บทที่ 4
การเคลื่อนที่ของอนุภาคในสนามซึ่งมีทิศเข้าสู่ศูนย์กลาง

4.1 ฟังก์ชันคลื่นในพิกัดทรงกลม

สำหรับในกรณีของสนามซึ่งมีทิศเข้าสู่ศูนย์กลางนี้ สมการชโรดิงเจอร์อาจจะเขียนได้ดังนี้

$$H\Psi = E\Psi \tag{4-1}$$

$$H = \frac{p^2}{2m_0} + V(r) \tag{4-2}$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2 + V(r)\right)\Psi = E\Psi$$

$$\nabla^2\Psi + k^2(r)\Psi = 0 \tag{4-3}$$

$$k^2(r) = \frac{2m_0}{\hbar}\left(E - V(r)\right) \tag{4-4}$$

เนื่องจากมีสมมาตรตามแนวรัศมี จึงควรเขียนลาพลาเซียนในระบบพิกัดทรงกลม เพราะหวังได้ว่าจะสามารถแก้ปัญหานี้ได้สะดวกในระบบพิกัดทรงกลม สมการที่ (4-3) อาจจะเขียนเสียใหม่ได้ว่า

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)\Psi + k^2\Psi = 0 \tag{4-5}$$

ให้

$$\nabla_r^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

$$\nabla_{\theta,\phi}^2 = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

$$\Psi = R(r)\Gamma(\theta, \phi)$$

แทนค่าลงไปในสมการ (4-5) แล้วคูณตลอดด้วย $\frac{r^2}{R\Gamma}$

$$\frac{r^2\nabla_r^2 R}{R} + r^2k^2 = -\frac{\nabla_{\theta,\phi}^2\Gamma}{\Gamma} \tag{4-6}$$

สมการ (4-6) อาจหาผลเฉลยได้ ถ้ากำหนดให้สมการนี้เท่ากับค่าคงที่ตัวหนึ่งซึ่งเรียกว่า ค่าคงที่ในการแยกสมการ พึงสังเกตว่าทางซ้ายของสมการเป็นฟังก์ชันของ r ส่วนทางขวาของสมการเป็นฟังก์ชันของ θ และ ϕ ทำให้เราสามารถแยกสมการได้ดังนี้

$$\frac{r^2\nabla_r^2 R}{R} + r^2k^2 = -\frac{\nabla_{\theta,\phi}^2\Gamma}{\Gamma} = \lambda$$

$$\nabla_r^2 R + \left(k^2 - \frac{\lambda}{r^2}\right)R = 0 \tag{4-7}$$

$$\nabla_{\theta,\phi}^2\Gamma + \lambda\Gamma = 0 \tag{4-8}$$

สมการที่ (4-8) เป็นลักษณะพิเศษของสนามซึ่งมีทิศเข้าสู่ศูนย์กลาง เพราะสมการนี้ไม่ขึ้นกับโพเทนเชียลและตัวแปร r สมการที่ (4-8) ยังทำการแยกตัวแปรได้อีกครั้งหนึ่ง ดังนี้

$$\Gamma = \Theta(\theta)\,\Phi(\phi) \tag{4-9}$$

แทนค่าลงในสมการ (4.8) แล้วหารตลอดด้วย $\frac{\Theta\Phi}{\sin^2\theta}$

$$\lambda\sin^2\theta + \frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Theta\right) = -\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Phi \tag{4-10}$$

จะเห็นว่าสมการที่ (4-10) อาจจะกำหนดให้เท่ากับค่าคงที่ตัวหนึ่ง ซึ่งเป็นค่าคงที่ในการแยกสมการ ในที่นี้จะให้เท่ากับ m^2 เพื่อประโยชน์ในการคำนวณขั้นต่อไป

$$\lambda\sin^2\theta + \frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Theta\right) = -\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Phi = m^2$$

ทำให้

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Theta\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta = 0 \tag{4-11}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Phi + m^2\Phi = 0 \qquad (4\text{-}12)$$

ในสมการ (4-11) และ (4-12) การหาอนุพันธ์ย่อยอาจจะถือเป็นการหาอนุพันธ์โดยตรงได้ เพราะ $\Theta = \Theta(\theta)$ และ $\Phi = \Phi(\phi)$

เราจะสมมุติว่าฟังก์ชันคลื่นเป็นฟังก์ชันซึ่งมีขนาดเป็นหนึ่ง (normalized) ด้วยสมมุติฐานอันนี้จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}\int\Psi^*\Psi d\bar{r} &= \int_0^\infty R^*(r)R(r)r^2dr\int_0^\pi\Theta^*\Theta\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}\Phi^*(\phi)\Phi(\phi)d\phi \\ &= 1 \qquad (4\text{-}13)\end{aligned}$$

นอกจากนี้เรายังอาจจะสมมุติเพิ่มเติมได้อีกว่า แต่ละอินทีกราลเท่ากับหนึ่ง นั่นคือ

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty R^*(r)R(r)r^2dr &= 1 \\ \int_0^\pi\Theta^*\Theta\sin\theta d\theta &= 1 \\ \int_0^{2\pi}\Phi^*(\phi)\Phi(\phi)d\phi &= 1\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}14)$$

จะเห็นว่าผลเฉลยของสมการ (4-5) จะหาได้จากผลเฉลยของสมการ (4-12), (4-11) และ (4-7) สมการที่ (4-12) นั้นอาจหาได้ตามลำพัง สมการ (4-11) จะหาผลเฉลยได้จากการหาผลเฉลยของสมการ (4-12) และผลเฉลยของสมการ (4-7) ขึ้นอยู่กับผลเฉลยของสมการ (4-11) และ (4-12) จากการพิจารณาสมการ (4-12) จะเห็นว่าผลเฉลยเฉพาะของสมการ คือ

$$\Phi(\phi) = Ce^{im\phi} \qquad (4\text{-}15)$$

หรือ

$$\Phi(\phi) = A\cos(m\phi + \phi_0) \qquad (4\text{-}16)$$

ผลเฉลยทั้งสองนี้มีความหมายทางฟิสิกส์แตกต่างกัน สมการที่ (4-15) เป็นสมการของคลื่นซึ่งเคลื่อนที่ไปตามเส้นรอบวงของวงกลมและแสดงถึงการเคลื่อนที่อย่างสม่ำเสมอของอีเล็กตรอนไปรอบ ๆ นิวเคลียส ในขณะที่สมการ (4-16) แสดงถึงคลื่นนิ่ง ซึ่งแสดงว่าอีเล็กตรอนสั่นอยู่บนส่วนโค้งใดส่วนโค้งหนึ่ง

เนื่องจากสมการที่ (4-12) ต้องมีผลเฉลยเป็นสองเทอม เราอาจจะเลือกให้ผลเฉลยที่สองคือ

$$\Phi(\phi) \quad = \quad Ce^{-im\phi} \tag{4-17}$$

ผลเฉลยทั้งสองผลเฉลยอาจจะเขียนรวม ๆ กันได้ว่า

$$\Phi(\phi) \quad = \quad Ce^{im\phi} \qquad m = 0, \pm n\text{ , n เป็นค่าบวกใด ๆ} \tag{4-18}$$

