บทที่ 3
ตัวแกว่งกวัดอย่างง่ายเชิงเส้น

เมื่อนักฟิสิกส์คิดทฤษฎีขึ้นใหม่ ตัวแกว่งกวัดอย่างง่ายมักจะเป็นหุ่นทางคณิตศาสตร์สำหรับการทดลองความคิดของเขา ก่อนที่เขาจะพัฒนาปัญหาให้สลับซับซ้อนขึ้นไปอีก ในเชิงปฏิบัติแล้ว ระบบการเคลื่อนที่ที่สลับซับซ้อนมักจะสามารถศึกษาได้ในเชิงของการแกว่งกวัดอย่างง่าย โดยการดัดแปลงให้ระบบการเคลื่อนที่เหล่านั้นอยู่ในรูปของชุดของการสั่นสะเทือนปกติ นอกจากนี้การแกว่งกวัดอย่างง่าย ยังใช้เป็นตัวอย่างแสดงวิธีการต่าง ๆ ที่จะใช้ในการแก้ปัญหาฟิสิกส์ ซึ่งจะเป็นความสนใจของเราในบทนี้

3.1 ทฤษฎีตัวแกว่งกวัดแผนเดิม (Classical Harmonic Oscillator)

ให้มวลเป็นจุดมีขนาดมวล m_0 ถูกกระทำด้วยแรงยืดหยุ่น

$$F(x) = -kx \tag{3-1}$$

ซึ่งมี k เป็นสัมประสิทธิ์ของความยืดหยุ่น สมการการเคลื่อนที่แผนเดิม สำหรับตัวแกว่งกวัดนี้ (ปัญหาในหนึ่งมิติ) อาจจะเขียนได้ดังนี้

$$m_0\ddot{x} = -kx \tag{3-2}$$

ซึ่งสมการ (3-2) แสดงระบบการแกว่งกวัดที่ง่ายที่สุด โดยมีผลเฉลยเป็น

$$x = a\cos\omega t \tag{3-3}$$

เมื่อ $$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{\tau} = \sqrt{\frac{k}{m_0}} \tag{3-4}$$

เป็นความถี่เชิงมุม โดยมี a เป็นอำพนของการแกว่ง แทน (3-3) ใน (3-2) พลังงานศักย์ของตัวแกว่งกวัดอย่างง่ายอาจจะหาได้จาก

$$V(x) = -\int_0^x F(x)dx \tag{3-5}$$

$$= \int_0^x kxdx$$

$$= \frac{kx^2}{2}\Big|_0^x = \frac{kx^2}{2} \tag{3-6}$$

จากผลเฉลยสมการที่ (3-3)

$$\dot{x} = -a\omega \sin \omega t$$

$$\ddot{x} = -a\omega^2\cos \omega t = -\omega^2 x \qquad \text{แสดงว่า}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m_0}$$

ทำให้เราสามารถเขียนสมการ (3-6) ได้เสียใหม่ดังนี้

$$V(x) = \frac{m_0\omega^2x^2}{2} = \frac{m_0\omega^2a^2}{2}\cos^2\omega t \tag{3-7}$$

สำหรับพลังงานจลน์นั้น เราอาจจะเขียนได้ว่า

$$T = \frac{m_0\dot{x}^2}{2} = \frac{m_0a^2\omega^2\sin^2\omega t}{2} \tag{3-8}$$

จากสมการที่ (3-7) และ (3-8) ทำให้เราสามารถเขียนพลังงานของระบบการแกว่งกวัดอย่างง่ายนี้ได้ว่า

$$E = T + V = \frac{1}{2}m_0\omega^2a^2(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t)$$

$$= \frac{1}{2}m_0\omega^2a^2 \tag{3-9}$$

Lagrangian :

$$L = T - V$$

$$= \frac{m_0\dot{x}^2}{2} - \frac{m_0\omega^2x^2}{2} \tag{3-10}$$

โมเมนตัมทั่วไป : $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m_0\dot{x} = p$

ตัวแปรบังคับรูป (canonical variables) : p, x มีสองตัว

แฮมมิลโทเนียน : $H = p\dot{x} - L = \dfrac{p^2}{m_0} - \dfrac{p^2}{2m_0} + \dfrac{m_0\omega^2x^2}{2} = \dfrac{p^2}{2m_0} + \dfrac{m_0\omega^2x^2}{2}$ (3-11)

หมายเหตุ การสร้างแฮมมิลโทเนียนต้องกำจัดตัวแปรอื่นออกให้หมด ให้เหลือเฉพาะค่าคงที่กับตัวแปรบังคับรูปเท่านั้น

เมื่อคิดเฉพาะค่าแล้วจะเห็นว่า

$$H = \frac{1}{2}m_0\dot{x}^2 + \frac{m_0\omega^2x^2}{2} = T + V = E \tag{3-12}$$

ซึ่งเป็นคุณสมบัติเฉพาะของระบบอนุรักษ์

3.2 การแก้สมการชโรดิงเจอร์ของตัวแกว่งกวัดอย่างง่ายโดยใช้ออร์ทอโกนอล-โพลีโนเมียล

เราอาจจะตีความแฮมมิลโทเนียนของสมการ (3.11) ให้อยู่ในรูปของสมการคลื่นในกลศาสตร์ควอนตัมได้ดังนี้

$$H\Psi = \left(\frac{p^2}{2m_0} + \frac{m_0\omega^2x^2}{2}\right)\Psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m_0\omega^2x^2}{2}\right)\Psi(x)$$

$$= E\Psi(x) \tag{3-13}$$

ให้ $z = \sqrt{\dfrac{m_0\omega}{\hbar}}\,x$ สมการ (3-13) จึงอาจเขียนได้ว่า

$$\frac{d^2\Psi}{dz^2} + \left(\frac{2E}{\hbar\omega} - z^2\right)\Psi = 0 \tag{3-14}$$

