บทที่ 3

รากฐานของกลศาสตร์ควอนตัม II : สัจพจน์ของกลศาสตร์ควอนตัม

บทที่ 3

รากฐานของกลศาสตร์ควอนตัม II: สัจพจน์ของกลศาสตร์ควอนตัม

วัตถุประสงค์

1. ให้สามารถเขียนฟังก์ชั่นคลื่นแทนระบบควอนตัมได้
2. คำนวณค่าคาดหมายของตัวดำเนินการได้
3. เปลี่ยนระบบฟิสิกส์จากกลศาสตร์แบบฉบับเป็นกลศาสตร์ควอนตัมได้ โดยสามารถคำนวณระบบฟิสิกส์ง่าย ๆ เช่น ฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ได้
4. สามารถเปลี่ยนวงเล็บของปัวซองให้เป็นวงเล็บการสับเปลี่ยนได้

รูปที่ (3-1) Erwin Schrödinger **ผู้พัฒนากลศาสตร์คลื่น**

ในกลศาสตร์ควอนตัมเบื้องต้น[4] ได้กล่าวถึงตัวดำเนินการและทฤษฎีเกี่ยวกับตัวดำเนินการมาบ้าง ในบทนี้จะกล่าวถึงสมมติฐานต่าง ๆ ให้กว้างขวางคลุมตลอดถึงกลศาสตร์ของเมทริกซ์ด้วย

3.1 สัจพจน์ที่ 1

อนุภาคในระบบอนุรักษ์ใด ๆ ซึ่งประกอบด้วยฟิลด์อนุรักษ์และแรงอนุรักษ์ จะมีฟังก์ชันคลื่นฟังก์ชันหนึ่งซึ่งสามารถหาค่าต่าง ๆ ได้ทุกชนิด (ที่อาจจะหาได้ของระบบอนุรักษ์นั้น เช่น พลังงาน โมเมนตัม ฯลฯ) ฟังก์ชันคลื่นนี้เป็นฟังก์ชันซึ่งมีค่า ๆ เดียว ณ จุดพิกัดที่กำหนดให้จุดหนึ่งและเวลาที่กำหนดให้เวลาหนึ่ง โดยทั่วไปแล้วฟังก์ชันคลื่นจะเป็นฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน และฟังก์ชันคลื่นนี้อาจจะคูณด้วยเลขจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ ได้โดยไม่เปลี่ยนค่าทางกายภาพซึ่งแฝงอยู่ในฟังก์ชันคลื่นนั้น

3.2 สัจพจน์ที่ 2

แต่ละปริมาณทางกายภาพซึ่งสังเกตได้ (เช่น พลังงาน พิกัด ฯลฯ) จะมีตัวดำเนินการตัวหนึ่งสำหรับปริมาณชนิดหนึ่ง สมมติว่าปริมาณทางกายภาพเป็น q มีตัวดำเนินการ Q ปริมาณ q นี้จะได้มาจากการหาค่าไอเกนค่าหนึ่งของสมการไอเกน

$$Q\psi_n = q_n\psi_n \qquad (3\text{-}1)$$

การวัดนี้เกิดจากอันตรกิริยาระหว่างระบบที่กำลังพิจารณากับเครื่องมือที่ใช้วัด ถ้าหากสถานะของระบบที่กำลังพิจารณาแทนได้ด้วยฟังก์ชันคลื่น ψ_n ก่อนหน้าการวัด เมื่อทำการวัดจะได้ค่าไอเกนเป็น q_n แน่นอน เมื่อปริมาณทางกายภาพที่ต้องการสังเกตนั้นเกิดจากตัวดำเนินการ Q แต่ถ้าหากว่าเดิมฟังก์ชันคลื่นไม่ได้เป็นฟังก์ชันไอเกน เราก็ไม่อาจจะบอกได้ว่าผลของการวัดจะได้ค่าใด แต่ถ้าหากหลังจากการวัดแล้วได้ค่า q_n แสดงว่าอันตรกิริยาระหว่างเครื่องมือกับระบบที่เรากำลังพิจารณาบังคับให้ระบบนั้นไปอยู่ในภาวะซึ่งแทนด้วยฟังก์ชันคลื่น ψ_n และถ้าหากทำการวัดอีกทันทีหลังจากได้ค่าไอเกน q_n ค่าซึ่งได้จากตัวดำเนินการ Q จะเป็น q_n ซ้ำอีก แสดงว่าการวัดซ้ำทันทีทำให้ได้ค่าไอเกนของฟังก์ชันคลื่น ψ_n พูดอีกนัยหนึ่ง ระบบนั้นถูกจำกัดให้อยู่ในสถานะซึ่งแทนด้วยฟังก์ชันไอเกน ψ_n

---

[4]ธีรพันธุ์ ม่วงไทย, *กลศาสตร์ควอนตัมเบื้องต้น*, ภาควิชาฟิสิกส์คณะวิทยาศาสตร์ ม.รามคำแหง

3.3 สัจพจน์ที่ 3

ตัวดำเนินการใด ๆ ซึ่งแทนปริมาณที่วัดได้ทางกายภาพเป็นเฮอร์มีเชียน

แบบฝึกหัด ให้นักศึกษาไปทบทวนหัวข้อต่อไปนี้ในกลศาสตร์ควอนตัมเบื้องต้น

3.3.1 คำจำกัดความของตัวดำเนินการเฮอร์มีเชียน

3.3.2 ทฤษฎีต่อไปนี้

3.3.2.1 ค่าไอเกนของตัวดำเนินการเฮอร์มีเชียนเป็นค่าจริง

3.3.2.2 ถ้าตัวดำเนินการ P ไม่เป็นตัวดำเนินการเฮอร์มีเชียน $P + P^+$ และ $i(P - P^+)$ เป็นตัวดำเนินการเฮอร์มีเชียน

3.3.2.3 ถ้า P และ Q เป็นตัวดำเนินการใด ๆ สองตัว

$$(PQ)^+ \quad = \quad Q^+P^+ \qquad (3\text{-}2)$$

3.3.3 ออร์ทอกอนอลลิตี้ (orthogonality) ของฟังก์ชันคลื่น

คำจำกัดความ : ฟังก์ชันชุดหนึ่งเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันถ้าหากสมการเชิงเส้น

$$\sum_j c_j\psi_j \quad = \quad 0 \qquad (3\text{-}3)$$

หมายถึงว่า c_j ต้องเป็นศูนย์ทั้งหมด

คำจำกัดความ : ถ้า q เป็นค่าไอเกนที่ซ้ำกันของฟังก์ชันไอเกน m ฟังก์ชันซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันและกัน เราเรียกว่า q เป็นค่าซึ่ง degenerate อันดับที่ m

