บทที่ 7
โมเมนตัมเชิงมุม

วัตถุประสงค์

1) ศึกษาโมเมนตัมเชิงมุม
2) ศึกษาความสัมพันธ์สลับที่
3) ศึกษาค่าไอเกนและฟังก์ชันไอเกนของโมเมนตัมเชิงมุม
4) ศึกษาออฟเพอเรเตอร์เพิ่ม และออฟเพอเรเตอร์ลด
5) ศึกษาโมเมนตัมเชิงมุมสปิน

สำหรับอนุภาคมวล m โมเมนตัมเชิงมุม p และอนุภาคอยู่ที่ตำแหน่ง r นิยามของโมเมนตัมเชิงมุมคือ

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

ใน 3 มิติ

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \imath & \hat{j} & \hat{k} \\ x & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(yp_z - zp_y) + \hat{j}(zp_x - xp_z) + \hat{k}(xp_y - yp_x)$$

ดังนั้น

$L_x = YP_z - zp_y$ โดย L ที่เป็นออฟเพอเรเตอร์โมเมนตัมเชิงมุม

$L_y = zp_x - xp_z$

$L_z = yp_y - zp_x$

ในระบบพิกัดฉาก $\hat{x} \to x$ และ $\hat{p}_x \to -i\hbar \dfrac{\partial}{\partial x}$

ดังนั้น

$$\hat{L}_x = -i\hbar\left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\hat{L}_y = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

ในระบบ spherical polar coordinates

$$x = r\sin\theta\cos\phi$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi$$

$$z = r\cos\theta$$

เมื่อ $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$$\cos\theta = z/r$$

$$\tan\phi = y/x$$

จากกฎลูกโซ่

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial r} + +\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial \phi}$$

เมื่อ x_i แทน x, y หรือ z

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2} = \frac{x}{r}$$

$$= \sin\theta\cos\phi$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\cos^{-1}\left(\frac{z}{r}\right)\right] = \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{z}{r}\right)\frac{\sin\theta\cos\phi}{r}$$

$$= \frac{\cos\theta\cos\phi}{r}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\tan^{-1}\left(\frac{y}{z}\right)\right] = \frac{-\tan\phi}{\left(1 + \tan^2\phi\right) r\sin\theta\cos\phi}$$

$$= -\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta\sin\phi ; \frac{\partial r}{\partial z} = \cos\theta$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\cos\theta\sin\phi}{r};\frac{\partial\theta}{\partial z}=\frac{-\sin\theta}{r}$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{\cos\ \phi}{r\sin\ \theta};\frac{\partial\phi}{\partial z}=0$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial}{\partial x}=\sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}=\sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$
$$\frac{\partial}{\partial z}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

แทนค่าต่าง ๆ เหล่านี้ จะได้

$$\hat{L}_x=-i\left[r\sin\theta\sin\phi\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right.$$
$$\left.-r\cos\theta\left(\sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right]$$
$$=-i\left[\left(\ \sin^2\theta\sin\phi-\cos\theta^2\sin\phi\ \right)\frac{\partial}{\partial\theta}+\left(-\frac{\cos\phi\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right]$$
$$=-i\left\{-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta}-\cos\phi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right\}$$

เช่นเดียวกัน

$$\hat{L}_y=-i\left\{\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta}-\sin\phi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right\}$$
$$\hat{L}_z=-i\frac{\partial}{\partial\phi}$$

7.1 ความสัมพันธ์สลับที่ (commutation relation)

$$(L_z,L_x)=\lfloor xp_y-yp_x,yp_z-zp_y\rfloor$$
$$=\lfloor xp_y-yp_x,yp_z\rfloor-\lfloor xp_y-yp_x,zp_y\rfloor$$
$$=\lfloor xp_y,yp_z\rfloor-\lfloor yp_x,yp_z\rfloor-\lfloor xp_y,zp_y\rfloor+\lfloor yp_x;zp_y\rfloor$$
$$=x\lfloor p_y,y\rfloor p_z+\lfloor x,yp_z\rfloor p_y-y\lfloor p_x,zp_y\rfloor+\lfloor y,zp_y\rfloor p_x$$
$$=\frac{\hbar}{i}(xp_z-zp_x)$$
$$=i\hbar L_y$$

ซึ่งความสัมพันธ์นี้สามารถเขียนแทนได้ด้วยสมการ

$$\vec{L}\times\vec{L}=i\hbar\vec{L}$$

กำหนดให้ $L^2 = \vec{L} \cdot \vec{L} = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$

$$\left(L_x, L^2\right) = \left(L_x, L_y^2\right) + \left(L_x, L_z^2\right)$$

เนื่องจาก

$$\left(L_x, L_y^2\right) = \left(L_x, L_y\right)L_y + L_y\left(L_x, L_y\right)$$
$$= i\hbar\left(L_z L_y + L_y L_z\right)$$

และ
$$\left(L_x, L_z^2\right) = \left(L_x, L_z\right)L_z + L_z\left(L_x, L_z\right)$$
$$= -i\hbar\left(L_y L_z + L_z L_y\right)$$

จะได้ $\left(L_x, L^2\right) = 0$

ทำนองเดียวกัน $\left(L_y, L^2\right) = \left(L_z, L^2\right) = 0$

หรือ เขียนสั้น ๆ ว่า

$$\left(\vec{L}, L^2\right) = 0$$

สำหรับระบบที่มีอนุภาคหลายตัว โมเมนตัมเชิงมุมรวมมีค่าดังนี้

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$$

เมื่อ $\vec{L}_i$ เป็นโมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาคตัวที่ i

โดยที่ $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$

เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\vec{L} \times \vec{L} = i\hbar\vec{L}$$

7.2 ค่าไอเกนและฟังก์ชั่นไอเกนของโมเมนตัมเชิงมุม

เราจะสร้างฟังก์ชั่นไอเกนเดียวกันของ L^2 และ L_z กำหนดออฟเพอเรเตอร์

$$L_+ = L_x + iL_y$$
$$L_- = L_x - iL_y$$

แทนค่าไอเกนของ L^2 ด้วย $\hbar^2\beta$ และของ L_z ด้วย $\hbar\alpha$ และแทนฟังก์ชั่นไอเกนเดียวด้วย Y_β^α

$$L^2 Y_\beta^\alpha = \hbar^2 \beta Y_\beta^\alpha$$
$$L_z Y_\beta^\alpha = \hbar^2 \alpha Y_\beta^\alpha$$

เนื่องจาก L_x และ L_y สามารถสลับที่กับ L^2 ได้ ทำให้ L_+ และ L_- สลับที่กับ L^2 ได้ด้วยทำให้ได้

$$L^2 L_\pm Y_\beta^\alpha = L_\pm L^2 Y_\beta^\alpha = \hbar^2 \beta L_\pm Y_\beta^\alpha$$

นั่นคือ Y_β^α เป็นฟังก์ชั่นไอเกนของ L^2 โดยมีค่าไอเกน $\hbar^2\beta$ ซึ่งฟังก์ชั่นใหม่ $L_\pm Y_\beta^\alpha$ ก็เช่นเดียวกัน

ต่อไป พิจารณาการสลับที่ของ $L_\pm$ และ L_z

$$(L_\pm, L_z) = (L_x \pm iL_y, L_z)$$
$$= -i\hbar L_y \pm i(i\hbar L_x)$$
$$= \mp\hbar\, L_z$$

หรือ

$$L_z L_\pm = L_\pm(L_z \pm \hbar)$$

ออฟเพอเรท Y_β^α ด้วยสมการออฟเพอเรเตอร์นี้ จะได้

$$L_z L_\pm Y_\beta^\alpha = L_\pm(L_z \pm \hbar) Y_\beta^\alpha$$

หรือ

$$L_z L_\pm Y_\beta^\alpha = \hbar(\alpha \pm 1) L_\pm Y_\beta^\alpha$$

$L_\pm Y_\beta^\alpha$ เป็นฟังก์ชั่นไอเกนเดียวกันของ L^2 และ L_z ซึ่งค่าไอเกน $\hbar^2\beta$ และ $\hbar(\alpha \pm 1)$ ดังนั้น

$$L_\pm Y_\beta^\alpha = Y_\beta^{\alpha \pm 1}$$

เราใช้สัญลักษณ์ Y_ℓ^m แทนค่าไอเกนสเตทของโมเมนตัมเชิงมุมซึ่งมีค่าไอเกน $\hbar^2\ell(\ell \pm 1)$ และ $\hbar m$ ดังนั้น สมการของค่าไอเกน จะอยู่ในรูป

$$L^2 Y_\ell^m = \hbar^2 \ell(\ell \pm 1) Y_\ell^m$$
$$L_z\, Y_\ell^m = \hbar m Y_\ell^m$$

สเตทนี้ คือ สเตทโมเมนตัมเชิงมุม ℓ ที่มีองค์ประกอบทางแกน z คือ m

ในระบบ spherical polar coordinates

$$\hat{L}_x + i\hat{L}_y = \left(i\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cos\phi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right) + \left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\phi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$
$$= (\cos\phi + i\sin\phi)\left[\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right]$$

ดังนั้น

$$\hat{L}_+ = e^{i\phi}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right]$$

เช่นเดียวกัน

$$\hat{L}_x - i\hat{L}_y = \left(i\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cos\phi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right) - \left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\phi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$
$$= (\cos\phi - i\sin\phi)\left[-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right]$$

หรือ

$$\hat{L}_- = e^{-i\phi}\left[-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right]$$

$\underline{\hat{L}^2}$

นิยาม
$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$$
$$= \hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_z^2 - \hat{L}_z$$

จาก
$$\hat{L}_+\hat{L}_- f = e^{i\phi}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right]e^{-i\phi}\left[-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right]f$$
$$= -\left[\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial f}{\partial\theta} + \cot^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} + i\frac{\partial f}{\partial\phi}\right]$$
$$\hat{L}_z f = -i\frac{\partial f}{\partial\phi}$$
$$\hat{L}_z^2 f = -\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$$

แทนค่าสมการเหล่านี้ จะได้
$$\hat{L}^2 = \hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_z^2 - \hat{L}_z$$
$$= -\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]$$

จาก
$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta} = \cot\theta\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}$$

และ
$$\cot^2\theta + 1 = (\sin\theta)^{-2}$$

จะได้
$$\hat{L}^2 = -\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]$$

ลาพลาเซียน

นิยามของลาพลาเซียน ∇^2
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ในระบบ spherical polar coordinates
$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

ถ้าเขียนในเทอมของโมเมนตัมเชิงมุม
$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} - \hat{L}^2\right]$$

