บทที่ 6
การประยุกต์ใช้งาน

วัตถุประสงค์

1) ศึกษาการประยุกต์ใช้งานของสมการชเรอดิงเงอร์
2) ศึกษาสเตทของอนุภาคใน 1 มิติ
3) ศึกษาออฟเพอเรเตอร์พาริตี้
4) ศึกษาอนุภาคภายในหลุม 1 มิติ ลึกอนันต์
5) ศึกษาอนุภาคภายในหลุม 1 มิติ ลึกจำกัด
6) ศึกษาอนุภาคเคลื่อนที่ผ่านศักย์ขั้น
7) ศึกษาอนุภาคภายในหลุมลึกอนันต์
8) ศึกษาอนุภาคภายใต้ศักย์เดลต้า
9) ศึกษาฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์

หัวใจของกลศาสตร์ควอนตัม คือ สมการชเรอดิงเงอร์ ซึ่งจะหาได้จากการสมมุติว่า มีฟังก์ชันคลื่น $\psi\left(\vec{r},t\right)$ ที่เป็นไปตามสมการคลื่น

$$\nabla^2\psi\left(\vec{r},t\right) = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

ฟังก์ชั่นคลื่นประกอบด้วยข่าวสารที่สำคัญของระบบ เราอาจจะเขียนสมการชเรอดิงเงอร์ที่ขึ้นกับเวลาได้ดังนี้

$$H\psi(x,t) = \frac{-\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

เมื่อ $H = KE + PE$ เป็นแฮมมินโทเนียนออฟเพอเรเตอร์ และ

$$KE = P^2/2m = \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$$

เป็นออฟเพอเรเตอร์พลังงานจลน์

สำหรับสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาได้โดยใช้ออฟเพอเรเตอร์พลังงาน

$$E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

และ $$\psi\left(\vec{r},t\right) = \psi\left(\vec{r}\right)e^{-iEt/\hbar}$$

จะได้ $$H\psi = E\psi$$

เมื่อ E เป็นค่าไอเกนพลังงาน

$\psi = \psi\left(\vec{r}\right)$ เป็นไอเกนฟังก์ชัน หรือฟังก์ชันคลื่น

การแก้ปัญหาของกลศาสตร์ควอนตัม ก็คือ เขียนสมการเรอดิงเงอร์แล้วหาค่าไอเกนพลังงานและไอเกนฟังก์ชั่น

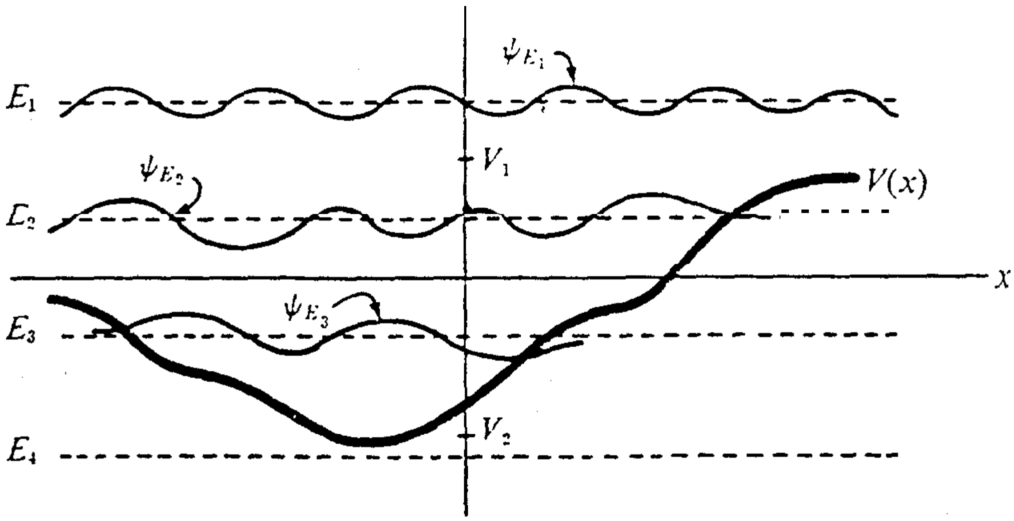
6.1 สเตทของอนุภาคใน 1 มิติ

พิจารณาสเตทอยู่นิ่ง $\psi_E(x)$ ของอนุภาคเคลื่อนที่ภายในใต้ศักย์ V(x) ซึ่งเป็นคำตอบของสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา

