

บทที่ 2
รากฐานของกลศาสตร์ควอนตัม I :
กลศาสตร์แบบฉบับ
(Classical Mechanics)

บทที่ 2

รากฐานของกลศาสตร์ควอนตัม I: กลศาสตร์แบบฉบับ (Classical Mechanics)

วัตถุประสงค์

1. ให้สามารถคำนวณหาสมการการเคลื่อนที่โดยใช้ Calculus of Variations
2. สร้างแฮมิลโทเนียนได้
3. ให้สามารถคำนวณเกี่ยวกับวงเล็บของปัวซอง

2.1 บทนำ

จากการเรียนกลศาสตร์ควอนตัมและกลศาสตร์แบบฉบับมาบ้างในวิชาฟิสิกส์ ตอนต้นจะเห็นว่ากลศาสตร์ควอนตัมและกลศาสตร์แบบฉบับนั้นแตกต่างกันมาก ในแง่ของประวัติศาสตร์แล้ว กลศาสตร์แบบฉบับเป็นรากฐานของกลศาสตร์ควอนตัม นักฟิสิกส์ผู้คิดค้นกลศาสตร์ควอนตัมได้ใช้กลศาสตร์แบบฉบับเป็นหุ่น (model) เพื่อทดลองความคิดใหม่ ๆ ของเขาแล้วนำความคิดดั้งเดิมนั้นมาดัดแปลงให้เขาสามารถอธิบายปรากฏการณ์ต่าง ๆ ในอะตอมได้ ดังนั้น ในบทนี้จะได้ทบทวนเนื้อหาสำคัญของกลศาสตร์แบบฉบับเพื่อให้สะดวกในการศึกษาสมมติฐานของกลศาสตร์ควอนตัม

2.2 Calculus of Variations

วิธีทางคณิตศาสตร์ที่นิยมใช้กันในการเขียนตัวแปรพลวัตเพื่อใช้ในการดัดแปลงให้เป็นกลศาสตร์ควอนตัมก็คือ วิชา Calculus of Variations ซึ่ง Maupertius (1698-1759)

นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสได้นำมาศึกษาหลักที่ว่าด้วยการกระทำที่น้อยที่สุด (principle of least action) ทำให้มีการนำเอากฎเกณฑ์ต่าง ๆ ที่สำคัญทางกลศาสตร์แบบฉบับมาใช้ในพิกัดทั่วไป (generalized coordinates) ได้สะดวกขึ้น

คำนิยาม

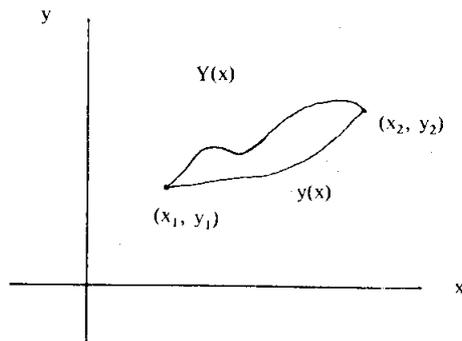
geodesic คือระยะที่สั้นที่สุดซึ่งเชื่อมระหว่างจุดสองจุด ถ้าหากจุดทั้งสองอยู่ในระนาบ ระยะนั้นก็คือเส้นตรง ถ้าหากจุดทั้งสองนั้นอยู่บนผิวทรงกลม ระยะที่สั้นที่สุดก็คือระยะตามเส้นรอบวงที่ใหญ่ที่สุด หรือระยะซึ่งเกิดจากระนาบซึ่งผ่านจุดทั้งสองและจุดใจกลางทรงกลมตัดกับผิวของทรงกลมนั้นเอง

stationary points คือจุดซึ่งได้จากการหาสมการ $\frac{d}{dx} f(x) = 0$ ซึ่งจุดนั้นอาจจะเป็นจุดต่ำสุด จุดสูงสุดหรือจุดเปลี่ยนทิศของเส้นสัมผัส (points of inflection) ก็ได้

brachistochrone รากศัพท์ของปัญหานี้มาจากคณิตศาสตร์สมัยกรีก (brachistos = สั้นที่สุด, chronos = เวลา) ปัญหา brachistochrone กล่าวไว้ดังนี้ “จะตัดลวดซึ่งต่อระหว่างจุดสองจุดในรูปใดจึงจะทำให้ลูกบิดซึ่งร้อยลวดอยู่เคลื่อนจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งในเวลาที่น้อยที่สุด”

extremal problem คือปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ว่าถึงค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของอินทิกรัล (เราจะเรียกปัญหานี้ทับศัพท์ว่าปัญหา extremal)

ในวิชา Calculus of Variations การจะหาว่าอินทิกรัลใดมีค่าสูงสุด ต่ำสุด หรือเป็นอย่างอื่นนั้นเป็นเรื่องยาก ปกติถ้าใช้รูปทางเรขาคณิตของปัญหานั้น ๆ ช่วยจะทำให้ง่ายขึ้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้



ปัญหา geodesic ในตัวอย่างที่ 2.1

รูปที่ (2-1)

ตัวอย่างที่ 2.1 กำหนดให้ $I = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(y')^2} dx$, $y' = \frac{dy}{dx}$ จงหา $y = y(x)$ ซึ่งทำให้ I มีค่าน้อยที่สุด

ข้อสังเกต $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1+(y')^2} dx$ ดังนั้น ปัญหาที่กำหนดให้ก็คือปัญหาการหาระยะที่สั้นที่สุดที่จะเชื่อมระหว่างจุด (x_1, y_1) และจุด (x_2, y_2)

วิธีทำ สมมติว่าทาง $y = y(x)$ ทำให้ I มีค่าน้อยที่สุด ให้ η เป็นฟังก์ชันของ x นั่นคือ $\eta = \eta(x)$ โดยที่ที่จุดสุดท้าย $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$; $\eta(x)$, $\eta'(x)$ และ $\eta''(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง ให้ $Y = Y(x, \epsilon)$ เป็นทางใด ๆ ซึ่งต่างจาก $y(x)$ เป็นค่าน้อยมาก ๆ โดยที่

$$Y(x, \epsilon) = y(x) + \epsilon \eta(x) \quad (2-1)$$

ดังนั้น Y เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องจนถึงอนุพันธ์ที่สองของ x และแทนชุดของเส้นจำนวนหนึ่งซึ่งต่อระหว่างจุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) ในบรรดาชุดของเส้นเหล่านั้นจะมีเส้นทางหนึ่งซึ่งทำให้

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(Y')^2} dx \quad \text{มีค่าน้อยที่สุด} \quad (2-2)$$

โดยที่ $Y' = \frac{dY}{dx}$
เลือกเส้นโค้งที่กล่าวถึงนี้ จะเห็นว่าเมื่อ $\epsilon = 0$ แล้ว เส้นโค้งที่เลือกขึ้นจะมีคุณสมบัติ

ดังนี้

$$Y(x, \epsilon) = y(x) \quad (2-3)$$

$$\frac{dJ}{d\epsilon} = 0 \quad (2-4)$$

ใช้คุณสมบัติของสมการที่ (2-4) ในสมการที่ (2-2)

$$\frac{dJ}{d\epsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{Y'}{\sqrt{1+(Y')^2}} \frac{dY'}{d\epsilon} dx \quad (2-5)$$

แต่ $\frac{dY'}{d\epsilon} = \eta'(x)$ แทนค่าลงในสมการที่ (2-5)

$$\frac{dJ}{d\epsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{Y' \eta'}{\sqrt{1+(Y')^2}} dx$$

$$\therefore \left. \frac{dJ}{d\epsilon} \right|_{\epsilon \rightarrow 0} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{y' \eta'}{\sqrt{1+(y')^2}} dx \quad (2-6)$$

ใช้เทคนิค integration by part และสมการที่ (2-4) ในสมการที่ (2-6)

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon \rightarrow 0} &= \frac{y'(x) \eta(x)}{\sqrt{1+(y')^2}} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} \right) dx \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2-7)$$

เทอมแรกในสมการ (2-7) เป็นศูนย์ เนื่องจาก $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ ส่วนเทอมที่สอง เนื่องจาก $\eta(x)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ จึงไม่เท่ากับศูนย์

$$\therefore \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} \right) = 0 \quad (2-8)$$

แก้สมการที่ (2-8) ได้ผลลัพธ์ว่า

$$y'(x) = c_1$$

โดยที่ c_1 เป็นค่าคงที่ จะเห็นว่า

$$y(x) = c_1 x + c_2 \quad \text{ซึ่งเป็นสมการเส้นตรง}$$

ดังนั้น ทางซึ่งทำให้ I มีค่าน้อยที่สุด คือ ทางที่เป็นเส้นตรง

โดยทั่วไปแล้วปัญหา extremum จะนำไปสู่สมการที่สำคัญทางกลศาสตร์ ปัญหานี้มีอยู่ว่า จงหาค่า $y = y(x)$ ซึ่งทำให้อินทิกรัลต่อไปนี้เป็น extremum

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \quad (2-9)$$

$$\text{โดยที่} \quad y' = \frac{dy}{dx} \quad (2-10)$$

ให้ $Y(x, \varepsilon) = y(x) + \varepsilon \eta(x)$ โดยที่ $\eta(x)$, $\eta'(x)$ และ $\eta''(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง มี $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ และ $y = y(x)$ ให้ค่า extremum ของอินทิกรัล ในที่นี้เราจะจำกัดเอาเป็นค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดเท่านั้น

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\varepsilon} &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial Y'} \frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon} \right) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial Y'} \eta'(x) \right) dx = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{dI}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon \rightarrow 0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) \right) dx \quad (2-11)$$

เทอมที่สองของสมการที่ (2-11) เขียนเสียใหม่ได้ดังนี้

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) dx = \frac{\partial F}{\partial y'} \eta(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} dx \eta(x) \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \quad (2-12)$$