จาก $$\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$$

ดังนั้น $$\left[\hat{J}^2, \hat{J}_z\right] = \left[\hat{J}_x^2 \hat{J}_z\right] + \left[\hat{J}_y^2, \hat{J}_z\right] + \left[\hat{J}_z^2, \hat{J}_z\right]$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}
\left[\hat{J}_x^2 \hat{J}_z\right] &= \hat{J}_x\hat{J}_x\hat{J}_z - \hat{J}_z\hat{J}_x\hat{J}_x + \left(\hat{J}_x\hat{J}_z\hat{J}_x - \hat{J}_x\hat{J}_z\hat{J}_x\right) \\
&= \hat{J}_x\left(\hat{J}_x\hat{J}_z - \hat{J}_z\hat{J}_x\right) + \left(\hat{J}_x\hat{J}_z - \hat{J}_z\hat{J}_x\right)\hat{J}_x \\
&= -i\left(\hat{J}_x\hat{J}_y + \hat{J}_y\hat{J}_x\right) \\
\left[\hat{J}_y^2, \hat{J}_z\right] &= \hat{J}_y\hat{J}_y\hat{J}_z - \hat{J}_z\hat{J}_y\hat{J}_y + \left(\hat{J}_y\hat{J}_z\hat{J}_y - \hat{J}_y\hat{J}_z\hat{J}_y\right) \\
&= \hat{J}_y\left(\hat{J}_y\hat{J}_z - \hat{J}_z\hat{J}_y\right) + \left(\hat{J}_y\hat{J}_z - \hat{J}_z\hat{J}_y\right)\hat{J}_y \\
&= -i\left(\hat{J}_y\hat{J}_x + \hat{J}_x\hat{J}_y\right) \\
\left[\hat{J}_z^2, \hat{J}_z\right] &= \hat{J}_z^2 - \hat{J}_z^2 = 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น $$\left[\hat{J}^2, \hat{J}_z\right] = 0$$

เช่นเดียวกันสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\left[\hat{J}^2, \hat{J}_y\right] = 0$$

และ $$\left[\hat{J}^2, \hat{J}_z\right] = 0$$

ความหมาย ก็คือ สามารถหาเซทของฟังก์ชั่นคลื่นเดียวกันของ $\hat{J}^2$ และองค์ประกอบตัวใดตัวหนึ่งของ J (J_x หรือ J_y หรือ J_z)

เนื่องจาก $\hat{J} \times \hat{J} = i\hat{J}$ หมายความว่าองค์ประกอบ 2 ตัวของ J ไม่สามารถมีฟังก์ชั่นคลื่นเดียวกันได้

7.3 ออฟเพอเรเตอร์เพิ่มและออฟเพอเรเตอร์ลด

นิยาม $\hat{J}_+ = \hat{J}_x + i\hat{J}_y$ ออฟเพอเรเตอร์เพิ่ม

และ $\hat{J}_- = \hat{J}_x - i\hat{J}_y$ ออฟเพอเรเตอร์ลด

$$\begin{aligned}
\left[\hat{J}_z, \hat{J}_\pm\right] &= \left[\hat{J}_z, \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y\right] = \left[\hat{J}_z, \hat{J}_x\right] \pm i\left[\hat{J}_z, \hat{J}_y\right] \\
&= i\hat{J}_y \pm i\left(-i\hat{J}_x\right) = i\hat{J}_y \pm \hat{J}_x \\
&= \pm\left(\hat{J}_x \pm i\hat{J}_y\right) = \pm\hat{J}_\pm \\
\left[\hat{J}^2, \hat{J}_\pm\right] &= \left[\hat{J}^2, \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y\right] \\
&= \left[\hat{J}^2, \hat{J}_x\right] \pm i\left[\hat{J}^2, \hat{J}_y\right] = 0
\end{aligned}$$

จาก $$\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$$

แต่ $$\hat{J}_+\hat{J}_- = (\hat{J}_x + i\hat{J}_y)(\hat{J}_x - i\hat{J}_y)$$
$$= \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 - i[\hat{J}_x, \hat{J}_y]$$
$$= \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z$$
$$\hat{J}_-\hat{J}_+ = (\hat{J}_x - i\hat{J}_y)(\hat{J}_x + i\hat{J}_y)$$
$$= (\hat{J}_x - i\hat{J}_y)(\hat{J}_x + i\hat{J}_y)$$
$$= \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + i[\hat{J}_x, \hat{J}_y]$$
$$= \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 - \hat{J}_z$$

ดังนั้น

$$\hat{J}^2 = \hat{J}_+\hat{J}_- - \hat{J}_z + \hat{J}_z^2$$

และ $$\hat{J}^2 = \hat{J}_-\hat{J}_+ + \hat{J}_z + \hat{J}_z^2$$

เนื่องจาก $\hat{J}^2$ และ $\hat{J}_z$ สลับที่ได้จึงมีฟังก์ชั่นคลื่นเดียวกัน ให้เท่ากับ U_{jm}

$$\hat{J}^2 U_{jm} = a_j U_{jm}$$
$$\hat{J}_z U_{jm} = m U_{jm}$$

เมื่อ a_j และ m เป็นค่าคงที่

$$\hat{J}^2(\hat{J}_\pm U_{jm}) = \{\hat{J}^2\hat{J}_\pm + [\hat{J}_\pm, \hat{J}^2]\}U_{jm}$$
$$= \{\hat{J}^2\hat{J}_\pm + \hat{J}_\pm\hat{J}^2 - \hat{J}^2\hat{J}_\pm\}U_{jm}$$
$$= \hat{J}_\pm\hat{J}^2 U_{jm}$$
$$= a_j(\hat{J}_\pm U_{jm})$$

ข) $$\hat{J}_z(\hat{J}_\pm U_{jm}) = \{\hat{J}_z\hat{J}_\pm + \hat{J}_\pm\hat{J}_z - \hat{J}_\pm\hat{J}_z\}U_{jm}$$
$$= \{[\hat{J}_z, \hat{J}_\pm] + \hat{J}_\pm\hat{J}_z\}U_{jm}$$
$$= \{\pm\hat{J}_\pm + \hat{J}_\pm\hat{J}_z\}U_{jm}$$
$$= (m \pm 1)\hat{J}_\pm U_{jm}$$

ดังนั้น $\hat{J}_\pm U_{jm}$ เป็นฟังก์ชั่นคลื่นใหม่ของ $\hat{J}^2$ และ $\hat{J}_z$ ซึ่งมีค่าไอเกน a_j และ $(m \pm 1)$ ตามลำดับออฟเพอเรเตอร์ $\hat{J}_\pm$ สร้างฟังก์ชั่นใหม่ $\hat{J}_\pm U_{jm}$ จากฟังก์ชั่นเดิม U_{jm} โดยการเพิ่มและลดค่าไอเกน m ผลลัพธ์นี้สามารถเขียนได้เป็น

$$\hat{J}_\pm U_{jm} = C_\pm U_{j,m\pm1}$$

เมื่อ $C_\pm$ เป็นค่าคงที่ซึ่งจะต้องนำมาหาค่าต่อไป

เนื่อง $\{\hat{J}_\pm U_{jm}\}$ จากเป็นเซทของฟังก์ชั่นคลื่น

$$<\hat{J}_\pm U|\hat{J}_\pm U_{jm}> = <C_\pm U_{j,m\pm1}|C_\pm U_{j,m\pm1}>$$
$$= |C_\pm|^2 <U_{j,m\pm1}|U_{j,m\pm1}>$$

ดังนั้น

$$\left|C_{\pm}\right|^{2} = < \hat{J}_{\pm}U_{j,m\pm1}\left|\hat{J}_{\pm}U_{j,m\pm1}\right. >$$

เนื่องจาก $\hat{J}_{\pm} = \hat{J}_{\mp}$

$$\left|C_{\pm}\right|^{2} = < j, m\left|\hat{J}_{\mp}\hat{J}_{\pm}\right|j, m >$$

$$= < j,m\left|\hat{J}^{2} - \hat{J}_{z}^{2} \mp \hat{J}_{z}\right|j,m >$$

$$= < j,m\left|j(j+1) - m^{2} \mp m\right|j,m >$$

$$= j(j+1) - m^{2} \mp m$$

$$C_{\pm} = \left[j(j+1) - m\ (m \pm 1)\right]^{1/2}$$

$$= \left[(j \mp 1)(j \pm m1)\right]^{1/2}$$

และ

$$\hat{J}_{\pm}U_{jm} = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \qquad U_{j}, m \pm 1$$

ตัวอย่างที่ 7.1 ก) จงเขียนเมทริกซ์ $\hat{J}_{+}$ และ $\hat{J}_{-}$ สำหรับระบบที่มี $j = \frac{1}{2}$ เมื่อ $\hat{J}^{2}$ และ $\hat{J}_{z}$ เป็นไดอะโกนอล (ใช้ $|j,m\rangle$ เป็นฟังก์ชั่นรากฐาน)

ข) จงหาเมทริกซ์ $\hat{J}_{x}, \hat{J}_{y}, \hat{J}_{z}$ และ $\hat{J}^{2}$ สำหรับระบบในข้อ ก)

วิธีทำ

ก) จาก $$< j',m'\left|\hat{J}_{\pm}\right|j,m > = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\,\delta_{j',j}\delta_{m',m\pm1}$$

$$< j,m|\ |j,m' > = \begin{pmatrix} < j,j|\ |j,j > \ , < j,j|\ |j,j-1 > \ldots \\ < j,j-1|\ |j,j > & \end{pmatrix}$$

ดังนั้น เมื่อ $j = \frac{1}{2}$ จะได้

$$\vec{J}_{+} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad , \quad \vec{J}_{-} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

ข) เนื่องจาก $\hat{J}_{x} = \frac{\left(\hat{J}_{+} + \hat{J}_{-}\right)}{2}$ และ $\hat{J}_{y} = \frac{\left(\hat{J}_{+} - \hat{J}_{-}\right)}{2i}$

จะได้

$$\vec{J}_{x} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{J}_{y} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

เนื่องจาก $< j',m'\left|\hat{J}_{z}\right|j,m > = m\,\delta_{j',j}\delta_{m',m}$

ดังนั้น $$\vec{J}_{z} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

เมทริกซ์สำหรับ $\hat{J}^2$ หาได้จากสมการ

$$\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$$

$$\hat{J}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 0 & \frac{-i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^2$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

7.4 **โมเมนตัมเชิงมุมสปิน** (spin angular momentum)

โมเมนตัมเชิงมุมสปิน แทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{S}$ และไอเกนสเตทแทนด้วย χ_s^m โดยที่

$$S^2\chi_s^m = \hbar^2 s(s+1)\chi_s^m$$

$$S_z\ \chi_s^m = \hbar m\chi_s^m$$

เราจะใช้สัญลักษณ์ J เป็นสัญลักษณ์ทั่วไปของออฟเพอเรเตอร์โมเมนตัม ซึ่งอาจจะเป็นชนิดออร์บิทอลหรือชนิดสปินก็ได้ เพื่อความสะดวกในการใช้ ไอเกนจะแทนด้วย Y_ℓ^m เมื่อ

$$J^2Y_j^m = \hbar^2 j(j+1)Y_j^m$$

$$J_zY_j^m = \hbar mY_j^m$$

เพื่อความง่าย จะใช้ m แทนเลขควอนตัมซึ่งสัมพันธ์กับโมเมนตัมเชิงมุมทางแกน z ยกเว้นว่าถ้าต้องการเน้นกรณีใดกรณีหนึ่งโดยเฉพาะจะใช้ m_ℓ หรือ m_s หรือ m_j แทน