$$H\psi_E = E\psi_E$$

เมื่อเขียนในระบบพิกัด

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_E}{dx^2} + V(x)\psi_E = E\psi_E$$



รูปที่ 6.1 สเตทของอนุภาคภายใต้ศักย์ V(x)

ศักย์ V(x) มีค่าศูนย์เมื่อ $x = -\infty$ เมื่อ x เพิ่มขึ้น V(x) มีค่าเป็นลบมากขึ้นจนกระทั่งมีค่าน้อยที่สุดเท่ากับ V_2 หลังจากนั้น V(x) มีค่าเพิ่มมากขึ้นจนมีค่าเท่ากับ V_1 เมื่อ $x = +\infty$ เราจะแบ่งขอบเขตของพลังงานออกเป็น 4 ส่วน

1) $E > V_1$, เช่น E_1 ในรูป
2) $0 < E < V_1$, เช่น E_2 ในรูป
3) $V_2 < E < 0$, เช่น E_3 ในรูป
4) $E < V_2$, เช่น E_4 ในรูป

พิจารณาแต่ละส่วน

1) $E > V_1$ ในบริเวณนี้พลังงานจลน์ E - V(x) มีค่าเป็นบวกทุกช่องของ x จากฟิสิกส์ดั้งเดิมจะมีสเตทของการเคลื่อนที่ 2 สเตท คือสเตทที่อนุภาคเคลื่อนที่ไปทางขวา และสเตทที่อนุภาคเคลื่อนที่ไปทางซ้าย ในกรณีของทฤษฎีควอนตัม จะมีสองสเตทเช่นเดียวกัน โดยที่ สเตททั้งสองเป็นคำตอบของ สมการดิฟเฟอเรนเชียลสมการ (1) สเปคตรัมของพลังงานในช่วงนี้จะต่อเนื่องและแตกตัวออกเป็น 2 ระดับในช่วงนี้

2) $0 < E < V_1$ ในช่วงนี่พลังงานจลน์ เป็นบวก ในช่วงซ้ายของเส้นตัดระหว่าง E กับ V(x) และมีค่าเป็นลบในช่วงขวา ที่จุดตัด ซึ่ง E = V(x) พลังงานจลน์เป็นศูนย์ เป็นจุดที่เปลี่ยนจากฟิสิกส์ดั้งเดิมเป็นฟิสิกส์ควอนตัม ถ้าเป็นฟิสิกส์ดั้งเดิม อนุภาคเคลื่อนที่ไปทางขวา ชนกับ V(x) สะท้อนกลับมาทางซ้ายเป็นเพียงคำตอบเดียวเท่านั้น แต่ทางควอนตัมจะมีคำตอบของสมการชเรอดิงเงอร์ 2 คำตอบซึ่งมีเพียงคำตอบเดียวเท่านั้นที่ใช้ได้ สเปคตรัมของพลังงานจะต่อเนื่อง และไม่แตกตัวในช่วงนี้

3) $V_2 < E < 0$ ในบริเวณนี้จากทฤษฎีทางฟิสิกส์ดั้งเดิม จะได้จุดสะท้อนสองจุด และพลังงานจลน์มีค่าเป็นบวก ในช่วงระหว่างสองจุด เป็นลบภายนอกช่วงนี้ การเคลื่อนที่จากฟิสิกส์ดั้งเดิมจะเป็นรอบ เคลื่อนที่กลับไปกลับมาระหว่างสองจุดนี้ จึงมีการเคลื่อนที่ลักษณะเดียวสำหรับอนุภาคที่มีพลังงานค่าหนึ่ง แต่ในทางควอนตัมจะมีการเคลื่อนที่ เมื่ออนุภาคมีพลังงานที่เหมาะสมเท่านั้น อนุภาคจะอยู่ในสภาวะถูกขัง (bound state) สเปคตรัมของพลังงานจะมีค่าเป็นช่วงๆ และจะไม่แตกตัว