ให้ $\Psi = e^{-z^2/2}v(z)$ (3-15)

แทนค่า Ψ ลงในสมการ (3-14) รวบรวมเทอมต่าง ๆ ได้ว่า

$$e^{-z^2/2}\{v''(z) - 2zv'(z) + (z^2-1)\,v(z)\} + e^{-z^2/2}\left(\frac{2E}{\hbar\omega} - z^2\right) v(z) = 0$$

โดยที่ $v''(z) = \frac{d^2}{dz^2} v(z)$ และ $v'(z) = \frac{d}{dz} v(z)$ ทำให้

$$v''(z) - 2z\,v'(z) + \left(\frac{2E}{\hbar\omega} - 1\right) v(z) = 0$$

$$v''(z) - 2z\,v'(z) + 2nv(z) = 0 \qquad (3\text{-}16)$$

$$n = \left(\frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}\right) \qquad (3\text{-}17)$$

สมการที่ (3-16) คือ สมการเฮอร์มีทดิฟเฟอเรนเชียล ซึ่งผลเฉลยเป็นเฮอร์มีทโพลีโนเมียล ซึ่งมีผลเฉลยดังนี้

$$v(z) = C_n H_n(z) \qquad (3\text{-}18)$$

ทำให้สามารถเขียนฟังก์ชันคลื่นเป็น

$$\Psi_n(z) = C_n e^{-z^2/2} H_n(z) \qquad (3\text{-}19)$$

$\Psi_n(z)$ เป็นออร์ทอนอร์มอลไลซ์ฟังก์ชันไอเกน ทำให้

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*_{n'}(z)\Psi_n(z)dz &= C^*_{n'}C_n \int e^{-z^2} H_{n'}(z)H_n(z)dz \\
&= C^*_{n'}C_n\,\delta_{n',n}\,2^n n!\sqrt{\pi}\ ^{[2]} \\
&= \delta_{n',n}
\end{aligned}$$

$$|C_n|^2 = \frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}} \qquad (3\text{-}20)$$

$$\therefore\ C_n = \frac{1}{(2^n n!\sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}} \qquad (3\text{-}21)$$

---

[2] พิสิทฐ์ วรสิงห์, ibid, หน้า 370.

ดังนั้นออร์ทอนอร์มอลไลซ์ฟังก์ชันไอเกนก็คือ

$$\Psi_n(x) = \frac{(m_0\omega)^{\frac{1}{4}}}{(2^n n!\sqrt{\pi\hbar})^{\frac{1}{2}}} e^{-\left(\frac{m_0\omega}{\hbar}\right)\frac{x^2}{2}} H_n\left\{\left(\frac{m_0\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} x\right\} \tag{3-22}$$

โดยมีค่าไอเกนจากสมการ (3-17)

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \tag{3-23}$$

3.3 ทฤษฎีตัวแทนในกลศาสตร์ควอนตัมของตัวแกว่งกวัดอย่างง่าย

ในการคำนวณทางกลศาสตร์ควอนตัม ปัญหาต่าง ๆ จำเป็นต้องใช้วิธีการต่าง ๆ กันออกไปเพื่อให้ได้คำตอบ ความจำเป็นเหล่านี้เป็นที่มาของตัวแทนต่าง ๆ ในวิชากลศาสตร์ควอนตัม ในตอนนี้เราจะใช้การคำนวณเกี่ยวกับตัวแกว่งกวัด แสดงวิธีคำนวณตามแบบของตัวแทนต่าง ๆ ซึ่งนิยมใช้กัน จากสมการที่ (3-11) เราเขียนแฮมมิลโทเนียนในกลศาสตร์ควอนตัมเป็น

$$H = \frac{p^2}{2m_0} + \frac{m_0\omega^2 x^2}{2}$$

โดยกำหนดให้ p และ x เป็นตัวดำเนินการ ซึ่งเป็นไปตามกฎการสับเปลี่ยนกันดังนี้

$$[p, x] = px - xp = \frac{\hbar}{i} \tag{3-24}$$

ความสัมพันธ์ในสมการ (3-24) นั้นอาจจะพิสูจน์ได้หลายแบบ แต่ละแบบเป็นผลมาจากตัวแทนซึ่งเราเลือกขึ้นใช้ ซึ่งแต่ละตัวแทนมีตัวแปรอิสระซึ่งแตกต่างกันออกไป

3.3.1 ตัวแทนพิกัด (coordinate representation หรือ x-representation)

ในตัวแทนพิกัดนี้ p เป็นตัวดำเนินการ แต่ x เป็นเพียงค่าตัวเลขค่าหนึ่ง ดังนั้นเราอาจจะเขียนสมการกำกับ p ได้ดังนี้

$$p = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \tag{3-25}$$

ดังนั้น $\frac{\hbar}{i}$ จะเป็นค่าไอเกนของตัวดำเนินการในสมการ (3-24) ซึ่งตัวดำเนินการนั้นกระทำบนฟังก์ชันคลื่น $\Psi(x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปร x

$$(px - xp)\Psi(x) \;=\; \frac{\hbar}{i}\Psi(x) \tag{3-26}$$

แทนค่าสมการ (3-25) ลงในสมการที่ (3-11) ทำให้แฮมมิลโทเนียนกลายเป็นตัวดำเนินการดังนี้

$$H \;=\; -\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m_0\omega^2}{2}x^2 \tag{3-27}$$