ออฟเพอเรเตอร์โมเมนตัมเชิงมุม จะเป็นไปตามสมการต่อไปนี้

$$\vec{S} \times \vec{S} = ih\,\vec{S} \qquad \text{สำหรับ } S$$

และ

$$\vec{J} \times \vec{J} = ih\,\vec{J} \qquad \text{สำหรับ } J$$

$$S_z\chi_+ = \frac{\hbar}{2}\chi_+$$

$$S_z\chi_- = -\frac{\hbar}{2}\chi_-$$

เนื่องจากสเตททั้งสองมีสปินรวม $\hbar/2$ ดังนั้น

$$S^2\ \chi_\pm = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\hbar^2\chi_\pm = \frac{3}{4}\hbar^2\chi_\pm$$

สำหรับสเตทฟังก์ชั่นใด ๆ $\psi(r, spin)$

$$S^2\psi(r, spin) = \frac{3}{4}\hbar^2\psi(r, spin)$$

ตรงข้ามกับกรณีโมเมนตัมเชิงมุมออร์บิทอล S^2 เป็นออฟเพอเรเตอร์ เชิงตัวเลข

$$S^2 = \frac{3}{4}\hbar^2\psi$$

และ

$$S_{\pm}^2\chi_{\pm} = \frac{\hbar^2}{4}\chi_{\pm}$$

และ S_z^2 ก็เป็นออฟเพอเรเตอร์ เชิงตัวเลขด้วย

$$S_x^2 = S_y^2 = S_z^2 = \frac{\hbar^2}{4}$$

ออฟเพอเรเตอร์เพิ่มและลด (S_- และ S_+)

$$S_{\pm} \doteq S_x \pm iS_y$$

ในกรณีที่ $j = \frac{1}{2}$ และ $m = \pm\frac{1}{2}$

$$S_+\chi_+ = 0 \qquad S_+\chi = \hbar\chi_+$$

$$S_-\chi_+ = \hbar\chi_- \qquad S_-\chi_- = 0$$

$$S_x\chi_+ = \frac{\hbar}{2}\chi_- \qquad S_x\chi_- = \frac{\hbar}{2}\chi_+$$

$$S_y\chi_+ = \frac{i\hbar}{2}\chi_- \qquad S_y\chi_- = -\frac{i\hbar}{2}\chi_+$$

จะสะดวกขึ้นถ้าเราสามารถละทิ้ง $\frac{\hbar}{2}$ ได้ โดยการให้ออฟเพอเรเตอร์เพาลี

$$\sigma = \sigma_x\hat{e}_x + \sigma_y\hat{e}_y + \sigma_z\hat{e}_z$$

โดยที่ $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$

$$\sigma^2 = 3$$

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1$$

$$\sigma \times \sigma = 2i\sigma$$

$$(\sigma_i, \sigma_j)_+ = 2\delta_{ij}$$

$$\sigma_i\sigma_j = i\sigma_k$$

$$\sigma_i\sigma_j\sigma_k = i$$

เมื่อเมทริกซ์ที่แทน σ คือ

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า เมทริกซ์เพาลีจะไม่สามารถสลับที่ได้ และเมทริกซ์เพาลีเป็นยูนิทารี

ตัวอย่างที่ 7.2 จงหาคอมมิวเตอร์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$[p^2, q] \quad \text{และ} \quad [q^3, p]$$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
[p^2, q] &= p[p,q] + [p,q]p \\
&= p\frac{\hbar}{i} + \frac{\hbar}{i}p \\
&= 2\frac{\hbar}{i}p
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[q^3, p] &= q[q^2, p] + [q,p]q^2 \\
&= q\{q[q,p] + [q,p]q\} + [q,p]q^2 \\
&= q\left\{q\left(\frac{-\hbar}{i}\right) + \left(\frac{-\hbar}{i}\right)q\right\} + \left\{q\left(\frac{-\hbar}{i}\right)\right\} \\
&= -2\frac{\hbar}{i}q^2 - \frac{\hbar}{i}q^2 \\
&= 3i\hbar q^2
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 7.3 จงคำนวณค่าต่อไปนี้

ก) $[p, x^2]$ ข) $[p^3, x]$

ค) $[p^2, x^2]$ ง) $[p^2, f(x)]$

วิธีทำ

(ก)

$$
\begin{aligned}
[p, x^2]\psi &= (px^2 - x^2p)\psi \\
&= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}x^2\psi - x^2\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial x} \\
&= \frac{\hbar}{i}\left[2x\psi + x^2\frac{\partial\psi}{\partial x}\right] - \frac{\hbar}{i}x^2\frac{\partial\psi}{\partial x} \\
&= 2\frac{\hbar}{i}x\psi
\end{aligned}
$$

$$\therefore [p, x^2] = \frac{2\hbar}{i}x$$

(ค)

$$[p^2, x^2]\psi = (p^2x^2 - x^2p^2)\psi$$
$$= \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2\psi - x^2\left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi$$
$$= \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(2x\psi + x^2\frac{\partial}{\partial x}\right) - x^2\frac{\partial\psi}{\partial x^2}\right\}$$
$$= \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \left\{2\psi + 2x\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot 2x + x^2\frac{\partial\psi}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial\psi}{\partial x^2}\right\}$$
$$= \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \left\{2\psi + 2x\frac{\partial\psi}{\partial x} + 2x\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\}$$
$$= 2\left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \left\{1 + 2x\frac{\partial}{\partial x}\right\}\psi$$

$$\therefore [p^2, x^2] = 2\left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\left[1 + 2x\frac{d}{dx}\right]$$

(ง)

$$[p^2, f(x)]\psi = p^2 f\psi - fp^2\psi$$
$$= \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f\psi - f\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\psi$$
$$= \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - f\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right\}$$
$$= \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \left\{\psi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + f\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - f\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right\}$$
$$= \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \left\{\psi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}\right\}$$
$$= \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\right\}\psi$$

$$\therefore [p^2, f(x)] = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\left\{\frac{d^2 f}{dx^2} + 2\frac{df}{dx}\frac{d}{dx}\right\}$$

ตัวอย่างที่ 7.4 จงพิสูจน์ว่า ถ้าออฟเพอเรเตอร์ L และ M เป็นคอมมิวเทเตอร์ ออฟเพอเรเตอร์ทั้งสองจะมีฟังก์ชั่นไอเกนเดียว

วิธีทำ

$$\therefore \hat{L}\psi_\ell = \ell\psi_\ell \qquad \ell \Rightarrow \psi_\ell$$

$$\therefore \hat{M}\hat{L}\psi_\ell = \hat{M}\ell\psi_\ell = \ell\left(\hat{M}\psi_\ell\right)$$

ให้ $\hat{L}$ และ $\hat{M}$ เป็นค่าคงที่

$$\therefore \left[\hat{L},\hat{M}\right] = \hat{L}\hat{M} - \hat{M}\hat{L} = 0 \qquad \therefore \hat{L}\hat{M} = \hat{M}\hat{L}$$

$$\therefore \hat{M}\hat{L}\psi_\ell = \hat{M}\ell\psi_\ell = \ell\left(\hat{M}\psi_\ell\right) = \hat{L}\hat{M}\psi_\ell$$

$$\therefore \hat{L}\left(\hat{M}\psi_\ell\right) = \ell\left(\hat{M}\psi_\ell\right)$$

ดังนั้น $\hat{M}\psi_\ell$ เป็นฟังก์ชั่นไอเกนของ $\hat{L}$

ตัวอย่างที่ 7.5 ก) จงหาฟังก์ชั่นไอเกนของระบบอนุภาค 2 ตัวแต่ละตัวมีสปิน $\frac{1}{2}$ เมื่อ

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$$

$$\left[S_z, S^2\right] = 0$$

และจงหาค่าไอเกนของ S^2

ข) จงแสดงว่าออฟเพอเรเตอร์ $\left(\vec{\sigma}_j\vec{\sigma}_2\right)^n$ ของอนุภาค 2 ตัว 1 และ 2 เป็นฟังก์ชั่นเส้นตรงของ $\left(\vec{\sigma}_j \cdot \vec{\sigma}_2\right)$

วิธีทำ ให้ $\hat{S}_{1z}$ และ $\hat{S}_{2z}$ เป็นเซทของระบบอิเล็กตรอน 2 ตัว และฟังก์ชั่นไอเกนของ $\hat{S}_{1z}$ คือ $\Phi(1)\psi(1)$ และฟังก์ชั่นไอเกนของ $\hat{S}_{2z}$ คือ $\Phi(2)\psi(2)$

ดังนั้น $\Phi(1)\Phi(2), \psi(1)\psi(2)$ เป็นฟังก์ชั่นไอเกนของ $\hat{S}_z$ และค่าไอเกนคือ $\hbar$ และ $-\hbar$

ให้ $$\psi = C_1\Phi(1)\psi(2) + C_2\psi(1)\phi(2)$$

เป็นคำตอบของ $\hat{S}^2\psi = \lambda\hbar^2\psi$

$$\hat{S}^2 = \left(\hat{S}_1 + \hat{S}_2\right)^2 \qquad \text{สำหรับ} \qquad \hat{S} = \hat{S}_1 + \hat{S}_2$$

$$= \hat{S}_1^2 + 2\hat{S}_1 \cdot S_2 + \hat{S}_2^2$$

$$= \frac{3}{4}\hbar^2 + \frac{\hbar^2}{2} + \frac{3}{4}\hbar^2\left(\sigma_{1x}\sigma_{2x} + \sigma_{1y}\sigma_{2y} + \sigma_{1z}\sigma_{2z}\right)$$

$$j = 1, 2$$

$$\sigma_{jx}\psi(j) = \Phi(j) \ , \ \sigma_{jx}\Phi_j = \psi(j) \ , \ \sigma_{jy}\psi(j) = -i\Phi(j)$$

$$\sigma_{jy}\Phi(j) = i\psi(j) \ , \ \sigma_{jz}\Phi(j) = \psi(j) \ , \ \sigma_{jz}\psi(j) = \psi(j)$$

ดังนั้น

$$\hat{S}^2\psi = \hbar^2(C_1 + C_2)\Phi(1)\psi(2) + \hbar^2(C_1 + C_2)\psi(1)\Phi(2)$$
$$= \lambda\hbar^2[C_1\Phi(1)\psi(2) + C_2\Phi(1)\psi(2)]$$

$$\therefore (1-\lambda)C_1 + C_2 = 0$$

$$C_1 + (1-\lambda)C_2 = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad \lambda \quad = \quad 0\ , 2$$

เมื่อ $\lambda = 0 \qquad C_1 = -C_2$

$\lambda = 2 \qquad C_1 = C_2$

จากภาวะการนอร์มอลไลซ์

เมื่อ $\lambda = 0 \qquad \psi = \frac{1}{\sqrt{2}}[\Phi(1)\psi(2) - \psi(1)\Phi(2)]$

$\lambda = 2 \qquad \psi = \frac{1}{\sqrt{2}}[\Phi(1)\psi(2) + \psi(1)\Phi(2)]$

$$\hat{S}^2\Phi(1)\Phi(2) = 2\hbar^2\Phi(1)\Phi(2)$$
$$\hat{S}^2\beta(1)\beta(2) = 2\hbar^2\psi(1)\psi(2)$$