เทอมแรกของสมการทางด้านขวามือของสมการที่ (12-2) เป็นศูนย์ แทนค่าสมการที่ (2-12) ลงในสมการที่ (2-11)

$$\frac{dI}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon \rightarrow 0} = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right\} \eta(x) dx \quad (2-13)$$

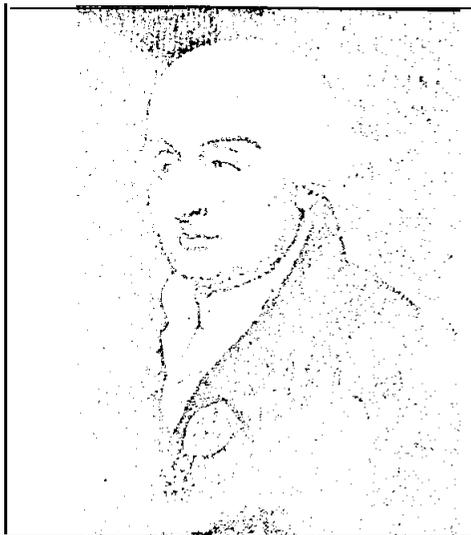
เนื่องจาก $\eta(x)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ ดังนั้นเราอาจจะสรุปได้ว่า

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (2-14)$$

สมการที่ (2-14) มีชื่อเรียกว่า สมการ Euler-Lagrange จะเห็นว่าปัญหาในทาง Calculus of Variations อาจแก้ได้ง่าย ๆ โดยทำให้ปัญหานั้นอยู่ในรูปอินทิกรัลซึ่งเป็น extremum หาฟังก์ชัน F แล้วนำไปแทนค่าในสมการ Euler-Lagrange แก้สมการจะได้คำตอบของปัญหานั้น ในตอนต่อไปจะเห็นว่าเราอาจจะหาสมการของการเคลื่อนที่ได้โดยใช้สมการ Euler-Lagrange นี้

2.3 พิกัดทั่วไปและสมการของลากรานจ์

(Generalized Coordinates and Lagrange's Equations)



รูปที่ (2-2)

Joseph-Louis Comte de Lagrange ผู้คิดค้น Lagrangian

สมการมาตรฐานสำหรับกลศาสตร์แบบฉบับซึ่งอนุภาคมีความเร็วไม่สูงนัก คือ สมการการเคลื่อนที่ของนิวตันสำหรับอนุภาคเดี่ยว

$$\vec{F} = m\vec{r} \quad (2-15)$$

\vec{F} คือ แรงที่กระทำบนอนุภาคซึ่งมีมวล m และมีความเร่ง \vec{r} สำหรับแรงอนุรักษ์ แรงอาจจะหาได้จากโพเทนเชียล V ซึ่งเป็นฟังก์ชันของพิกัดและอาจจะเป็นฟังก์ชันของเวลาด้วยก็ได้

$$\vec{F} = -\nabla V \quad (2-16)$$

สมการที่ (2-15) และ (2-16) อาจจะเขียนให้ละเอียดในพิกัดฉากได้ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} F_x &= m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ F_y &= m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ F_z &= m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2-17)$$

ปัญหาหลายปัญหาในกลศาสตร์แบบฉบับยากที่จะแก้ได้โดยใช้พิกัดฉาก เช่น ปัญหาการเคลื่อนที่ของอนุภาคซึ่งเกิดจากแรงมากระทำบนอนุภาคมีทิศเข้าหาจุดใดจุดหนึ่งอยู่ตลอดเวลา และขึ้นอยู่กับระยะทางระหว่างอนุภาคกับจุดนั้น ปัญหาเช่นนี้เหมาะที่จะใช้พิกัดทรงกลมมากกว่าพิกัดฉาก ดังนั้น เพื่อให้สะดวกในการแก้ปัญหาทุกต่าง ๆ ทางกลศาสตร์ควรจะทำให้อยู่ในรูปซึ่งจะใช้กับพิกัดใด ๆ ก็ได้ จึงมีการเสนอให้ใช้พิกัดทั่วไปและคิดกฎทางกลศาสตร์ขึ้นใหม่โดยใช้พิกัดทั่วไป

สมมติว่าระบบทางกลศาสตร์ระบบหนึ่งมีอนุภาคอยู่ N ตัว ดังนั้น ระบบนี้จะมีดีกรีความเป็นอิสระ (degrees of freedom) อยู่ $3N$ เราอาจจะเลือกพิกัดทั่วไป q_i ($i = 1, 2, 3, \dots, 3N$) เพื่อใช้ในการสร้างกฎทางกลศาสตร์ พิกัดทั่วไปนี้จะมีความสัมพันธ์กับพิกัดฉากดังนี้

$$\vec{r}_j = \vec{r}_j(q_i, t) \quad (2-18)$$

ซึ่งอาจจะเขียนเพื่อให้เข้าใจง่ายขึ้นได้ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} x_j &= x_j(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t) \\ y_j &= y_j(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t) \\ z_j &= z_j(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t) \end{aligned} \right\} \quad (2-19)$$

หากจะนำสมการที่ (2-18) ไปแทนค่าในสมการที่ (2-15) เราก็จะได้สมการของการเคลื่อนที่ที่เกิดจากการใช้พิกัดทั่วไป แต่การทำพีชคณิตจะยุ่งยากมากจึงจำเป็นต้องมองหาวิธีใหม่ ถ้าหากว่าเราพิจารณาสมการที่ (2-14) สมมติว่า

$$F = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - V(x)$$

= พลังงานจลน์ของอนุภาค - พลังงานศักย์ของอนุภาค :
ปัญหาอนุภาคเคลื่อนที่ในหนึ่งมิติ

(2-20)

จะเห็นว่า

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} &= \frac{d}{dt} m\dot{x} = m\ddot{x} \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= -\frac{\partial V}{\partial x} \end{aligned} \right\}$$
(2-21)

แทนลงในสมการที่ (2-14) จะได้สมการการเคลื่อนที่ดังนี้

$$m\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$
(2-22)

ซึ่งเป็นสมการเดียวกับสมการที่ (2-17) แสดงว่าเราควรจะหาฟังก์ชันอันหนึ่ง คือ ฟังก์ชัน L โดยกำหนดให้

$$L = \text{พลังงานจลน์ของระบบ} - \text{พลังงานศักย์ของระบบ}$$
(2-23)

L มีชื่อเรียกว่า Lagrangian และเราจะให้ L เป็นฟังก์ชันของพิกัดทั่วไป นั่นก็คือ

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad \text{เราจะหาพิกัดทั่วไป } q_i \text{ ซึ่งทำให้}$$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad \text{เป็น extremum}$$
(2-24)

ในที่นี้กำหนดให้ t_1 และ t_2 เป็นเวลาซึ่งคงที่ ภาวะซึ่งทำให้ W เป็น extremum อาจจะพูดเสียใหม่ได้ดังนี้ คือ การเปลี่ยนแปลงเล็กน้อยใด ๆ ของ q_i (ซึ่งจะเขียนแทนว่า δq_i) ไม่ทำให้ค่า W เปลี่ยนไป เราอาจจะเขียนเป็นภาษาคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \delta W &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt \\ &= 0 \end{aligned}$$
(2-25)

โดยที่ $\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i$ เราอาจจะทำ integration by part สำหรับเทอมที่สอง ทางด้านขวาของสมการ (2-25) ได้ดังนี้

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i dt = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i(t) \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \delta q_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)$$
(2-26)

เนื่องจาก t_1 และ t_2 เป็นเวลาที่คงที่ ดังนั้น $\delta q_i(t_2) = \delta q_i(t_1) = 0$ จะเห็นว่าเทอมที่หนึ่งของสมการที่ (2-26) เป็นศูนย์ แทนค่าลงไปในสมการที่ (2-25) (ในที่นี้เราสมมติว่าการบวกและการอินทิเกรตสลับเปลี่ยนกันได้)

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt \\ &= \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = 0 \end{aligned} \quad (2-27)$$

เนื่องจาก δq_i เป็นฟังก์ชันใด ๆ ของเวลา ดังนั้น จากสมการที่ (2-27) เราจะเห็นว่า

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (2-28)$$

สมการที่ (2-28) มีชื่อเรียกว่าสมการของลากรางจ์ ฟังก์ชันที่เรียกว่า q_i และ \dot{q}_i ในสมการที่ (2-28) เป็นอิสระต่อกัน การหา extremum ของ W ทำให้สมการของลากรางจ์แทนการเคลื่อนที่ของอนุภาค ดังที่ได้แสดงในสมการที่ (2-21) คุณสมบัติอันนี้คือการที่เราหา extremum ของ W แล้วได้สมการการเคลื่อนที่เป็นจริงสำหรับทุก ๆ พิกัด ไม่ใช่สำหรับพิกัดฉากเท่านั้น ดังจะได้พิสูจน์ต่อไปนี้

ทฤษฎี สมการการเคลื่อนที่ในรูปสมการของลากรางจ์ จะไม่เปลี่ยนรูปร่างเมื่อพิกัดเปลี่ยนไป (invariant property of Lagrange's equations)

พิสูจน์ สมมติว่าเราเริ่มต้นด้วยพิกัดฉากสำหรับระบบอนุภาคซึ่งมีอนุภาค N ตัว ดังนั้น

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - V(x_i, y_i, z_i) \quad (2-29)$$

ฟังก์ชันที่เทอมหน้าคือ $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{r}_i)^2 =$ พลังงานจลน์

เป็นฟังก์ชันของ \dot{x}_i, \dot{y}_i และ \dot{z}_i ส่วนเทอมหลังก็คือ พลังงานศักย์ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ x_i, y_i และ z_i สมการที่ (2-28) จะมีรูปร่างดังนี้

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} + \frac{\partial V}{\partial y_i} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} + \frac{\partial V}{\partial z_i} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-30)$$