ตัวดำเนินการนี้ทำให้ได้สมการชโรดิงเจอร์

$$\begin{aligned} H\Psi(x) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m_0\omega^2}{2}x^2\right)\Psi(x) \\ &= E\Psi(x) \end{aligned} \tag{3-28}$$

ซึ่งเหมือนกับสมการ (3-13) จะเห็นว่าในตัวแทนพิกัด ตัวดำเนินการแฮมมิลโทเนียนให้ค่าฟังก์ชันไอเกนและค่าไอเกนเช่นเดียวกับการแก้ปัญหาสมการชโรดิงเจอร์ โดยใช้ออร์ทอโนนอลโพลีโนเมียลในหัวข้อ 3.2 พึงสังเกตความแตกต่างของวิธีการไว้ให้ดี เพราะตัวแทนพิกัดเป็นตัวแทนหนึ่งในระบบคณิตศาสตร์ที่เรียกว่าสเปซของฮิลเบอร์ท ซึ่งเป็นเวกเตอร์สเปซเชิงเส้นชนิดหนึ่ง ส่วนการแก้ปัญหาของสมการชโรดิงเจอร์เป็นเรื่องของการแก้ปัญหาสมการดิฟเฟอเรนเชียล จะกล่าวว่าตัวแทนพิกัดที่เรากำลังวิเคราะห์อยู่นี้เป็นการตีความปัญหาสมการดิฟเฟอเรนเชียลของสมการชโรดิงเจอร์ ให้อยู่ในรูปของเวกเตอร์สเปซเชิงเส้นชนิดหนึ่งก็ได้

สมการชโรดิงเจอร์ในตัวแทนพิกัด คือ

$$\left(E - Ax^2 + B\frac{d^2}{dx^2}\right)\Psi(x) \;=\; 0 \tag{3-29}$$

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{m_0\omega^2}{2} \\ B &= \frac{\hbar^2}{2m_0} \end{aligned}\right\} \tag{3-30}$$

ให้

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{E}{\sqrt{AB}} = \frac{2E}{\hbar\omega} \\ x_0 &= \sqrt[4]{\frac{B}{A}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m_0\omega}} \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}31)$$

แต่สมการที่ (3-29) คือสมการที่ (3-13) ดังนั้นจาก (3-23)

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

ทำให้ λ จาก (3-31) เป็น

$$\lambda_n = 2n + 1 \qquad (3\text{-}32)$$

ซึ่งเท่ากับสมการที่ (3-17) โดย $n = 0, 1, 2, \ldots$ โดยมีฟังก์ชันไอเกน คือ

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{(2^n n!\sqrt{\pi}x_0)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} H_n\left(\frac{x}{x_0}\right) \qquad (3\text{-}33)$$

ซึ่งเหมือนสมการ (3-22) $\Psi_n(x)$ เป็นออร์ทอนอร์มอลฟังก์ชัน

เพื่อเป็นการเปรียบค่าคาดหมายซึ่งคำนวณได้โดยตัวแทนที่ต่างกัน จะได้คำนวณค่าคาดหมายเป็นตัวอย่างดังนี้

ค่าคาดหมายของพิกัดระหว่างฟังก์ชันไอเกน $\Psi_{n'}$ และ Ψ_n คือ

$$x_{n',n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*_{n'}(x)\, x\, \Psi_n(x)dx \qquad (3\text{-}34)$$

ค่าคาดหมายของโมเมนตัมระหว่างฟังก์ชันไอเกน $\Psi_{n'}$ และ Ψ_n คือ

$$p_{n',n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*_{n'}(x) \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \Psi_n(x)dx \qquad (3\text{-}35)$$

การแก้สมการที่ (3-34) อาจทำได้โดยอาศัย Generating function ดังนี้[3]

$$F(x, y) = e^{-y^2+2xy} = e^{x^2}e^{-(y-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} y^n \tag{3-36}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2(x-y)F$$

แทนค่า F จากสมการ (3-36) ได้ว่า

$$\sum_n n \frac{H_n(x)}{n!} y^{n-1} = \sum_n 2x \frac{H_n(x)}{n!} y^n - \sum 2 \frac{H_n(x)}{n!} y^{n+1}$$

เทียบสัมประสิทธิ์ของ y^n

$$\frac{(n+1)H_{n+1}(x)}{(n+1)!} = \frac{2xH_n(x)}{n!} - \frac{2H_{n-1}(x)}{(n-1)!}$$

หรือ

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

$$xH_n(x) = nH_{n-1}(x) + \frac{1}{2}H_{n+1}(x) \tag{3-37}$$

จากสมการ (3-33)

$$x\Psi_n(x) = \frac{x_0}{(2^n n! \sqrt{\pi} x_0)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{x_0^2}} \left(\frac{x}{x_0}\right) H_n\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

$$= \frac{x_0}{(2^n n! \sqrt{\pi} x_0)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{x_0^2}} \left\{nH_{n-1}\left(\frac{x}{x_0}\right) + \frac{1}{2}H_{n+1}\left(\frac{x}{x_0}\right)\right\}$$

$$= x_0\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(2^{n-1}(n-1)! \sqrt{\pi} x_0)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{x_0^2}} H_{n-1}\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

---

[3] พิสิทธิ์ สิริสิงห์, op., cit., หน้า 367.