ทฤษฎี ถ้าหากค่าไอเกน q ของตัวดำเนินการ Q degenerate เราอาจจะสร้างฟังก์ชันคลื่นขึ้นใหม่ให้เป็นฟังก์ชันไอเกนของ Q โดยนำฟังก์ชันไอเกนเดิมไปคูณกับค่าคงที่ชุดหนึ่งแล้วบวกกัน

พิสูจน์ สมมติว่า ψ_n's เป็นฟังก์ชันไอเกนที่ degenerate

$$\therefore \quad Q\left(\sum_{n=1}^{m} c_n\psi_n\right) \quad = \quad q\left(\sum_{n=1}^{m} c_n\psi_n\right) \qquad \text{Q.E.D.}$$

คำจำกัดความ : ถ้าหากชุดของฟังก์ชันชุดหนึ่งเป็นฟังก์ชันไอเกนของค่าไอเกน (q) เดียวกัน และฟังก์ชันชุดนี้เป็นอิสระเชิงเส้นแก่กัน เรากล่าวว่าชุดของฟังก์ชันไอเกนชุดนี้เป็นชุดฟังก์ชันไอเกนที่สมบูรณ์ของค่าไอเกน q ต่อเมื่อฟังก์ชันไอเกนใด ๆ ของ q ซึ่งนอกเหนือไปจากฟังก์ชันไอเกนชุดนี้ เมื่อนำมารวมกับฟังก์ชันไอเกนชุดเดิมทำให้ฟังก์ชันไอเกนชุดใหม่ไม่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน

ทฤษฎี ถ้าหาก ψ_j (j = 1, ..., m) เป็นชุดฟังก์ชันไอเกนที่สมบูรณ์ของค่าไอเกน q นั่นคือ ψ_j เป็นฟังก์ชันที่ degenerate ถึงลำดับที่ m ฟังก์ชันไอเกนซึ่งให้ค่าไอเกน q ย่อมจะกระจายให้อยู่ในรูปของผลบวกของชุดฟังก์ชันที่สมบูรณ์นี้ได้

พิสูจน์ ให้ ψ เป็นฟังก์ชันไอเกนใด ๆ ซึ่งมีค่าไอเกน q สมมติว่าเราสามารถเขียนสมการต่อไปนี้ได้

$$a\psi - \sum_{j=1}^{m} a_j\psi_j = 0 \qquad (3\text{-}4)$$

ถ้า a = 0 สัมประสิทธิ์ a_j ทั้งหมดต้องเป็นศูนย์เพราะ ψ_j's เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน แสดงว่า ψ ต้องเป็นหนึ่งในชุดของฟังก์ชัน ψ_j's แต่นี่ขัดกับสมมติฐานเบื้องต้น ดังนั้น $a \neq 0$

$$\psi = \frac{1}{a}\sum_j a_j\psi_j \qquad (3\text{-}5)$$

แสดงว่า ψ อาจจะกระจายในรูปของ ψ_j ได้ Q.E.D.

ทฤษฎี ถ้า ψ_j (j = 1, ..., m) เป็นชุดของฟังก์ชันไอเกนที่สมบูรณ์ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน มีค่าไอเกน (q) เดียวกัน เราอาจจะดัดแปลง ψ_j's ให้เป็นชุดของฟังก์ชันซึ่งเป็นออร์ทอกอนอลต่อกัน และเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันและกัน ฟังก์ชันชุดใหม่นี้อาจจะใช้กระจายฟังก์ชันไอเกนใด ๆ ซึ่งมีค่าไอเกน q เดียวกันได้

พิสูจน์ ใช้การหาออร์ทอนอร์มอลแบบชมิดท์[5]

3.4 สัจพจน์ที่ 4

ถ้า ψ_j เป็นชุดของฟังก์ชันไอเกนซึ่งได้จากสมการ

$$Q\psi_j = q_j\psi_j \qquad (3\text{-}6)$$

โดยปกติ ψ_j จะมีจำนวนเป็นอนันต์และเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน ฟังก์ชันคลื่นใด ๆ ψ อาจจะกระจายอยู่ในรูปของผลบวกของ ψ_j ได้ดังนี้

$$\psi = \sum_j c_j\psi_j \qquad (3\text{-}7)$$

---

[5]พิสิทฐ์ วรสิงห์, *ฟิสิกส์เชิงคณิตศาสตร์*, **สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง หน้า 197**

Dicke, R.H. and Wittke, J.P., *Introduction to Quantum Mechanics*, 1st ed., Mass : Addison-Wesley, 1960, p.94.

โดยมีข้อกำหนดว่าฟังก์ชันที่จะกระจายในรูปของสมการ (3-7) จะเป็นฟังก์ชันที่ไม่มีข้อเสียหาย (bad function) ในทางคณิตศาสตร์ ฟังก์ชันที่มีความเสียหายจะต้องระมัดระวังเป็นพิเศษ ชุดของ ψ_j เรียกว่าชุดของฟังก์ชันไอเกนที่สมบูรณ์

ถ้าหากชุดของ ψ_j ที่เราเลือกขึ้นมาเป็นออร์ทอนอร์มอล และ square integrable (ซึ่งหมายถึงเอาฟังก์ชันกับสังยุคเชิงซ้อนของมันคูณกันแล้วอินทีเกรตได้) ดังนั้น

$$\int (\psi_j^*)^T \psi_k d\bar{r} = \delta_{jk} \tag{3-8}$$

ชุด ψ_j's จึงเป็นชุดออร์ทอนอร์มอลที่สมบูรณ์ ดังนั้น

$$c_j = \int (\psi_j^*)^T \psi \, d\bar{r} \tag{3-9}$$

คำจำกัดความ : ถ้า ψ_j เป็นชุดของฟังก์ชันไอเกนที่สมบูรณ์และเป็นฟังก์ชันไอเกนของตัวดำเนินการ R และ S พร้อม ๆ กัน ปริมาณที่สังเกตได้ทางกายภาพซึ่งคล้องจองกับ R และ S เป็นปริมาณที่สอดคล้องกัน (compatible)

เมื่อเรากล่าวว่าตัวดำเนินการ R กับ S ให้ปริมาณที่สังเกตได้สอดคล้องกัน (compatible observables) หมายความว่า R และ S สามารถจะหาค่าได้พร้อมกันจากชุดของฟังก์ชันไอเกนชุดเดียวกัน ตัวอย่างเช่น ตัวดำเนินการพิกัด x, y และ z สอดคล้องกัน แต่ตัวดำเนินการพิกัดกับตัวดำเนินการโมเมนตัมไม่สอดคล้องกัน เป็นต้น

คำจำกัดความ : ถ้าหากตัวดำเนินการ Q และ R เป็นตัวดำเนินการที่ equivalent กันแล้ว $Q \equiv R \leftrightarrow Q\psi = R\psi$ สำหรับฟังก์ชันคลื่น ψ ใด ๆ

ทฤษฎี ถ้าหากปริมาณที่สังเกตได้สองปริมาณสอดคล้องกันแล้ว ตัวดำเนินการซึ่งคล้องจองกับปริมาณทั้งสองจะสับเปลี่ยนกันได้

พิสูจน์ ให้ $S\psi_j = s_j\psi_j$ และ $R\psi_j = r_j\psi_j$ (3-10)

ดังนั้น $$(RS-SR)\psi_j = 0 \tag{3-11}$$

$$\therefore \; (RS-SR)\sum_j c_j\psi_j = (RS-SR)\psi = [R, S]\psi$$
$$= 0 \tag{3-12}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างวงเล็บการสับเปลี่ยนและวงเล็บของปัวซองจะกล่าวถึงในสัจพจน์ที่ 7 Q.E.D.