เราจะเปลี่ยนสมการ (2-30) ไปสู่พิกัดทั่วไปดังนี้ คุณสมบัติแรกของ (2-30) ด้วย $\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$ สมการที่สองด้วย $\frac{\partial y_i}{\partial q_j}$ และสมการที่สามด้วย $\frac{\partial z_i}{\partial q_j}$ ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = 0$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial q_j} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} = 0$$

$$\frac{\partial z_i}{\partial q_j} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} = 0$$

รวมสมการทั้งสามจาก $i = 1$ ถึง $i = N$

$$\sum_{i=1}^N \left\{ \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} + \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} \right\} + \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right\} = 0 \quad (2-31)$$

เทอมที่สองของสมการที่ (2-31) คือ $\frac{\partial V}{\partial q_j}$ ส่วนเทอมแรกอาจจะจัดแปลงต่อไปได้

ดังนี้

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \quad (2-32)$$

$$\begin{aligned} \text{แต่เนื่องจากว่า } \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) &= \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j} \dot{x}_i \end{aligned}$$

แทนค่าลงในสมการที่ (2-32) ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \quad (2-32)'$$

$$\begin{aligned} \text{แต่เนื่องจาก } \frac{d}{dt} \dot{x}_i &= \ddot{x}_i \\ &= \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \dots + \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_{3N}} \frac{dq_{3N}}{dt} \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} &= \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k} \\ &= \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta_{jk} \\ &= \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \end{aligned} \quad (2-33)$$

เราอาจจะเขียนสมการที่ (2-32) เสียใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \quad (2-32)''$$

แทนสมการที่ (2-32)'' ลงในสมการที่ (2-31) และแทนเทอมสุดท้ายของสมการที่ (2-31) ด้วย $\frac{\partial V}{\partial q_j}$ ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial q_j} \right) \right\} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \end{aligned} \quad (2-34)$$

เมื่อทำการบวกดัชนี $i =$ จาก 1 ถึง N จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T - V) - \frac{\partial}{\partial q_j} (T - V) = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

ซึ่งเป็นรูปของสมการที่ (2-28) แสดงว่าสมการของลากรางจ์จะไม่เปลี่ยนรูปร่างเมื่อพิกัดเปลี่ยนไป

ตัวอย่างที่ 2.2 ฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ในสามมิติ

สมมติว่าอนุภาคตัวหนึ่งผูกติดกับสปริงซึ่งมีค่าคงที่ของสปริง (spring constant) k ปลายอีกข้างหนึ่งของสปริงผูกติดกับจุด ๆ หนึ่ง สมมติว่าเป็นจุดกำเนิด (origin) ของระบบที่เรากำลังพิจารณา แรงที่กระทำบนอนุภาค คือ $-k\mathbf{r}$

ดังนั้น พลังงานศักย์ของระบบนี้ก็คือ $V = \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2)$

Lagrangian ในพิกัดฉากอาจจะเขียนได้ดังนี้

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) \quad (2-35)$$

สมการของลากรางจ์ในแนวแกน x แกน y และแกน z ก็คือ

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + kx &= 0 \\ m\ddot{y} + ky &= 0 \\ m\ddot{z} + kz &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-36)$$

สมการชุด (2-36) คือ สมการการเคลื่อนที่ของระบบที่เรากำลังพิจารณา

นำสมการแรกของชุด (2-36) คูณด้วย $\frac{dx}{dt}$ จัดเทอมเสียใหม่จะเห็นว่า

$$m\dot{x} \frac{dx}{dt} = -kx \frac{dx}{dt} \quad (2-37)$$

สมการที่ (2-37) อาจจะเขียนเสียใหม่ได้ว่า

$$\frac{1}{2}m \frac{d}{dt} (x)^2 = -\frac{1}{2}k \frac{d}{dt} (x)^2 \quad (2-38)$$

อินทิเกรตสมการที่ (2-38) ได้ผลลัพธ์

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 = -\frac{1}{2} kx^2 + E_x$$

$$E_x = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \text{ค่าคงที่} \quad (2-39)$$

จะเห็นว่าสมการที่ (2-39) คือ พลังงานของระบบเนื่องจากการเคลื่อนที่ในแนวแกน x เขียนสมการที่ (2-39) เสียใหม่

$$\dot{x}^2 = \frac{2E_x}{m} - \frac{kx^2}{m}$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \left(\frac{2E_x}{m} - \frac{kx^2}{m} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dx}{\left(\frac{2E_x}{m} - \frac{kx^2}{m} \right)^{\frac{1}{2}}} = dt \quad (2-40)$$

ถ้าหากกำหนดให้ $E_x = \frac{1}{2} kx_0^2$ (2-41)

$$\therefore \frac{dx}{\left(\frac{2E_x}{m} - \frac{kx^2}{m}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{dx}{\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} (x_0^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (2-42)$$

แทนค่า (2-42) ใน (2-40)

$$\frac{dx}{(x_0^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} dt \quad (2-43)$$

แต่เนื่องจาก $k = 4\pi^2 m v_0^2 = m \omega_0^2$ (2-44)

เมื่อ v_0 คือ ความถี่ของการสั่น แทนค่า (2-44) ลงใน (2-43) ได้ผลลัพธ์แล้วอินทิเกรตทั้งสองข้าง

$$\therefore \int \omega_0 dt = \int \frac{dx}{(x_0^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (2-45)$$

$$\therefore \omega_0 t + s_x = \sin^{-1} \frac{x}{x_0} \quad \text{ซึ่ง}$$

$$x = x_0 \sin(\omega_0 t + s_x) \quad (2-46)$$

โดยทำนองเดียวกัน เราอาจจะหาค่า y และค่า z ได้จากสมการชุด (2-36) ได้ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} y &= y_0 \sin(\omega_0 t + s_y) \\ z &= z_0 \sin(\omega_0 t + s_z) \end{aligned} \right\} \quad (2-47)$$

โดยที่ x_0, y_0, z_0, s_x, s_y และ s_z เป็นค่าคงที่ซึ่งได้จากการอินทิเกรต และ

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (2-48)$$

ดังนั้น พลังงานของระบบนี้ก็คือ

$$\begin{aligned} E &= E_x + E_y + E_z \\ &= \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} m \omega_0^2 (x^2 + y^2 + z^2) \end{aligned} \quad (2-49)$$

ตัวอย่างที่ 2.3 ฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ในพิกัดทรงกลม

พิกัดฉากอาจจะเขียนให้อยู่ในรูปของพิกัดทรงกลมได้ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (2-50)$$

จากสมการชุดที่ (2-50) เราอาจจะหาอนุพันธ์ของ x , y และ z เทียบกับเวลาได้ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \sin \theta \cos \phi + r \cos \theta \dot{\theta} \cos \phi - r \sin \theta \sin \phi \dot{\phi} \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta \sin \phi + r \cos \theta \dot{\theta} \sin \phi + r \sin \theta \cos \phi \dot{\phi} \\ \dot{z} &= \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta} \end{aligned} \right\} \quad (2-51)$$

จากสมการชุด (2-50) และ (2-51) เราอาจจะเขียน พลังงานจลน์ พลังงานศักย์ และ Lagrangian ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\ &= \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \end{aligned} \quad (2-52)$$

$$V = \frac{m\omega_0^2}{2} r^2 \quad (2-53)$$

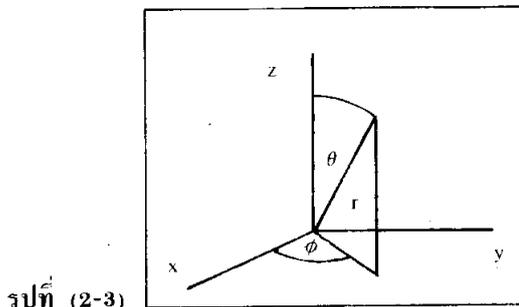
$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{m}{2} \{ (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 - \omega_0^2 r^2) \} \end{aligned} \quad (2-54)$$

ดังนั้น สมการการเคลื่อนที่จะหาได้ดังนี้

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{d}{dt} (mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0 \quad (2-55)$$

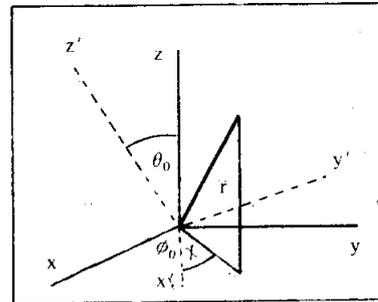
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\theta}) - mr^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = 0 \quad (2-56)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} &= \frac{d}{dt} (mr\dot{r}) - mr\dot{\theta}^2 - mr \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + m\omega_0^2 r \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2-57)$$



รูปที่ (2-3)

รูปแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง
พิกัดฉากกับพิกัดทรงกลม



รูปที่ (2-4)

รูปแสดงแกนที่หมุนไปของพิกัดทรงกลม
เมื่อเวลา $t = 0$

เนื่องจากเส้นทางการเคลื่อนของอนุภาคกับจุดกำเนิด (origin) ต้องอยู่ในระนาบเดียวกัน ดังนั้นเราอาจจะหาพิกัดขึ้นมาใหม่ชุดหนึ่ง โดยที่เมื่อเวลา $t = 0$ ให้พิกัดใหม่มีเวกเตอร์ \vec{r} และ \vec{v} ของอนุภาคตั้งได้ฉากกับแกน z' ซึ่งเป็นแกนของพิกัดใหม่ โดยที่ z' ทำมุม θ_0 กับแกน z ซึ่งเป็นแกนของพิกัดเดิม ส่วนแกน x' ซึ่งเป็นแกนพิกัดใหม่ทำมุม ϕ_0 กับแกน x ซึ่งเป็นแกนพิกัดเดิม (ดูรูป 2-4) พิกัดทรงกลมในพิกัดใหม่นี้ก็คือ r, θ' และ χ แต่เนื่องจากเวกเตอร์ \vec{r} ตั้งได้ฉากกับแกน z' ดังนั้น $\theta' = \frac{\pi}{2}$ จากสมการที่ (2-54) จะเห็นว่า Lagrangian ใหม่คือ

$$L' = \frac{m}{2} \{(\dot{r}^2 + r^2\dot{\chi}^2) - \omega_0^2 r^2\} \quad (2-54)'$$