$$+x_0\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(2^{n+1}(n+1)!\sqrt{\pi}x_0)^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}H_{n+1}\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

$$\therefore\ x\Psi_n(x) = x_0\left\{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\Psi_{n-1}+\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\Psi_{n+1}\right\} \tag{3-38}$$

แทนค่าลงในสมการที่ (3-34) แล้วใช้สมการที่ (3-20)

$$x_{n',n} = \int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*_{n'}(x)x_0\left\{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\Psi_{n-1}+\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\Psi_{n+1}\right\}dx$$

$$= x_0\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\delta_{n',n-1}+x_0\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\delta_{n',n-1}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{n-1,n} &= x_0\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ x_{n+1,n} &= x_0\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{3-39}$$

การพิสูจน์สมการที่ (3-35) พิจารณาจากสมการ (3-36)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2ye^{-y^2+2xy} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{H'_n(x)}{n!}y^n$$

$$= 2yF = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}y^{n+1}$$

เทียบสัมประสิทธิ์ของ y^n

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x) \tag{3-40}$$

จากสมการที่ (3-33)

$$\Psi'_n(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2}}{(2^n n!\sqrt{\pi}x_0)^{\frac{1}{2}}}\left\{-\frac{1}{2}\frac{2x}{x_0^2}H_n\left(\frac{x}{x_0}\right)+\frac{H'_n}{x_0}\left(\frac{x}{x_0}\right)\right\}$$

โดยที่ $H_n'\left(\frac{x}{x_0}\right)$หมายถึง การหาอนุพันธ์ของ $H_n\left(\frac{x}{x_0}\right)$ เทียบกับ $\left(\frac{x}{x_0}\right)$

$$\Psi_n'(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2}}{(2^n n!\sqrt{\pi}x_0)^{\frac{1}{2}}}\left\{-\frac{1}{x_0}\left(nH_{n-1}\left(\frac{x}{x_0}\right)+\frac{1}{2}H_{n+1}\left(\frac{x}{x_0}\right)\right)\right.$$

$$\left.+\frac{2n}{x_0}H_{n-1}\left(\frac{x}{x_0}\right)\right\}$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2}}{x_0(2^n n!\sqrt{\pi}x_0)^{\frac{1}{2}}}\left\{nH_{n-1}\left(\frac{x}{x_0}\right)-\frac{1}{2}H_{n+1}\left(\frac{x}{x_0}\right)\right\}$$

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\Psi_n = -i\frac{\hbar}{x_0}\left\{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{H_{n-1}\left(\frac{x}{x_0}\right)}{(2^{n-1}(n-1)!\sqrt{\pi}x_0)^{\frac{1}{2}}}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{H_{n+1}\left(\frac{x}{x_0}\right)}{(2^{n+1}(n+1)!\sqrt{\pi}x_0)^{\frac{1}{2}}}\right\}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2}$$

$$= -im_0\omega x_0\left\{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\Psi_{n-1}-\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\Psi_{n+1}\right\} \qquad \textbf{(3-41)}$$

แทนค่าลงในสมการ (3-35)

$$p_{n',n} = \int_{-\infty}^{\infty}\Psi_{n'}^*(x)\left[-im_0\omega x_0\left\{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\Psi_{n-1}-\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\Psi_{n+1}\right\}\right]dx$$

และจากสมการที่ (3.20)

$$p_{n',n} = -im_0\omega x_0\left\{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\delta_{n',n-1}-\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\delta_{n',n+1}\right\}$$

$$p_{n-1,n} = -im_0\omega x_0\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = -im_0\omega x_{n-1,n}$$

$$\textbf{(3-42)}$$

$$p_{n+1,n} = +im_0\omega x_0\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = im_0\omega x_{n+1,n}$$

3.3.2 ตัวแทนโมเมนตัม (momentum representation **หรือ** p−representation)

ในตัวแทนโมเมนตัมนี้ x เป็นตัวดำเนินการ p เป็นค่าตัวเลขค่าหนึ่ง โดยที่

$$x = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p} \tag{3-43}$$

ในตัวแทนนี้ ฟังก์ชันคลื่นเป็นฟังก์ชันของตัวแปร p ซึ่งทำให้

$$(px - xp)\,Q(p) = \frac{\hbar}{i}\,Q(p) \tag{3-44}$$

ซึ่งทำให้เราสามารถสร้างทฤษฎีของตัวแกว่งกวัดเชิงเส้นอย่างง่ายในตัวแทนโมเมนตัมได้ดังนี้

$$\left(E - \frac{P^2}{2m_0} + \frac{m_0\omega^2\hbar^2}{2}\frac{d^2}{dp^2}\right)Q(p) = \left(E - A_1p^2 + B_1\frac{d^2}{dp^2}\right)Q(p) = 0 \tag{3-45}$$

สมการที่ (3-45) คือสมการที่ (3-29) โดยมีตัวแทน p แทนตัวแทน x จากสมการ (3-30), (3-31) และ (3-32) เราอาจจะกำหนดค่าเทียบเคียงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2m_0}, \quad B_1 = \frac{m_0\omega^2\hbar^2}{2}, \quad \lambda_1 = \frac{E}{\sqrt{A_1B_1}} = \frac{2E}{\hbar\omega} \\ p_0 \ (\text{แทน } x_0) &= \left(\frac{B_1}{A_1}\right)^{\frac{1}{4}} = (\hbar m_0\omega)^{\frac{1}{2}} = \frac{\hbar}{x_0} \end{aligned} \tag{3-46}$$