เนื่องจากว่าฟังก์ชันคลื่นจำเป็นต้องมีลักษณะเฉพาะตัว (uniqueness) ทำให้เราต้องกำหนดให้

$$\Phi(\phi) \quad = \quad \Phi(\phi + 2\pi) \tag{4-19}$$

สมการที่ (4-19) นอกจากจะแสดงลักษณะเฉพาะตัวของฟังก์ชันคลื่นแล้ว ยังช่วยแก้ปัญหาการซ้อนทับ (superposition) ของคลื่น เพราะตามกำหนดของสมการที่ (4-19)

$$e^{2im\phi} \quad = \quad 1$$

ทำให้มีค่าจำกัดลงเป็น $\quad m \quad = \quad 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad$ (4-20)

ค่า m ในสมการ (4-20) เรียกว่า เลขควอนตัมแม่เหล็ก (magnetic quantum number)

จากสมการชุดที่ (4-14) ทำให้เรากำหนดค่าคงที่ C ได้ ซึ่ง $C = \dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}$

ผลเฉลยของสมการ (4-12) ก็คือ

$$\Phi(\phi) \quad = \quad \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{im\phi} \tag{4-21}$$

โดยที่ $\Phi(\phi)$ มีค่าสัมบูรณ์เป็นหนึ่ง นั่นคือ

$$\int_0^{2\pi} \Phi_{m'}^* \Phi_m(\phi) d\phi \quad = \quad \delta_{m',m} \tag{4-22}$$

เมื่อได้ค่าของเลขควอนตัมแม่เหล็ก m และผลเฉลยของสมการ (4-12) แล้ว เราอาจจะหาผลเฉลยของสมการ (4-11) ได้ดังนี้

กำหนดให้ $\quad x \quad = \quad \cos\theta \qquad$ (4-23)

สมการที่ (4-1 1) กลายเป็น

$$\left[(1-x^2)\Theta'\right]' \;3\; \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)\Theta = 0 \tag{4-24}$$

จะเห็นว่าสมการ (4-24) มีจุดอปกติอยู่ที่จุด $x = \pm 1$ ที่จุดสองจุดนี้สัมประสิทธิ์ของ Θ คือ $\frac{1}{(1+x)}$ และ $\frac{1}{(1-x)}$ มีค่าเป็นอนันต์ เพื่อจำกัดความอปกติเหล่านี้ จึงกำหนดให้ Θ มีค่าดังนี้

$$\Theta = (1 - x^2)^{\frac{s}{2}} u(x) \tag{4-25}$$

แทนค่า Θ จากสมการ (4-25) ลงไปในสมการ (4-24) จะเห็นว่า

$$\Theta' = (1-x^2)^{\frac{s}{2}} u'(x) \quad sx(1-x^2)^{\left(\frac{s}{2}-1\right)} u(x)$$

$$(1-x^2)\Theta' = (1-x^2)^{\left(\frac{s}{2}+1\right)} u'(x) - sx(1-x^2)^{\frac{s}{2}} u(x)$$

$$\left[(1-x^2)\Theta'\right]' = (1-x^2)^{\left(\frac{s}{2}+1\right)} u''(x) - 2x(s+1)\;(1-x^2)^{\frac{s}{2}} u'(x)$$

$$+ \left(\frac{s^2x^2}{(1-x^2)} - s\right)(1-x^2)^{\frac{s}{2}} u(x)$$

สมการ (4-24) กลายเป็น

$$(1-x^2)u'' - 2x(s+1)u' + \left[\lambda - s^2 - s + \frac{s^2 - m^2}{1-x^2}\right]u = 0 \tag{4-26}$$

ความอปกติที่เทอมสุดท้ายจะหมดไป ถ้าหากเราเลือกให้

$$s = \pm |m| \tag{4-27}$$

มีข้อสังเกตสำหรับสมการดิฟเฟอเรนเชียล (4-24) อยู่อย่างหนึ่ง คือ สมการนี้ขึ้นอยู่กับสัมประสิทธิ์ m^2 ทำให้ผลเฉลยต่างกันอยู่เป็นเพียงค่าคงที่ค่าหนึ่งเท่านั้น ทำให้

$$\Theta(|m|) = A\Theta(-|m|) \tag{4-28}$$

เราจึงจำเป็นจะต้องหาผลเฉลยของสมการ (4-24) เพียงผลเฉลยเดียว พิจารณากรณีซึ่ง

$$s = m \geqslant 0 \tag{4-29}$$

ถ้าได้ผลเฉลยนี้แล้วเราก็อาจจะหาผลเฉลยอีกอันหนึ่งได้ตามความสัมพันธ์ (4-28) จากข้อกำหนดในสมการ (4-29) ทำให้สมการ (4-26) กลายเป็น

$$(1-x^2)u'' - 2x(m+1)u' + (\lambda - m(m+1))u = 0 \tag{4-30}$$

เนื่องจากสมการนี้ไม่มีจุดอปกติใด ๆ เราอาจจะสมมุติผลเฉลยให้อยู่ในรูปของอนุกรมได้ดังนี้

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{4-31}$$

$$u'(x) = \sum_k k a_k x^{k-1}$$

$$u''(x) = \sum_k k(k-1) a_k x^{k-2}$$

แทนค่าลงไปในสมการ (4-30) แล้วจัดสมการ

$$\sum_k \left[k(k-1)a_k x^{k-2} + \{\lambda - (k+m)(k+m+1)\}a_k x^k\right] = 0$$

จัดเทอมให้มีกำลังของ x เท่ากัน

$$\sum_k \left[(k+2)(k+1)a_{k+2} + \{\lambda - (k+m)(k+m+1)\}a_k\right]x^k = 0$$

ทำให้ได้ความสัมพันธ์ต่อเนื่อง (recurrence relation) ดังนี้

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} = -\{\lambda - (k+m)(k+m+1)\}a_k \tag{4.32}$$

จะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของสมการ (4-31) มีความต่อเนื่องกัน และเนื่องจากสัมประสิทธิ์ a_{k+2} ต่อกับสัมประสิทธิ์ a_k ฟังก์ชัน u อาจจะเป็นฟังก์ชันคี่หรือฟังก์ชันคู่ ขึ้นอยู่กับเทอมที่มีกำลังสูงสุดว่าเป็นฟังก์ชันคี่หรือฟังก์ชันคู่