สมการที่ (2-55) จะกลายเป็น

$$mr^2\dot{\chi} = L_x = \text{ค่าคงที่} \quad (2-55)'$$

โดยใช้ χ แทน ϕ ส่วนสมการของตัวแปร r คือสมการที่ (2-57) คงเหลือ

$$m\ddot{r} - mr\dot{\chi}^2 + m\omega_0^2 r = 0$$

แทนค่า $\dot{\chi}$ โดยใช้สมการที่ (2-55)' ได้ว่า

$$m\ddot{r} - \frac{L_x^2}{mr^3} + m\omega_0^2 r = 0 \quad (2-57)'$$

เนื่องจากว่าแรงที่กระทำบนอนุภาคเป็นแรงที่ขึ้นกับระยะทางและมีทิศเข้าหาจุดกำเนิด ดังนั้นเส้นทางการเคลื่อนที่จึงอยู่ในระนาบ สมการที่ (2-57)' อาจจะอินทิเกรตหาเส้นทางการเคลื่อนที่เป็นทางโคจรในระนาบได้

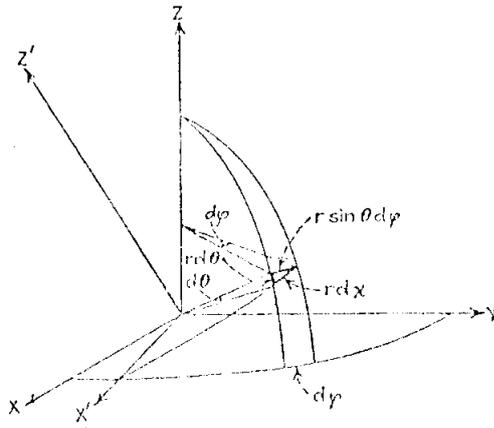
กฎที่สำคัญกฎหนึ่งซึ่งปรากฏชัดจากการแก้ปัญหาในตัวอย่างนี้ก็คือ กฎการอนุรักษ์โมเมนตัม (the conservation of angular momentum) จะเห็นว่าจากสมการที่ (2-55)' L_x เป็นค่าคงที่ของการเคลื่อนที่ หรือถ้าหากเราอินทิเกรตสมการที่ (2-55) จะได้ผลลัพธ์

$$mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = L_\phi = \text{ค่าคงที่} \quad (2-58)$$

L_x คือโมเมนตัมเชิงมุมรอบแกน z' เราอาจจะพิจารณาโมเมนตัมเชิงมุมอีกค่าหนึ่ง คือ

$$L_\theta = mr^2\dot{\theta} \quad (2-59)$$

L_θ ไม่ใช่ค่าคงที่ของการเคลื่อนที่ เพราะ L_θ เปลี่ยนไปเมื่อ ϕ เปลี่ยนไป เราอาจจะหาความสัมพันธ์ของ L_x, L_θ และ L_ϕ ได้ดังนี้



รูปที่ (2-5)

รูปแสดงความสัมพันธ์ของ dx, dφ และ dθ

$$r^2 dx^2 = (r \sin \theta d\phi)^2 + (rd\theta)^2 \quad (2-60)$$

คูณตลอดสมการที่ (2-60) ด้วย $\frac{m}{dt}$

$$\therefore mr^2 \dot{x} dx = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} d\phi + mr^2 \dot{\theta} d\theta$$

แทนค่าโดยใช้สมการที่ (2-55)', (2-58) และ (2-59) ได้ผลลัพธ์เป็น

$$L_x dx = L_\phi d\phi + L_\theta d\theta \quad (2-61)$$

ถ้าหากระบบที่เราพิจารณาเป็นระบบของอนุภาค N ตัว ซึ่งทำอันตรกิริยาในรูปใดก็ได้แต่อนุภาคทั้งหมดนี้มีแรงภายนอกมากระทำซึ่งแทนได้ด้วยโพเทนเชียล $V = V(r)$ หรืออย่างเร็วที่สุด V ต้องไม่ขึ้นกับพิกัด ϕ เมื่อเลือกพิกัดแล้ว จากสมมติฐานนี้เราอาจจะเขียน Lagrangian สำหรับระบบนี้ได้ว่า

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{r}_i^2 + r_i^2 \dot{\theta}_i^2 + r_i^2 \sin^2 \theta_i \dot{\phi}_i^2) - V \quad (2-62)$$

เพื่อให้มองเห็นเหตุการณ์ที่จะเกิดขึ้นชัดเจน เราอาจจะเปลี่ยนรูปชุดของ ϕ_i เสียใหม่ ดังนี้

$$\phi_i = \alpha + \sum_{j=1}^N b_{ij} \beta_j \quad (2-63)$$

หรือเขียนเพื่อให้เข้าใจง่าย

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \alpha + b_{11}\beta_1 + b_{12}\beta_2 + \dots + b_{1N}\beta_N \\ &\vdots \\ \phi_N &= \alpha + b_{N1}\beta_1 + b_{N2}\beta_2 + \dots + b_{NN}\beta_N \end{aligned} \right\} (2-63)'$$

ค่าของชุดสัมประสิทธิ์ b_{11}, \dots, b_{NN} เลือกขึ้นเพื่อให้ ϕ_i 's ในชุดของสมการ (2-63) เป็นอิสระซึ่งกันและกัน จะเห็นว่าถ้าเราเพิ่ม α ขึ้นเป็น $\alpha + \Delta\alpha$ โดยให้ชุด β มีค่าคงที่ ค่าของ V จะไม่เปลี่ยนแปลงตามสมมติฐานที่เราวางไว้ นั่นคือ เราหมุนระบบทั้งหมดไปเป็นมุม $\Delta\alpha$ โดยไม่ทำให้อันตรกิริยาภายในเปลี่ยนแปลง V จะไม่ขึ้นต่อมุม α ดังนั้น

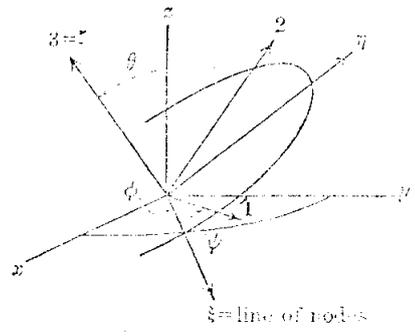
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = 0 \quad (2-64)$$

จากสมการที่ (2-64) จะเห็นว่า $\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}}$ เป็นค่าคงที่ซึ่งเราจะเขียนเสียใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_i} \frac{\partial \dot{\phi}_i}{\partial \dot{\alpha}} \\ &= \sum_i m_i r_i^2 \sin^2 \theta_i \dot{\phi}_i \end{aligned} \quad (2-65)$$

สมการที่ (2-65) เป็นค่าคงที่ เมื่อเทียบกับสมการที่ (2-55) และ (2-58) แล้ว จะเห็นว่าค่าคงที่นี้คือโมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาคที่ i ดังนั้น ในระบบซึ่งประกอบด้วยอนุภาคกลุ่มหนึ่งซึ่งทำอันตรกิริยาซึ่งกันและกัน เช่น กลุ่มของอิเล็กตรอนหรือนิวเคลียส โมเมนตัมเชิงมุมของแต่ละตัวไม่จำเป็นต้องเป็นค่าคงที่ แต่โมเมนตัมเชิงมุมของระบบทั้งหมดต้องเป็นค่าคงที่

ตัวอย่างที่ 2.4 การหมุนของทรงตันที่มีรูปร่างสมมาตรและสปิน



รูปที่ (2-6) มุมของออยเลอร์

ในรูปที่ (2-6) มุม ϕ , θ และ ψ เรียกว่ามุมของออยเลอร์ (Eulerian angles) มุม ϕ เกิดจากการหมุนแกน x มายังแกน z ซึ่งมีชื่ออีกชื่อหนึ่งว่า line of nodes มุม θ เกิดจากการหมุนรอบ line of nodes ไปยังแกน z ส่วนมุม ψ นั้นเกิดจากการหมุนจาก line of nodes ไปยังแกน ζ เพื่อให้สะดวกในการพิจารณาจึงลากแกนขึ้นอีกชุดหนึ่ง โดยมี line of nodes เป็น

แกน ϵ แกน η ตั้งฉากกับแกน ϵ และแกน ζ ทั้กับแกน 3 พอดี แกนที่ 1, 2 และ 3 คือ แกนमुखสำคัญ (principle axes) แกนमुखสำคัญก็คือแกนซึ่งเมื่อวัตถุทรงตันหมุนรอบแกนนั้น โมเมนตัมเชิงมุมจะอยู่ในทิศเดียวกับความเร็วเชิงมุม (angular velocity) ในกรณีที่เราพิจารณาแกนमुखสำคัญเป็นหลัก เราอาจจะเขียนพลังงานจลน์ได้ดังนี้

$$T = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) \quad (2-66)$$

จากรูปที่ (2-6) จะเห็นว่า

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \omega_\epsilon \cos \psi + \omega_\eta \sin \psi \\ \omega_2 &= -\omega_\epsilon \sin \psi + \omega_\eta \cos \psi \\ \omega_3 &= \dot{\psi} \end{aligned} \right\} \quad (2-67)$$

โดยที่ ω_ϵ , ω_η และ ω_ζ คือ ความเร็วเชิงมุมในทิศ ϵ , η และ ζ ตามลำดับ เราอาจจะเปลี่ยน ω_ϵ , ω_η และ ω_ζ ให้อยู่ในรูปของมุมของออยเลอร์ได้ดังนี้ (ดูรูปที่ 2-6)