ทฤษฎี ถ้าตัวดำเนินการสองตัว คือ Q และ R สับเปลี่ยนกันได้และตัวดำเนินการตัวหนึ่งไม่ degenerate ฟังก์ชันไอเกนของมันจะเป็นฟังก์ชันไอเกนของตัวดำเนินการอีกตัวหนึ่งด้วย

พิสูจน์ ให้

$$Q\psi_j = q_j\psi_j \tag{3-13}$$

โดยที่ Q ไม่ degenerate และ $[Q, R] = 0$

$$\therefore \quad Q(R\psi_j) = RQ\psi_j = q_j(R\psi_j) \tag{3-14}$$

จากสมการที่ (3-14) แสดงว่า $R\psi_j$ เป็นฟังก์ชันไอเกนตัวหนึ่งของ Q และจากสมมติฐานที่ว่า Q ไม่ degenerate จะเห็นว่า

$$R\psi_j = r_j\psi_j, \quad r_j = \text{ค่าคงที่} \tag{3-15}$$

สมการที่ (3-15) แสดงว่า ψ_j เป็นฟังก์ชันไอเกนของตัวดำเนินการ R ด้วย Q.E.D.

ทฤษฎี ถ้าตัวดำเนินการ Q และ R สับเปลี่ยนกันได้จะมีฟังก์ชันไอเกนชุดหนึ่งซึ่งเป็นฟังก์ชันไอเกนของตัวดำเนินการทั้งสองพร้อมกัน

พิสูจน์ กรณีที่ไม่ degenerate พิสูจน์แล้วในทฤษฎีตอนก่อน ต่อไปนี้จะพูดถึงกรณี degenerate สมมติว่า

$$Q\psi_j = q\psi_j \tag{3-16}$$

โดยที่ q degenerate ถึงลำดับที่ m และเนื่องจาก $[Q, R] = 0$ ดังนั้น

$$Q(R\psi_j) = R(Q\psi_j) = q(R\psi_j) \tag{3-17}$$

จากสมการที่ (3-17) แสดงว่า $R\psi_j$ เป็นฟังก์ชันไอเกนของ Q ดังนั้น เราอาจจะกระจาย $R\psi_j$ ได้ดังนี้

$$R\psi_j = \sum_{k=1}^{m} q_{jk}\psi_k \tag{3-18}$$

คูณสมการที่ (3-18) ด้วย c_j แล้วบวกดัชนี j จาก 1 ถึง m ได้ผลดังนี้

$$R\sum_{j=1}^{m} c_j\psi_j = \sum_{j,k} c_jq_{jk}\psi_k = R\sum_k c_k\psi_k \tag{3-19}$$

พิจารณาสมการ (3-19) เลือกสัมประสิทธิ์ของ ψ_k

$$\sum_j c_jq_{jk} = rc_k \tag{3-20}$$

แก้สมการที่ (3-20) ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้นมีตัวแปร c_k อยู่ m ตัว สมการ Characteristic ก็คือ

$$\det(q_{jk} - r\delta_{jk}) = 0 \tag{3-21}$$

สมการที่ (3-21) แสดงว่า r มีรากอยู่ m ค่า แต่ละค่าจะให้สัมประสิทธิ์ c ชุดหนึ่ง สมมติว่ารากนั้นคือ r_ℓ และสัมประสิทธิ์ที่คล้องจองกับ r_ℓ ก็คือชุด $c_j^{(\ell)}$ กำหนดให้

$$U_\ell = \sum_j c_j^{(\ell)}\psi_j \tag{3-22}$$

ดังนั้น
$$\left.\begin{aligned} RU_\ell &= r_\ell U_\ell \\ QU_\ell &= q_\ell U_\ell \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}23)$$

U_ℓ คือชุดของฟังก์ชันไอเกนที่ต้องการ Q.E.D.

ในบทที่หนึ่งเราได้เห็นกลศาสตร์ของเมทริกซ์ซึ่งมีองค์ประกอบเป็นจำนวนนับไม่ได้ ในตอนนี้เราจะพูดถึงกรณีที่ค่าไอเกนมีความต่อเนื่องกัน ซึ่งบ่อยครั้งระบบซึ่งค่าไอเกนเป็นค่าต่อเนื่องทำให้ต้องใช้เมทริกซ์ซึ่งมีองค์ประกอบเป็นจำนวนนับไม่ได้ ในบางคราวตัวดำเนินการอาจจะมีช่วงของค่าไอเกนสองช่วง คือ ช่วงซึ่งค่าไอเกนเป็นค่านับได้และช่วงซึ่งค่าไอเกนเป็นค่าต่อเนื่อง ตัวอย่างของตัวดำเนินการซึ่งมีค่าไอเกนเป็นค่าต่อเนื่องก็เช่น ตัวดำเนินการบอกตำแหน่ง ตัวดำเนินการโมเมนตัมของอนุภาคอิสระ ฯลฯ

เราอาจจะขยายความทฤษฎีต่าง ๆ จากกรณีซึ่งค่าไอเกนเป็นค่านับได้ไปสู่กรณีซึ่งค่าไอเกนเป็นค่าต่อเนื่องได้ดังนี้

3.4.1 สมการค่าไอเกน $Q\psi_q = q\psi_q$ (3-24)

ในที่นี้ค่าไอเกน q เป็นค่าต่อเนื่อง ψ_q เป็นฟังก์ชันไอเกนซึ่งให้ค่าไอเกน q

3.4.2 ออร์ทอกอนอลลิตี้ของฟังก์ชันไอเกน

$$\int (\psi_{q'}^*)^T \psi_q \, d\bar{r} = \delta(q-q') \qquad (3\text{-}25)$$

$\delta(q-q')$ เป็นฟังก์ชันเดลต้า

3.4.3 การกระจายฟังก์ชันคลื่นใด ๆ ψ

$$\psi = \int U(q)\, \psi_q dq \qquad (3\text{-}26)$$

หรือในกรณีที่ตัวดำเนินการมีฟังก์ชันไอเกนทั้งที่นับได้และต่อเนื่อง เราอาจจะกระจายฟังก์ชันคลื่น ψ ใด ๆ ได้ดังนี้

$$\psi = \sum_q U_q \psi_q + \int U(q)\, \psi_q dq \qquad (3\text{-}27)$$

3.4.4 นอร์มอลไลเซชั่น (Normalization)