กำหนดให้อนุกรม (4-31) มีกำลัง q (เพื่อไม่ให้ผลเฉลยเป็นอนันต์) เป็นกำลังที่สูงสุด เรากำหนดให้

$$a_{q+2} = 0, \quad a_q \neq 0 \tag{4-33}$$

จากสมการ (4-32) จะเห็นว่า

$$\lambda = (q+m)(q+m+1) \tag{4-34}$$

$$q = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots \tag{4-35}$$

ค่าของ q จะเท่ากับค่าของกำลังสูงสุดในอนุกรม เราอาจจะกำหนดเลขควอนตัมในวงโคจรขึ้นได้ดังนี้

$$\ell = q+m \tag{4-36}$$

จะเห็นว่า ℓ มีค่าเป็นเลขจำนวนบวก ดังนี้

$$\ell = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{4-37}$$

และจากสมการที่ (4-36)

$$\ell \geqslant m \tag{4-38}$$

แทนค่า ℓ จากสมการ (4-36) ลงในสมการ (4-34)

$$\lambda = \ell(\ell+1) \tag{4-39}$$

สมการที่ (4-30) อาจจะเขียนเสียใหม่ได้ดังนี้

$$(1-x^2)u''(x) - 2x(m+1)u'(x) + \left[\ell(\ell+1) - m(m+1)\right]u(x) = 0 \tag{4-40}$$

สมการ (4-40) มีผลเฉลยดังนี้

$$u(x) = a_{\ell-m}x^{\ell-m} + a_{\ell-m-2}x^{\ell-m-2} + \ldots + \begin{cases} a_0 \\ a_1 x \end{cases} \tag{4-41}$$

ผลเฉลยที่เป็นอนุกรมไม่เหมาะในการคำนวณ จึงมีการคิดค้นผลเฉลยในรูปใหม่ดังนี้

ให้

$$v = (x^2-1)^{\ell} \tag{4-42}$$

$$v' = \frac{d}{dx}v = \ell 2x(x^2-1)^{\ell-1}$$

$$(1-x^2)v' + 2x\ell v = 0 \tag{4-43}$$

หาอนุพันธ์ของสมการ (4-43) $(\ell+m+1)$ ครั้ง (ใช้กฎการหาอนุพันธ์ย่อยของไลบ์นิซ)

$$(1-x^2)v^{(\ell+m+2)} + (\ell+m+1)(-2x)v^{(\ell+m+1)} + \frac{(\ell+m+1)(\ell+m)}{2!}(-2)v^{(\ell+m)}$$

$$+ 2x\ell v^{(\ell+m+1)} + 2\ell(\ell+m+1)v^{(\ell+m)} = 0 \qquad (4\text{-}44)$$

ให้ $v^{\ell+m} = y$ จัดสมการที่ (4-44) เสียใหม่

$$(1-x)^2y'' - 2x(m+1)y' + [\ell(\ell+1) + m(m+1)]y = 0 \qquad (4\text{-}45)$$

สมการที่ (4-45) คือสมการที่ (4-40) ทำให้

$$u(x) = \text{ค่าคงที่} \times y(x) \qquad (4\text{-}46)$$

จากการสังเกตจะเห็นว่า ถ้า $m = 0$ สมการ (4-45) คือ สมการดิฟเฟอเรนเชียลของเลอจอง[4] ทำให้เราสามารถเขียนผลเฉลยได้ดังนี้

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell(x^2-1)^\ell}{dx^\ell} = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}v \qquad (4\text{-}47)$$

สมการที่ (4-45) จึงเป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียลเครือข่ายเลอจอง (associated Legendre differential equation) ทำให้สมการที่ (4-46) สามารถเขียนได้ว่า

$$u(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^{\ell+m}(x^2-1)^\ell}{dx^{\ell+m}} \qquad (4\text{-}48)$$

และจากสมการที่ (4-25) และ (4-29)

$$\Theta_\ell^m = C_\ell^m P_\ell^m(x) \qquad (4\text{-}49)$$

$P_\ell^m(x)$ คือ ฟังก์ชันเครือข่ายโพลีโนเมียลของเลอจอง (associated Legendre polynomial)

$$P_\ell^m(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^\ell \ell!}\frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}}(x^2-1)^\ell \qquad (4\text{-}50)$$

C_ℓ^m เป็นแฟคเตอร์ที่ช่วยในการนอร์มอลไลซ์

---

[4]พิสิทธิ์ วรสิงห์, op.cit., หน้า 338 และหน้า 354.

สมการที่ (4-24) ยังมีผลเฉลยอีกอันหนึ่ง คือ

$$Q_\ell^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}Q_\ell(x) \tag{4-51}$$

$Q\ell$ เป็นฟังก์ชันเลอจองชนิดที่สอง

$$Q_\ell(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_\ell(y)}{x-y}\,dy = \frac{1}{2}P_\ell(x)\,\ell n\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - W_{\ell-1}(x) \tag{4-51}$$

$W_{\ell-1}(x)$ เป็นโพลีโนเมียลดีกรี $\ell-1$ $(W_{-1}(x) = 0)$ ฟังก์ชันนี้ไม่มีค่าเป็นอนันต์ที่จุดใด ๆ แต่เทอมแรกทางด้านขวาของสมการ (4-51)' มีจุดอปกติที่ $x = \pm 1$ ทำให้ Q_ℓ^m ไม่สามารถจะใช้เป็นผลเฉลยของสมการชโรดิงเจอร์ได้เลย

จากสมการที่ (4-28) และ (4-50) เราหวังว่าจะมีผลเฉลยอีกอันหนึ่งซึ่งมีความสัมพันธ์กับ $P_\ell^m(x)$ ผลเฉลยนี้เกี่ยวข้องกับ $P_\ell^m(x)$ ดังนี้

$$P_\ell^m(x) = (-1)^m\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}P_\ell^{-m}(x) \tag{4-52}$$

การพิสูจน์ทำได้โดยสังเกตว่า

$$\frac{d^k}{dx^k}x^n = \begin{cases}\dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} & \text{สำหรับ} \quad k \leqslant n \\ 0 & \text{สำหรับ} \quad k > n\end{cases} \tag{4-53}$$

ทำให้

$$(\ell-|m|)!\,x^{2|m|}\frac{d^{\ell+|m|}x^{2\ell}}{dx^{\ell+|m|}} = (\ell+|m|)!\,\frac{d^{\ell-|m|}x^{2\ell}}{dx^{\ell-|m|}} \tag{4-54}$$

แทน x^2 ด้วย (x^2-1) ใน (4–54)

$$(\ell-|m|)!\,(x^2-1)^{|m|}\frac{d^{\ell+|m|}}{dx^{\ell+|m|}}(x^2-1)^\ell = (\ell+|m|)!\,\frac{d^{\ell-|m|}}{dx^{\ell-|m|}}(x^2-1)^\ell \tag{4-55}$$

สมการที่ (4-55) ก็คือสมการ (4-52) นั่นเอง

จากสมการที่ (4-28) และ (4-49)

$$P_\ell^m(x) = AP_\ell^{-m}(x) \tag{4-56}$$

จากการพิจารณา (4-54) และ (4-55) เราทราบว่า A คือ $(-1)^m \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}$

ทำให้สมการ (4-52) เป็นจริง จากสมการที่ (4-50) และ (4-52) เราได้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้ ($P_\ell^m(x)$ เป็นศูนย์เมื่อ $|m| > \ell$)