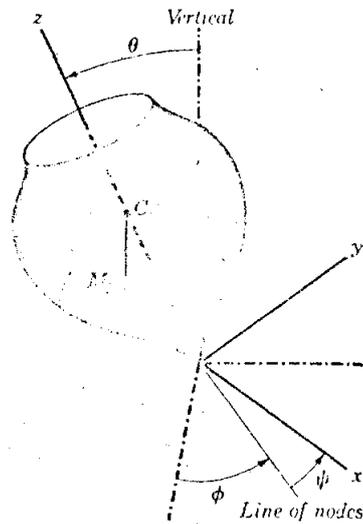
$$\left. \begin{aligned} \omega_\epsilon &= \dot{\theta} \\ \omega_\eta &= \dot{\phi} \sin \theta \\ \omega_\zeta &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (2-68)$$

แทนค่าสมการชุด (2-68) ลงในสมการชุด (2-67) ได้ผลลัพธ์เป็น

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \\ \omega_2 &= -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \\ \omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (2-69)$$

แทนค่าสมการชุดที่ (2-69) ลงใน (2-66) ได้พลังงานจลน์ในรูปมุมของออยเลอร์ดังนี้

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} [I_1 (\dot{\theta}^2 \cos^2 \psi + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \sin^2 \psi + 2\dot{\theta}\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \sin \psi) \\ &+ I_2 (\dot{\theta}^2 \sin^2 \psi + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \cos^2 \psi - 2\dot{\theta}\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \sin \psi) \\ &+ I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2] \quad (2-70) \end{aligned}$$



รูปที่ (2-7) การใช้มุมของออยเลอร์บอกการเอียงของลูกข่างที่สมมาตร

ถ้าหากเราพิจารณาปัญหาเฉพาะเช่นปัญหาของลูกข่างจะเห็นว่าแกนमुखสำคัญ 1 และ 2 อาจสลับที่กันได้

ดังนั้น $I_1 = I_2$ (2-71)

แทนค่าสมการที่ (2-71) ลงในสมการที่ (2-70) ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$T = \frac{1}{2} [I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2] \quad (2-72)$$

จะเห็นว่าพลังงานศักย์อาจจะเขียนได้ดังนี้

$$V = Mg l \cos \theta$$

ดังนั้น Lagrangian ในปัญหาของลูกข่างจึงเขียนได้ว่า

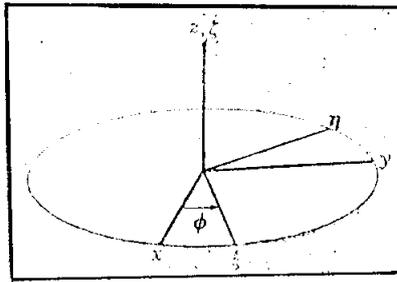
$$L = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - Mg l \cos \theta \quad (2-73)$$

จะเห็นว่า ไม่มีตัวแปร ϕ และ ψ ในสมการที่ (2-73) คงมีแต่ $\dot{\phi}$ และ $\dot{\psi}$

ดังนั้น โมเมนตัมเชิงมุม L_ψ และ L_ϕ ไม่ขึ้นกับเวลา สมการการเคลื่อนที่ จะเขียนได้ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} &= \frac{d}{dt} [I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \cos \theta] = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \frac{d}{dt} (I_1 \dot{\theta}) + I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \sin \theta - Mgl \sin \theta \\ &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial L}{\partial \psi} &= \frac{d}{dt} [I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)] = 0 \end{aligned} \right\} (2-74)$$

คุณสมบัติที่สำคัญประการหนึ่งของการใช้มุมของออยเลอร์เป็นตัวแปรแสดงการหมุนของทรงตันก็คือ การที่สามารถแปลง 3×3 แมทริกซ์ ซึ่งแสดงการหมุนจากตัวแปรซึ่งอยู่ในรูปของมุมของออยเลอร์ให้เป็น 2×2 แมทริกซ์ ซึ่งมีองค์ประกอบเป็นตัวแปรเคเลย์-ไคลน์ (Cayley-Klein parameters) ซึ่งจะแสดงดังต่อไปนี้



รูปที่ (2-8) การหมุนรอบแกน z เป็นมุม ϕ

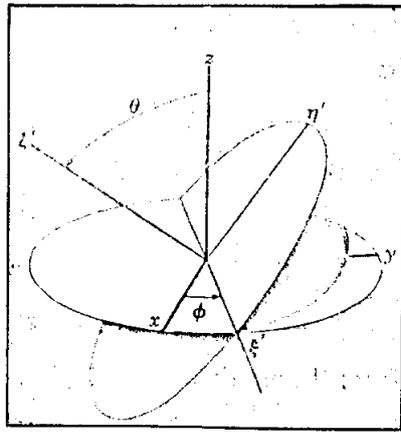
สมมติว่าเดิมพิกัดที่ใช้คือ x, y และ z ต่อมาเราหมุนรอบแกน z ไปสู่พิกัด ϵ, η และ ζ โดยที่มุมระหว่างแกน x กับแกน ϵ คือมุม ϕ สมมติว่ามีเวกเตอร์ตัวหนึ่ง คือ เวกเตอร์ \bar{r} ในพิกัด x, y และ z ให้แมทริกซ์ที่แทนการหมุนครั้งนี้คือ แมทริกซ์ \underline{D} จะเห็นว่า

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-75)$$

ให้ \underline{D} ทำให้ \bar{r} ปรากฏในพิกัด ϵ, η และ ζ ดังนี้

$$\bar{p} = \underline{D} \cdot \bar{r} \quad (2-76)$$

\bar{p} เป็นเวกเตอร์ \bar{r} ในพิกัด ϵ, η และ ζ ต่อมาเราหมุนรอบแกน ϵ ไปเป็นมุม θ พิกัดใหม่เนื่องจากการหมุนนี้ก็คือพิกัด ϵ', η' และ ζ' แมทริกซ์ ที่แทนการหมุนการหมุนในครั้งนี้ก็คือ



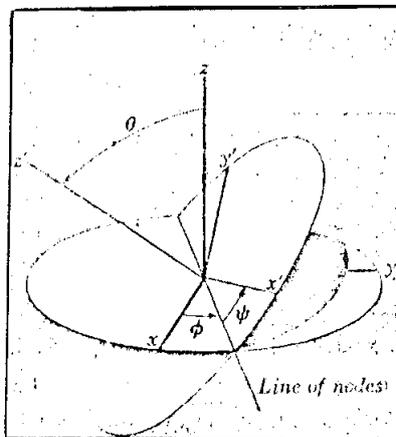
รูปที่ (2-9) การหมุนรอบแกน z ไปเป็นมุม θ

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2-77)$$

เวกเตอร์ \vec{p} จากสมการ (2-76) จะกลายเป็นเวกเตอร์ใหม่ดังนี้

$$\vec{q} = \underline{C} \cdot \vec{p} \quad (2-78)$$

ในขั้นต่อไปเราหมุนรอบแกน z' ไปเป็นมุม ψ แกนที่ใช้ใหม่คือแกน x', y' และ z' โดยที่แกน z' ซ้อนกับแกน z' แกน e' เดิม คือ line of nodes



รูปที่ (2-10) การหมุนรอบแกน z' หรือ z' เป็นมุม ψ

แกน x', y' และ z' คือ แกน 1, 2 และ 3 ของรูปที่ (2-6) แมทริกซ์ ที่แทนการหมุนคราวนี้ก็คือ

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-79)$$

และเวกเตอร์ $\underline{\underline{q}}$ จากสมการ (2-78) จะกลายเป็นเวกเตอร์ $\underline{\underline{r}}'$ ดังนี้

$$\underline{\underline{r}}' = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{q}} \quad (2-80)$$

จากสมการ (2-76), (2-78) และ (2-80) เราจะเขียน $\underline{\underline{r}}'$ ได้ใหม่ดังนี้

$$\underline{\underline{r}}' = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{r}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{r}} \quad (2-81)$$

โดยที่

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{D}} \quad (2-82)$$

เมื่อคูณเมทริกซ์ออกมาจะได้

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2-83)$$

การใช้ 2×2 เมทริกซ์แทนการหมุนทำได้วิธีหนึ่งโดยการเขียนเวกเตอร์

$\underline{\underline{r}} = (x, y, z)$ ในรูปของตัวดำเนินการ 2×2 เมทริกซ์ ดังนี้

$$\underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{bmatrix} \quad (2-84)$$

ถ้าหากเราแปลงรูป $\underline{\underline{Q}}$ เป็น $\underline{\underline{Q}}'$ โดยใช้สมการ

$$\underline{\underline{Q}}' = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}}^* \quad (2-85)$$

โดยที่ $\underline{\underline{Q}}$ เป็นยูนิทารีเมทริกซ์ (Unitary matrix) และ

$$\underline{\underline{Q}}' = \begin{bmatrix} z' & x'-iy' \\ x'+iy' & -z' \end{bmatrix} \quad (2-86)$$

ให้

$$\underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \quad (2-87)$$

q_{ij} เป็นตัวแปรเชิงซ้อน ดังนั้น จำนวนตัวแปรจริง ๆ ของเมทริกซ์ $\underline{\underline{Q}}$ จะมีอยู่แปดตัว เมทริกซ์ $\underline{\underline{Q}}$ ซึ่งแปลงรูปตัวดำเนินการ $\underline{\underline{Q}}$ เป็นตัวดำเนินการ $\underline{\underline{Q}}'$ ได้ในลักษณะนี้เป็นเมทริกซ์ซึ่งแทนการหมุนในสามมิติของเวกเตอร์ซึ่งมีองค์ประกอบเป็นเลขเชิงซ้อน สมมติว่า (u, v) เป็นเวกเตอร์ในสองมิติซึ่งมีองค์ประกอบ u และ v เป็นตัวแปรเชิงซ้อน $\underline{\underline{R}}$ เป็นเมทริกซ์ซึ่งหมุนเวกเตอร์ (u, v) ไปเป็นเวกเตอร์ (u', v') โดยที่