ถ้า ψ อยู่ในรูปของสมการที่ (3-27) จะเห็นว่า

$$\int |\psi|^2 d\bar{r} = \sum_q |U_q|^2 + \int |U(q)|^2 dq = 1 \qquad (3\text{-}28)$$

ตัวอย่างที่ 1 จงนอร์มอลไลซ์ฟังก์ชันไอเกนซึ่งมีค่าไอเกนเป็นค่าต่อเนื่อง

$$\psi_p(x) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \tag{3-29}$$

วิธีทำ $\int (\psi_{p'}^*(x))^T \psi_p(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int \frac{dx}{\hbar} \exp i\frac{(p-p')x}{\hbar}$

$$= \delta(p-p')$$

เดลต้าฟังก์ชันเป็นรูปของการนอร์มอลไลซ์ชนิดหนึ่ง จากสมการที่ (3-26) จะเห็นว่าการแปลงฟังก์ชันคลื่นกลับไปกลับมาระหว่างสเปซปกติกับสเปซโมเมนตัมทำได้ดังนี้

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} U(p)\, \psi_p(x)\, dp \tag{3-30}$$

$$U(p) = \int_{-\infty}^{\infty} (\Psi_p^*)^T \psi(x)\, dx \tag{3-31}$$

โดยที่ $\psi(x)$ และ $U(p)$ นอร์มอลไลซ์ นั่นก็คือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |U_p|^2\, dp = 1 \tag{3-32}$$

3.4.5 ความสัมพันธ์ Closure

ความสัมพันธ์ Closure ในเชิงคณิตศาสตร์เป็นเครื่องแสดงว่าระบบคณิตศาสตร์นั้นครอบคลุมสมาชิกไว้ได้ทั้งหมด ในกลศาสตร์ควอนตัมก็เช่นเดียวกัน เรากล่าวว่าฟังก์ชันไอเกนชุดหนึ่งของตัวดำเนินการใด ๆ มีความสัมพันธ์ Closure เมื่อสามารถจะกระจายฟังก์ชันคลื่นใด ๆ ลงในชุดฟังก์ชันไอเกนนั้นได้ ซึ่งเราจะแสดงดังต่อไปนี้

ให้ $\psi(\bar{r}) = \sum_q U_q(\bar{r})\, \psi_q(\bar{r}) + \int U(q)\, \psi_q(\bar{r})\, dq$ (3-33)

จากคุณสมบัติออร์ทอนอร์มอลของฟังก์ชันไอเกน (ถ้าหากชุดของฟังก์ชันไอเกนยังไม่มีคุณสมบัตินี้เราก็อาจจะทำขึ้นได้โดยใช้ขบวนการออร์ทอนอร์มอลของชมิดท์) จะเห็นว่า

$\int \left(\psi_q^*(\bar{r})\right)^T \psi(\bar{r})\, d\bar{r} = U_q$ ในกรณีซึ่งค่าไอเกนเป็นค่านับได้

$= U(q)$ ในกรณีซึ่งค่าไอเกนเป็นค่าต่อเนื่อง (3-34)

แทนสมการ (3-34) ลงในสมการ (3-33)

$$\psi(\bar{r}) = \sum_q \left\{ \int \left(\psi_q^*(\bar{r}')\right)^T \psi(\bar{r}')\, d\bar{r}' \right\} \psi_q(\bar{r})$$
$$+ \int \left\{ \int \left(\psi_q^*(\bar{r}')\right)^T \psi(\bar{r}')\, d\bar{r}' \right\} \psi_q(\bar{r})\, dq$$

สลับการบวกกับการอินทีเกรต

$$\psi(\bar{r}) = \int \Big\{ \sum_q \left(\psi_q^*(\bar{r}')\right)^T \psi_q(\bar{r}) + \int \left(\psi_q^*(\bar{r}')\right)^T \psi_q(\bar{r})\, dq \Big\} \psi(\bar{r}')\, d\bar{r}' \qquad (3\text{-}35)$$

ในสมการที่ (3-35) แสดงว่า

$$\sum_q \left(\psi_q^*(\bar{r}')\right)^T \psi_q(\bar{r}) + \int \left(\psi_q^*(\bar{r}')\right)^T \psi_q(\bar{r})\, dq = \delta(\bar{r}-\bar{r}') \qquad (3\text{-}36)$$

สมการที่ (3-36) เรียกว่า ความสัมพันธ์ Closure ในบางคราวเราถือว่า $\delta(\bar{r}-\bar{r}')$ เป็นฟังก์ชันมูลฐานในกรณีที่ค่าไอเกนเป็นค่าต่อเนื่อง

3.5 สัจพจน์ที่ 5

ถ้าหากระบบทางฟิสิกส์ที่กำหนดให้สามารถแทนได้ด้วยฟังก์ชันคลื่น ψ ค่าคาดหมาย (expectation value) ของปริมาณที่สังเกตได้ q ซึ่งคล้องจองกับตัวดำเนินการ Q จะหาได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \langle q \rangle &= \text{ค่าคาดหมายของตัวดำเนินการ } Q \\ &= \int \left(\psi^*(\bar{r})\right)^T Q\psi(\bar{r})\, d\bar{r} \qquad (3\text{-}37) \end{aligned}$$

ค่าคาดหมายนี้เป็นค่าซึ่งเราหวังว่าจะได้จากการวัดปริมาณที่สังเกตได้ของระบบ สมมติว่าตัวดำเนินการ Q มีชุดของออร์ทอนอร์มอลฟังก์ชันไอเกน ψ_j ดังนั้น

$$\psi = \sum_j c_j\psi_j \quad \text{และ} \quad Q\psi_j = q_j\psi_j \qquad (3\text{-}38)$$

และ $$\int (\psi_j^*)^T \psi_k\, d\bar{r} = \delta_{jk} \qquad (3\text{-}39)$$

สมมติว่า $$\int (\psi^*)^T \psi\, d\bar{r} = 1$$

ดังนั้น $$\begin{aligned} \int \sum_{j,k} (c_j^*)^T c_k (\psi_j^*)^T \psi_k\, d\bar{r} &= \sum_{j,k} (c_j^*)^T c_k\, \delta_{jk} \\ &= \sum_j |c_j|^2 = 1 \qquad (3\text{-}40) \end{aligned}$$