ไอเกนฟังก์ชั่นของ $\hat{S}^2$ และ $\hat{S}_z$	ค่าไอเกน $(\hbar)$	
	$\hat{S}^2$	$\hat{S}_z$
$\Phi(1)\Phi(2)$	2	1
$\frac{1}{\sqrt{2}}[\Phi(1)\psi(2)+\psi(1)\Phi(2)]$	2	0
$\psi(1)\psi(2)$	2	-1
$\frac{1}{\sqrt{2}}[\Phi(1)\psi(2)-\psi(1)\Phi(2)]$	0	0

(ข) เรารู้ว่า

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\Phi(1)\psi(2) - \psi(2)\Phi(1)]$$

$$\psi_1 = \Phi(1)\Phi(2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}[\Phi(1)\psi(2) + \psi(1)\Phi(2)]$$

$$= \psi(1)\psi(2)$$

ถ้า $j = 1,2$

$$\sigma_{jx}\Phi(j) = \psi(j)$$

$$\sigma_{jx}\psi(j) = \Phi(j)$$

$$\sigma_{jy}\Phi(j) = i\psi(j)$$

$$\sigma_{jy}\psi(j) = -i\Phi(j)$$

$$\sigma_{jy}\Phi(j) = \psi(j)$$

$$\sigma_{jy}\psi(j) = \psi(j)$$

$$\therefore \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 = (\sigma_{1x}\sigma_{2x} + \sigma_{1y}\sigma_{2y} + \sigma_{1z}\sigma_{2z})$$

$$(\vec{\sigma}_1, \sigma_2)\psi_1 = 1 \cdot \psi_1 \quad , \quad \vec{\sigma}_1 \cdot \sigma_2 = -3\psi_0$$

จาก $(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2)^n \psi_1 = \psi$

$$(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2)^n \psi_0 = (-3)^n \psi_0$$

ถ้า $(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2)^n = \alpha + \beta(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2)$

เมื่อ α และ β เป็นค่าคงที่

$$\psi_1 = (\alpha + \beta)\psi_1$$

$$(-3)^n \psi_0 = (\alpha - \beta)\psi_0$$

เมื่อ $\alpha + \beta = 1 \quad , \quad \alpha - \beta = (-3)^n$

$$\alpha = \frac{1}{4}[3 + (-3)^n] \quad , \quad \beta = \frac{1}{4}(1 - (-3))^n$$

$$(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2)^n = \alpha + \beta(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2)$$

$$= \frac{1}{4}[3 + (-3)^n] + \frac{1}{4}[1 - (-3)^n](\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)$$

ถ้า $n = 2$

$$(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2)^2 = 3 - 2(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2)$$

ตัวอย่างที่ 7.6 กำหนดสมการของออฟเพอเรเตอร์พาริตี้

$$P\psi_+ = \psi_+ \qquad , \qquad P\psi_- = \psi_-$$

ก) ฟังก์ชั่น ψ_+ และ ψ_- เป็นออร์โทโกนอลฟังก์ชั่นหรือไม่ จงพิสูจน์

ข) จงนิยามออฟเพอเรเตอร์โปรเจกชั่น

ค) จงแสดงว่า $P_\pm^2 = P_\pm$ และ $P_+ + P_- = 1$

วิธีทำ

ก)

$$\psi_-^* \times (P\psi_+ = \psi_+)$$

$$\psi_-^* P\psi_+ = \psi_-^* \psi_+ \qquad (1)$$

$$\psi_+ \times (P\psi_-)^* = -\psi_-^*$$

$$\psi_+ (P\psi_-)^* = -\psi_+ \psi_-^* \qquad (2)$$

อินทิเกรตสมการ (1) และ (2)

$$\int \psi_-^* P\psi_+ dx = \int \psi_-^* \psi_+ dx \qquad (1')$$

$$\int \psi_+ (P\psi_-)^* = \int -\psi_+ \psi_-^* dx \qquad (2')$$

สมการ $(1') - (2')$ จะได้

$$\int \left[\psi_-^* P\psi_+ - \psi_+ (P\psi_-)^*\right] dx = 2\int \psi_+ \psi_-^* dx$$

เพราะว่า P เป็นเฮอมิเทียน

$$\int \psi_+ \psi_-^* dx = 0$$

ดังนั้น ψ_+ และ ψ_- เป็นออร์โทโกนอลฟังก์ชั่น

ข)

$$P_\pm = \frac{1 \pm P}{2}$$

ค)

$$P_+\psi_+ = \left(\frac{1+P}{2}\right)\psi_+ = \frac{\psi_+}{2} + \frac{\psi_+}{2} = \psi_+$$

$$P_+^2\psi_+ = \left(\frac{1+P}{2}\right)\psi_+ = P_+\psi_+$$

$$\therefore P_+^2 = P_+$$

$$P_+\psi_+ = \left(\frac{1+P}{2}\right)\psi_- = \frac{\psi_-}{2} + \frac{-\psi_-}{2} = 0$$

$$P_+^2\psi_- = P\psi_- = 0$$

$$\therefore P_+^2 = P_+$$

$$P_-\psi_+ = \left(\frac{1-P}{2}\right)\psi_+ = \frac{\psi_+}{2} - \frac{\psi_+}{2} = 0$$

$$P_-^2\psi_+ = \left(\frac{1-P}{2}\right)\psi_+ = P_-\psi_+ = 0$$

$$\therefore\ P_-^2 = P_-$$

$$P_-^2\psi_- = \left(\frac{1-P}{2}\right)\psi_- = \frac{\psi_-}{2} - \frac{-\psi_-}{2} = \psi_-$$

$$P_-^2\psi_- = P_-\psi_-$$

$$\therefore\ P_\pm^2 = P_\pm$$

$$P_+ + P_- = \frac{1}{2} + \frac{P}{2} + \frac{1}{2} - \frac{P}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

ตัวอย่างที่ 7.7 นิยามของออฟเพอเรเตอร์ P คือ

$$p\psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r})$$

ค่าไอเกนของ P เรียกว่าพาริตี้ของสเตทจงหาค่าไอเกนและฟังก์ชั่นของ P จงแสดง ว่า P ไม่สามารถสลับที่กับ $\overline{p}$ ได้นั่น คือ

$$\overline{p}P + P\overline{p} = 0$$

วิธีทำ

$$p\psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r})$$

$$\hat{P}^2\psi(\vec{r}) = \hat{P}\hat{P}\psi(\vec{r}) = \hat{P}\psi(-r) = \psi(\vec{r})$$

และ

$$\hat{P}^2\psi(\vec{r}) = \hat{P}\hat{P}\psi(\vec{r}) = \hat{P}p\psi(r) = p\hat{P}\psi(r) = p^2\psi(\vec{r})$$

$$\therefore\ p^2\psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r}) \qquad \therefore\ \psi(\vec{r})\{p^2 - 1\} = 0$$

$$\therefore\ p = \pm 1$$

ค่าไอเกนของ $\psi(\vec{r})$ คือ ± 1

$$\psi(\vec{r}) = R(r)\theta(\theta)\Phi(\psi) = R(r)\psi_{\ell m}(\theta,\psi)$$

$$\psi(-\vec{r}) = R(r)\theta(\pi-\theta)\Phi(\psi+\pi) = R(r)\psi_{\ell m}(\pi-\theta,\psi+\pi)$$

$$\therefore \psi_{\ell m}(\theta,\psi) \propto e^{im\psi}P_\ell^m\cos\theta$$

$$\psi_{\ell m}(\pi-\theta,\psi+\pi) \propto e^{im(\psi+\pi)}P_\ell^m(\cos\theta(\pi-\theta))$$

$$= e^{im\psi}e^{im\pi}P_\ell^m(-\cos\theta)$$

$$= (-1)^m e^{im\psi} (-1)^{\ell-m} P_\ell^m \cos\theta$$
$$= (-1)^\ell e^{im\psi} P_\ell^m (\cos\theta)$$
$$= (-1)^\ell \psi_{\ell m}(\theta,\psi)$$

$$\therefore \psi(\vec{r}) = R(r)\psi_{\ell m}(\theta,\psi)$$

$$\overline{p}P \quad + \quad P\overline{p} = 0$$
$$(\overline{p}P + P\overline{p})\psi = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}(P\psi) + P\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi$$
$$= -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi$$
$$= 0$$
$$\therefore \overline{p}P + P\overline{p} = 0$$

ตัวอย่าง7.8 จงแสดงว่า การแปลงค่า $x \to p$, $p \to -x$ มีคุณสมบัติทางควอนตัม

วิธีทำ

เฮอร์มิลเทียนออฟเพอเรเตอร์คือ $H = \frac{p^2}{2m} + U(x)$

ให้ $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$

$$\therefore H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$
$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx \qquad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$
$$x = x \qquad p = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$$
$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$
$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx \qquad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} = \frac{\hbar}{mc}\frac{\partial}{\partial x}$$
$$[p,x]\psi = [px - xp]\psi$$
$$= px\psi - xp\psi$$
$$= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}(x\psi) - x\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi$$
$$= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi x + \frac{\hbar}{i}\psi - x\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi = \frac{\hbar}{i}\psi$$
$$[p,x] = \frac{\hbar}{i} = -i\hbar$$

เราสามารถพิสูจน์ $[p,p]=0,[x,x]=0$ ได้

$$[-x,p]\psi = -xp\psi + px\psi = -x\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial x} + x\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\hbar}{i}\psi = \frac{\hbar}{i}\psi$$

$$\therefore [-x,p] = \frac{\hbar}{i}$$

$$[-x,-x] = 0$$

$$[p,p] = 0$$

ตัวอย่างที่ 7.9 เมื่อเริ่มต้นสปินของอิเล็กตรอนชี้ไปในทิศ $+x$ (อยู่ในไอเกนสเตทของ S_x ซึ่งมีค่าไอเกน $\frac{\hbar}{2}$ เมื่อเวลา $t=0$) ให้สนามแม่เหล็ก B ในทิศ $+z$ จงหาค่าคาดหมายของ S_x และ S_y เมื่อเวลาผ่านไป $(t>0)$ ที่ความถี่เชิงมุมเท่าไร สปินจึงจะชี้ในทิศเดียวกับสนาม

วิธีทำ

$$\vec{M} = -\frac{eg\hbar}{4mc}\vec{\sigma}$$

$$H = -\frac{eg\hbar}{4mc}\vec{B}\cdot\vec{\sigma}$$

ให้ $\psi = \begin{pmatrix}\alpha_+(t)\\ \alpha_-(t)\end{pmatrix}$ เป็นไอเกนสเตทของสมการชเรอดิงเงอร์

ดังนั้น

$$H\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

$$-\frac{e\hbar g}{4mc}\vec{B}\cdot\vec{\sigma}\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

$\vec{B}$ อยู่ในทิศ z

$$-\frac{e\hbar g}{4mc}B\cdot\sigma_z\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

$$-\frac{e\hbar g}{4mc}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_+(t)\\ \alpha_-(t)\end{pmatrix} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\alpha_+(t)\\ \alpha_-(t)\end{pmatrix}$$

$$i\hbar\frac{d}{dt}\alpha_+(t) = -\frac{e\hbar gB}{4mc}\alpha_+(t)$$

$$i\hbar\frac{d}{dt}\alpha_-(t) = \frac{e\hbar gB}{4mc}\alpha_-(t)$$

$$i\hbar\frac{d\alpha_+(t)}{\alpha_+(t)} = -\frac{ie\hbar gB}{4mc}dt \qquad \text{(A)}$$

$$i\hbar \frac{d\alpha_-(t)}{\alpha_-(t)} = \frac{-ie\hbar gB}{4mc}dt \qquad \text{(B)}$$