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \quad (2-88)$$

และ

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (2-89)$$

r_{ij} เป็นตัวแปรเชิงซ้อน ถ้าหากเราจะพิจารณาเฉพาะการหมุนซึ่งทำให้

$$\begin{aligned} |u|^2 + |v|^2 &= uu^* + vv^* = |u'|^2 + |v'|^2 \\ &= u'u'^* + v'v'^* \end{aligned} \quad (2-90)$$

เมทริกซ์ \underline{R} จะต้องเป็นยูนิทารีเมทริกซ์ จากคุณสมบัติของยูนิทารีเมทริกซ์ที่ว่า

$$\underline{R} \cdot \underline{R}^* = \underline{R}^* \cdot \underline{R} = \underline{I} \quad (2-91)$$

จะเห็นว่า

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11}^* & r_{21}^* \\ r_{12}^* & r_{22}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-91)'$$

สมการที่ (2-91)' เขียนเป็นสมการย่อยได้ดังนี้

$$r_{11}r_{11}^* + r_{12}r_{12}^* = 1 \quad (2-92a)$$

$$r_{11}r_{21}^* + r_{12}r_{22}^* = 0 \quad (2-92b)$$

$$r_{21}r_{11}^* + r_{22}r_{12}^* = 0 \quad (2-92c)$$

$$r_{21}r_{21}^* + r_{22}r_{22}^* = 1 \quad (2-92d)$$

สมการที่ (2-92c) เป็นสังยุคเชิงซ้อนของสมการที่ (2-92b) สมการชุด (2-92a, b, c และ d) ลดตัวแปรอิสระในเมทริกซ์ \underline{R} จาก 8 ตัวเหลือ 4 ตัว และถ้าหากเราเพิ่มข้อบังคับอีกข้อหนึ่งว่า

$$\det \underline{R} = +1 \quad (2-93)$$

จำนวนตัวแปรอิสระของเมทริกซ์ \underline{R} จะเหลือเพียง 3 ตัวแปร 2×2 ยูนิทารี เมทริกซ์ชนิดนี้เป็นกรุป มีชื่อเรียกว่า unitary unimodular group หรือ special unitary group มีสัญลักษณ์แทนว่า $SU(2)$ เราอาจจะหาเมทริกซ์ทั่วไปของ $SU(2)$ ได้ดังนี้ จากสมการที่ (2-92b)

$$\frac{r_{11}}{r_{12}} = -\frac{r_{22}^*}{r_{21}^*} \quad (2-94)$$

จากสมการที่ (2-93)

$$\det \underline{R} = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{เขียนได้ว่า } r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21} = 1 \quad (2-93)'$$

แทนค่าสมการที่ (2-94) ลงในสมการที่ (2-93)'

$$-\frac{r_{12}}{r_{21}} r_{22}^* r_{22} - r_{12}r_{21} = 1$$

$$-\frac{r_{12}}{r_{21}} |r_{22}^* r_{22} + r_{21}r_{21}| = 1 \quad (2-95)$$

เนื่องจากเทอมในวงเล็บของสมการที่ (2-95) เท่ากับหนึ่งตามสมการที่ (2-92d) ดังนั้น

$$r_{12} = -r_{21}^* \quad (2-96)$$

จากสมการที่ (2-94) แทนด้วยสมการ (2-96) ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$r_{11} = r_{22}^* \quad (2-97)$$

ดังนั้น เมทริกซ์ทั่วไปของ SU(2) อาจจะเขียนได้ว่า

$$\underline{R}_{\text{SU}(2)} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ -r_{12}^* & r_{11}^* \end{bmatrix} \quad (2-98)$$

$$\text{โดยที่ } r_{11}r_{11}^* + r_{12}r_{12}^* = 1 \quad (2-99)$$

ในการหมุนจากพิกัด x, y และ z ไปสู่พิกัด e, η และ ζ โดยหมุนรอบแกน z เป็นมุม ϕ ในสมการที่ (2-76) เราได้ความสัมพันธ์ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

ซึ่งเขียนเป็นสมการเชิงเส้นได้ว่า

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \cos \phi x + \sin \phi y \\ p_y &= -\sin \phi x + \cos \phi y \\ p_z &= z \end{aligned} \right\} \quad (2-100)$$

สมมติว่า \underline{Q}_ϕ เป็น 2×2 เมทริกซ์ซึ่งแทนการหมุนเดียวกันกับเมทริกซ์ \underline{D} เราอาจจะเขียนสมการ (2-85) เสียใหม่ได้ดังนี้

$$\underline{Q}_p = \underline{Q}_\phi \cdot \underline{Q} \cdot \underline{Q}_\phi^* \quad (2-101)$$

$$\text{โดยที่ } \underline{Q}_p = \begin{bmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{bmatrix} \quad (2-102)$$

$$\text{และ} \quad \underline{Q}_\phi = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \quad (2-103)$$

แต่จากสมการที่ (2-98) เราอาจจะเขียน \underline{Q}_ϕ ได้ดังนี้

$$\underline{Q}_\phi = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ -q_{12}^* & q_{11}^* \end{bmatrix} \quad (2-104)$$

เนื่องจาก $\det \underline{Q}_\phi = +1$ ตามสมการที่ (2-99) ดังนั้น

$$q_{11}q_{11}^* + q_{12}q_{12}^* = 1 \quad (2-105)$$

$$\text{และ} \quad \underline{Q}_\phi^* = \begin{bmatrix} q_{11}^* & -q_{12} \\ q_{12}^* & q_{11} \end{bmatrix} \quad (2-106)$$

แทนค่า \underline{Q} จากสมการที่ (2-84) \underline{Q}_ϕ จากสมการที่ (2-104) และ \underline{Q}_ϕ^* จากสมการที่ (2-106) ลงในสมการ (2-101)

$$\begin{bmatrix} p_x & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ -q_{12}^* & q_{11}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11}^* & -q_{12} \\ q_{12}^* & q_{11} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} q_{11}q_{11}^*(z) + q_{11}q_{12}^*(x - iy) \\ + q_{11}q_{12}(x + iy) - q_{12}q_{12}^*(z) \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{l} -q_{11}q_{12}(z) + q_{11}^2(x - iy) \\ q_{12}^2(x + iy) - q_{11}q_{12}(z) \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} -q_{11}q_{12}^*(z) - q_{12}^2(x - iy) \\ + (q_{11}^*)^2(x + iy) - q_{11}q_{12}^*(z) \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{l} + q_{12}q_{12}^*(z) - q_{11}q_{12}^*(x - iy) \\ - q_{11}q_{12}(x + iy) - q_{11}q_{11}^*(z) \end{array} \right\} \end{bmatrix} \quad (2-107)$$

นั่นก็คือ

$$p_x = q_{11}q_{11}^*(z) + q_{11}q_{12}^*(x - iy) + q_{11}q_{12}(x + iy) - q_{12}q_{12}^*(z) \quad (2-107a)$$

$$= -q_{12}q_{12}^*(z) + q_{11}q_{12}^*(x - iy) + q_{11}q_{12}(x + iy) + q_{11}^2q_{11}(z) \quad (2-107b)$$

$$p_x - ip_y = -q_{11}q_{12}(z) + q_{11}^2(x - iy) - q_{12}^2(x + iy) - q_{11}q_{12}(z) \quad (2-107c)$$

$$p_x + ip_y = -q_{11}q_{12}^*(z) - (q_{12}^*)^2(x - iy) + (q_{11}^*)^2(x + iy) - q_{11}q_{12}^*(z) \quad (2-107d)$$

จากสมการที่ (2-100)

$$p_x - ip_y = (x - iy)e^{i\phi} \quad (2-108a)$$

$$p_x + ip_y = (x + iy)e^{-i\phi} \quad (2-108b)$$

$$p_x = z \quad (2-108c)$$

จากสมการ (2-107a) และ (2-108c) จะเห็นว่า

$$|q_{11}|^2 - |q_{12}|^2 = 1 \quad (2-109a)$$

$$q_{11}q_{12}^* = q_{11}^*q_{12} = 0 \quad (2-109b)$$

เราอาจจะเลือกค่าซึ่งทำให้สมการ (2-109a) และ (2-109b) เป็นจริงได้ชุดหนึ่ง คือ กำหนดให้

$$q_{12} = 0 \quad (2-110a)$$

$$q_{11} = e^{i\phi/2} \quad (2-110b)$$

ซึ่งจะสังเกตเห็นได้ว่า สมการ (2-110a) และ (2-110b) ทำให้สมการ (2-107c) กลายเป็นสมการที่ (2-108a) และสมการ (2-107d) เป็นสมการ (2-108b) แสดงว่ารูปหนึ่งของแมทริกซ์ \underline{Q}_ϕ ก็คือ

$$\underline{Q}_\phi = \begin{bmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{bmatrix} \quad (2-111)$$

แมทริกซ์ \underline{Q}_ϕ นี้เป็น 2×2 แมทริกซ์ ในยูนิทารีสเปซ ซึ่งให้ผลเหมือนกับ 3×3 แมทริกซ์ \underline{D}

โดยทำนองเดียวกันในการหมุนรอบแกน z เป็นมุม θ โดยใช้ 3×3 แมทริกซ์ \underline{C} เราอาจจะสร้าง 2×2 ยูนิทรีแมทริกซ์ \underline{Q}_θ ขึ้นเพื่อทำการหมุนใน 2×2 ยูนิทารีสเปซให้ได้ผลเหมือนกัน จากสมการที่ (2-78) จะเห็นว่า

$$\underline{q} = \underline{C} \cdot \underline{p} \quad \text{หรือ}$$

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad (2-78)$$

เราอาจจะเขียนสมการ 2×2 แมทริกซ์ ในยูนิทารีสเปซขึ้นโดยทำนองเดียวกัน คือ

$$\underline{Q}_q = \underline{Q}_\theta \cdot \underline{Q}_p \cdot \underline{Q}_\theta^* \quad (2-112)$$