4) $E < V_2$ ในช่วงนี้พลังงานจลน์ เป็นลบ ทุกค่า x ไม่มีการเคลื่อนที่ ทั้งจากฟิสิกส์ดั้งเดิมและจากทฤษฎีควอนตัม

6.2 ออฟเพอเรเตอร์พาริตี้

พิจารณากรณีพิเศษซึ่ง V(x) สมมาตร

$$V(x) = V(-x)$$

จะทำให้ออฟเพอเรเตอร์ H สมมาตรด้วย ซึ่งเมื่อนำออฟเพอเรเตอร์ H ไปกระทำกับฟังก์ชั่นใด ๆ สมมาตรของฟังก์ชั่นนั้นจะยังคงเหมือนเดิม หมายความว่า สามารถแบ่งสมการชเรอดิงเงอร์เป็น 2 สมการ สมการหนึ่งให้คำตอบเป็นสเตทฟังก์ชั่นชนิดสมมาตร อีกสมการหนึ่งให้คำตอบเป็นสเตทฟังก์ชั่นชนิดไม่สมมาตร

สมมุติให้ p เป็นออฟเพอเรเตอร์พาริตี้ซึ่งเป็นไปตามนิยามต่อไปนี้

$$pf(x) = f(-x)$$

เมื่อ f(x) ฟังก์ชั่นใด ๆ

ออฟเพอเรเตอร์พาร์ตี้จะทำหน้าที่เปลี่ยนเครื่องหมายของพิกัดของฟังก์ชั่น

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1^*(x)p\psi_2(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\psi_1^*(x)\psi_2(-x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\psi_1^*(-x)\psi_2(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}(p\psi_1)^*\psi_2 dx$$

ต่อไปจะหาค่าไอเกนและฟังก์ชั่นไอเกน ก็คือการหาคำตอบของสมการ

$$p\psi_\alpha = \alpha\psi_\alpha$$

กระทำสมการนี้ด้วยออฟเพอเรเตอร์ P จะได้

$$p^2\psi_\alpha = \alpha p\psi_\alpha = \alpha^2\psi_\alpha$$

แต่ สำหรับฟังก์ชั่น f(x) ใด ๆ

$$p^2 f(x) \equiv p[pf(x)] = pf(-x) = f(x)$$

ดังนั้น $\alpha^2 = 1$ หรือ $\alpha \pm 1$

ให้ฟังก์ชั่นไอเกน ψ_+ และ ψ_- โดยที่

$$p\psi_+ = \psi_+ \quad , \quad p\psi_- = -\psi_-$$

หรือ อาจจะได้ว่า

$$\psi_+(-x) = \psi_+(x)$$

$$\psi_-(-x) = -y-(x>$$

นั่นคือ ψ_+ เป็นฟังก์ชั่นคู่และ ψ_-เป็นฟังก์ชั่น ψ_+ และ ψ_- เป็นออร์โทโกนัลฟังก์ชั่น