ให้ $\omega = \frac{egB}{4mc}$

ดังนั้น สมการ (A) $\alpha_+(t) = \alpha_+(0)e^{i\omega t}$

ดังนั้น สมการ (B) $\alpha_-(t) = \alpha_-(0)e^{-i\omega t}$

$$\therefore \psi(t) = \begin{pmatrix} \alpha_+(0)e^{i\omega t} \\ \alpha_-(0)e^{-i\omega t} \end{pmatrix}$$

ขณะ $t = 0$ จะสปิน $1s$ ในทิศ S_x

ดังนั้น $\psi(0)$ เป็นฟังก์ชั่นไอเกนของ S_x

$$S_x\psi(0) = \frac{1}{2}\hbar\psi(0)$$

$$\frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_+(0) \\ \alpha_-(0) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} \alpha_+(0) \\ \alpha_-(0) \end{pmatrix}$$

ภาวะนอร์มอลไลซ์ $\alpha_+^2(0) + \alpha_-^2(0) = 1$

$$\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ดังนั้น
$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} \end{pmatrix}$$

สามารถคำนวณ $< S_x >$ และ $< S_y >$ ขณะเวลาใดๆ

$$< S_x > = \frac{1}{4}\hbar\left(e^{-i\omega t}\, e^{i\omega t}\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{+i\omega t} \\ e^{-i\omega t} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\hbar\left(e^{-i\omega t}\, e^{i\omega t}\right)\begin{pmatrix} e^{-i\omega t} \\ e^{i\omega t} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\hbar\left(e^{-2i\omega t} + e^{2i\omega t}\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2}\cos 2\omega t$$

$$< S_x > = \frac{1}{4}\hbar\left(e^{-i\omega t}\, e^{i\omega t}\right)\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{+i\omega t} \\ e^{-i\omega t} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{\hbar}{2}\sin 2\omega t$$

หรือ
$$\omega' = 2\omega = \frac{2egB}{4mc} = \frac{eB}{mc}$$

$$\omega' = \frac{eB}{mc}$$

ตัวอย่างที่ 7.10 จากแฮมมิลโทเนียนต่อไปนี้

$$H(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2) = A\left(\sigma_z^{(1)} + \sigma_z^{(2)} + B\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}\right)$$

เมื่อ $\vec{\sigma}^{(1)}$ และ $\vec{\sigma}^{(2)}$ เป็นสปินเมทริกซ์ของเพาลีของอนุภาค (1) และ (2) ตามลำดับแต่ละตัวสปิน $\frac{1}{2}$ A และ B เป็นค่าคงที่

ก) จงบอกออฟเพอเรเตอร์อื่น 2 ตัว ซึ่งสลับที่กับแฮมมิลโทเนียน

ข) จงหาค่าไอเกนของออฟเพอเรเตอร์ทั้งสามนี้

วิธีทำ

ก) ออฟเพอเรเตอร์อื่น 2 ซึ่ง สลับที่กับแฮมมิลโทเนียนคือ σ_z และ σ^2

เมื่อ $\sigma_z = \sigma_{1z} + \sigma_{2z}, \vec{\sigma} = \vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2$

$$\begin{aligned}
[H, \sigma_z] &= \left[A\left(\sigma_z^{(1)} + \sigma_z^{(2)}\right) + B\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2, \sigma_z\right] \\
&= B[\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2, \sigma_z] \\
&= B[\sigma_{1x}\sigma_{2x} + \sigma_{1y}\sigma_{2y} + \sigma_{1z}\sigma_{2z}, \sigma_z] \\
&= B\{[\sigma_{1x}\sigma_{2x}, \sigma_{1z}] + [\sigma_{1x}\sigma_{2x}, \sigma_{1z}] + [\sigma_{1y}\sigma_{2y}, \sigma_{1z}] + [\sigma_{1y}\sigma_{2y}, \sigma_{2z}]\} \\
&= B\{[\sigma_{1x}, \sigma_{1z}]\sigma_{2x} + \sigma_{1x}[\sigma_{2x}, \sigma_{2z}] + \sigma_{2y}[\sigma_{1y}, \sigma_{1z}] + \sigma_{1y}[\sigma_{2y}, \sigma_{2z}]\} \\
&= B\{-2i\sigma_{1y}\sigma_{2x} - 2i\sigma_{1x}\sigma_{2y} + 2i\sigma_{2y}\sigma_{1x} + 2i\sigma_{1y}\sigma_{2x}\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\therefore \sigma_z$ สลับที่กับแฮมมิลโทเนียน

$$[H, \sigma^2] = [A\sigma_z + B\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2, \sigma^2] = B[\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2, \sigma^2]$$

$$(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)^2 = \sigma^2 \Rightarrow \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 = \frac{1}{2}\left(\sigma^2 - \vec{\sigma}_1^2 - \vec{\sigma}_2^2\right)$$

เรารู้ว่า $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \sigma_i^2 = 1$

$$\therefore \sigma_1^2 = \sigma_{1x}^2 + \sigma_{1y}^2 + \sigma_{1z}^2 = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\sigma_2^2 = 3$$

$$\therefore \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 = \frac{1}{2}\left(\sigma^2 - \sigma\ \right)$$

$$\left[H, \sigma^2\right] = \left[\frac{1}{2}\left(\sigma^2 - \sigma\ \right)\ , \sigma^2\right]$$

$$= 0 \quad , \quad \left[\sigma^2, \sigma^2\right] = 0 \quad \text{และ} \quad , \quad \left[\sigma, \sigma^2\right] = 0$$

$\therefore \sigma^2$ สลับที่กับแฮมมิลโทเนียน

ข) ค่าไอเกนของ σ_z 0 2 0 -2

ค่าไอเกนของ σ_z	0	2	0	-2
ค่าไอเกนของ σ^2	0	8	8	8
ค่าไอเกนของ H	-3B	2A+B	B	-2A+B

$$S = \frac{1}{2}\hbar\sigma \quad , \quad S_z = \frac{1}{2}\hbar\sigma_z$$

อนุภาค (1) และ (2) มีสปิน $\frac{1}{2}$ หรือ $S_1 = \frac{1}{2}, S_2 = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad S \ = \ 0$ หรือ 1

$S_z = 0 \qquad 1, 0, -1$

$\sigma_z = 0 \qquad 1, 0, -2$

$\sigma_z = 0$

เรารู้ว่า

$$\sigma^2 \left|\ \right\rangle = \psi\left(S(S+1)\right)\left|\ \right\rangle$$

$$\therefore \sigma^2 = 0 \qquad 8\ , 8\ , 8$$

เรารู้ว่า

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (1+1+1)\,I = 3$$

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 = 6 + 2\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$$

$$\therefore \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 = \frac{1}{2}\left(\sigma^2 - 6\right)$$

$$\begin{aligned} H(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2) &= A(\sigma_{1z} + \sigma_{2z}) + B\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \\ &= A(\sigma_{1z} + \sigma_{2z}) + \frac{B}{2}\left(\sigma^2 - 6\right) \end{aligned}$$

เรารู้ค่า σ_z, σ^2 จะหาค่า H

σ_z	0	0	-2
σ^2	0	8	8

สำหรับ $\sigma_z = 0, \sigma^2 = 0$ $\quad H = 0 + \frac{B}{2}(0 - 6) = -3B$

สำหรับ $\sigma_z = 2, \sigma^2 = 8$ $\quad H = 2A + \frac{B}{2}(8 - 6) = 2A + B$

สำหรับ $\sigma_z = 0, \sigma^2 = 8$ $\quad H = 0 + \frac{B}{2}(8 - 6) = B$

สำหรับ $\sigma_z = -2, \sigma^2 = 8$ $\quad H = -2a + \frac{B}{2}(8 - 6) = -2A + B$

ดังนั้นค่าไอเกนของออฟเพอเรเตอร์ของทั้งสามนี้คือ

σ_z	0	2	0	-2
σ^2	0	8	8	8
H	-3B	2A+B	B	-2A+B

ตัวอย่างที่ 7.11 จงแสดงว่าถ้า A และ B เป็นค่าคงที่ของการเคลื่อนที่ คอมมิวเทเตอร์ของ A และ B ก็จะเป็นค่าคงที่ของการเคลื่อนที่ด้วย

วิธีทำ ให้

$$< \frac{d\vec{A}}{dt} >= \frac{i}{\hbar} < \left[\hat{H}, \vec{A}\right]> \quad = \quad 0$$

$$< \frac{dB}{dt} >= \frac{i}{\hbar} < \left[\hat{H}, \vec{B}\right]> \quad = \quad 0$$

เป็นค่าคงที่ของการเคลื่อนที่

$$< \frac{d\left[\vec{A}, \vec{B}\right]}{dt} > \; = \frac{i}{\hbar} < \left[\hat{H}, \left[\vec{A}, \vec{B}\right]\right]>$$

พิจารณา $< \left[\hat{H}, \left[\vec{A}, \vec{B}\right]\right]>$

$$\therefore < \left[\hat{H}, \left[\vec{A}, \vec{B}\right]\right]> = \left[\hat{H}, \vec{A}\vec{B}\right] - \left[\hat{H}, \vec{B}\vec{A}\right]$$

$$= \vec{A}\left[\hat{H}, B\right] + \left[\hat{H}, \vec{A}\right]\vec{B} - \left\{\vec{B}\left[\hat{H}, \vec{A}\right] + \left[\hat{H}, \vec{B}\right]\vec{A}\right\}$$

$$= \vec{A}\left(\vec{H}\vec{B} - \vec{B}\vec{H}\right) + \left(\hat{H}\vec{A} - \vec{A}\hat{H}\right)\vec{B} - \vec{B}\left(\hat{H}\vec{A} - \vec{A}\hat{H}\right) - \left(\hat{H}\vec{B} - \vec{B}\hat{H}\right)\hat{A}$$

$$= AHB - ABH + HAB - AHB - BHA + BAH - HBA + BHA$$

เรารู้ค่า H

$$\therefore AH = HA \quad , \quad BH = HB$$

$$\therefore \left[\hat{H}, (AB - BA)\right] = 0$$

$$< \frac{d\left[\vec{A}, \vec{B}\right]}{dt} > \; = \frac{i}{\hbar} < \left[\hat{H}, \left[\vec{A}, \vec{B}\right]\right]> = 0$$

$\therefore$ คอมมิวเทเตอร์ของ A และ B ก็เป็นค่าคงที่ของการเคลื่อนที่ด้วย

ตัวอย่างที่ 7.12 จงหาค่าจากการสลับที่ของ $\vec{L}\cdot\vec{S}$ กับ L_Z, S_Z, H และ J เมื่อ

$$H = \frac{1}{2m}p^2 - eV(r) - \frac{eh^2V(r)}{2m^2c^2}\left(\vec{L}\cdot\vec{S}\right)$$

และจงพิสูจน์ว่าเป็นออฟเพอเรเตอร์ชนิดเฮอร์มิเทียน (โดยอาศัยนิยาม $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$)