และจากสมการที่ (3-37) และ (3-38)

$$\begin{aligned} \langle q \rangle &= \int \sum_{j,k} (c_j^*)^T c_k (\psi_j^*)^T Q\psi_k\, d\bar{r} \\ &= \sum_{j,k} (c_j^*)^T c_k\, q_k\, \delta_{jk} \\ &= \sum_j q_j\, |c_j|^2 \qquad (3\text{-}41) \end{aligned}$$

ดังนั้น $|c_j|^2$ คือความน่าจะเป็นที่ระบบซึ่งเรากำลังพิจารณาจะอยู่ในสถานะซึ่ง

$$\therefore \quad P_j = |c_j|^2 = |\int (\psi_j)^* \psi \, dr|^2 \qquad (3\text{-}43)$$

3.6 สัจพจน์ที่ 6

ฟังก์ชันคลื่น $\psi(\bar{r}, t)$ จะแปรผันเมื่อเวลาผ่านไป สัจพจน์นี้เห็นได้จากสมการโชร์ดิงเจอร์ ถ้าหากเรากำหนดรูปของฟังก์ชันคลื่นและภาวะเบื้องต้นแล้ว นั่นคือ

$$H\psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi \qquad (3\text{-}44)$$

ซึ่งสมการที่ (3-44) แสดงว่า ψ เปลี่ยนไปเมื่อเวลาเปลี่ยนไป โดยที่แฮมมิลโทเนียน H เป็นตัวดำเนินการซึ่งดัดแปลงมาจากกลศาสตร์แบบฉบับ

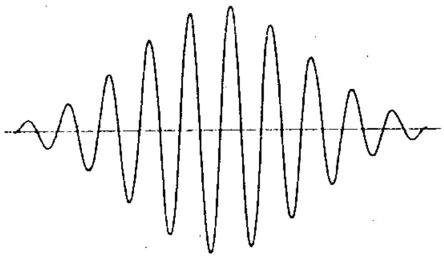
3.7 สัจพจน์ที่ 7

การทำกลศาสตร์แบบฉบับให้เป็นกลศาสตร์ควอนตัมได้วิธีหนึ่ง คือ การแทนตัวแปรพลวัตในวงเล็บของปัวซองด้วยตัวดำเนินการที่สอดคล้องกัน แล้วคูณด้วย $\frac{1}{i\hbar}$ ให้เป็นวงเล็บการสับเปลี่ยน (Commutation bracket) ตัวอย่างเช่น q และ r เป็นตัวแปรพลวัตซึ่งมีตัวดำเนินการที่คล้องจองกันคือ Q และ R ดังนั้น

$$\{q, r\} \rightleftharpoons \frac{1}{i\hbar} [Q, R] \qquad (3\text{-}45)$$

ข้อจำกัดสำหรับสัจพจน์ที่ 7 ก็คือ ตัวแปรพลวัตซึ่งแทนตำแหน่งและโมเมนตัมต้องทำให้อยู่ในรูปของพิกัดฉาก และเมื่อลำดับของตัวแปรพลวัตเป็นที่สงสัยว่า ตัวใดมาก่อน ให้คำนึงถึงว่าตัวแปรกลุ่มนั้นต้องเป็นเฮอร์มีเชียน วิธีการของสัจพจน์ที่ 7 นี้ไม่ตายตัวทีเดียวนัก เมื่อจะแปลงรูปของกลศาสตร์แบบฉบับให้เป็นกลศาสตร์ควอนตัม จำต้องเปรียบเทียบผลกับการทดลองเสมอ

ฟังก์ชัน $f\left(x-\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0} t\right)$ เป็นฟังก์ชันแสดงลักษณะที่เป็นเปลือกของ wave packet ตัวอย่างของฟังก์ชันชนิดนี้ก็คือ เปลือกชนิด gaussian[6]



รูปที่ (3-2)

เปลือกของ wave packet ชนิด gaussian

ความเร็วกลุ่ม คือ
$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \tag{3-57}$$

ถ้าหากจะนับความเร็วกลุ่มเป็นความเร็วของอนุภาค จะเห็นว่า

$$v = v_g = \frac{p}{m} \tag{3-58}$$

ดังนั้น
$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m} \tag{3-59}$$

$$\therefore \int d\omega = \frac{\hbar}{m}\int k\, dk$$

$$\omega = \frac{\hbar}{m}\int k\, dk$$

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \text{ค่าคงที่}$$

$$= \frac{p^2}{2m} + \text{ค่าคงที่} \tag{3-60}$$

ค่าคงที่ในสมการ (3-60) คือพลังงานศักย์ ถ้าหาก wave packet เคลื่อนที่จากตำแหน่งในสเปซซึ่งพลังงานศักย์มีค่าคงที่ไปสู่อีกตำแหน่งหนึ่งซึ่งในบริเวณนั้นพลังงานศักย์มีค่าคงที่เหมือนกัน แต่พลังงานศักย์แห่งใหม่มีค่าต่างจากพลังงานศักย์แห่งเก่า ในกรณีนี้ความยาวคลื่นจะเปลี่ยนไป ทั้งนี้เนื่องจาก

---

[6] ธีระพันธุ์ ม่วงไทย. Ibid. หน้า 42-52.

$$k = \frac{\{2m|E - V(x)|\}^{\frac{1}{2}}}{\hbar} \quad (3\text{-}61)$$

ในขณะที่ $$\hbar\omega \propto \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (3\text{-}62)$$

การเปลี่ยนของ k เป็นปริมาณน้อย ๆ จึงไม่มีผลต่อการเปลี่ยนของ ω

3.8.1 การแปลงจากกลศาสตร์ควอนตัมเป็นกลศาสตร์แบบฉบับ

กฎของกลศาสตร์ควอนตัมเมื่อนำไปใช้ในระบบซึ่งต้องใช้กลศาสตร์แบบฉบับจะมีปัญหาว่าจะทำกฎของกลศาสตร์ควอนตัมให้เป็นกฎของกลศาสตร์แบบฉบับได้อย่างไร สำหรับในระดับของหนังสือเล่มนี้จะพูดถึงกรณีต่าง ๆ ที่สำคัญและอาจจะใช้เป็นตัวอย่างสำหรับกรณีอื่น ๆ