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm \ell \tag{4-57}$$

ขั้นต่อไปคือการกำหนด C_ℓ^m จากสมการ (4-49) โดยพิจารณา

$$\int_0^\pi \Theta_\ell^m \Theta_\ell^m \sin\theta d\theta = \int_{-1}^{1} \Theta_\ell^m(x)\Theta_\ell^m(x)dx = 1$$

แทนค่า Θ_ℓ^m และเปลี่ยนค่าหนึ่งของ m เป็น $-m$ ตามสมการ (4-52)

$$\frac{(-1)^m(\ell+m)!}{(2^\ell \ell!)^2(\ell-m)!}|C_\ell^m|^2 \int_{-1}^{1}\left[\frac{d^{\ell-m}}{dx^{\ell-m}}(x^2-1)^\ell\right]\left[\frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}}(x^2-1)^\ell\right]dx = 1$$

ใช้ integration by part สำหรับวงเล็บที่สองในเครื่องหมายอินทีเกรชัน $(\ell+m)$ ครั้ง ได้ผลเป็น

$$\frac{(\ell+m)!}{(2^\ell \ell!)^2(\ell-m)!}|C_\ell^m|^2 \int_{-1}^{-} (1-x^2)^\ell \frac{d^{2\ell}}{dx^{2\ell}}(x^2-1)^\ell = 1$$

และเนื่องจาก $\frac{d^{2\ell}}{dx^{2\ell}}(x^2-1)^\ell = (2\ell)!$

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^\ell dx = \frac{(\ell!)^2 2^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!}$$

ทำให้ $\frac{(\ell+m)!}{(2^\ell \ell!)^2} \frac{(\ell!)^2 2^{2\ell+1}(2\ell)!|C_\ell^m|^2}{(\ell-m)!(2\ell+1)!} = 1$

$$C_\ell^m = \left\{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{2(\ell+m)!}\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{4-58}$$

$$\therefore \quad \Theta_\ell^m(x) = \left\{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{2(\ell+m)!}\right\}^{\frac{1}{2}} P_\ell^m(x) \tag{4-59}$$

จากสมการที่ (4-9), (4-17) และ (4-59) เราอาจจะเขียนฟังก์ชันได้ดังนี้

$$Y_\ell^m(\theta, \phi) = \Theta_\ell^m \Phi_m = \left\{ \frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{2(\ell+m)!} \right\}^{\frac{1}{2}} P_\ell^m(\cos\theta) e^{im\phi} \qquad (4\text{-}60)$$

ฟังก์ชัน Y_ℓ^m มีชื่อเรียกว่า สเฟียริคอล ฮาร์มอนิกซ์ (Spherical harmonics)

จะเห็นว่า

$$\oint d\Omega (Y_{\ell'}^{m'}(\Omega))^* Y_\ell^m(\Omega) = \int_0^\pi \sin\theta d\theta (\Theta_{\ell'}^{m'})^* \Theta_\ell^m \int_0^{2\pi} \Phi_{m'}^*(\phi)\Phi_m(\phi) d\phi \qquad (4\text{-}61)$$

แต่เนื่องจาก $$\int_0^{2\pi} \Phi_{m'}^*(\phi)\Phi_m(\phi) d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\phi} d\phi = \delta_{mm'} \qquad (4\text{-}62)$$

ทำให้สมการ (4-61) อาจจะเขียนได้เป็น

$$\int_0^\pi \sin\theta d\theta (\Theta_{\ell'}{}^m)^* (\Theta_\ell^m) = \int_{-1}^1 \Theta_{\ell'}^m \Theta_\ell^m dx$$

$$= \left\{ \frac{(2\ell'+1)(\ell'-m)!}{2(\ell'+m)!} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{2(\ell+m)!} \right\}^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 P_{\ell'}^m(x) P_\ell^m(x) dx$$

$$= \left\{ \frac{(2\ell'+1)(\ell'-m)!}{2(\ell'+m)!} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{2(\ell+m)!} \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{(-1)^m(\ell'+m)!}{(2^{\ell'}\ell'!)^2(\ell'-m)!}$$

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{d^{\ell'-m}}{dx^{\ell'-m}} (x^2-1)^{\ell'} \right] \left[\frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (x^2-1)^\ell \right] dx$$

integration by part $(\ell+m)$ ครั้ง

$$\int_{-1}^1 \Theta_{\ell'}^m \Theta_\ell^m dx = \left\{ \frac{(2\ell'+1)(\ell'-m)!}{2(\ell'+m)!} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{2(\ell+m)!} \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{(\ell'+m)!}{(2^{\ell'}\ell'!)^2(\ell-m)!}$$

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^\ell \frac{d^{(\ell+\ell')!}}{dx^{(\ell+\ell')}} (x^2-1)^{\ell'} dx$$

เราอาจจะสมมุติว่า $\ell' < \ell$ โดยไม่เสียความหมายทั่วไป (ในกรณีที่ $\ell' > \ell$ เราก็สลับที่ ℓ กับ ℓ' ในอินทีเกรชันเสีย) จะเห็นว่า

$$\int_{-1}^{1}\Theta_{\ell'}^{m}\Theta_{\ell}^{m}dx = 0 \qquad \ell' < \ell$$

หรือโดยการสลับที่ ℓ กับ ℓ' เราอาจจะพิสูจน์ได้ว่า

$$\int_{-1}^{1}\Theta_{\ell'}^{m}\Theta_{\ell}^{m}dx = \delta_{\ell\ell'} \tag{4-63}$$

จากสมการ (4-61), (4-62) และ (4-63) ทำให้สรุปได้ว่า

$$\oint d\Omega(Y_{\ell'}^{m'}(\Omega))^{*}(Y_{\ell}^{m}(\Omega)) = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'} \tag{4-64}$$

จากการพิจารณาสมการ (4-52) ร่วมกับสมการ (4-60) เราอาจจะเขียนสเฟียริคอล ฮาร์มอนิกซ์ ได้อีกรูปหนึ่ง คือ

$$Y_{\ell}^{m}(\theta,\phi) = a_m\left\{\frac{(2\ell+1)(\ell-|m|)!}{4\pi(\ell+|m|)!}\right\}^{\frac{1}{2}}P_{\ell}^{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi} \tag{4-65}$$

$$a_m = \begin{cases} 1, & m \geqslant 0 \\ (-1)^m & m < 0 \end{cases} \tag{4-66}$$

บางท่านเลือก $a_m = 1$ ตลอด โดยมีข้อเสียในกรณีที่ต้องใช้ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันสเฟียริคอล ฮาร์มอนิกซ์ ซึ่งมีค่า m ต่างกัน การเลือกให้ a_m เป็นหนึ่งตลอดให้ค่าไม่ถูกต้อง

ในการเลือกเครื่องหมายเมื่อเปลี่ยนทิศของพิกัด (parity) โดยกำหนดให้ x เป็น $-x$ y เป็น $-y$ และ z เป็น $-z$ ตามลำดับ จะเห็นว่าในพิกัดทรงกลม