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\vec{L}\cdot\vec{S} &= \frac{1}{2}\left(L_x + iL_y\right)\left(S_x - iS_y\right) + \frac{1}{2}\left(L_x - iL_y\right)\left(S_x + iS_y\right) + L_zS_z \\
&= \frac{1}{2}\left[L_xS_x + iL_yS_x - iL_xS_y + L_yS_y + L_xS_x - iL_yS_x + iL_xS_y + L_yS_y + L_zS_z\right] \\
&= L_xS_x + L_yS_y + L_zS_z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[\left(\vec{L}\cdot\vec{S}\right), L_z\right] &= \left[L_xS_x + L_yS_y + L_zS_z, L_z\right] \\
&= \left[L_xS_x, L_z\right] + \left[L_yS_y, L_z\right] + \left[L_zS_z, L_z\right] \\
&= L_x\left[S_x, L_z\right] + \left[L_x, L_z\right]S_x + L_y\left[S_y, L_z\right] + \left[L_y, L_z\right]S_y + L_z\left[S_z, L_z\right] + \left[L_z, L_z\right]S_z \\
&= 0 + \left(-iL_yS_x\right) + 0 + iL_xS_y + 0 + 0 \\
&= i\left(L_xS_y - L_yS_x\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[\left(\vec{L}\cdot\vec{S}\right), S_z\right] &= \left[(L_xS_x + L_yS_y + L_zS_z), L_z\right] \\
&= \left[L_xS_x, L_z\right] + \left[L_yS_y, L_z\right] + \left[L_zS_z, L_z\right] \\
&= L_x\left[S_x, S_z\right] + \left[L_x, S_z\right]S_x + L_y\left[S_y, S_z\right] + \left[L_y, S_z\right]S_y + L_z\left[S_z, S_z\right] + \left[L_z, S_z\right]S_z \\
&= 0 - iL_xS_y + 0 + iL_yS_x + 0 + 0 + 0 \\
&= i\left(L_xS_x - L_xS_y\right)
\end{aligned}$$

$$H = \frac{1}{2m}p^2 - eV(r) - \frac{eh^2V(r)}{2m^2c^2}\left(\vec{L}\cdot\vec{S}\right) = H_0 + H'\left(\vec{L}\cdot\vec{S}\right)$$

เมื่อ $H_0 = \frac{1}{2m}p^2 - eV(r)$, $H' = -\frac{eh^2V(r)}{2m^2c^2}$

$$\begin{aligned}
\left[\left(\vec{L}\cdot\vec{S}\right), H_0\right] &= \left[(L_xS_x + L_yS_y + L_zS_z), H_0\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[\left(\vec{L}\cdot\vec{S}\right), H'\left(\vec{L}\cdot\vec{S}\right)\right] &= \left[(L_xS_x + L_yS_y + L_zS_z), H'\left(\vec{L}\cdot\vec{S}\right)\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\therefore \left[\left(\vec{L}\cdot\vec{S}\right)\ ,\ H'\left(\vec{L}\cdot\vec{S}\right)\right] = 0$$

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

$$\left[\vec{L}\cdot\vec{S},\vec{J}\right] = \left[\vec{L}\cdot\vec{S},\vec{L}+\vec{S}\right] = \left[\vec{L}\cdot\vec{S},\vec{L}\right] + \left[\vec{L}\cdot\vec{S},\vec{S}\right]$$

$$= \left[L_xS_x,\vec{L}\right] + \left[L_xS_x,\vec{S}\right] + \left[L_yS_y,\vec{L}\right] + \left[L_zS_z,\vec{L}\right] + \left[L_yS_y,\vec{S}\right] + \left[L_zS_z,\vec{S}\right]$$

$$= L_x\left[S_x,\vec{L}\right] + \left[L_x,\vec{L}\right]S_x + L_x\left[S_x,\vec{S}\right] + \left[L_x,\vec{S}\right]S_x + L_y\left[S_y,\vec{L}\right] + \left[L_y,\vec{L}\right]S_y$$
$$+ \left[L_z,\vec{L}\right]S_z + L_z\left[S_z,\vec{L}\right] + L_y\left[S_y,\vec{S}\right] + \left[L_y,\vec{S}\right]S_y + L_z\left[S_z,\vec{S}\right] + \left[L_z,\vec{S}\right]S_z$$

$$= \left[L_x,L_y\right]S_x + \left[L_x,L_z\right]S_x + L_x\left[S_x,S_y\right] + L_x\left[S_x,S_z\right] + \left[L_y,L_x\right]S_y + \left[L_y,L_z\right]S_y$$
$$+ \left[L_z,L_x\right]S_z + \left[L_z,L_y\right]S_z + L_y\left[S_y,S_x\right] + L_y\left[S_y,S_z\right] + L_z\left[S_z,S_x\right] + L_z\left[S_z,S_y\right]$$

$$= (iL_z - iL_y)S_x + (iL_x - iL_z)S_y + (iL_y - iL_x)S_z + L_x(iS_z - iS_y) + L_y(iS_x - iS_z) + L_z(iS_y - iS_x)$$
$$= i(L_zS_x - L_yS_x) + i(L_xS_y - L_zS_y) + i(L_yS_z - L_xS_z) + i(L_xS_z - L_xS_y)$$
$$+ i(L_yS_x - L_yS_z) + i(L_zS_y - L_zS_x)$$

$$\left[\vec{L}\cdot\vec{S},\vec{J}\right] = 0$$

พิสูจน์ว่า $\vec{L}$ เป็นออฟเพอเรเตอร์ชนิดเฮอร์มิเทียน

$$H = \frac{p^2}{2m} \quad , \quad [H,L] = \left[\frac{p^2}{2m},L\right] = \left[\frac{p^2}{2m},L_x\right] + \left[\frac{p^2}{2m},L_y\right] + \left[\frac{p^2}{2m},L_z\right]$$

$\vec{H}$ เป็นออฟเพอเรเตอร์ชนิดเฮอร์มิเทียน

$$\left[\frac{p^2}{2m},L\right] = \left[\frac{p^2}{2m},yp_z - zp_y\right] + \left[\frac{p^2}{2m},zp_x - xp_z\right] + \left[\frac{p^2}{2m},xp_y - yp_x\right]$$
$$= y\left[\frac{p^2}{2m},p_z\right] + \left[\frac{p^2}{2m},y\right]p_z - z\left[\frac{p^2}{2m},p_y\right] - \left[\frac{p^2}{2m},z\right]p_y + z\left[\frac{p^2}{2m},p_x\right] + \left[\frac{p^2}{2m},z\right]p_x$$
$$- x\left[\frac{p^2}{2m},p_z\right] - \left[\frac{p^2}{2m},x\right]p_z + x\left[\frac{p^2}{2m},p_y\right] + \left[\frac{p^2}{2m},x\right]p_y - y\left[\frac{p^2}{2m},p_x\right] - \left[\frac{p^2}{2m},y\right]p_x$$
$$= \frac{2}{2m}\frac{\hbar}{i}p_z - \frac{2}{2m}\frac{\hbar}{i}p_y + \frac{2}{2m}\frac{\hbar}{i}p_x - \frac{2}{2m}\frac{\hbar}{i}p_z + \frac{2}{2m}\frac{\hbar}{i}p_y - \frac{2}{2m}\frac{\hbar}{i}p_x$$
$$= 0$$

ดังนั้น $\vec{L}$ เป็นออฟเพอเรเตอร์ชนิดเฮอร์มิเทียน

ตัวอย่างที่ 7.13 จงหาสัมประสิทธิ์เคลีปกอร์คอนสำหรับ s = 1 และ ℓ (อนุภาคสปิน 1 และโมเมนตัมเชิงมุมออร์บิท ℓ)

วิธีทำ

$$j_1 = \ell \quad , \quad j_2 = \ell$$

$$\psi_{jm} = \sum_{mi} \langle j_1 m_1 j_2 m - m_1 | jm \rangle \psi_{j1m1} \psi_{j2} m - m_1$$

$$\psi_{jm} = \langle 11\, j_2 m - 1 | jm \rangle \psi_{11}^{(1)} \psi_{jm-1}^{(2)} + \langle 10\, j_2 m | jm \rangle \psi_{10}^{(1)} \psi_{jm}^{(2)}$$

$$+ \langle 1 - 1\, j_2 m + 1 | jm \rangle \psi_{jm+1}$$

$$= C_{11} \psi_{11}^{1} \psi_{\ell m-1} + C_0 \psi_{10}^{(1)} \psi_{\ell m}^{(2)} + C_{-1} \psi_{1-1}^{(1)} \psi_{\ell m+1}^{(2)}$$

$$\therefore \hat{J}^2 \psi_{jm} = J(J+1) \psi_{jm}$$

$$\psi_{11}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \psi_{10}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \psi_{1-1}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle jm \pm 1 | j_x | j_m \rangle = \frac{\hbar}{2} \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}$$

$$\langle jm \pm | j_y | j_m \rangle = \mp \frac{i\hbar}{2} \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}$$

$$\langle jm \pm 1 | j_z | j_m \rangle = m \hbar \delta_{ij'} \delta_{mm'}$$

$$\hat{\ell}_{1x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{\ell}_{1y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{\ell}_{1z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{J}^2 \psi_{jm} = \left(\hat{\ell}_1^2 + \hat{\ell}_2^2 + 2\hat{\ell}_1 \cdot \hat{\ell}_2 \right) \psi_{jm}$$

$$= \begin{pmatrix} \ell(\ell+1) + 2 + 2\hat{\ell}_{2z} & \sqrt{2}\hat{\ell}_{2-} & 0 \\ \sqrt{2}\ell_{2+} & \ell(\ell+1) + 2 & \sqrt{2}\hat{\ell}_{2+} \\ 0 & \sqrt{2}\hat{\hat{\ell}}_{2+} & \ell(\ell+1) + 2 + 2\hat{\ell}_{2z} \end{pmatrix} \psi_j$$

$$\ell_+ = \ell_x + i\ell_y$$
$$\ell_- = \ell_x - i\ell_y$$
$$\hat{\ell}_+\psi_{\ell m} = \sqrt{(\ell-m)(\ell+m+1)}\psi_{\ell m}+1$$
$$\hat{\ell}_-\psi_{\ell m} = \sqrt{(\ell+m)(\ell+m+1)}\psi_{\ell m-1}$$

$$\psi_{11}^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \psi_{10}^{(1)} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \psi_{1-1}^{(1)} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$J(J+1)\begin{pmatrix}C_1\psi_{\ell m-1}^{(2)}\\ C_2\psi_{\ell m1}^{(2)}\\ C_1\psi_{\ell m+1}^{(2)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\ell(\ell+1)+2+2\hat{\ell}_{2z} & \sqrt{2}\hat{\ell}_{2-} & 0\\ \sqrt{2}\ell_{2+} & \ell(\ell+1)+2 & \sqrt{2}\hat{\ell}_{2+}\\ 0 & \sqrt{2}\hat{\hat{\ell}}_{2+} & \ell(\ell+1)+2+2\hat{\ell}_{2z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\psi_{\ell m-1}^{(2)}\\ C_2\psi_{\ell m1}^{(2)}\\ C_1\psi_{\ell m+1}^{(2)}\end{pmatrix}$$