ดังนั้นเราจึงอาจเทียบค่าไอเกนได้ดังนี้

จากการสังเกตสมการ (3-32)

$$\lambda_1 = 2n + 1$$

ทำให้เขียน E_n ได้จากสมการ (3-46)

$$E_n = \frac{\lambda_1}{2}\hbar\omega = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \tag{3-47}$$

แทนที่จะเทียบค่าอย่างนี้ เราอาจจะหาผลเฉลยของสมการ (3-45) โดยตรงโดยใช้อนุกรม ก็ได้ โดยที่ตัวแปรอิสระคือ p ทำให้ได้ผลเฉลยในรูป

$$Q_n(p) = C_n e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p_0}\right)^2} H_n\left(\frac{p}{p_0}\right) \tag{3-48}$$

การหาค่า C_n นอกจากจะใช้คุณสมบัติความเป็นออร์ทอนอร์มอลโพลีโนเมียลของ H_n ดังเช่นในสมการที่ (3-20) แล้ว ยังต้องคำนึงถึงการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันคลื่นในตัวแทนพิกัด และในตัวแทนโมเมนตัม ดังนี้

$$\Psi(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} Q(p) e^{i\frac{p}{\hbar}x}\, dp \tag{3-49}$$

$$Q(p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) e^{-i\frac{p}{\hbar}x}\, dx \tag{3-50}$$

ดังนั้น

$$Q_n(p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{(2^n n!\sqrt{\pi}x_0)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} e^{-i\frac{p}{\hbar}x} H_n\left(\frac{x}{x_0}\right) \tag{3-51}$$

ให้ $y = \frac{x_0}{x}$

$$Q_n(p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{x_0}{2^n n!\sqrt{\pi}\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-\frac{y^2}{2}} e^{-i\frac{px_0}{\hbar}y} H_n(y) \tag{3-52}$$

ด้วยการแทนค่า $H_n(y)$ ลงไปพบว่า

$$Q_n(p) = \frac{(-i)^n}{(2^n n!\sqrt{\pi}p_0)^{\frac{1}{2}}} H_n\left(\frac{p}{p_0}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p_0}\right)^2} \tag{3-53}$$

ฟังก์ชันคลื่นในสมการ (3-53) เป็นผลเฉลยของสมการคลื่น (3-45)

ในตัวแทนนี้ $x_{n',n}$ และ $p_{n',n}$ มีค่าดังนี้

$$x_{n',n} = \int_{-\infty}^{\infty} dp\, Q_{n'}^{*}(p)\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}\right)Q_n(p) \tag{3-54}$$

$$p_{n',n} = \int_{-\infty}^{\infty} dp\, Q_{n'}^{*}(p)pQ_n(p) \tag{3-55}$$

เราจะเริ่มจากการหาค่า $p_{n',n}$ ก่อน จากสมการที่ (3-37) ทำให้เราสามารถเขียนความสัมพันธ์เดียวกันในตัวแทนโมเมนตัมได้ดังนี้

$$pH_n(p) = nH_{n-1}(p) + \frac{1}{2}H_{n+1}(p) \tag{3-56}$$

และจากสมการที่ (3-53)

$$\begin{aligned}
pQ_n(p) &= \frac{(-i)^n}{(2^n n!\sqrt{\pi}p_0)^{\frac{1}{2}}}\, pH_n\left(\frac{p}{p_0}\right)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p_0}\right)^2} \\
&= \frac{(-i)^n}{(2^n n!\sqrt{\pi}p_0)^{\frac{1}{2}}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p_0}\right)^2}\left\{nH_{n-1}\left(\frac{p}{p_0}\right) + \frac{1}{2}H_{n+1}\left(\frac{p}{p_0}\right)\right\} \\
&= p_0(-i)\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{(-i)^{n-1}}{(2^{n-1}(n-1)!\sqrt{\pi}p_0)^{\frac{1}{2}}}H_{n-1}\left(\frac{p}{p_0}\right)\right\} \\
&\quad + p_0(i)\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{(-i)^{n+1}}{(2^{n+1}(n+1)!\sqrt{\pi}p_0)^{\frac{1}{2}}}H_{n+1}\left(\frac{p}{p_0}\right)\right\} \\
&= -ip_0\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}Q_{n-1}(p) + ip_0\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}Q_{n+1}(p)
\end{aligned}$$

จากสมการที่ (3-55)

$$p_{n',n} = -ip_0\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} Q_{n'}^{*}(p)Q_{n-1}(p)dp$$

$$+ip_0\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}Q_{n'}^*(p)Q_{n+1}(p)dp$$

$$= -ip_0\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\delta_{n',n-1}+ip_0\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\delta_{n',n+1}$$

$$= -im_0\omega\left(\frac{h}{m_0\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\delta_{n',n-1}+im_0\omega\left(\frac{h}{m_0\omega}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\delta_{n',n+1}$$

$$\left.\begin{aligned} p_{n-1,n} &= -im_0\omega x_0\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ p_{n+1,n} &= im_0\omega x_0\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} = \quad (3-42)$$

โดยทำนองเดียวกัน ผลเฉลยของ $x_{n',n}$ ก็คือสมการ (3-39) ตัวแทนทั้งสองคือตัวแทนพิกัดและตัวแทนโมเมนตัม ให้ผลเฉลยของค่าคาดหมาย x และ p เหมือนกันทุกประการ

3.3.3 ตัวแทนเมทริกซ์ (matrix representation)