ฟังก์ชั่นใด ๆ สามารถเขียนได้เป็นผลบวกของส่วนที่สมมาตร และที่ไม่สมมาตร

$$f(x) = f_+(x) + f_-(x)$$

เมื่อ f_+ มีค่าดังนี้

$$f_+(x) \equiv \frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

เป็นฟังก์ชั่นสมมาตร และสามารถเขียน f_- ได้ดังนี้

$$f_-(x) \equiv \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

เป็นฟังก์ชั่นไม่สมมาตร

หรือถ้าจะเขียนในรูป p(x) จะได้

$$f_+(x) = \frac{1+p}{2} f(x)$$

$$f_-(x) = \frac{1-p}{2} f(x)$$

ปริมาณ $P^* = \dfrac{1 \pm p}{2}$

เรียกว่า **ออฟเพอเรเตอร์โพรเจกชั่น (projection operator)** ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้

$$p_\pm^2 = p_\pm$$

$$p_+ P_- = p_- \ p_+ = 0$$

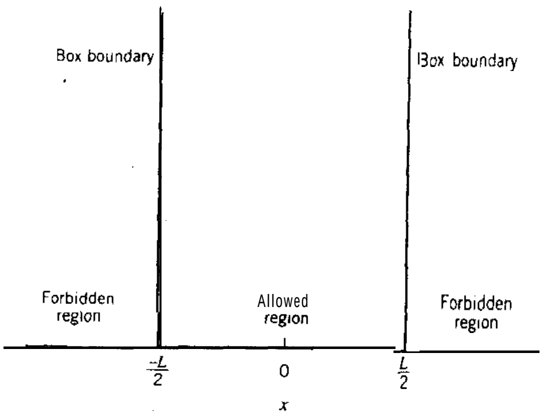
$$p_+ + p_- = 1$$

ถ้า V(x) มีลักษณะสมมาตร จะสามารถสลับที่ $p_\pm$ และ H ได้

$$p(H\psi) = H(-x)\psi(-x)$$
$$= H(x)\psi(-x)$$
$$= HP\psi$$

6.3 อนุภาคในหลุม 1 มิติ ลึกอนันต์ (กล่อง)

พิจารณาอนุภาคที่ถูกขังอยู่ภายในช่วง $-L/2 < x < L/2$ ดังรูป



สมการชเรอดิงเงอร์

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{-2mE}{\hbar^2}\psi$$

ผลเฉลยอันหนึ่ง คือ

$$\psi(x) = A\cos kx$$

ภาวะขอบเขต $\psi\left(-\frac{L}{2}\right) = \psi\left(\frac{L}{2}\right) = 0$

จะได้ว่า เลขคลื่น k มีค่าดังนี้

$$k = \frac{n\pi}{L}$$

เมื่อ n เป็นเลขเต็มหน่วยบวกเลขคี่ $(1,3,5,\ldots)$ ดังนั้น

$$\psi_n(x) = A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

โอกาสในการพบอนุภาค ต่อหนึ่งหน่วย x จะหาได้จาก

$$\frac{dp}{dx} = |\psi_n(x)|^2$$

จากการนอร์มอลไลซ์

$$\int_{-L/2}^{+L/2} dx |\psi_n(x)|^2 = 1$$

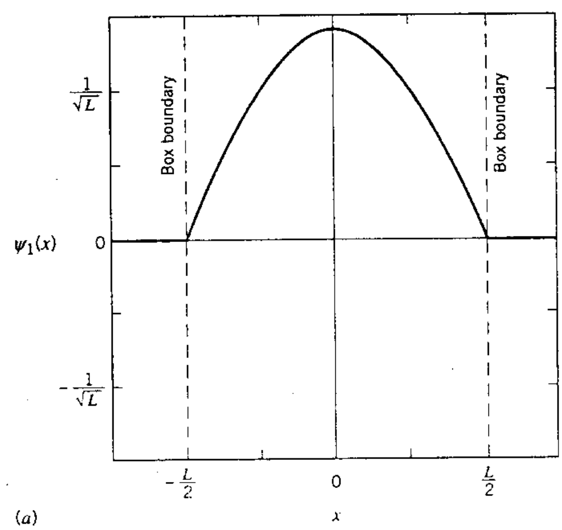
$$\int_{-L/2}^{+L/2} dx A_i^2 \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) = 1$$