$$J(J+1)C_1\psi_{\ell m-1}^{(2)} = [\ell(\ell+1)+2+2(m-1)]C_1\psi_{\ell m-1}^{(2)} + \sqrt{2}C_0\sqrt{(\ell-m+1)(\ell+m)}\psi_{\ell m-1}^{(2)}$$
$$J(J+1)C_0\psi_{\ell m}^{(2)} = C_1\sqrt{2}\sqrt{(\ell+m)(\ell-m+1)}\psi_{\ell m}^{(2)} + [\ell(\ell+1)+2]C_0\psi_{\ell m}^{(2)} + \sqrt{2}\sqrt{(\ell+m)(\ell+m+1)}\psi_{\ell m}^{(2)}$$
$$J(J+1)C_{-1}\psi_{\ell m+1}^{(2)} = \sqrt{2}C_0\sqrt{(\ell+m)(\ell-m)}\psi_{\ell m+1}^{(2)} + [\ell(\ell+1)+2-2m-2]C_{-1}\psi_{\ell m+1}^{(2)}$$

$$[\ell(\ell+1)+2m-J(J+1)]C_1 + \sqrt{2(\ell+m+1)(\ell-m+1)}C_0 = 0$$

$$\sqrt{2(\ell+m)(\ell-m+1)}C_1 + [\ell(\ell+1)+2-J(J+1)]C_0 + \sqrt{(\ell-m)(\ell+m+1)}C_1 = 0$$
$$\sqrt{2(\ell-m)(\ell+m+1)}C_0 + [\ell(\ell+1)+2m-J(J+1)]C_{-1} = 0$$

$$\frac{C_1}{C_0} = \frac{\sqrt{2(\ell+m)(\ell-m+1)}}{J(J+1)-\ell(\ell+1)-2m}$$

$$\frac{C_0}{C_{-1}} = \frac{j(j+1)-\ell(\ell+1)+2m}{2(\ell-m)(\ell+m+1)}$$

$$j_1 = 1 \quad , \quad j_2 = \ell$$

$$j = \ell + 1 \quad , \quad \ell \quad , \quad \ell - 1$$

ถ้า $y = \ell + 1$

$$\frac{C_1}{C_0} = \frac{\sqrt{2(\ell+m)(\ell-m+1)}}{\ell(\ell+1)-2m} = \frac{\sqrt{(\ell+m)}}{\sqrt{2(\ell-m+1)}}$$

$$\frac{C_0}{C_1} = \frac{2(\ell+1)+2m}{\sqrt{2(\ell+m)(\ell-m+1)}} = \frac{2(\ell+m+1)}{\sqrt{(\ell-m)}}$$

$$C_0^2 + C_1^2 + C_{-1}^2 = 1$$

$j = \ell$

$$\frac{C_1}{C_0} = \frac{-\sqrt{2(\ell+m)(\ell-m+1)}}{-2m}$$

$$\frac{C_0}{C_1} = \frac{2m}{\sqrt{2(\ell-m)(\ell+m+1)}}$$

$j = (\ell - 1)$

$$\frac{C_1}{C_0} = -\frac{\sqrt{(\ell-m-1)}}{\sqrt{2(\ell+m)}}$$

$$\frac{C_0}{C_{-1}} = \frac{2(\ell-m)}{\sqrt{(\ell+m+1)}}$$

$$\langle \ell m_1 | \; m_2 | jm \rangle$$

$m\ (m-m_1)$ / j	1	0	-1
$\ell + 1$	$\sqrt{\frac{(\ell+m)(\ell+m+1)}{(2\ell+1)(2\ell+2)}}$	$\sqrt{\frac{(\ell-m)(\ell+m+1)}{(2\ell+1)(\ell+2)}}$	$\sqrt{\frac{(\ell-m)(\ell-m+1)}{(2\ell+1)(2\ell+2)}}$
ℓ	$-\sqrt{\frac{(\ell+m)(\ell-m+1)}{2\ell(\ell+1)}}$	$\frac{m}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}$	$\sqrt{\frac{(\ell-m)(\ell+m+1)}{2\ell(\ell+1)}}$
$\ell - 1$	$\sqrt{\frac{(\ell-m)(\ell-m+1)}{2\ell(2\ell+1)}}$	$-\sqrt{\frac{(\ell-m)(\ell+m)}{\ell(2\ell+1)}}$	$\sqrt{\frac{(\ell+m)(\ell+m)}{\ell(2\ell+1)}}$

ตัวอย่างที่ 7.14 จงหาสมาชิกของเมทริกซ์ของการหมุน

$$D(\alpha\beta r) = (\exp i\alpha J_z)\,(\exp i\beta J_y)\,(\exp i\gamma J_x)$$

โดยใช้ $j = \frac{1}{2}$ และ $J = 1$

วิธีทำ

สำหรับ $j = \frac{1}{2}$, $m = -\frac{1}{2}$

$$(jm+1|J_y|jm) = -\frac{i\hbar}{2}\left[\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+1\right)\right]^{1/2} = 0$$

$$(j\,m-1|J_y|jm) = \frac{i\hbar}{2}\left[\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}+1\right)\right]^{1/2} = \frac{i\hbar}{2}$$

เมทริกซ์ของออฟเพอรเรเตอร์โมเมนตัมเชิงมุม J_y

$m' = m \pm 1$

	$m' = \frac{1}{2}$	$m' = -\frac{1}{2}$
$m' = \frac{1}{2}$	0	$\frac{i\hbar}{2}$
$m' = -\frac{1}{2}$	$\frac{i\hbar}{2}$	0

$$\therefore J_y = \frac{i\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\exp i\beta J_y = \exp M \;\therefore\; M = -\frac{\beta\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\beta\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^{2n} = (-1)^n\left(\frac{\beta\hbar}{2}\right)^{2m}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad M^{2n+1} = (-1)^n\left(\frac{\beta\hbar}{2}\right)^{2n+1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\exp M = 1 + \frac{M}{1!} + \frac{M^2}{2!} + \frac{M^3}{3!} + \frac{M^4}{4!} + \frac{M^5}{5!} + \ldots$$

$$\exp M = 1+\frac{1}{1!}\left(\frac{\beta\hbar}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+\frac{1}{2!}\left(\frac{\beta\hbar}{2}\right)^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\frac{1}{3!}\left(\frac{\beta\hbar}{2}\right)^3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+\frac{1}{4!}\left(\frac{\beta\hbar}{2}\right)^4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\frac{1}{5!}\left(\frac{\beta\hbar}{2}\right)^5\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+\ldots$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\left[\left(\frac{\beta\hbar}{2}\right)-\frac{1}{3!}\left(\frac{\beta\hbar}{2}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\beta\hbar}{2}\right)^5+\ldots\right]$$

$$+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left[1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\beta\hbar}{2}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{\beta\hbar}{2}\right)^4\ldots\right]$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\sin\frac{\beta\hbar}{2}+ + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cos\frac{\beta\hbar}{2}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos\frac{\beta\hbar}{2} & \sin\frac{\beta\hbar}{2} \\ -\sin\frac{\beta\hbar}{2} & \cos\frac{\beta\hbar}{2} \end{pmatrix}$$

$$\therefore d^{(1/2)}_{m'm}(\beta)=\left(jm'\left|\exp\left(i\beta J_y\right)\right|jm\right)=\begin{pmatrix} \cos\frac{\beta\hbar}{2} & \sin\frac{\beta\hbar}{2} \\ -\sin\frac{\beta\hbar}{2} & \cos\frac{\beta\hbar}{2} \end{pmatrix}$$

$$=\left(\frac{1}{2}m'\left|\exp\left(i\beta J_y\right)\right|\frac{1}{2}m\right)$$

	$m' = 1/2$	$m' = -1/2$
$m' = 1/2$	$\cos\frac{\beta\hbar}{2}$	$\sin\frac{\beta\hbar}{2}$
$m' = -1/2$	$-\sin\frac{\beta\hbar}{2}$	$\cos\frac{\beta\hbar}{2}$

$$\left(\frac{1}{2}m'\left|D(\alpha\beta\gamma)\right|\frac{1}{2}m\right)=D^{1/2}_{m'm}(\alpha\beta\gamma)=(epxi\,m'\alpha)d^{1/2}_{m'm}(\beta)\exp(im\gamma)$$

$$= \begin{vmatrix} e^{\frac{i\alpha}{2}} \cos \dfrac{\beta\hbar}{2} e^{\frac{i\gamma}{2}} & e^{(\frac{i\alpha}{2})} \sin \dfrac{\beta\hbar}{2} e^{(-\frac{i\gamma}{2})} \\ -e^{-\frac{i\alpha}{2}} \sin \dfrac{\beta\hbar}{2} e^{\frac{i\gamma}{2}} & e^{\frac{i\alpha}{2}} \cos \dfrac{\beta\hbar}{2} e^{-\frac{i\gamma}{2}} \end{vmatrix}$$

สำหรับ $j = 1$

$$J_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} O & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}_I = (1m'|J_y|m)$$

$$\exp(i\beta J_y = \exp M_y) \therefore M_y = \frac{\beta\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ o & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_y^2 = \left(\frac{\beta\hbar}{\sqrt{2}}\right)^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \left(\frac{\beta\hbar}{\sqrt{2}}\right)^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_y^3 = \left(\frac{\beta\hbar}{\sqrt{2}}\right)^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \left(\frac{\beta\hbar}{\sqrt{2}}\right)^3 (-2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_y^4 = \left(\frac{\beta\hbar}{\sqrt{2}}\right)^4 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ o & -1 & 0 \end{pmatrix}^4 = \left(\frac{\beta\hbar}{\sqrt{2}}\right)^4 (-2) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_y^5 = \left(\frac{\beta\hbar}{\sqrt{2}}\right)^5 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ o & -1 & 0 \end{pmatrix}^5 = \left(\frac{\beta\hbar}{\sqrt{2}}\right)^5 (-2)^5 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ o & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_y^6 = \left(\frac{\beta\hbar}{\sqrt{2}}\right)^6 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^6 = \left(\frac{\beta\hbar}{\sqrt{2}}\right)^6 (-2)^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\exp M_y = 1 + \frac{M_y}{1!} + \frac{M_y^2}{2!} + \frac{M_y^3}{3!} + \frac{M_y^4}{4!} + \frac{M_y^5}{5!} + \frac{M_y^6}{6!} + \ldots$$

ให้ $[A] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ และ $[B] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\exp M_y = \frac{1}{\sqrt{2}}[A]\left\{\beta\hbar - \frac{(\beta\hbar)^3}{3!} + \frac{(\beta\hbar)^5}{5!} + \ldots\right\}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}[B]\left\{1 + \frac{(\beta\hbar)^2}{2!} - \frac{(\beta\hbar)^4}{4!} + \frac{(\beta\hbar)^6}{6!} + \ldots\right\} + \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\exp M_y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\cos\beta\hbar) & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta\hbar & \frac{1}{2}(1-\cos\beta\hbar) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta\hbar & \cos\beta\hbar & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta\hbar \\ \frac{1}{2}(1-\cos\beta\hbar) & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta\hbar & \frac{1}{2}(1+\cos\beta\hbar) \end{pmatrix}$$

$$\therefore \left(m'\middle|\exp(i\beta J_y)\middle|m\right) = d^{(1)}_{m'm}(\beta) = \exp M_y$$