ความสัมพันธ์การสับเปลี่ยนกันได้ อาจจะทำให้อยู่ในรูปตัวแทนเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\underline{\underline{p}}\cdot\underline{\underline{x}}-\underline{\underline{x}}\cdot\underline{\underline{p}} = \frac{h}{i}\underline{\underline{I}} \qquad (3-57)$$

โดยที่ $\underline{\underline{p}}$ และ $\underline{\underline{x}}$ เป็นเมทริกซ์ มีสมาชิกคือ (3-42) และ (3-39) ตามลำดับ โดยทำนองเดียวกัน แฮมมิลโทเนียนสมการที่ (3-11) อาจจะเขียนในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\underline{\underline{H}} = \frac{(\underline{\underline{p}})^2}{2m_0}+\frac{m_0\omega^2}{2}(\underline{\underline{x}})^2 \qquad (3-58)$$

เราจะเขียนเมทริกซ์ $\underline{\underline{x}}$ เสียก่อน

$$\underline{\underline{x}} = \begin{vmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} & \cdots \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} & \cdots \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix} \qquad (3-59)$$

โดยที่

$$\left.\begin{aligned} x_{n-1,n} &= x_0\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ x_{n+1,n} &= x_0\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{3-39}$$

ทำให้

$$x = x_0 \begin{vmatrix} 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} & 0 & \left(\frac{2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \end{vmatrix} \tag{3-60}$$

เมทริกซ์ $\underline{p}$ ก็อาจจะเขียนได้โดยทำนองเดียวกัน

$$\underline{p} = \begin{vmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix} \tag{3-61}$$

และจากสมการ (3-42)

$$p_{n-1,n} = -im_0\omega x_0\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$p_{n+1,n} = im_0\omega x_0\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\underline{p} = m_0\omega x_0 \begin{vmatrix} 0 & -i\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} & \cdots \\ i\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} & 0 & \\ \vdots & & \end{vmatrix} \tag{3-62}$$

พึงสังเกตว่า $(\underline{x})^{+} = (\underline{x})$ และ $(\underline{p})^{+} = (\underline{p})$

ให้ $(\underline{p}\cdot\underline{x})_{n',n}$ เป็นสมาชิกที่ (n', n) ของผลคูณของเมทริกซ์ $\underline{\underline{p}}\cdot\underline{\underline{x}}$ จะเห็นว่า

$$(\underline{p}\cdot\underline{x})_{n',n} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{n'k}x_{kn} \tag{3-63}$$

$$\begin{aligned}(\underline{p}\cdot\underline{x})_{n',n} - (\underline{x}\cdot\underline{p})_{n',n} &= \sum_{k=0}^{\infty}(p_{n'k}x_{kn} - x_{n'k}p_{kn}) \\ &= \frac{\hbar}{i}\delta_{nn'}\end{aligned} \tag{3-64}$$

สมการ (3-64) เป็นสมาชิกเมทริกซ์ของสมการ (3-57)

เราอาจจะคำนวณสมาชิกเมทริกซ์ของ (3-58) ได้ดังนี้

$$H_{n',n} = \sum_{k}\left(\frac{1}{2m_0}p_{n'k}p_{kn} + \frac{m_0\omega^2}{2}x_{n',k}x_{k,n}\right) \tag{3-65}$$

แทนสมการ (3-65) ด้วย (3-60) และ (3-62)

$$H_{n',n} = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)\delta_{n',n} \tag{3-66}$$

ทำให้เขียนเมทริกซ์แฮมมิลโทเนียนได้เป็น

$$\underline{\underline{H}} = \hbar\omega\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & \\ \vdots & & & \end{vmatrix} \tag{3-67}$$

3.3.4 ทฤษฎีควอนตัมในรูปที่ไม่มีตัวแทน

ทฤษฎีควอนตัมในรูปไม่มีตัวแทนนี้ คือ สเปซของฮิลเบอร์ท ซึ่งเราจะเขียนฟังก์ชันคลื่นได้ดังนี้

ฟังก์ชันคลื่นในตัวแทนพิกัด $\Psi_n(x) = \langle x|n\rangle \qquad (\Psi_n^*(x) = \langle n|x\rangle)$ (3-68)

ฟังก์ชันคลื่นในตัวแทนโมเมนตัม $Q_n(p) = \langle p|n\rangle$ (3-69)

ฟังก์ชันคลื่น $\langle x|n\rangle$ อาจจะตีความหมายว่า เป็นสมาชิกของเวกเตอร์ $|n\rangle$ บนเวกเตอร์มูลฐาน $|x\rangle$ นั่นคือ

$$|n\rangle = \int |x\rangle\langle x|n\rangle dx = \int |x\rangle\Psi_n(x)dx \tag{3-70}$$

ชุดของเวกเตอร์มูลฐาน $|x\rangle$ นี้เป็นไอเกนเวกเตอร์ของตัวดำเนินการพิกัด $\underline{X}$ นั่นคือ

$$\underline{X}|x'\rangle = x'|x'\rangle \tag{3-71}$$

นอกจากนี้ฟังก์ชันคลื่น $\langle x|n\rangle$ อาจจะถือได้ว่าเป็นสมาชิกของเมทริกซ์ซึ่งแถวนอนเป็นตัวเลขที่ต่อเนื่อง x แถวตั้งเป็นตัวเลขที่นับได้ n