$$A_i^2 \left(\frac{L}{2}\right) = 1$$

$$A_i = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

ผลเฉลยของฟังก์ชั่นคลื่น เมื่อ n = 1 คือ

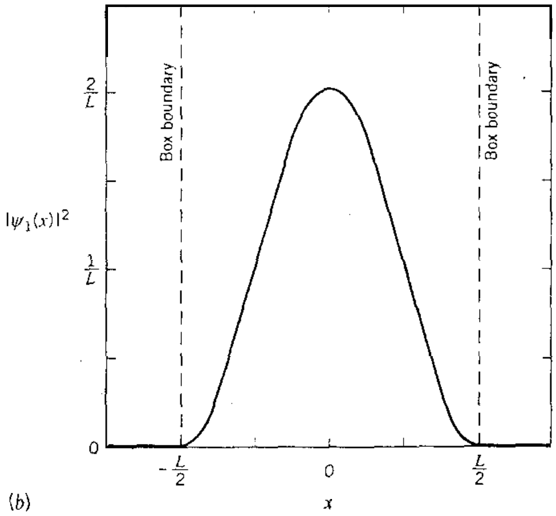
$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$



ฟังก์ชั่นคลื่น $\psi_1(x)$

โอกาสในการพบอนุภาค ต่อหนึ่งหน่วย x หาได้จาก

$$\frac{dp}{dx} = |\psi_n(x)|^2 = \frac{2}{L}\cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$



รูปที่ 6.2 กำลังสองของฟังก์ชั่นคลื่นพื้นฐาน

พลังงานระดับพื้นฐาน n = 1 คือ

$$E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} = \frac{h^2}{8mL^2}$$

ผลเฉลยอันที่สองของสมการชเรอดิงเงอร์ คือ

$$\psi(x) = B\sin kx$$

เมื่อ k เป็นเลขคลื่น และ B เป็นค่าคงที่ ของการนอร์มอลไลซ์

ภาวะขอบเขต $\psi\left(-\frac{L}{2}\right) = \psi\left(\frac{L}{2}\right) = 0 = B\sin\left(\frac{kL}{2}\right)$

ดังนั้น $k = \frac{n\pi}{L}$

เมื่อ n เป็นเลขเต็มหน่วยบวก ที่เป็นเลขคู่ (2,4,6,...)

จะได้ฟังก์ชั่นคลื่น

$$\psi_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

เมื่อ $n = 2, 4, 6, \ldots$

จากการนอร์มอลไลซ์ จะได้ $B_n = \sqrt{\frac{2}{L}}$

ดังนั้น สรุปได้ว่า ฟังก์ชั่นคลื่นของอนุภาคภายในกล่อง จะมีค่าดังนี้

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad \text{เมื่อ } n = 1, 3, 5, \ldots$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad \text{เมื่อ } n = 2, 4, 6, \ldots$$

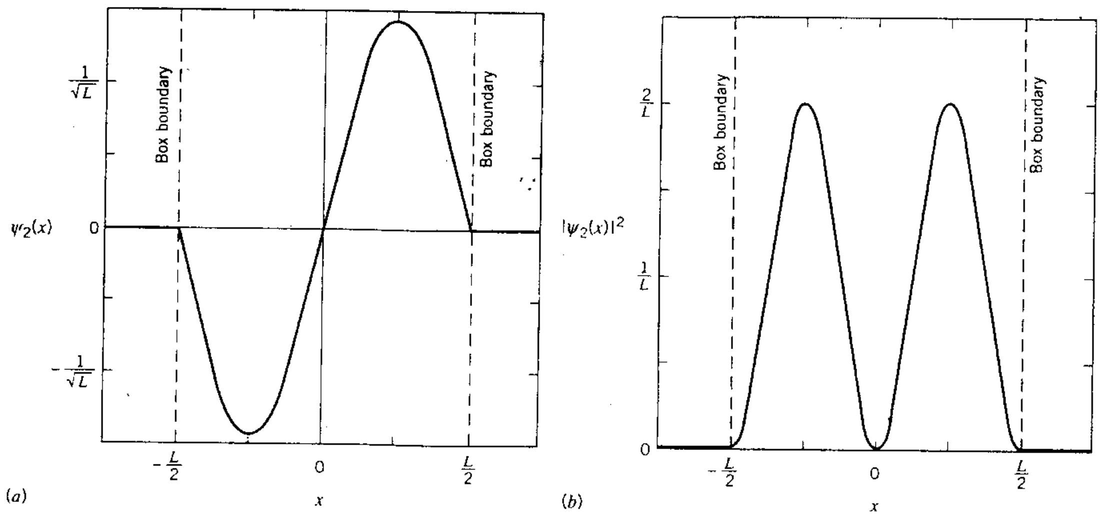
แทนค่า $\psi_n(x)$ กลับลงไปในสมการชเรอดิงเงอร์ จะได้