ในสัจพจน์ที่ 7 ตำแหน่งและโมเมนตัมไม่อาจจะวัดได้ถูกต้องได้พร้อมกัน แต่ปริมาณทั้งสองอาจจะวัดได้ถูกต้องได้ถึงขนาดหนึ่ง และถ้าหากโมเมนตัมกับตำแหน่งของอนุภาควัดได้ในขอบเขตที่จำกัดเช่นนี้ ฟังก์ชันคลื่นที่จะใช้แทนอนุภาคจะเป็นรูปของ wave packet ฟังก์ชันคลื่นเช่นนี้ทำให้เรารู้ตำแหน่งของอนุภาคว่าอยู่ในบริเวณ ๆ หนึ่ง ตำแหน่งของโมเมนตัมในโมเมนตัมสเปซก็อยู่ในบริเวณอีกบริเวณหนึ่ง การแปลงกฎของการเคลื่อนที่จากกลศาสตร์ควอนตัม ซึ่งแสดงการเคลื่อนที่ของ wave packet ให้เป็นกฎของการเคลื่อนที่ของอนุภาคซึ่งสามารถวัดทั้งโมเมนตัมและตำแหน่งให้ถูกต้องได้พร้อมกัน จึงมีปัญหาขึ้นว่าจะใช้คุณสมบัติใดของ wave packet มาทำให้เป็นโมเมนตัมและตำแหน่งซึ่งวัดได้ถูกต้องอย่างไม่มีขอบเขตจำกัดในกลศาสตร์แบบฉบับ คุณสมบัติที่เราจะพิจารณาก็คือ ตำแหน่งและโมเมนตัมของ wave packet นั่นเอง จากสัจพจน์ที่ 5 จะเห็นว่า ค่าเฉลี่ยของตำแหน่งก็คือ

$$< x > = \int (\psi^*)^T x \psi \, d\bar{r} \quad (3\text{-}63)$$

ดังนั้น อัตราเปลี่ยนไปของค่าเฉลี่ยของตำแหน่งเทียบกับเวลาก็คือ

$$\frac{d}{dt} < x > = \int \frac{\partial}{\partial t} (\psi^*)^T x \psi \, d\bar{r} + \int (\psi^*)^T x \left(\frac{\partial}{\partial t} \psi\right) d\bar{r} \quad (3\text{-}64)$$

ความหมายของสมการที่ (3-64) ในกลศาสตร์แบบฉบับมีความหมายที่ไม่แน่ชัด ค่าเฉลี่ยของตำแหน่ง x เกิดจากการวัดตำแหน่งซ้ำ ๆ กันแล้วนำมาหาค่าเฉลี่ย อัตราการเปลี่ยนไปของค่าเฉลี่ยนี้จึงไม่ใช่ค่าเฉลี่ย $< \frac{p_x}{m} >$ ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยของโมเมนตัมหารด้วยมวลของวัตถุ หรือค่าเฉลี่ยของความเร็วในกลศาสตร์ควอนตัมปกติ (nonrelativistic quantum mechanics) ตัวดำเนินการของความเร็วไม่มี การวัดความเร็วให้ได้ค่าแน่นอนในกลศาสตร์ควอนตัม หมายถึงว่าจะต้องวัดตำแหน่งของอนุภาคให้ได้แน่นอนถึงสองครั้ง และในการวัดดังนี้แต่ละครั้ง ย่อมหมายถึงว่า ค่าของโมเมนตัมมีความไม่แน่นอนเป็นอนันต์ ดังนั้น เมื่อวัดตำแหน่งได้แน่นอนในครั้งแรกแล้วจะวัดตำแหน่งให้แน่นอนในครั้งที่สองไม่ได้เลย

เนื่องจาก
$$H\psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi \tag{3-65}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{i}{\hbar}H\psi \tag{3-66}$$

แทนตัวดำเนินการ $\frac{\partial}{\partial t}$ จากสมการที่ (3-66) ลงในสมการที่ (3-64)

$$\frac{d}{dt} < x > = \frac{i}{\hbar}\int (\psi^*)^T \{Hx - xH\}\, \psi\, d\bar{r}$$

$$= \frac{i}{\hbar} < [H, x] > \tag{3-67}$$

แต่เนื่องจาก
$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \tag{3-68}$$

ดังนั้น
$$[H, x] = \left[\frac{p^2}{2m} + V(x), x\right]$$

$$= \frac{1}{2m}[p^2, x] + [V(x), x]$$

$$= \frac{1}{2m}\left\{p_x [p_x, x] + [p_x, x]p_x\right\}$$

$$\therefore \quad [H, x] = -\frac{i\hbar}{m}p_x \tag{3-69}$$

เราใช้ความสัมพันธ์ $[V(x), x] = 0$ และ $[p_x, x] = -i\hbar$ เพื่อให้ได้สมการ (3-69) การพิสูจน์มีในแบบฝึกหัด แทนค่าสมการที่ (3-69) ลงในสมการที่ (3-67)

$$\frac{d}{dt} < x > = \frac{1}{m} < p_x > \tag{3-70}$$

โดยวิธีการซึ่งคล้ายคลึงกันกับการหาสมการที่ (3-70) ถ้าหาก Q เป็นตัวดำเนินการใด ๆ ซึ่งให้ปริมาณที่สังเกตได้ของ wave packet แล้ว

$$\frac{d}{dt} < Q > \quad = \quad \frac{i}{\hbar} < [H, Q] > + < \frac{\partial}{\partial t} Q > \tag{3-71}$$

สมการที่ (3-71) นี้มีความสัมพันธ์อย่างใกล้ชิดกับสมการที่ (2-140) ของกลศาสตร์แบบฉบับ

3.9 สรุป

ฟังก์ชันคลื่นในระบบอนุรักษ์ คือ ฟังก์ชันซึ่งอาจจะใช้หาค่าต่าง ๆ ทางกายภาพของระบบอนุรักษ์นั้นได้ทุกชนิด ปกติฟังก์ชันคลื่นนี้จะมีค่าเดียวสำหรับตำแหน่ง ๆ หนึ่งและเวลา ๆ หนึ่ง เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน การคูณฟังก์ชันคลื่นด้วยเลขเชิงซ้อนไม่ทำให้ค่าของปริมาณทางกายภาพต่าง ๆ เปลี่ยนไป

ปริมาณทางกายภาพแต่ละปริมาณจะแทนได้ด้วยตัวดำเนินการตัวหนึ่งซึ่งเป็นตัวดำเนินการเฮอร์มีเชียน

ชุดของฟังก์ชันคลื่นที่สมบูรณ์ซึ่งเกิดจากสมการ

$$Q\psi_j \quad = \quad q_j\psi_j \tag{3-6}$$

ชุดของฟังก์ชันคลื่นนี้อาจใช้กระจายฟังก์ชันใด ๆ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ไม่เสียหายทางคณิตศาสตร์ (bad function) ได้

ถ้าตัวดำเนินการสองตัวมีฟังก์ชันคลื่นเดียวกัน ตัวดำเนินการสองตัวนั้นจะสับเปลี่ยนกันได้ ในทางตรงข้ามถ้าตัวดำเนินการสองตัวสับเปลี่ยนกันได้ ตัวดำเนินการสองตัวนั้นจะมีฟังก์ชันไอเกนร่วมกัน

