บทที่ 2
สปินเมทริกซ์ของพอลลี (Pauli Spin Matrices)

2.1 พีชคณิตเบื้องต้นของสปินเมทริกซ์ของพอลลี

ตามมาตรฐานสากล สปินเมทริกซ์ของพอลลีมีตัวแทนเมทริกซ์ดังนี้

$$\Psi(\uparrow) = \bar{\alpha} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \uparrow \quad : \text{ ฟังก์ชันสปินขึ้น} \tag{2-1}$$

$$\Psi(\downarrow) = \bar{\beta} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \downarrow \quad : \text{ ฟังก์ชันสปินลง} \tag{2-2}$$

$$\underline{\sigma}_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad : \text{ ตัวดำเนินการทางแนวแกน } x \tag{2-3}$$

$$\underline{\sigma}_y = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} \quad : \text{ ตัวดำเนินการทางแนวแกน } y \tag{2-4}$$

$$\underline{\sigma}_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \quad : \text{ ตัวดำเนินการทางแนวแกน } z \tag{2-5}$$

$$\underline{1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad : \text{ ตัวดำเนินการหนึ่งหน่วย} \tag{2-6}$$

สปินเมทริกซ์ของพอลลีเหล่านี้เสนอขึ้นเพื่อช่วยการคำนวณในทฤษฎีควอนตัม เวกเตอร์ฟังก์ชันเป็นเวกเตอร์ในเวกเตอร์สเปซเชิงเส้นสองมิติ มีฟังก์ชันคลื่นดังแสดงไว้ในสมการ (2-1) และสมการ (2-2) ซึ่งแทนสองสถานะของสปินครึ่งหน่วย คือ สปินชี้ขึ้นกับสปินชี้ลง จะเห็นว่า

$$\underline{\underline{\sigma}}_x^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\underline{I}} \tag{2-7}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_y^2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\underline{I}} \tag{2-8}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_z^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\underline{I}} \tag{2-9}$$

เนื่องจากกำลังสองของสปินเมทริกซ์เป็นเมทริกซ์หนึ่งหน่วย ดังนั้นค่าไอเกนของเมทริกซ์เหล่านี้ คือ ± 1 สปินเมทริกซ์ของพอลลีเหล่านี้ยังทำหน้าที่เป็นตัวสับเปลี่ยนต่อต้าน (anticommutators) ดังนี้

$$\underline{\underline{\sigma}}_x\underline{\underline{\sigma}}_y + \underline{\underline{\sigma}}_y\underline{\underline{\sigma}}_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{vmatrix} = \underline{\underline{0}} \tag{2-10}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_y\underline{\underline{\sigma}}_z + \underline{\underline{\sigma}}_z\underline{\underline{\sigma}}_y = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{vmatrix} = \underline{\underline{0}} \tag{2-11}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_z\underline{\underline{\sigma}}_x + \underline{\underline{\sigma}}_x\underline{\underline{\sigma}}_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\underline{0}} \tag{2-12}$$

สมการ (2-7) ถึง (2-12) มักเขียนรวม ๆ กันดังนี้

$$\underline{\underline{\sigma}}_i\underline{\underline{\sigma}}_j + \underline{\underline{\sigma}}_j\underline{\underline{\sigma}}_i = 2\delta_{ij}\underline{\underline{I}} \tag{2-13}$$

เมื่อ i, j แทน x, y และ z ส่วน δ_{ij} คือโคเนกเคลอร์ เดลต้า ซึ่งมีความหมายดังนี้

$$\left.\begin{array}{lll} \delta_{ij} = 0 & & i \neq j \\ \delta_{ij} = 1 & & i = j \end{array}\right\} \tag{2-14}$$

$\underline{\sigma} = (\underline{\sigma}_x, \underline{\sigma}_y, \underline{\sigma}_z)$ และ $\underline{I}$ เป็นเมทริกซ์สี่ตัวซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันและกัน เนื่องจากเป็น 2×2 เมทริกซ์ ทำให้แต่ละเมทริกซ์มีสมาชิก 4 ตัว เมทริกซ์ชุด $\underline{\sigma}, \underline{I}$ เป็นชุดที่มีความสมบูรณ์สำหรับ 2×2 เมทริกซ์ เมทริกซ์อื่นนอกเหนือไปจากเมทริกซ์ชุดนี้ อาจเขียนให้อยู่ในรูปของการกระจายบนเมทริกซ์สี่ตัวนี้ เช่น $\underline{M}$ เป็น 2×2 เมทริกซ์ตัวหนึ่ง ดังนั้น

$$\underline{M} = c_x\underline{\sigma}_x + c_y\underline{\sigma}_y + c_z\underline{\sigma}_z + c_1\underline{I} \tag{2-15}$$