ความหนาแน่นของความน่าจะเป็นในตัวแทนพิกัดอาจเขียนได้ดังนี้

$$|\Psi_n(x)|^2 = \langle n|x\rangle\langle x|n\rangle$$

ทำให้สามารถเขียนความน่าจะเป็นทั้งหมดได้ดังนี้

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\Psi_n(x)|^2dx = \int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*(x)\Psi_n(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\langle n|x\rangle\langle x|n\rangle dx$$

$$= \langle n|n\rangle \qquad = 1 \tag{3-72}$$

พึงสังเกตว่าความน่าจะเป็นทั้งหมดนี้ไม่มีตัวแทน เพราะ

$$\int_{-\infty}^{\infty}|Q_n(p)|^2dp = \langle n|n\rangle = 1 \tag{3-73}$$

ถ้า $|n\rangle$ เป็นออร์ทอนอร์มอลฟังก์ชันที่สมบูรณ์

$$|\Psi\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n|\Psi\rangle \tag{3-74}$$

โดยที่

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = \underline{\underline{I}} \tag{3-75}$$

ถ้าเราเลือกฟังก์ชันคลื่นในตัวแทนพิกัดมากระจาย จะได้ผลลัพธ์เป็น

$$\langle x|\Psi\rangle = \sum_n \langle x|n\rangle\langle n|\Psi\rangle \tag{3-76}$$

ในการคำนวณสมาชิกของเมทริกซ์เราต้องใช้ตัวแทนใดตัวแทนหนึ่ง เช่น ถ้า A เป็นตัวดำเนินการตัวหนึ่ง $|n\rangle$ เป็นเวกเตอร์ ในตัวแทนพิกัดจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\langle n'|A|n\rangle &= \int \langle n'|x'\rangle\langle x'|A|x\rangle\langle x|n\rangle dx dx' \\
&= \int \langle n'|x'\rangle\, A(x')\delta(x'-x)\langle x|n\rangle dx dx' \\
&= \int \langle n'|x\rangle\, A(x)\langle x|n\rangle dx \\
&= \int \Psi^*_{n'}(x)\, A(x)\Psi_n(x) dx \\
&= A_{n',n}
\end{aligned} \tag{3-77}$$

แต่ในบางกรณี เช่น ในกรณีของตัวแกว่งกวัดเชิงเส้น ไม่จำเป็นต้องใช้ตัวแทนใด ๆ ในการคำนวณ เป็นเพียงแต่รู้คุณสมบัติทั่วไปของตัวดำเนินการและเวกเตอร์ ก็พอเพียงที่จะทำการคำนวณ ซึ่งจะได้แสดงดังต่อไปนี้

ตัวดำเนินการแฮมมิลโทเนียนของตัวแกว่งกวัดเชิงเส้น คือ

$$H = \frac{p^2}{2m_0} + \frac{m_0\omega^2x^2}{2} \tag{3-78}$$

กำหนดให้

$$\left.\begin{aligned}
a &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{x_0} + i\frac{x_0}{\hbar}p\right) \\
a^+ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{x_0} - i\frac{x_0}{\hbar}p\right)
\end{aligned}\right\} \tag{3-79}$$

โดยที่

$$x_0 = \left(\frac{\hbar}{m_0\omega}\right)^{\frac{1}{2}}$$

แต่เนื่องจาก x และ p เป็นตัวดำเนินการเฮอร์มีเชียน ทำให้ a^+ เป็นเฮอร์มีเชียนสังยุคของ a แก้สมการ (3-79) หาค่า x และค่า p

$$x = \frac{x_0}{(2)^{\frac{1}{2}}}(a+a^+) \tag{3-80}$$

$$p = \frac{\hbar}{(2)^{\frac{1}{2}} i x_0}(a - a^+) \qquad (3\text{-}81)$$

$$px = \frac{\hbar}{2i}\{a^2 - (a^+)^2 - a^+a + aa^+\} \qquad (3\text{-}81)$$

$$xp = \frac{\hbar}{2i}\{a^2 - (a^+)^2 + a^+a - aa^+\} \qquad (3\text{-}83)$$

$$px - xp = \frac{\hbar}{2i}(2aa^+ - 2a^+a) = -i\hbar$$

$$aa^+ - a^+a = 1$$

$$= [a, a^+] \qquad (3\text{-}84)$$

สมการ (3-84) สามารถทำให้เราเขียนแฮมมิลโทเนียนในรูปของตัวดำเนินการไม่มีตัวแทนได้ดังนี้

$$H = \frac{p^2}{2m_0} + \frac{m_0\omega^2 x^2}{2}$$

$$= \frac{\hbar\omega}{4}\{-a^2 - (a^+)^2 + a^+a + aa^+\} + \frac{\hbar\omega}{4}\{a^2 + (a^+)^2 + aa^+ + a^+a\}$$

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}(aa^+ + a^+a) = \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right) \qquad (3\text{-}85)$$

$$Ha^+ = \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right)a^+ = a^+\hbar\omega\left(aa^+ + \frac{1}{2}\right)$$

$$= a^+\hbar\omega\left(a^+a + 1 + \frac{1}{2}\right) = a^+(H + \hbar\omega) \qquad (3\text{-}86)$$

$$H(a^+)^n = a^+(H + \hbar\omega)(a^+)^{n-1} = (a^+)^n(H + n\hbar\omega) \qquad (3\text{-}87)$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

ให้ $|0\rangle$ เป็นสถานต่ำที่สุดของระบบควอนตัมนี้ a จะเป็นตัวดำเนินการลดระดับ และ a^+ จะเป็นตัวดำเนินการเพิ่มระดับของสถานะในระบบควอนตัมนี้ ทำให้

$$a|0\rangle = 0 \qquad (3\text{-}88)$$

ใช้ตัวดำเนินการ H กระทำบนสถานะ $|0\rangle$ ได้

$$H|0\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}|0\rangle \tag{3-89}$$