$\phi \to \pi+\phi$, $\theta \to \pi-\theta$ และ $\cos\theta \to -\cos\theta$ ทำให้

$$P_{\ell}^{m}(x) \to P_{\ell}^{m}(-x) = (-1)^{\ell+m}P_{\ell}^{m}(x)$$
$$e^{im\phi} \to e^{im\phi}e^{i\pi m} = (-1)^{m}e^{im\phi}$$

ทำให้เรากำหนดเครื่องหมายของสเฟียริคอลฮาร์มอนิกได้ดังนี้

$$Y_\ell^m(\theta,\phi) \sim P_\ell^m(x)e^{im\phi} \underset{\text{กลับทิศพิกัด}}{\overset{\uparrow}{=}} (-1)^\ell P_\ell^m(x)e^{im\phi}$$

นั่นคือ เมื่อกลับทิศพิกัดแล้ว

$$Y_\ell^m(\theta,\phi) \rightarrow (-1)^\ell Y_\ell^m(\theta,\phi) \tag{4-67}$$

เรากล่าวว่า parity ของสเฟียริคอล ฮาร์มอนิก เปลี่ยนไปเมื่อ ℓ เป็นเลขคี่ และ parity ของสเฟียริคอลฮาร์มอนิกคงเดิม เมื่อ ℓ เป็นเลขคู่

4.2 ความหมายของเลขควอนตัม m และ ℓ

จากสมการที่ (4-39) เราได้ความสัมพันธ์ของเลขควอนตัม $\lambda = \ell(\ell+1)$ ซึ่งเนื่องด้วยตัวดำเนินการ $\nabla^2_{\theta,\phi} = \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\phi^2}$

ในกลศาสตร์แผนเดิมเรามีแฮมมิลโทเนียนสำหรับโพเทนเชียลของสนามซึ่งมีทิศเข้าสู่ศูนย์กลางดังนี้

$$H = \frac{m_0v^2}{2} + V(r) = \frac{p^2_r}{2m_0} + \frac{L^2}{2m_0r^2} + V(r) \tag{4-68}$$

และจากสมการ (4-2) ตัวดำเนินการแฮมมิลโทเนียนในกลศาสตร์ควอนตัมของปัญหาเดียวกันคือ

$$H = -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m_0} + V(r) = -\frac{\hbar^2\nabla^2_r}{2m_0} - \frac{\hbar^2\nabla^2_{\theta,\phi}}{2m_0r^2} + V(r) \tag{4-69}$$

P_r คือ $m_0\dot{r}$ และ L คือ $m_0r^2\dot{\phi}$ จะเห็นว่า โมเมนตัมเชิงมุมยกกำลังสอง (L^2) จะกลายเป็นตัวดำเนินการ $(-\hbar^2\nabla^2_{\theta,\phi})$ และโมเมนตัมตามแนวรัศมียกกำลังสอง (p^2_r) จะกลายเป็นตัวดำเนินการ $(-\hbar^2\nabla^2_r)$ ซึ่งความสัมพันธ์ที่กล่าวมานี้อาจจะวิเคราะห์ออกมาได้ดังนี้ ในกลศาสตร์แผนเดิมโมเมนตัมเชิงมุม คือ

$$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p} \tag{4-70}$$

ถ้าหากเรากำหนดว่า มีแรงภายนอก $\bar{F}$ กระทำต่อระบบฟิสิกส์ที่เราพิจารณาอยู่ เราจะได้โมเมนต์ของแรง ($\bar{M}$) ตามความสัมพันธ์ดังนี้

$$\bar{M} = \bar{r} \times \bar{F} \tag{4-71}$$

ความเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมเชิงมุมอันเนื่องจากแรงภายนอก จะมีค่าดังนี้

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M} \tag{4-72}$$

ในกรณีของแรงที่เข้าสู่ศูนย์กลางเป็นกรณีพิเศษ เพราะแรงขนานกับรัศมีเวกเตอร์ทำให้โมเมนต์ของแรงเป็นศูนย์ ($\bar{M} = 0$) สมการ (4-72) จะกลายเป็น

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = 0 \qquad \text{ทำให้ } \bar{L} = \text{ค่าคงที่} \tag{4-73}$$

(4-73) เป็นกฎการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม

เพื่อทำให้โมเมนตัม ($\bar{p}$) ในกลศาสตร์แผนเดิมเป็นตัวดำเนินการโมเมนตัม เราแทน $\bar{p}$ ด้วย $\frac{\hbar}{i}\nabla$ ดังนี้

$$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p} = \frac{\hbar}{i}(\bar{r} \times \bar{\nabla}) \tag{4-74}$$

ซึ่งอาจจะแยกออกตามแนวพิกัดฉากได้ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} L_x &= yp_z - zp_y \\ L_y &= zp_x - xp_z \\ L_z &= xp_y - yp_x \end{aligned}\right\} \tag{4-75}$$

เป็นข้อสังเกตว่า ตัวดำเนินการของสมาชิกของโมเมนตัมเชิงมุมสับเปลี่ยนกันไม่ได้ (non-commutation) ซึ่งอาจแสดงได้ ดังนั้น

$$\begin{aligned} [L_x, L_y] &= L_xL_y - L_yL_x \\ &= (yp_z - zp_y)(zp_x - xp_z) - (zp_x - xp_z)(yp_z - zp_y) \end{aligned}$$

เพื่อให้เห็นชัดเจน เรากำหนดให้ตัวดำเนินการเหล่านี้กระทำบนฟังก์ชันคลื่นใด ๆ Ψ

$$[L_x, L_y]\Psi = \{yp_z zp_x - yp_z xp_z - zp_y zp_x + zp_y xp_z$$
$$- zp_x yp_z + xp_z yp_z + z^2 p_x p_y - xp_z zp_y\}\Psi$$

เนื่องจาก $yp_z zp_x\Psi = yp_x \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z} z\Psi = \frac{\hbar}{i} yp_x\Psi + yzp_z p_x\Psi$

และ $xp_z zp_y\Psi = xp_y \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z} z\Psi = \frac{\hbar}{i} xp_y\Psi + xzp_z p_y\Psi$

ทำให้ $[L_x, L_y]\Psi = \{yp_z zp_x - yp_z xp_z - zp_y zp_x + zp_y xp_z + \frac{\hbar}{i} yp_x$

$$- zp_x yp_z + xp_z yp_z + z^2 p_x p_y - xzp_z p_y - \frac{\hbar}{i} xp_y\}\Psi$$

$$\therefore \quad [L_x, L_y] = i\hbar\{xp_y - yp_x\} = i\hbar L_z \tag{4-76}$$

โดยทำนองเดียวกัน อาจจะพิสูจน์ได้ว่า

$$\left.\begin{aligned} [L_y, L_z] &= i\hbar L_x \\ [L_z, L_x] &= i\hbar L_y \end{aligned}\right\} \tag{4-77}$$