$$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \psi_n(x) = \frac{2mE_n}{\hbar^2} \psi_n(x)$$

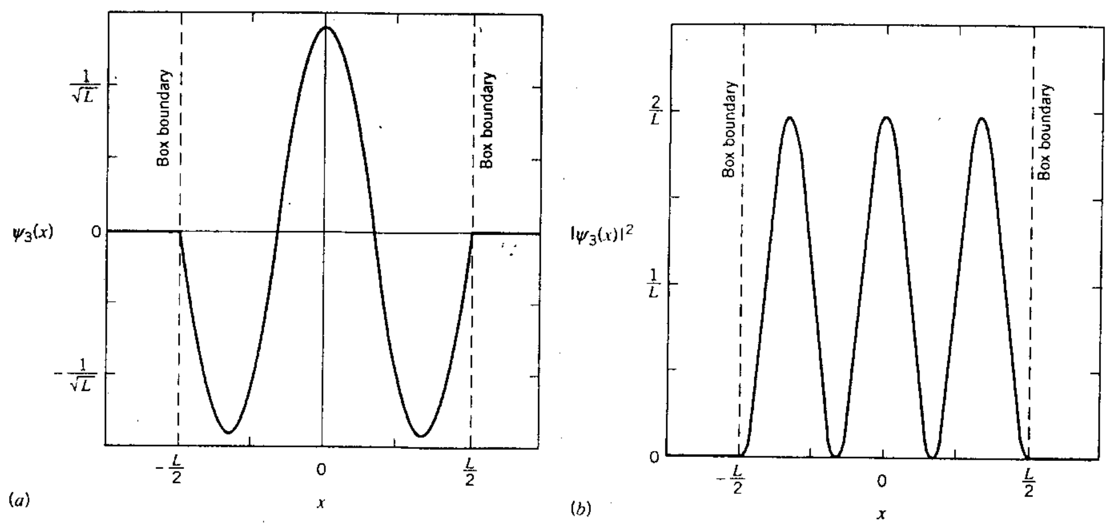
ระดับพลังงาน คือ

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2mL^2} = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$$