ถ้าหากระบบทางฟิสิกส์ที่กำหนดให้สามารถแทนได้ด้วยฟังก์ชันคลื่น ψ ค่าคาดหมายของปริมาณทางกายภาพ q ซึ่งคล้องจองกับตัวดำเนินการ Q อาจจะหาได้ดังนี้

$$< q > \quad = \quad \int (\psi^*)^T Q\psi \, d\bar{r} \tag{3-37}$$

ฟังก์ชันคลื่นจะเปลี่ยนไปเมื่อเวลาเปลี่ยนไปดังนี้

$$H\psi \quad = \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi \tag{3-44}$$

วงเล็บของปัวซองอาจใช้เป็นสื่อในการทำกลศาสตร์แบบฉบับให้เป็นกลศาสตร์ควอนตัม โดยเปลี่ยนตัวแปรพลวัตให้เป็นตัวดำเนินการควอนตัม ทั้งนี้เมื่อเปลี่ยนตัวแปรแล้วต้องได้ค่าสอดคล้องกับความเป็นจริง

ในประการสุดท้ายกฎในกลศาสตร์ควอนตัมในขอบเขตของระบบแบบฉบับ ต้องเป็นไปตามกฎของกลศาสตร์แบบฉบับ

3.10 คำถามท้ายบท

1. ฟังก์ชันคลื่นในระบบอนุรักษ์คืออะไร?
2. ปริมาณทางกายภาพแทนได้ด้วยตัวดำเนินการชนิดใด?
3. จงให้ความหมายของชุดของฟังก์ชันคลื่นที่สมบูรณ์?
4. การสับเปลี่ยนกันได้ของตัวดำเนินการมีความเกี่ยวข้องกับฟังก์ชันไอเกนของตัวดำเนินการเหล่านั้นอย่างไร?
5. degeneracy คืออะไร? การทำลาย degeneracy ทำได้อย่างไ
6. ค่าคาดหมายของระบบใด ๆ หาได้อย่างไร?
7. จงอธิบายถึงการเปลี่ยนตามเวลาของฟังก์ชันคลื่น?
8. จงอธิบายถึงความสัมพันธ์ระหว่างวงเล็บของปัวซองและวงเล็บการสับเปลี่ยน?

แบบฝึกหัดบทที่ 3

1. จงพิสูจน์เอกลักษณ์ของวงเล็บการสับเปลี่ยนต่อไปนี้

   (ก) $[x, p_x^2] = 2i\hbar\, p_x$

   (ข) $[f(p_x), x] = -i\hbar \dfrac{\partial}{\partial p_x} f(p_x)$

   (ค) $[p_x, f(p_x)] = 0$

   (ง) $[x, f(x)] = 0$

   (จ) $[p_x, f(x, p_x)] = i\hbar \dfrac{\partial}{\partial x} f(x, p_x)$

   (ฉ) $[f(x, p_x), x] = -i\hbar \dfrac{\partial}{\partial p_x} f(x, p_x)$

   (ช) $[p_x^n, x] = -ni\hbar\, p_x^{n-1}$

2. จงพิสูจน์ว่า $[A, B^n] = nB^{n-1}[A, B]$ ถ้า $((A, B), B) = 0$

3. ลูกปัดลูกหนึ่งมีมวล m เคลื่อนที่บนเส้นลวดซึ่งไม่มีความเสียดทาน มีความยาว a ขึงระหว่างกำแพงแกร่ง 2 อัน

   (ก) จงหาระดับพลังงานของระบบ

   (ข) จงแสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันคลื่นของระบบซึ่งมีพลังงานต่างกันเป็นออร์ทอนอร์มอลต่อกัน

   (ค) ถ้าหากจากการวัดครั้งหนึ่งปรากฏว่าลูกปัดอยู่ตรงกึ่งกลางของเส้นลวดพอดี จงหาอัตราส่วนของความน่าจะเป็นที่ระบบจะอยู่ในระดับพลังงานต่าง ๆ หลังจากนี้สมมติว่าเราทราบว่าลูกปัดจะไปอยู่ทางด้านขวาของเส้นลวด

   (ง) จงหาค่าเฉลี่ยที่ต่ำสุดของพลังงาน ($< H >$) ซึ่งสอดคล้องกับการวัดในครั้งนี้

   (จ) จงหาฟังก์ชันคลื่นที่คล้องจองกัน

   (ฉ) ถ้าหากระบบอยู่ในภาวะซึ่งมีค่าเฉลี่ยพลังงานต่ำสุดดังนี้ จงหาความน่าจะเป็นที่ระบบจะอยู่ในระดับที่มีพลังงานต่ำที่สุด

4. (ก) จงอธิบายถึงความหมายทางกายภาพของสมการค่าไอเกนในคณิตศาสตร์ของกลศาสตร์ควอนตัม

   (ข) ตัวดำเนินการมีความสำคัญอย่างไร ?

   (ค) ค่าไอเกนมีความสำคัญอย่างไร?

(ง) ไอเกนฟังก์ชันมีความสำคัญอย่างไร?

(จ) บทบาทของสมการโชดิงเจอร์ต่อกลศาสตร์ควอนตัมมีความสำคัญอย่างไร

(ฉ) ค่าคาดหมายมีความสำคัญอย่างไร?

5. จงแสดงว่า solution ทั่วไปของสมการโชดิงเจอร์อาจจะเขียนได้ในรูป

$$\psi(x, t) = \sum_n \left[\int \left(U_n^*(x') \right)^T \psi(x', 0)\, dx' \right] U_n(x) \exp(-i\omega_n t)$$

เมื่อ U_n เป็นออร์ทอนอร์มอลฟังก์ชันในชุดของไอเกนฟังก์ชันซึ่งมีพลังงาน $\omega_n = \frac{E_n}{\hbar}$

6. ถ้าหาก normalized energy eigenfunctions ของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ชนิดง่ายในหนึ่งมิติ คือ

$$\psi(x, t) = \sum_n a_n U_n(x) \exp\left(-\frac{iE_n t}{\hbar}\right)$$

(ก) จงหา $< x >$ ใช้ฟังก์ชันคลื่นที่กำหนดให้ และให้ตอบในรูปของ a_n และ t

(ข) ถ้า $a_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ และ $a_n = 0, n > 1$ จงหา $< x >$

7. อนุภาค ๆ หนึ่งถูกขังอยู่ในระหว่างผนังสองผนัง ซึ่งขนานกันและมีความกว้างและความยาวเป็นอนันต์ ผนังทั้งสองอยู่ห่างกัน D และอนุภาคมีมวล m

(ก) จงหาพลังงานของอนุภาคนั้นถ้าหากอนุภาคอยู่ในสถานะซึ่งมีพลังงานต่ำที่สุด

(ข) ถ้าหากผนังด้านหนึ่งเคลื่อนจากที่เดิมไปอยู่ห่างจากอีกผนังหนึ่งเป็นระยะ 2D และถ้าผนังนั้นเคลื่อนเร็วมากจนฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคนั้นไม่เปลี่ยนในขณะที่ผนังเคลื่อนที่ จงหาความน่าจะเป็นที่อนุภาคคงจะมีพลังงานเท่าเดิม?