ในขั้นต่อไปเราจะหากำลังสองของตัวดำเนินการโมเมนตัมเชิงมุมในพิกัดทรงกลม จะเห็นว่า

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \tag{4-78}$$

ซึ่งเราจะหาสมาชิกของโมเมนตัมเชิงมุม L_x, L_y และ L_z ในพิกัดทรงกลมได้ดังนี้

กำหนดให้ $\rho^2 = x^2 + y^2$, $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Psi}{\partial\theta} &= \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\theta} \\ &= r\cos\theta\cos\phi\frac{\partial\Psi}{\partial x} + r\cos\theta\sin\phi\frac{\partial\Psi}{\partial y} - r\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial z} \\ &= \frac{xz}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{yz}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial y} - \rho\frac{\partial\Psi}{\partial z} \end{aligned} \tag{4-79}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\phi} = \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\phi}+\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\phi}+\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\phi}$$

$$= -r\sin\theta\sin\phi\frac{\partial\Psi}{\partial x}+r\sin\theta\cos\phi\frac{\partial\Psi}{\partial y}$$

$$= -y\frac{\partial\Psi}{\partial x}+x\frac{\partial\Psi}{\partial y} \qquad (4\text{-}80)$$

คูณสมการที่ (4-79) ด้วย $\left(\frac{x}{\rho}\right)$ และคูณสมการที่ (4-80) ด้วย $\left(-\frac{yz}{\rho^2}\right)$ นำผลคูณมาบวกกัน

$$\frac{x}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} = \frac{x^2z}{\rho^2}\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\frac{xyz}{\rho^2}\frac{\partial\Psi}{\partial y}-x\frac{\partial\Psi}{\partial z}$$

$$-\frac{yz}{\rho^2}\frac{\partial\Psi}{\partial\phi} = \frac{y^2z}{\rho^2}\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\frac{xyz}{\rho^2}\frac{\partial\Psi}{\partial y}$$

$$\frac{(x^2+y^2)z}{\rho^2}\frac{\partial\Psi}{\partial x}-x\frac{\partial\Psi}{\partial z} = \frac{r\sin\theta\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}-\frac{r^2\sin\theta\sin\phi\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\phi}$$

$$\left(z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi = \left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta}-\cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\Psi \qquad (4\text{-}81)$$

โดยทำนองเดียวกัน คูณสมการที่ (4-79) ด้วย $\left(-\frac{y}{\rho}\right)$ แล้วคูณสมการที่ (4-80) ด้วย $\left(-\frac{xz}{\rho^2}\right)$ ตามลำดับ นำผลคูณที่ได้มาบวกกัน

$$-\frac{y}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} = -\frac{xyz}{\rho^2}\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\frac{y^2z}{\rho^2}\frac{\partial\Psi}{\partial y}+y\frac{\partial\Psi}{\partial z}$$

$$-\frac{xz}{\rho^2}\frac{\partial\Psi}{\partial\phi} = +\frac{xyz}{\rho^2}\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\frac{x^2z}{\rho^2}\frac{\partial\Psi}{\partial y}$$

$$\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi = -\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta}-\cot\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\phi} \qquad (4\text{-}82)$$

จากสมการที่ (4-75) และ (4-82)

$$L_x = \frac{\hbar}{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$= -\frac{\hbar}{i}\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta}+\cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \qquad (4\text{-}83)$$

จากสมการที่ (4-75) และ (4-81)

$$L_y = \frac{\hbar}{i}\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\hbar}{i}\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \qquad (4\text{-}84)$$

จากสมการที่ (4-75) และ (4-80)

$$L_z = \frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi} \qquad (4\text{-}85)$$

ให้ $\mu = \cos\theta$

จากสมการ (4-83) และ (4-84)

$$L_+ = L_x + iL_y = \hbar\left(+i\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi} + \cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$= \hbar e^{i\phi}\left\{-(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial\mu} + i\frac{\mu}{(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial\phi}\right\}$$

และถ้าให้ $L_- = L_x - iL_y$ เราอาจจะดำเนินการโดยวิธีที่คล้ายคลึงกัน ทำให้สามารถเขียนเป็นสมการร่วมกันได้ว่า

$$L_\pm = \hbar e^{\pm i\phi}\left\{i\frac{\mu}{(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial\phi} \mp (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial\mu}\right\} \qquad (4\text{-}86)$$

ซึ่งคงจะจำกันได้ว่า L_+ และ L_- คือตัวดำเนินการเพิ่มระดับและตัวดำเนินการลดระดับ ซึ่งในรูปของทฤษฎีควอนตัมซึ่งไม่มีตัวแทน ตัวดำเนินการทั้งสองมีสมาชิกของเมทริกซ์ ดังนี้[5]

---

[5]พิสิทฐ์ วรสิงห์, **กลศาสตร์ควอนตัม,** พิมพ์ครั้งที่ 2, กรุงเทพมหานคร : มหาวิทยาลัยรามคำแหง, หน้า 132.

$$\langle \ell' m' | L_{\pm} | \ell m \rangle = \{(\ell \mp m)(\ell \pm m + 1)\}^{\frac{1}{2}} \delta_{\ell\ell'} \delta_{m', m\pm 1} \tag{4-87}$$

สมการ (4-87) ทำให้เราต้องเลือกสเฟียริคอล ฮาร์มอนิค ให้สมการ (4-87) เป็นจริงสำหรับ L_+ เราอาจเลือกฟังก์ชันของสเฟียริคอล ฮาร์มอนิค ตามสมการ (4-65) หรือในรูปใหม่คือ

$$Y_\ell^m(\theta, \phi) = (-1)^m \left\{ \frac{(2\ell + 1)(\ell + m)!}{4\pi(\ell - m)!} \right\}^{\frac{1}{2}} P_\ell^{-m}(\cos\theta) e^{im\phi} \tag{4-88}$$

จะเห็นว่าทั้งสองรูปของฟังก์ชันสเฟียริคอล ฮาร์มอนิค คือสมการ (4-65) และ (4-88)

$$L_z Y_\ell^m(\theta, \phi) = \hbar m Y_\ell^m \tag{4-89}$$

แสดงว่าเลขควอนตัม m บอกถึงการฉายของโมเมนตัมเชิงมุมบนแกน z สำหรับการพิจารณา $L_{\pm}$ กระทำบน Y_ℓ^m เราอาจจะพิจารณาความสัมพันธ์พื้นฐานดังต่อไปนี้ก่อน

$$e^{\pm i\phi} \left\{ i \frac{\mu}{(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial\phi} \mp (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial\mu} \right\} e^{im\phi} (1-\mu^2)^{\pm\frac{m}{2}} f(\mu)$$

$$= e^{i(m\pm 1)\phi} \left\{ -m\mu (1-\mu^2)^{\frac{(\pm m - 1)}{2}} f(\mu) \mp \left(\pm \frac{m}{2}\right) (1-\mu^2)^{\frac{(\pm m - 1)}{2}} f(\mu)(-2\mu) \right.$$

$$\left. \mp (1-\mu^2)^{\frac{(\pm m + 1)}{2}} \frac{\partial}{\partial\mu} f(\mu) \right\}$$

$$= \mp e^{i\phi(m\pm 1)} (1-\mu^2)^{\frac{(1\pm m)}{2}} \frac{\partial}{\partial\mu} f(\mu) \tag{4-90}$$