โดยที่

$$\underline{Q}_q = \begin{bmatrix} q_z & q_x - iq_y \\ q_x + iq_y & -q_z \end{bmatrix} \quad (2-113)$$

ส่วน \underline{Q}_p นั้น ได้ให้คำจำกัดความไว้ในสมการที่ (2-102) ถ้าหากเราใช้วิธีเดียวกันกับการหา \underline{Q}_ϕ เราอาจจะหา \underline{Q}_θ ได้ดังนี้

$$\underline{Q}_\theta = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (2-114)$$

การหมุนขั้นสุดท้ายคือ การหมุนรอบแกน x ไปเป็นมุม ψ แมทริกซ์ที่แทนการหมุน คือ แมทริกซ์ \underline{B} ในสมการที่ (2-79) โดยที่

$$\underline{\bar{r}}' = \underline{B} \cdot \underline{\bar{q}} \quad \text{หรือ}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} \quad (2-79)'$$

เราอาจจะเขียนสมการ 2×2 แมททริกซ์ ในยูนิทารีสเปซขึ้นโดยทำนองเดียวกัน

คือ

$$\underline{O}' = \underline{Q}_\psi \cdot \underline{Q}_\phi \cdot \underline{Q}_\psi^* \quad (2-115)$$

โดยที่

$$\underline{O}' = \begin{bmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{bmatrix} \quad (2-116)$$

และเราอาจจะหาแมททริกซ์ \underline{Q}_ψ ได้เหมือนกับการหาแมททริกซ์ \underline{Q}_ϕ ดังนี้

$$\underline{Q}_\psi = \begin{bmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{bmatrix} \quad (2-117)$$

ในสมการที่ (2-82) เราได้แมททริกซ์ \underline{A} ซึ่งเกิดจากการคูณกันของแมททริกซ์ \underline{B} , \underline{C} และ \underline{D} โดยที่

$$\underline{A} = \underline{B} \cdot \underline{C} \cdot \underline{D} ; \quad \underline{\bar{r}}' = \underline{A} \cdot \underline{\bar{r}}$$

โดยทำนองเดียวกันเราอาจจะหาแมททริกซ์ \underline{Q} ซึ่งทำให้

$$\underline{O}' = \underline{Q} \cdot \underline{O} \cdot \underline{Q}^* \quad (2-118)$$

ซึ่ง

$$\begin{aligned} \underline{Q} &= \underline{Q}_\psi \cdot \underline{Q}_\phi \cdot \underline{Q}_\psi^* \\ &= \begin{bmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{i(\psi+\phi)/2} \cos \frac{\theta}{2} & ie^{i(\psi-\phi)} \sin \frac{\theta}{2} \\ ie^{-i(\psi-\phi)/2} \sin \frac{\theta}{2} & e^{-i(\psi+\phi)/2} \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (2-119) \end{aligned}$$

เป็นที่น่าสังเกตว่าตัวดำเนินการ \underline{O} อาจจะเขียนเสียใหม่ในรูป

$$\underline{O} = x \underline{\sigma}_x + y \underline{\sigma}_y + z \underline{\sigma}_z \quad (2-120)$$

$$\underline{\sigma}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-121)$$

$$\underline{\sigma}_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad (2-122)$$

$$\underline{\sigma}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2-123)$$

$\underline{\sigma}_x$, $\underline{\sigma}_y$ และ $\underline{\sigma}_z$ คือสปินแมทริกซ์ของพอลลี ถ้าหากนับไอเดนติตี้ คือ

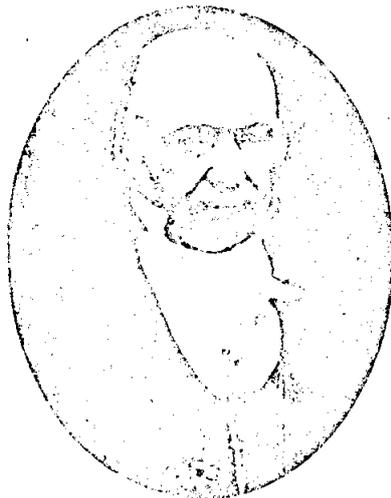
$$\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-124)$$

รวมเข้าด้วยกัน แมทริกซ์ทั้งสี่จะเป็นอิสระเชิงเส้นแก่กัน 2×2 แมทริกซ์ใด ๆ อาจจะเขียนให้อยู่ในรูปของผลบวกของค่าคงที่คูณกับแมทริกซ์ทั้งสี่นี้ พูดอีกนัยหนึ่งแมทริกซ์ทั้งสี่ทำหน้าที่เป็นฐาน (basis) ของ SU(2) นอกจากนี้แมทริกซ์ เช่น \underline{Q}_θ ซึ่งแทนการหมุนรอบแกน x อาจจะเขียนได้ว่า

$$\underline{Q}_\theta = \underline{I} \cos \frac{\theta}{2} + i \underline{\sigma}_x \sin \frac{\theta}{2} \quad (2-125)$$

\underline{Q}_θ และ \underline{Q}_ψ อาจจะเขียนให้มีเทอมซึ่งเกี่ยวกับ σ_z และ σ_y ตามลำดับ ดังนั้น สปินแมทริกซ์ของพอลลีอาจจะเทียบได้ว่า เป็นตัวหมุนซึ่งมีขนาดเป็นหนึ่ง (unit rotator) รอบแกนซึ่งสอดคล้องกับแมทริกซ์นั้น ๆ เช่น $\underline{\sigma}_x$ ก็แทนตัวหมุนซึ่งมีขนาดเป็นหนึ่งรอบแกน x ฯลฯ คุณสมบัตินี้ทำให้มีการคิดค้นการใช้สปินแมทริกซ์ชุดนี้ในกลศาสตร์ควอนตัม

2.4 สมการของแฮมมิลตัน (Hamilton's Equations)



รูปที่ (2-11)

Sir William Rowan Hamilton ผู้คิดค้นฟังก์ชันแฮมมิลโทเนียน

ในทางประวัติศาสตร์เนื่องจากสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคซึ่งได้จากสมการของลากรานจ์ เป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียลอันดับสอง แอมมิลตันจึงพัฒนาสมการของแอมมิลตันขึ้นเพื่อให้ได้สมการการเคลื่อนที่เป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียลอันดับหนึ่งในปัจจุบันการแปลงสมการจากกลศาสตร์แบบฉบับเป็นกลศาสตร์ควอนตัม หากใช้ Lagrangian ก็จะต้องผ่านขบวนการทางคณิตศาสตร์ซึ่งซับซ้อนกว่าแอมมิลโทเนียน ทั้งในบางโอกาส เราอาจจะใช้แอมมิลโทเนียนเป็นตัวดำเนินการซึ่งมีค่าเท่ากับพลังงานของระบบ ทำให้เกิดความสะดวกกว่าการใช้ Lagrangian

แอมมิลตันได้สังเกตเห็นว่า ถ้าหากเราใช้โมเมนตัมเป็นพิกัดอิสระเหมือนกับใช้ระยะทางหรือมุม สมการการเคลื่อนที่ซึ่งเคยเป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียลอันดับสอง จะกลายเป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียลอันดับหนึ่ง ดังนั้น เขาจึงเลือกพิกัดขั้นชุดหนึ่งคือ

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (2-126)$$

p_i มีชื่อเรียกว่า โมเมนตัมทั่วไป (generalized momentum) โดยที่

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\dot{\vec{r}}_i)^2 - V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) \quad (2-127)$$

พิกัดที่ใช้เป็นพิกัดฉาก จะเห็นว่าระบบฟิสิกส์ที่เราพิจารณาอยู่เมื่อเราใช้โมเมนตัมทั่วไป จะมีตัวแปร p_i และ q_i เป็นคู่ ๆ ตัวแปรเหล่านี้มีชื่อเรียกว่า ตัวแปรบังคับรูป (canonical variables) เราอาจจะให้คำนิยามฟังก์ชันแอมมิลโทเนียนได้ดังนี้

$$H = \sum_{i=1}^{3N} (p_i \dot{q}_i) - L \quad (2-128)$$

โดยที่ $H = H(q_i, p_i, t)$ จะสังเกตเห็นว่า H ไม่ใช่ฟังก์ชันของ \dot{q}_i เหตุที่เป็นดังนี้เพราะเราได้กำจัด \dot{q}_i ออกไปโดยใช้ความสัมพันธ์

$$\dot{q}_i = \frac{p_i}{m_i} \quad (2-129)$$

จะเห็นว่าเราอาจจะเขียนดิฟเฟอเรนเชียลของแอมมิลโทเนียนได้ดังนี้

$$dH = \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (2-130)$$

แต่จากสมการที่ (2-128) เราอาจจะหาดิฟเฟอเรนเชียลได้โดยทำนองเดียวกัน

$$dH = \sum_{i=1}^{3N} \left(p_i dq_i + q_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (2-131)$$

จากสมการที่ (2-126) จะเห็นว่าเทอมที่หนึ่งกับเทอมที่สองของสมการ (2-131) หักล้างกันหมดพอดี ดังนั้น

$$dH = \sum_i (\dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (2-132)$$

เปรียบเทียบสมการที่ (2-130) กับ (2-132) จะเห็นว่า

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = - \frac{\partial L}{\partial q_i} = - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = - \dot{p}_i \quad (2-133a)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad (2-133b)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t} \quad (2-133c)$$

สมการที่ (2-133a), (2-133b) และ (2-133c) มีชื่อเรียกว่า สมการของแฮมมิลตัน หรือ สมการบังคับรูป (canonical equations) ของการเคลื่อนที่ ฟังก์ชันเกิดว่า

(1) จากสมการที่ (2-130), (2-133a) และ (2-133b)