8. (ก) จงเขียนตัวดำเนินการเฮอร์มีเชียนของผลคูณของโมเมนตัมกับระยะขจัดสำหรับฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ชนิดง่ายในหนึ่งมิติ

(ข) จงแสดงว่าค่าเฉลี่ยของตัวดำเนินการในข้อ (ก) เป็นศูนย์เสมอสำหรับ stationary state ใด ๆ ของออสซิลเลเตอร์

9. ถ้าหาก $R_+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2m}} p_x + i\sqrt{\frac{k}{2}}\, x$ จงแสดงว่า

$$R_+ = u_0^{-1} \frac{p_x}{\sqrt{2m}} u_0$$

เมื่อ
$$u_0 = \left(\frac{k}{\pi \hbar\omega}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{kx^2}{2\hbar\omega}\right) \tag{3-72}$$

10. จงแสดงว่า $R_{-} u_0(x+a) = i\sqrt{\frac{k}{2}} a u_0(x+a)$

$$\text{ถ้า} \quad R_{-} \equiv \frac{1}{\sqrt{2m}} p_x - i\sqrt{\frac{k}{2}} x$$

$$u_0(x) = \left(\frac{k}{\pi\hbar\omega}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{kx^2}{2\hbar\omega}\right)$$

11. ฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ชนิดง่ายในหนึ่งมิติตัวหนึ่งอยู่ในภาวะซึ่งการวัดพลังงานจะได้ค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}\hbar\omega_0$ หรือ $\frac{3}{2}\hbar\omega_0$ ความน่าจะเป็นของค่าทั้งสองมีขนาดเท่ากัน ที่เวลา $t = 0$ วัดโมเมนตัมของอนุภาคนั้นได้ค่าเฉลี่ยสูงสุดเท่าที่จะเป็นได้ตามขนาดของพลังงานที่กำหนดให้

(ก) จงหาค่าเฉลี่ยต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันของเวลา : $< H >$, $< \frac{p^2}{2m} >$, $< \frac{1}{2} kx^2 >$, $< p >$ และ $< x >$

(ข) จงเปรียบเทียบค่ากับค่าซึ่งได้จากกลศาสตร์แบบฉบับ เมื่อพลังงานของออสซิลเลเตอร์คือ $\frac{1}{2}\hbar\omega_0$

คำแนะนำ: พิจารณา $\frac{d}{dt} < Q > = \frac{i}{\hbar} < [H, Q] > + < \frac{\partial}{\partial t} Q >$

12. จงพิสูจน์ว่า Lorenlz force

$$\bar{F} = q\left[\bar{E} + \frac{1}{c}(\bar{v} \times \bar{B})\right]$$

$$= q\left[-\bar{\nabla}\left(\phi - \frac{1}{c}\bar{v}\cdot\bar{A}\right) - \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\bar{A}\right]$$

13. จงพิสูจน์ทฤษฎีของเอเรนเฟสท์ในกรณีของอนุภาคในสนามแม่เหล็กไฟฟ้าจากความสัมพันธ์

$$\frac{d}{dt} < Q > = \frac{i}{\hbar} < [H, Q] > + < \frac{\partial}{\partial t} Q >$$

$$H = \frac{1}{2m}\bar{\pi}\cdot\bar{\pi} + e\phi, \quad \bar{\pi} = \bar{p} - \frac{e}{c}\bar{A}$$

จงแสดงว่า
$$\frac{d}{dt} < \bar{r} > = < \frac{1}{m}\bar{\pi} >$$

$$\frac{d}{dt} < \bar{\pi} > = < \text{Lorentz force} >$$

14. คุณสมบัติที่น่าสนใจประการหนึ่งของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์อย่างง่าย คือ ฟังก์ชันคลื่นในรูปของ wave packet ซึ่งเคลื่อนไปมาโดยไม่เปลี่ยนรูปร่าง คุณสมบัตินี้เป็นคุณสมบัติเฉพาะสำหรับฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ จงแสดงว่า wave packet นั้นมีภาวะเบื้องต้นดังนี้ $\psi(x,0) = u_0(x+a), \quad t = 0$

ซึ่ง $$u_0(x) = \left(\frac{k}{\pi\hbar\omega}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{kx^2}{2\hbar\omega}\right)$$

คำแนะนำ

(ก) ขั้นต้นจงแสดงว่า

$$u_0(x+a) = u_0^{-1}(0)\, u_0\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) u_0^{-1}(x) \exp\left(\frac{iPa}{2\hbar}\right) u_0^2(x),$$

เมื่อ $$\exp\left(\frac{iPa}{2\hbar}\right) = 1 + \frac{iPa}{2\hbar} + \frac{1}{2!}\left(\frac{iPa}{2\hbar}\right)^2 + \ldots$$

(ข) จงใช้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้

(ข.1) $$R_{\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2m}} P \pm i\sqrt{\frac{k}{2}}\, x$$

(ข.2) $$\psi = \sum_n c_n u_n \exp\left(-i\frac{E_n t}{\hbar}\right)$$

(ข.3) $$u_n = c_n R_+^n u_0$$

แสดงว่า $$\psi(x,t) = u_0^{-1}(0)\, u_0\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) \exp\left(-\frac{1}{2} i\omega t\right) u_0^{-1}(x) \exp\left[i\frac{Pa}{2\hbar}\exp(-i\omega t)\right] u_0^2(x)$$

(ค) จงคำนวณฟังก์ชันในข้อ (ข) และแสดงให้เห็นว่า ฟังก์ชันคลื่นนั้นเป็นฟังก์ชันคลื่นของ wave packet ซึ่งเคลื่อนไปมาโดยไม่เปลี่ยนรูปร่างของ envelope function จงเขียนกราฟของฟังก์ชันคลื่นเมื่อ $t = 0$ และ $t = \frac{\pi}{2\omega}$ จงสังเกตว่าค่า wave number ของอนุภาค k มีคาบการเปลี่ยนค่าไปมา

15. จงใช้ฟังก์ชันคลื่นของข้อ 14 หาค่าเฉลี่ยของ H, P, x, $\frac{P^2}{2m}$ และ $\frac{1}{2}kx^2$ จงเทียบผลนี้กับออสซิลเลเตอร์ในกลศาสตร์แบบฉบับซึ่งเคลื่อนที่ด้วยอำพน a