	$m=1$	0	-1
$m'=1$	$\frac{1}{2}(1+\cos\beta\hbar)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta\hbar$	$\frac{1}{2}(1-\cos\beta\hbar)$
0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta\hbar$	$\cos\beta\hbar$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta\hbar$
-1	$\frac{1}{2}(1-\cos\beta\hbar)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta\hbar$	$\frac{1}{2}(1+\cos\beta\hbar)$

$$\left(jm'\middle|D(\alpha\beta\gamma)\middle|jm\right) = D^{(j)}_{m'm}(\alpha\beta\gamma) = (\exp im'\alpha)d^{(j)}_{m'm}(\beta)(\exp im\gamma)$$

สำหรับ $j = 1$

$$\left(1m'\middle|D(\alpha\beta\gamma)\middle|1m\right) = D^{(1)}_{m'm}(\alpha\beta\gamma) = (\exp im'\alpha)d^{(1)}_{m'm}(\beta)(\exp im\gamma)$$

$$\therefore \left(1m'\middle|D(\alpha\beta\gamma)\middle|1m\right) = D^{(1)}_{m'm}(\alpha\beta\gamma) = (\exp im'\alpha)d^{(1)}_{m'm}(\beta)(\exp im\gamma) =$$

	$m = 1$	0	-1
$m' = 1$	$\frac{1}{2}e^{i\alpha}(1+\cos\beta\hbar)e^{i\gamma}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta\hbar$	$\frac{1}{2}e^{i\alpha}(1-\cos\beta\hbar)e^{-i\gamma}$
0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta\hbar e^{i\gamma}$	$\cos\beta\hbar$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta\hbar e^{-i\gamma}$
-1	$\frac{1}{2}e^{-i\alpha}(1-\cos\beta\hbar)e^{i\gamma}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\alpha}\sin\beta\hbar$	$\frac{1}{2}e^{-i\alpha}(1+\cos\beta\hbar)e^{-i\gamma}$

$\therefore$ เมทริกซ์ของ $D(\alpha\beta r)$ คือ

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{i\alpha}(1+\cos\beta\hbar)e^{i\gamma} & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\alpha}\sin\beta\hbar & \frac{1}{2}e^{i\alpha}(1-\cos\beta\hbar)e^{-i\gamma} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta\hbar e^{i\gamma} & \cos\beta\hbar & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta\hbar e^{-i\gamma} \\ \frac{1}{2}e^{-i\alpha}(1-\cos\beta\hbar)e^{i\gamma} & -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\alpha}\sin\beta\hbar & \frac{1}{2}e^{-i\alpha}(1+\cos\beta\hbar)e^{-i\gamma} \end{pmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 7.15 จงหาสเตทเวกเตอร์และสมมาตรของระบบที่ประกอบด้วยอนุภาค 2 ตัว แต่ละตัวมีสปินเท่ากับ $\frac{1}{2}$ ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นไอเกนทั้งของออฟเพอเรเตอร์ S^2 และ S_3 เมื่อ $\vec{S}$ เป็นออฟเพอเรเตอร์สปินรวมของระบบ

วิธีทำ อนุภาคสปิน $\frac{1}{2}$ สองตัว

สปินรวมที่เป็นไปได้ $S = 0\ ,1$

แทนสเตท $S_{z_i} = \pm\frac{1}{2}$ ด้วย $\left|\frac{1}{2}\right\rangle_i, \left|-\frac{1}{2}\right\rangle_i$

S	S_z	สเตทเวกเตอร์
1	1	$\left\|\frac{1}{2}\right\rangle_{1'}\left\|-\frac{1}{2}\right\rangle_{2'}$
1	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left\|\frac{1}{2}\right\rangle_1\left\|-\frac{1}{2}\right\rangle_2 + \left\|-\frac{1}{2}\right\rangle_1\left\|\frac{1}{2}\right\rangle_2\right\}$
1	–1	$\left\|-\frac{1}{2}\right\rangle_1\left\|-\frac{1}{2}\right\rangle_2$
0	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left\|\frac{1}{2}\right\rangle_1\left\|-\frac{1}{2}\right\rangle_2 - \left\|-\frac{1}{2}\right\rangle_1\left\|\frac{1}{2}\right\rangle_2\right\}$

สเตทที่ $S = 1$ เป็นสเตทสมมาตรทั้งหมดและสเตท $S = 0$ เป็นสเตทที่ไม่สมมาตร

ตัวอย่างที่ 7.16 ทำเหมือนตัวอย่างที่ผ่านมาเพียงแต่เปลี่ยนสปินของอนุภาคเป็นสปินหนึ่ง

วิธีทำ อนุภาคสปิน 1 สองตัว จะมีสปินรวม $S = 0,1,2$ และสเตทของ $S_z \Rightarrow |1\rangle_i, |0\rangle_i, |-1\rangle_i$ ผลรวมของสเตท คือ

S	S_z	สเตทเวกเตอร์
2	2	$\|1\rangle_1\|1\rangle_2$
2	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}\{\|1\rangle_1\|0\rangle_2 + \|0\rangle_1\|1\rangle_2\}$
2	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}\left\{\|0\rangle_1\|0\rangle_2 + \frac{1}{2}\|1\rangle_1\|-1\rangle_2 + \frac{1}{2}\|-1\rangle_1\|1\rangle_2\right\}$
2	-1	$\frac{1}{\sqrt{2}}\{\|0\rangle_1\|-1\rangle_2 + \|-1\rangle_1\|0\rangle_2\}$
2	-2	$\|-1\rangle_1\|-1\rangle_2$
1	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}\{\|1\rangle_1\|0\rangle_2 - \|0\rangle_1\|1\rangle_2\}$

1	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}\{\|1\rangle_1\|-1\rangle_2 - \|-1\rangle_1\|1\rangle_2\}$
1	-1	$\frac{1}{\sqrt{2}}\{\|0\rangle_1\|-1\rangle_2 - \|-1\rangle_1\|0\rangle_2\}$
0	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}\{\|0\rangle_1\|0\rangle_2 - \|1\rangle_1\|-1\rangle_2 - \|-1\rangle_1\|1\rangle_2\}$

ตัวอย่างที่ 7.17 จงแสดงว่า ระบบอนุภาคเหมือนกัน 2 ตัว จะมีอัตราส่วน ของจำนวนสเตทที่มีสมมาตรและ ที่ไม่มีสมมาตรเท่ากับ $S/(S+1)$

วิธีทำ ให้ $|m_i\rangle$ แทนสเตทสปิน $2S+1$ ของอนุภาคหนึ่งตัว

ผลคูณของสเตท $|m_1\rangle|m_2\rangle$ จะมีได้ $(2S+1)^2$ ตัว

จะสามารถจัดเรียงเป็นสเตทสมมาตร ได้ดังนี้

$\|m_1\rangle\|m_2\rangle$	$m_1 = m_2$	สมมาตรหมด
$\|m_1\rangle\|m_2\rangle + \|m_2\rangle\|m_1\rangle$	$m_1 \neq m_2$	สมมาตรหมด
$\|m_1\rangle\|m_2\rangle - \|m_2\rangle\|m_1\rangle$	$m_1 \neq m_2$	ไม่สมมาตรหมด

จำนวนสเตทสมมาตร คือ

$$(2S+1) + \frac{2S(2S+1)}{2}$$

จำนวนสเตทไม่สมมาตร คือ

$$\frac{2S(2S+1)}{2}$$

ผลรวมทั้งหมด (ทั้งสเตทสมมาตรและสเตทไม่สมมาตร) คือ

$$(2S+1) + 2S(2S+1) = 2S(2S+1)^2$$

อัตราส่วนระหว่างสเตทสมมาตรและสเตทไม่สมมาตร คือ

$$\frac{2S+1+S(2S+1)}{S(2S+1)} = \frac{(S+1)(2S+1)}{S(2S+1)} = \frac{S+1}{S}$$

ตัวอย่างที่ 7.18 กำหนดให้สปิน $\vec{S}$ ของโบซอน คือ

$$S_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \text{ และ } S_x = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

สมมุติว่าวัด S_x ก่อนได้ค่า $\hbar$ และหลังจากนั้นจะได้ทำการวัด S_z ทันที

ก) การวัดครั้งที่สองควรจะได้ผลลัพธ์อย่างไร

ข) จงหาโอกาสที่จะได้ผลลัพธ์แต่ละค่า ในข้อ ก)

วิธีทำ ก) วัด S_x ได้ค่า $\hbar$

$$\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \hbar\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \sqrt{2}x_1$$

$$x_1 + x_3 = \sqrt{2}x_2$$

$$x_2 = \sqrt{2}x_3$$

ดังนั้น $$x_1 = x_3 = \frac{x_2}{\sqrt{2}}$$

สเตทฟังก์ชั่นคือ $$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

มีขนาดเท่ากับ $|x_1|\sqrt{1+2+1} = 2|x_1|$

เลือก $x_1 = \frac{1}{2}$

ดังนั้น สเตทฟังก์ชั่นที่นอร์มอลไลซ์แล้ว คือ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

ต่อไป กระจายสเตทนี้ในเทอมของเซทของฟังก์ชั่นไอเกนของ S_z

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ค่าไอเกน $\hbar$ ค่าไอเกน 0 ค่าไอเกน $-\hbar$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ค่าที่เป็นไปได้จากการวัด S_z คือ $\hbar$, 0 , $-\hbar$

ข) โอกาสมีค่าเท่ากับกำลังสองของสัมประสิทธิ์

ผลลัพธ์	$\hbar$	0	$-\hbar$
โอกาส	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

ตัวอย่างที่ 7.19 จงพิสูจน์ทฤษฎี

$$< x\frac{dV}{dx} > \quad = \quad < p^2/m >$$

สำหรับแฮมมิลโทเนียน $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} < [xp, H]_- > &= \int dx\,\psi^*(xpH - Hxp)\psi \\ &= \int dx\,\psi^* xpH\psi - \int dx (H\psi)^* xp\psi \\ &= \mathrm{E}\int dx\,\psi^* xp\psi - \mathrm{E}\int dx\,\psi^* xp\psi \\ &= 0 \end{aligned}$$

พิจารณา $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$

$$[xp, H]_- = \left[xp, \frac{p^2}{2m} + V(x)\right]_- = \left[xp, \frac{p^2}{2m}\right]_- + [xp, V(x)]_-$$

$$= \left[x, \frac{p^2}{2m}\right]_- p_- + x[p, V(x)]_-$$

$$= \{[x,p]_- p + p[x,p]_-\}\frac{p}{2m} + x\frac{\hbar}{i}\frac{dV}{dx}$$

$$= 2i\hbar\frac{p^2}{2m} + x\frac{\hbar}{i}\frac{dV}{dx}$$

ดังนั้น $< [xp, H]_- > \; = \; 0 \; = \; < i\hbar\frac{p^2 m}{} > + \frac{\hbar}{i} < x\frac{dV}{dx} >$

หรือ $< x\frac{dV}{dx} > \; = \; < p^2/m >$