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

ดังนั้น ถ้าหากว่า H ไม่ใช่ฟังก์ชันของเวลาอย่างแจ่มชัด เช่น H ของระบบอนุรักษ์ H จะเป็นค่าคงที่สำหรับการเคลื่อนที่นั้น

(2) ถ้าหากในระบบการเคลื่อนที่นั้นพิถีพิถันไปไม่ได้เป็นฟังก์ชันของเวลาโดยแจ่มชัดแล้ว เราอาจจะเขียนพลังงานจลน์ได้ดังนี้

$$T = \sum_{ij} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad \text{โดยที่ } a_{ij} = a_{ji} \quad (2-134)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} &= \sum_{ij} a_{ij} \dot{q}_i \delta_{jk} + \sum_{ij} a_{ij} \dot{q}_j \delta_{ik} \\ &= \sum_i a_{ik} \dot{q}_i + \sum_j a_{kj} \dot{q}_j \end{aligned}$$

แต่เนื่องจาก i และ j เป็นเลขดัชนี เปลี่ยน j เป็น i

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2 \sum_i a_{ik} \dot{q}_i$$

$$\therefore \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2 \sum_{i,k} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = 2T \quad (2-135)$$

และถ้าหากระบบที่เราพิจารณาคือระบบอนุรักษด้วยแล้ว

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = p_k$$

$$\therefore \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_k \dot{q}_k p_k \quad (2-136)$$

เราอาจจะหา H ในระบบอนุรักษได้ดังนี้

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

$$= 2T - T + V = T + V \quad (2-137)$$

$$= \text{พลังงานทั้งหมดของระบบ}$$

แฮมมิลโทเนียนจากกลศาสตร์แบบฉบับอาจจะดัดแปลงให้เป็นตัวดำเนินการที่ใช้ในกลศาสตร์ควอนตัมได้ทันที

2.5 วงเล็บของปัวซอง (Poisson Brackets)

วิธีทางคณิตศาสตร์อีกอย่างหนึ่งซึ่งมีบทบาทอย่างมากในการแปลงกลศาสตร์แบบฉบับให้เป็นกลศาสตร์ควอนตัม คือ วงเล็บของปัวซอง ซึ่งเราอาจจะให้คำนิยามได้ดังนี้ ถ้าหาก F และ G เป็นฟังก์ชันของตัวแปรบังคับรูปแล้ว วงเล็บของปัวซองก็คือ

$$\{F, G\} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) \quad (2-138)$$

ในกลศาสตร์แบบฉบับเรามีการประยุกต์ที่สำคัญของวงเล็บของปัวซอง เช่น ถ้า D เป็นฟังก์ชันของพิกัดทั่วไป โมเมนตัมทั่วไปและเวลาแล้ว

$$\frac{d}{dt} D = \frac{\partial D}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial D}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial D}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) \quad (2-139)$$

แทนค่า \dot{p}_i และ \dot{q}_i โดยใช้สมการที่ (2-133a) และ (2-133b) ได้ผลลัพธ์เป็น

$$\frac{d}{dt} D = \frac{\partial D}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial D}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial D}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$$

$$= \frac{\partial D}{\partial t} + \{D, H\} \quad (2-140)$$

เมื่อ H คือ แฮมมิลโทเนียนของระบบที่เรากำลังพิจารณา ถ้าหาก $D = q_i$ จะเห็นว่า

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

และถ้า $D = p_i$ เราก็จะได้สมการการเคลื่อนที่ของแฮมิลตันอีกสมการหนึ่ง คือ

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

และถ้า D เป็นค่าคงที่ของการเคลื่อนที่

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\{D, H\} \quad (2-141)$$

ความสัมพันธ์ที่สำคัญของวงเล็บของปัวซองอาจจะเขียนได้ดังนี้

1. $\{F, F\} = 0$
2. $\{F, C\} = 0$ ถ้า C เป็นค่าคงที่
3. $\{F, G\} = -\{G, F\}$
4. $\{E+F, G\} = \{E, G\} + \{F, G\}$
5. $\{E, FG\} = F\{E, G\} + \{E, F\}G$
6. $\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$
7. $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$
8. $\{E, \{F, G\}\} + \{F, \{G, E\}\} + \{G, \{E, F\}\} = 0$

ความสัมพันธ์เหล่านี้อาจจะพิสูจน์ได้จากนิยามของวงเล็บของปัวซอง

2.6 สรุป

extremal problem คือปัญหาทางคณิตศาสตร์ซึ่งว่าด้วยค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดของอินทิกรัล ถ้าหากเราหาค่าต่ำสุดของอินทิกรัลซึ่งมีอินทิแกรนด์เป็น Lagrangian เราจะได้สมการของลากรานจ์

ทฤษฎี: สมการการเคลื่อนที่ของลากรานจ์จะไม่เปลี่ยนรูปร่างเมื่อพิกัดเปลี่ยนไป คุณสมบัติที่สำคัญประการหนึ่งของการที่ใช้มุมของออยเลอร์เป็นตัวแปรแสดงการหมุนของรูปทรงตันก็คือ การที่สามารถแปลง 3×3 แมทริกซ์ ซึ่งแทนการหมุนจากตัวแปรซึ่งมีองค์ประกอบ (matrix elements) ในรูปของมุมของออยเลอร์ให้เป็น 2×2 แมทริกซ์ซึ่งมีองค์ประกอบเป็นตัวแปรของเคเลย์-ไคลน์ (Cayley-Klein parameters) องค์ประกอบของ 2×2 แมทริกซ์ที่กล่าวถึงนี้เป็นตัวแปรเชิงซ้อน ได้แสดงให้เห็นว่า 2×2 แมทริกซ์ที่แทนการหมุนนี้เป็นยูนิทารีแมทริกซ์เป็น element ของกรุปซึ่งมีชื่อว่า unitary unimodular group หรือ special unitary group มีสัญลักษณ์คือ SU(2)

ถ้า H เป็นฟังก์ชันแฮมมิลโทเนียนแล้ว

$$H = \sum_{i=1}^{3N} (p_i \dot{q}_i) - L \quad (2-128)$$

โดยที่สมการของแฮมมิลตันหรือสมการบังคับรูปของการเคลื่อนที่ก็คือ

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -p_i \quad (2-133a)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad (2-133b)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (2-133c)$$

ในระบบอนุภาค $H = T + V = E \quad (2-137)$

ถ้า $F = F(p_i, q_i)$

$G = G(p_i, q_i)$ แล้ว เราอาจจะเขียนวงเล็บของปัวซองได้ดังนี้

$$\{F, G\} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) \quad (2-138)$$

และถ้า $D = D(p_i, q_i)$ แล้ว

$$\frac{d}{dt} D = \frac{\partial D}{\partial t} + \{D, H\} \quad (2-140)$$

โดยที่ H คือแฮมมิลโทเนียนของระบบที่เราพิจารณา

2.7 คำถามท้ายบท

1. extremal problem คืออะไร มีความสัมพันธ์กับสมการของออยเลอร์-ลากรานจ์ อย่างไร?
2. จงแสดงว่าสมการการเคลื่อนที่ของลากรานจ์จะไม่เปลี่ยนรูปร่างเมื่อพิกัดเปลี่ยนไป
3. ตัวแปรของเคเลย์-โคลน์ คืออะไร? มีความสำคัญอย่างไร?
4. จงเขียนภาพแสดงมุมของออยเลอร์?
5. จงเขียนแฮมมิลโทเนียนและสมการของแฮมมิลตัน
6. จงเขียนสมการการเคลื่อนที่ในรูปของวงเล็บของปัวซอง

แบบฝึกหัดบทที่ 2

1. ถ้าหาก $L = L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$ จงหาสมการของลากรางจ์
2. ถ้าหาก $L = \frac{1}{2} m_1(\dot{r}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2(\dot{r}_2)^2 - V(r_1, r_2)$ จงหาสมการการเคลื่อนที่
3. ถ้าหาก $L = \frac{1}{2} m(\dot{r})^2 - \frac{k}{r}$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่ จงหา
 - (ก) สมการของแฮมิลตัน
 - (ข) จงแสดงว่าโมเมนตัมเชิงมุมเป็นค่าคงที่สำหรับระบบที่เราพิจารณา
4. จงอธิบายถึงการเคลื่อนที่ของอนุภาคซึ่งมีมวล m มีประจุ Q ในสนามไฟฟ้าซึ่งมีค่าคงที่ \vec{E}
5. จงหาสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคซึ่งมีมวล m เคลื่อนที่ไปตามแนวแกน x สมมติว่าพลังงานศักย์ทางไฟฟ้าของระบบ คือ $-eFx$ เมื่อ e คือประจุ ที่จุดกำเนิดมีประจุ $-e$ วางอยู่ ประจุทั้งสองต่อกันด้วยสปริงซึ่งมีค่าคงที่ k (F เป็นสนามไฟฟ้าซึ่งมีค่าคงที่)
6. จงเขียนพลังงานจลน์ของอนุภาค γ หนึ่งในพิกัดทรงกระบอกแล้วหาสมการการเคลื่อนที่ ถ้าหากพลังงานศักย์ขึ้นอยู่กับรัศมีจากแกน z ถึงอนุภาคนั้นเท่านั้น
7. จงใช้พิกัดทรงกลมเขียนสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคอิสระแล้วอธิบายถึงผลที่ได้รับ
8. จงเขียน Lagrangian ของอนุภาคซึ่งมีประจุ Q เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว \vec{v} ในสนามแม่เหล็ก \vec{B} และสนามไฟฟ้า \vec{E}
9. จงหา \underline{Q}_θ และ \underline{Q}_ψ (สมการที่ 2-114 และ 2-117)
10. จงเขียนเมทริกซ์ซึ่งแสดงการหมุนรอบแกน y ในรูปของสปินเมทริกซ์ของพอลลี
11. จงพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้
 - ก. $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$
 - ข. $\{E, \{F, G\}\} + \{F, \{G, E\}\} + \{G, \{E, F\}\} = 0$