พึงสังเกตว่ายังมีชุดของเมทริกซ์ที่เป็นอิสระเชิงเส้นอีกชุดหนึ่ง คือ $\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{vmatrix}$ และ $\begin{vmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}$ ซึ่งอาจใช้แทนชุดของเมทริกซ์ $(\underline{\sigma}, \underline{I})$ แต่เมทริกซ์ชุดใหม่นี้จะไม่มีเมทริกซ์ผกผัน (inverse metrix) เมทริกซ์ 1 หน่วย และเทรซของเมทริกซ์ชุดใหม่นี้ไม่เท่ากับศูนย์ เทรซของเมทริกซ์ของพอลลีเท่ากับศูนย์ทุก ๆ ตัว นอกจากนี้แล้วการสับเปลี่ยนของเมเทริกซ์ของพอลลียังมีคุณสมบัติต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
\underline{\sigma}_x\underline{\sigma}_y - \underline{\sigma}_y\underline{\sigma}_x &= \begin{vmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0 & -i\\i & 0\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}0 & -i\\i & 0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix}i & 0\\0 & -i\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}-i & 0\\0 & i\end{vmatrix}\\
&= 2i\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{vmatrix}\\
&= 2i\underline{\sigma}_z
\end{aligned} \tag{2-16}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\sigma}_y\underline{\sigma}_z - \underline{\sigma}_z\underline{\sigma}_y &= \begin{vmatrix}0 & -i\\i & 0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0 & -i\\i & 0\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix}0 & i\\i & 0\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}0 & -i\\-i & 0\end{vmatrix}\\
&= 2i\begin{vmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{vmatrix}\\
&= 2i\underline{\sigma}_x
\end{aligned} \tag{2-17}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_z\underline{\underline{\sigma}}_x - \underline{\underline{\sigma}}_x\underline{\underline{\sigma}}_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2i\begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2i\underline{\underline{\sigma}}_y \tag{2-18}$$

สมการที่ (2-16) ถึง (2-18) เขียนรวมกันได้ดังนี้

$$\underline{\underline{\sigma}} \times \underline{\underline{\sigma}} = 2i\underline{\underline{\sigma}} \tag{2-19}$$

คุณสมบัติอีกอันหนึ่งของสปินเมทริกซ์ของพอลลีก็คือ $\underline{\underline{\sigma}} = (\underline{\underline{\sigma}}_x, \underline{\underline{\sigma}}_y, \underline{\underline{\sigma}}_z)$ เป็นเฮอร์มีเชียน ทำให้

$$\underline{\underline{\sigma}}_i^{+} = \underline{\underline{\sigma}}_i \;; \qquad i = x, y, z \tag{2-20}$$

2.2 ตัวดำเนินการพลิกสปิน (Spin-flip)

$$\underline{\underline{\sigma}}_x + i\underline{\underline{\sigma}}_y = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + i\begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$\therefore \quad \frac{\underline{\underline{\sigma}}_x + i\underline{\underline{\sigma}}_y}{2} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\underline{\sigma}}+ \tag{2-21}$$

เมื่อใช้ $\underline{\underline{\sigma}}+$ คูณกับฟังก์ชันคลื่นของสปิน จะได้ผลดังนี้

$$(\underline{\underline{\sigma}}+)\cdot\bar{\alpha} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \tag{2-22}$$

$$(\underline{\underline{\sigma}}+)\cdot\bar{\beta} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \bar{\alpha} \tag{2-23}$$

แสดงว่า $\underline{\underline{\sigma}}+$ ทำหน้าที่พลิกสปินลงให้เป็นสปินขึ้น และทำลายสปินขึ้น จึงมีชื่อเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า ตัวทำลายสปินขึ้น (spin up annihilator) บางทีก็เรียกว่า ตัวดำเนินการขั้นบันได (ladder operator)

ในทางตรงกันข้าม

$$\underline{\underline{\sigma}}_x - i\underline{\underline{\sigma}}_y = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - i\begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\frac{\underline{\underline{\sigma}}_x - i\underline{\underline{\sigma}}_y}{2} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\underline{\sigma}}- \qquad (2\text{-}24)$$

เมื่อนำ $\underline{\underline{\sigma}}-$ ไปคูณกับฟังก์ชันคลื่นของสปินจะได้ผลดังนี้

$$(\underline{\underline{\sigma}}-)\cdot\bar{\alpha} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \bar{\beta} \qquad (2\text{-}25)$$

$$(\underline{\underline{\sigma}}-)\cdot\bar{\beta} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad (2\text{-}26)$$