นั่นคือ $|0\rangle$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ของ H เนื่องด้วยค่าไอเกน $\frac{\hbar\omega}{2}$

สถานะที่ n ของระบบควอนตัมนี้คือ $(a^+)^n|0\rangle$ จะเห็นว่า

$$H(a^+)^n|0\rangle = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)(a^+)^n|0\rangle \tag{3-90}$$

ค่าไอเกนของตัวดำเนินการ a^+a คือ เลขจำนวนเต็มบวก $n \geqslant 0$ ยิ่งไปกว่านั้นยังอาจพิสูจน์ได้ว่า ค่าไอเกนของตัวดำเนินการ a^+a ไม่สามารถจะมีค่าเป็นลบได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \lambda = \langle\lambda|a^+a|\lambda\rangle &= \int\langle\lambda|a^+|x\rangle\langle x|a|\lambda\rangle dx \\ &= \int|\langle x|a|\lambda\rangle|^2 dx \geqslant 0 \end{aligned} \tag{3-91}$$

ถ้าฟังก์ชันไอเกนออร์ทอนอร์มอลของตัวดำเนินการ H คือ $|n\rangle$ ฟังก์ชันไอเกนนี้จะแตกต่างจาก $(a^+)^n|0\rangle$ ก็เฉพาะค่าคงที่ สมมติให้

$$\begin{aligned} |n\rangle &= C(a^+)^n|0\rangle \\ \langle n|n\rangle &= C^*C\langle 0|\underbrace{aa\ldots a}_{n}\,\underbrace{a^+a^+\ldots a^+}_{n}|0\rangle = 1 \end{aligned} \tag{3-92}$$

เนื่องจาก $a|0\rangle = 0$ สับตำแหน่ง a ไปทางขวาของ a^+ ตามลำดับ ทำให้

$$\langle n|n\rangle = C^*Cn!\langle 0|0\rangle = C^*Cn!$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{n!}}$$

ทำให้เวกเตอร์ฟังก์ชันออร์ทอนอร์มอลเป็น

$$|n\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \tag{3-93}$$

ทำให้เราสามารถหาสมาชิกเมทริกซ์ที่ไม่เป็นศูนย์ได้ดังนี้

$$\langle n-1|a|n\rangle = \langle n|a^{+}|n-1\rangle = \sqrt{n} \tag{3-94}$$

จากสมการ (3-80) เราอาจหาสมาชิกเมทริกซ์ของตัวดำเนินการ x ได้ดังนี้

$$\langle n-1|x|n\rangle = x_0\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \langle n+1|x|n\rangle = x_0\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3-95}$$

โดยทำนองเดียวกัน จากสมการ (3-81) เราอาจจะหาสมาชิกเมทริกซ์ตัวดำเนินการ p ได้ดังนี้

$$\left.\begin{aligned}\langle n-1|p|n\rangle &= -im_0\omega\langle n-1|x|n\rangle \\ \langle n+1|p|n\rangle &= im_0\omega\langle n+1|x|n\rangle\end{aligned}\right\} \tag{3-96}$$

สมการที่ (3-95) และ (3-96) คือสมการที่ (3-39) และ (3-42) ความแตกต่างของสมการทั้งสองชุดอยู่ที่ว่า สมการที่ (3-95) และ (3-96) อยู่ในรูปที่ไม่มีตัวแทน แต่ (3-39) และ (3-42) อยู่ในรูปของตัวแทนพิกัด

การหาฟังก์ชันคลื่นในรูปของตัวแทนพิกัดอาจจะหาได้ดังนี้ ให้

$$a = \frac{1}{(2)^{\frac{1}{2}}}\left(y+\frac{d}{dy}\right), \qquad y = \frac{x}{x_0}$$

ทำให้สามารถหาฟังก์ชันคลื่นได้ดังนี้

$$\Psi_0(x) = \langle x|0\rangle$$

ทำให้

$$\left(\frac{d}{dy}+y\right)\Psi_0(y) = 0 \tag{3-97}$$

สมการที่ (3-97) มีผลเฉลย คือ

$$\Psi_0(y) = C_0 e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\Psi_0|^2 dx = x_0 C_0^2\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-\frac{y^2}{2}}\right)^2 dy$$

$$= x_0 C_0^2(\pi)^{\frac{1}{2}} = 1$$

$$C_0 = \frac{1}{\left(x_0(\pi)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

ทำให้ $\Psi_0 = \frac{1}{\left(x_0(\pi)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}$

จะเห็นว่า $\Psi_1 = a^+\Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(y - \frac{d}{dy}\right)\frac{1}{\left(x_0(\pi)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{y^2}{2}} = \frac{2}{\left(2x_0(\pi)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{x}{x_0} e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}$

Ψ_n ใด ๆ ก็อาจจะหาได้โดยวิธีเดียวกันนี้

ยังมีตัวแทนอีกชนิดหนึ่งเกิดขึ้นเนื่องจากการขึ้นกับเวลาของฟังก์ชันคลื่น ทำให้สมาชิกเมทริกซ์ของตัวดำเนินการแปรเปลี่ยนไป ตัวแทนเหล่านี้มีสามชนิดคือ ตัวแทนแบบชโรดิงเจอร์ ตัวแทนแบบไฮเซนเบอร์ก และตัวแทนแบบอันตรกิริยา ซึ่งได้แจกแจงไว้ละเอียดดีแล้วในตำรา จึงจะเว้นไม่กล่าวไว้ในที่นี้