$ คือ ความถี่ของการเหวี่ยงตัว (precession frequency) จงใช้ตัวดำเนินการยูนิทารี $T = \exp\left(\frac{iHt}{\hbar}\right)$ แปลง $\underline{\underline{S}}_x$ และ $\underline{\underline{S}}_y$ ให้อยู่ในรูปของตัวแทนแบบของไฮเซนเบอร์ก

$$\underline{\underline{S}}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{\underline{S}}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

และจงแสดงว่าตัวดำเนินการในตัวแทนแบบของไฮเซนเบอร์ก มีสมการการเคลื่อนที่ดังนี้

$$\dot{\underline{\underline{S}}}'_x = \omega\,\underline{\underline{S}}'_y, \qquad \dot{\underline{\underline{S}}}'_y = -\omega\,\underline{\underline{S}}'_x$$

โดยที่ $\underline{\underline{S}}'_x = \underline{\underline{T}}\cdot\underline{\underline{S}}_x\cdot\underline{\underline{T}}^{-1}$ พึงสังเกตว่าสมการการเคลื่อนที่นี้เทียบได้กับสมการการ

เคลื่อนที่ในกลศาสตร์แบบฉบับของลูกข่าง ซึ่งมีโมเมนตัมเชิงมุมเป็น $\frac{\hbar}{2}$ มีแมกเนติก-โมเมนต์ $\frac{e\hbar}{2mc}$ หมุนอยู่ในสนามแม่เหล็กซึ่งมีความเข้ม B

11. วัดโมเมนตัมเชิงมุมของอะตอม ๆ หนึ่งซึ่งมีอิเล็กตรอนเพียงตัวเดียว ได้ผลลัพธ์ดังนี้ $\ell = 3,\ j = \frac{7}{2}$ และ $m_j = \frac{1}{2}$

(ก) จงหาความน่าจะเป็นของการวัด $\underline{S}_x$ ในครั้งถัดมาให้ได้ค่า $\frac{1}{2}$?

(ข) ถ้าหากวัดโมเมนตัมเชิงมุมได้ค่า $\ell = 1, m_\ell = 0$ และ $m_s = \frac{1}{2}$

จงหาความน่าจะเป็นซึ่งการวัดครั้งถัดไปจะได้ค่า $j = \frac{3}{2}$?

12. ตัวดำเนินการยูนิทารี $\exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right)$ แปลงตัวดำเนินการโมเมนตัมให้อยู่ในรูปตัวแทนตามแบบของไฮเซนเบอร์กดังนี้

$$P_x' = \exp\left(\frac{iHt}{\hbar}\right) P_x \exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right)$$

$$X' = \exp\left(\frac{iHt}{\hbar}\right) x \exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right)$$

(ก) จงแสดงว่า X' และ P_x' เป็นไปตามสมการการเคลื่อนที่ในกลศาสตร์แบบฉบับ

(ข) จงแสดงว่าสำหรับฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ชนิดง่าย

$$X' = x\cos\omega t - \frac{1}{\sqrt{km}} i\hbar \sin\omega t \frac{\partial}{\partial x}$$

$$P_x' = -i\hbar\cos\omega t \frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{km}\, x \sin\omega t$$

13. อิเล็กตรอนตัวหนึ่งอยู่ในสถานะซึ่งแทนได้ด้วยเลขดัชนีควอนตัม j, ℓ และ m_j สมมติว่าเราวัดโมเมนตัมเชิงมุมตามแนวแกน z จงหาความน่าจะเป็นซึ่งจะทำให้เราได้ค่า $\frac{\hbar}{2}$

14. จงแสดงว่า $q^n + c_1 q^{n-1} + \dots + c_n = 0$ ซึ่งเป็น characteristic polynomial ของเมทริกซ์ $\underline{\underline{Q}}$ สามารถจะแทนได้ด้วยเมทริกซ์ $\underline{\underline{Q}}$ นั่นคือ

$$\underline{\underline{Q}}^n + c_1 \underline{\underline{Q}}^{n-1} + \dots + c_n \underline{\underline{I}} = 0$$

ข้อแนะนำ ให้ตัวดำเนินการ $\underline{\underline{Q}}^n + c_1\underline{\underline{Q}}^{n-1} + \dots + c_n \underline{\underline{I}}$ กระทำบนเวกเตอร์แนวตั้งใด ๆ ซึ่งกระจายในรูปของฟังก์ชันมูลฐาน (base functions) ที่เหมาะสม