ถ้าเราเลือก $\quad f(\mu) = \dfrac{d^{\ell\pm m}}{dx^{\ell\pm m}} (\mu^2 - 1)^\ell$

และสำหรับ L_+,
$$Y_\ell^m = a_m\left\{\frac{(2\ell+1)(\ell-|m|)!}{4\pi(\ell+|m|)!}\right\}^{\frac{1}{2}} P_\ell^{|m|}(\mu)e^{im\phi}$$

$$a_m = \begin{cases} 1 & m \geqslant 0 \\ (-1)^m & m < 0 \end{cases} \qquad (4\text{-}65)$$

สำหรับ L_-,
$$Y_\ell^m = (-1)^m\left\{\frac{(2\ell+1)(\ell+m)!}{4\pi(\ell-m)!}\right\}^{\frac{1}{2}} P_\ell^{-m}(\mu)e^{im\phi} \qquad (4\text{-}88)$$

จากสมการ (4-90), (4-65) และ (4-88) เราจะได้ความสัมพันธ์

$$(L_x \pm iL_y)Y_\ell^m = L_\pm Y_\ell^m = -\hbar\{(\ell\pm m+1)(\ell\mp m)\}^{\frac{1}{2}}Y_\ell^{m\pm 1} \qquad (4\text{-}91)$$

แต่ถ้าหากเราต้องการความสัมพันธ์ในรูปของสมการ (4-87) เราต้องเลือก

$$|\ell m\rangle = \left\{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}\right\}^{\frac{1}{2}} P_\ell^m(\mu)e^{im\phi} \qquad (4\text{-}92)$$

สมการที่ (4-92) บางทีเรียกว่า normalized spherical harmonics สมการนี้ไม่สามารถจะใช้หาความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันสเฟียริคอล ฮาร์มอนิกซ์ ซึ่งมีค่า ℓ เดียวกัน แต่ค่า m ต่างกันได้ ถ้าต้องการหาความสัมพันธ์ที่กล่าวถึงนี้ต้องใช้คำนิยามของ Y_ℓ^m ในรูปของสมการ (4-65) จากสมการที่ (4-91) จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} L^2Y_\ell^m &= \left\{\frac{1}{2}(L_+L_- + L_-L_+) + L_z^2\right\}Y_\ell^m = -\hbar^2\nabla^2_{\theta,\phi}Y_\ell^m \\ &= \hbar^2\ell(\ell+1)Y_\ell^m \end{aligned} \qquad (4\text{-}93)$$

พึงสังเกตว่า Y_ℓ^m เป็นฟังก์ชันไอเกนของ L^2 และ L_z เนื่องจาก L^2 และ L_z ถูกเลือกให้สับเปลี่ยนกันได้ นอกจากนี้ทั้ง L^2 และ L_z ยังสับเปลี่ยนกันได้กับแฮมมิลโทเนียน H แต่เนื่องจาก L_x และ L_y ไม่สามารถสับเปลี่ยนกันได้กับ L_z ทำให้ฟังก์ชันไอเกนของ L_z ไม่เป็นฟังก์ชันไอเกนของทั้ง L_x และ L_y ทั้งนี้ไม่ได้หมายความว่า แกน z มีลักษณะพิเศษเหนือไปกว่าแกนอื่น ๆ เราอาจจะเลือกแกน x แทนแกน z ก็ได้ ในกรณีนี้

$$[L^2, L_x] = 0$$
$$[L^2, L_z] \neq 0$$

ฟังก์ชันไอเกนของ L_x จะเป็นฟังก์ชันไอเกนของ L^2 แต่ไม่เป็นฟังก์ชันไอเกนของ L_z

ยังมีวิธีกำหนดค่า L_- อีกวิธีหนึ่งซึ่งนิยมใช้กันคือ กำหนดให้

$$L_+Y_\ell^m = \hbar Y_\ell^{m+1} \tag{4-94}$$

จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} L_-L_+ &= (L_x - iL_y)(L_x + iL_y) \\ &= L_x^2 + L_y^2 + i(L_xL_y - L_yL_x) \\ &= L^2 - L_z^2 - \hbar L_z \end{aligned} \tag{4-95}$$

จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} L_-L_+Y_\ell^{m-1} &= \hbar L_-Y_\ell^m \\ &= (L^2 - L_z^2 - \hbar L_z)Y_\ell^{m-1} \\ &= \hbar^2\{\ell(\ell+1) - (m-1)^2 - (m-1)\}Y_\ell^{m-1} \\ &= \hbar^2\{\ell(\ell+1) - m(m-1)\}Y_\ell^{m-1} \\ \therefore\quad L_-Y_\ell^m &= \hbar\{(\ell+m)(\ell-m+1)\}Y_\ell^{m-1} \end{aligned} \tag{4-96}$$

4.3 เปรียบเทียบความแตกต่างของทฤษฎีกลศาสตร์ควอนตัมและกลศาสตร์แผนเดิมในกรณีของสนามซึ่งมีทิศเข้าสู่ศูนย์กลาง

ถ้าเราพิจารณาอินทีกราลอันหนึ่ง คือ

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int \left(\alpha x\Psi^* + \frac{\partial \Psi^*}{\partial x}\right)\left(\alpha x\Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) d\bar{r} \\ &= A\alpha^2 - B\alpha + C \end{aligned} \tag{4-97}$$

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* x^2 \Psi d\bar{r} \tag{4-98}$$

$$B = -\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial x}x\Psi + x\Psi^*\frac{\partial}{\partial x}\Psi\right)d\bar{r} = -\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{\partial}{\partial x}(\Psi^*\Psi)d\bar{r}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*\Psi d\bar{r} = 1 \tag{4-99}$$