$\underline{\underline{\sigma}}-$ ทำหน้าที่พลิกสปินขึ้นให้เป็นสปินลง

2.3 ตัวดำเนินการฉาย (projection operator)

$$\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\sigma}}_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad (2\text{-}27)$$

$$\therefore \frac{\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\sigma}}_z}{2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\underline{\lambda}}+ \qquad (2\text{-}28)$$

จะเห็นว่า $\underline{\underline{\lambda}}+$ เป็นตัวดำเนินการฉายทางทิศ $\bar{\alpha}$ เช่น ถ้า $\delta = \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ

$$(\underline{\underline{\lambda}}+)\cdot\bar{\delta} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \\ 0 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad (2\text{-}29)$$

พิจารณา

$$\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{\sigma}}_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \tag{2-30}$$

$$\therefore \quad \frac{\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{\sigma}}_z}{2} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \equiv \underline{\underline{\lambda}}- \tag{2-31}$$

ดังนั้น $\underline{\underline{\lambda}}-$ จึงเป็นตัวดำเนินการฉายทางทิศ $\bar{\beta}$ จะเห็นว่า

$$|\underline{\underline{\lambda}}-|\cdot\bar{\delta} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ b \end{vmatrix} = b\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \tag{2-32}$$

จึงสรุปได้ว่า $\underline{\underline{\lambda}}+$ เลือกสปินขึ้นออกจากเวกเตอร์ฟังก์ชันทั่วไป $\bar{\delta}$ ในขณะที่ $\underline{\underline{\lambda}}-$ เลือกสปินลงออกจากเวกเตอร์ฟังก์ชันทั่วไปตัวเดียวกัน

2.4 สรุปความสัมพันธ์ที่สำคัญ

$$\underline{\underline{I}}\cdot\bar{\alpha} = \bar{\alpha} \quad ; \quad \underline{\underline{I}}\cdot\bar{\beta} = \bar{\beta} \tag{2-33}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_x\cdot\bar{\alpha} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \bar{\beta} \tag{2-34}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_x\cdot\bar{\beta} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \bar{\alpha} \tag{2-35}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_y\cdot\bar{\alpha} = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ i \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = i\bar{\beta} \tag{2-36}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_y\cdot\bar{\beta} = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -i \\ 0 \end{vmatrix} = -i\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = -i\bar{\alpha} \tag{2-37}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_z\cdot\bar{\alpha} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = +\bar{\alpha} \tag{2-38}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_z\cdot\bar{\beta} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = -\bar{\beta} \tag{2-39}$$

$$(\underline{\underline{\sigma}}+)\cdot\bar{\alpha} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \bar{0} \qquad (2\text{-}40)$$

$$(\underline{\underline{\sigma}}-)\cdot\bar{\beta} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \bar{0} \qquad (2\text{-}41)$$

$$(\underline{\underline{\sigma}}+)\cdot\bar{\beta} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \bar{\alpha} \qquad (2\text{-}42)$$

$$(\underline{\underline{\sigma}}-)\cdot\bar{\alpha} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \bar{\beta} \qquad (2\text{-}43)$$

$$(\underline{\underline{\lambda}}+)\cdot\bar{\alpha} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \bar{\alpha} \qquad (2\text{-}44)$$

$$(\underline{\underline{\lambda}}-)\cdot\bar{\beta} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \bar{\beta} \qquad (2\text{-}45)$$

$$(\underline{\underline{\lambda}}-)\cdot\bar{\alpha} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \bar{0} \qquad (2\text{-}46)$$

$$(\underline{\underline{\lambda}}+)\cdot\bar{\beta} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \bar{0} \qquad (2\text{-}47)$$

$$(\underline{\underline{\lambda}}-)\cdot\bar{\delta} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} = b\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad (2\text{-}48)$$

$$(\underline{\underline{\lambda}}+)\cdot\bar{\delta} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad (2\text{-}49)$$

ชุด ($\underline{\underline{\sigma}}\pm$, $\underline{\underline{\lambda}}\pm$) เป็นชุดของเมทริกซ์ที่สมบูรณ์ แต่ตัวกำหนดของเมทริกซ์เหล่านี้เป็นศูนย์ ทำให้ไม่เหมาะที่จะเป็นเมทริกซ์มูลฐาน

$$\underline{\underline{\sigma}}^2_{\pm} = 0 \qquad (2\text{-}50)$$

$$\underline{\underline{\lambda}}^2_{\pm} = \underline{\underline{\lambda}}\pm \qquad (2\text{-}51)$$