ฟังก์ชันคลื่นเป็นศูนย์ที่อนันต์

$$C = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)d\bar{r}$$

$$= \frac{1}{\hbar^2}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\Psi d\bar{r}$$

$$= \frac{\langle p_x^2\rangle}{\hbar^2} > 0 \qquad (4\text{-}100)$$

สมการที่ (4-97) อยู่ในรูปซึ่งเป็นบวกหรือเป็นศูนย์ ทำให้

$$I(\alpha) \geqslant 0 \qquad (4\text{-}101)$$

สมการ (4-101) เป็นจริงทุก ๆ ค่าของ α ซึ่งเป็นค่าจริง ให้ α_0 เป็นค่าซึ่ง $I(\alpha_0)$ มีค่าต่ำที่สุด

$$I'(\alpha_0) = \frac{d}{d\alpha}I(\alpha)\Big|_{\alpha=\alpha_0} = 2A\alpha_0 - B = 0$$

$$\alpha_0 = \frac{B}{2A}$$

$$I''(\alpha_0) = 2A > 0$$

ดังนั้น ค่าต่ำสุดของ I คือ $I(\alpha_0)$ มีค่าดังนี้

$$I_{min} = I(\alpha_0) = \frac{AB^2}{4A^2} - \frac{B^2}{2A} + C \geqslant 0$$

หรือ $$-\frac{B^2}{4A} + C \geqslant 0 \qquad (4\text{-}102)$$

ทำให้ $$B^2 \leqslant 4AC \qquad (4\text{-}103)$$

เนื่องจาก $$\langle(\Delta x)^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*(x-\langle x\rangle)^2\Psi d\bar{r}$$

$$= \langle x^2\rangle - 2\langle x\rangle^2 + \langle x\rangle^2$$

$$= \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 \qquad (4\text{-}104)$$

โดยทำนองเดียวกัน

$$\langle(\Delta p_x)^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*(p_x - \langle p_x\rangle)^2\Psi d\bar{r} = \langle p_x^2\rangle - \langle p_x\rangle^2 \qquad (4\text{-}105)$$

ทั้งสมการ (4-104) และ (4-105) เราอาจจะเลือกให้จุดศูนย์กลางแรงโน้มถ่วงของกลุ่มคลื่น (wave packet) อยู่ที่จุดกำเนิด และให้ค่าเฉลี่ยของโมเมนตัมเชิงเส้นเป็นศูนย์ ทำให้

$$\begin{aligned}\langle(\Delta x)^2\rangle &= \langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\Psi^* x^2\Psi d\bar{r} = A \\ \langle(\Delta p_x)^2\rangle &= \langle p_x^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\Psi d\bar{r} = C\hbar^2\end{aligned} \qquad (4\text{-}106)$$

แทนค่าในสมการ (4-103)

$$\langle(\Delta x)^2\rangle\langle(\Delta p)^2\rangle = AC\hbar^2 \geqslant \frac{\hbar^2}{4}$$

เนื่องจาก $\qquad p_x x - x p_x = \frac{\hbar}{i} \qquad$ ทำให้

$$\langle(\Delta x)^2\rangle\langle(\Delta p)^2\rangle \geqslant \frac{1}{4}\langle| p_x x - x p_x |^2\rangle \qquad (4\text{-}107)$$

สมการ (4-107) อาจจะทำให้อยู่ในรูปของตัวดำเนินการทั่ว ๆ ไปที่สับเปลี่ยนกันไม่ได้ ดังนี้

ให้ M_1 และ M_2 เป็นตัวดำเนินการที่สับเปลี่ยนกันไม่ได้

$$\langle(\Delta M_1)^2\rangle\langle(\Delta M_2)^2\rangle \geqslant \frac{1}{4}\langle|M_1M_2 - M_2M_1|^2\rangle \qquad (4\text{-}108)$$

เมื่อ $\qquad \langle(\Delta M_i)^2\rangle = \int\Psi^*(M_i - \langle M_i\rangle)_i{}^2\Psi d\bar{r}\,, \quad i = 1, 2 \qquad (4\text{-}109)$

จากสมการที่ (4-89) และ (4-93) เราได้ค่าของกำลังสองของโมเมนตัมเชิงมุม และการฉายของโมเมนตัมเชิงมุมบนแกน z ดังนี้

$$L^2 = \hbar^2\ell(\ell+1)\,, \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots \qquad (4\text{-}110)$$

$$L_z = \hbar m\,, \qquad -\ell \leqslant m \leqslant \ell \qquad (4\text{-}111)$$

จากสมการที่ (4-110) ถ้า $\ell = 0$ ค่า L^2 เป็นศูนย์ในกลศาสตร์ควอนตัม แต่ถ้า L^2 เป็นศูนย์ในกลศาสตร์แผนเดิม ย่อมหมายถึงความเร็วของอนุภาคเป็นศูนย์หรือทิศของอนุภาคเคลื่อนผ่านจุดศูนย์กลางแรงโน้มถ่วง ดังนั้นสถานะ $\ell = 0$ จึงไม่มีข้อเปรียบเทียบในกลศาสตร์แผนเดิม แต่ในกลศาสตร์ควอนตัม $\ell = 0$ หมายถึงว่าระบบควอนตัมนั้นอยู่ในสถานะที่ต่ำที่สุด

อีกกรณีหนึ่ง จากกลศาสตร์แผนเดิมเราจะหวังว่า

$$L^2 = L^2_{z\text{สูงสุด}} = \hbar^2\ell^2 \tag{4-112}$$

แต่ในกลศาสตร์ควอนตัมจะพบว่า

$$L^2 = \hbar^2\ell^2 + \hbar^2\ell = L^2_{z\text{สูงสุด}} + \hbar^2\ell \tag{4-113}$$

เทอมสุดท้ายในสมการ (4-113) เป็นผลเนื่องมาจากความสับเปลี่ยนกันไม่ได้ของ L_x, L_y และ L_z (ซึ่งจะแสดงให้เห็นต่อไปนี้) ทำให้ไม่อาจหาค่าของตัวดำเนินการเหล่านี้ได้พร้อม ๆ กัน ในกรณีที่เรากำหนดให้ $L_z = L_{z\text{สูงสุด}} = \hbar\ell$ ทำให้ค่าเฉลี่ยของ L_x และ L_y เป็นศูนย์ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}\langle(\Delta L_x)^2\rangle &= \langle L_x^2\rangle \\ \langle(\Delta L_y)^2\rangle &= \langle L_y^2\rangle \\ \langle L^2\rangle &= L^2_{z\text{สูงสุด}} + \langle(\Delta L_x)^2\rangle_{\text{ต่ำสุด}} + \langle(\Delta L_y)^2\rangle_{\text{ต่ำสุด}}\end{aligned} \tag{4-114}$$

จากสมการที่ (4-108)

$$\begin{aligned}\langle(\Delta L_x)^2\rangle_{\text{ต่ำสุด}}\langle(\Delta L_y)^2\rangle_{\text{ต่ำสุด}} &= \frac{1}{4}|L_xL_y - L_yL_x|^2 = \frac{1}{4}\hbar^2 L^2_{z\text{สูงสุด}} \\ &= \frac{1}{4}\hbar^4\ell^2\end{aligned} \tag{4-115}$$

แต่เนื่องจากสมมาตรของแกน $-x$ และแกน $-y$ ทำให้เราอาจจะกล่าวได้ว่า

$$\langle(\Delta L_x)^2\rangle_{\text{ต่ำสุด}} = \langle(\Delta L_y)^2\rangle_{\text{ต่ำสุด}} = \frac{1}{2}h^2\ell \tag{4-116}$$

แทนค่า (4-116) ลงใน (4-114) เราจะได้ (4-113) จะเห็นว่าเทอมที่เพิ่มขึ้นใน (4-113) เนื่องมาจากหลักของความไม่แน่นอน