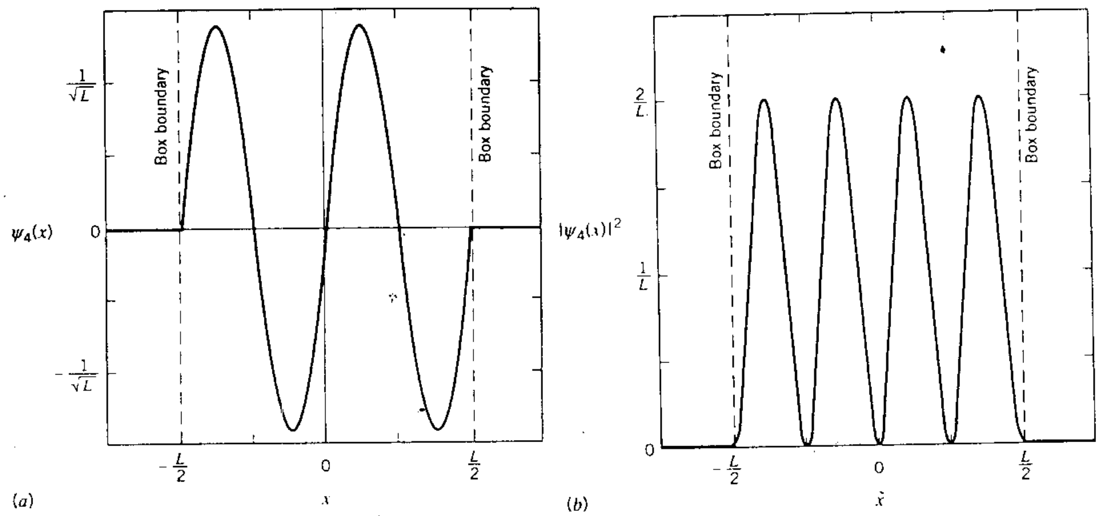
เมื่อ n เป็นเลขเต็มหน่วยบวก



รูปที่ 6.3 ระดับกระตุ้นที่ 1 (n = 2)



รูปที่ 6.4 ระดับกระตุ้นที่ 2 (n = 3)



รูปที่ 6.5 ระดับกระตุ้นที่ 3 (n = 4)

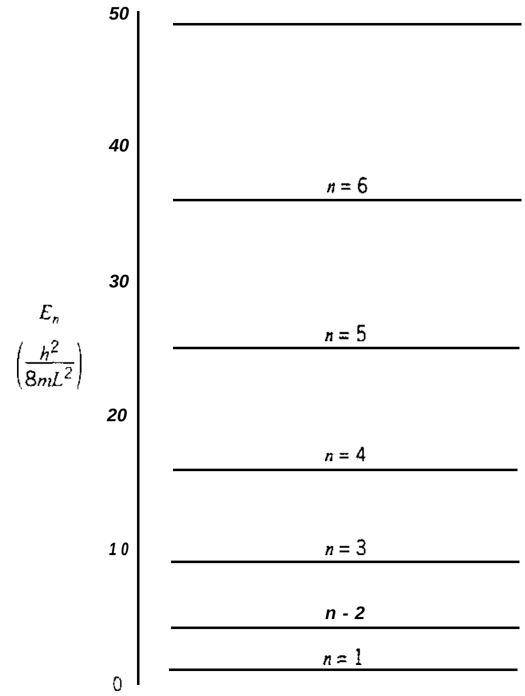
ตัวอย่างที่ 6. 1 จงหาระดับพลังงานพื้นของอิเล็กตรอนซึ่งถูกขังภายในกล่องที่มีขนาดเท่ากับเส้นผ่าศูนย์กลางของอะตอม (0.3 nm)

วิธีทำ พลังงานของระดับพื้น คือ

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2} = \frac{h^2c^2}{8mc^2L^2}$$

$$= \frac{(1240\,eV\cdot nm)^2}{(8)(5.11\times10^5\,eV)(0.3nm)^2}$$

$$= 4eV$$



รูปที่ 6.6 ระดับพลังงานของอนุภาคภายในกล่องขนาด L

ตัวอย่างที่ 6.2 อนุภาคอยู่ภายในช่วง $-L/2 < x < L/2$ อยู่ในสภาวะพื้น จงคำนวณโอกาสที่จะพบอนุภาคภายในช่วง $-L/2 < x < -L/4$

วิธีทำ ฟังก์ชั่นคลื่นของอนุภาค คือ

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

โอกาสที่จะพบอนุภาคภายในช่วง $-L/2 < x < -L/4$ คือ

$$P = \int_{-L/2}^{+L/2} dx\,\psi^2 = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{+L/2} dx\cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

จากคณิตศาสตร์

$$\int dx\cos^2(ax) = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a}$$

ดังนั้น

$$P = \frac{2}{L}\left[-\frac{L}{8} + \frac{L}{4\pi}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] - \frac{2}{L}\left[-\frac{L}{4} + \frac{L}{8\pi}\sin(-\pi)\right]$$

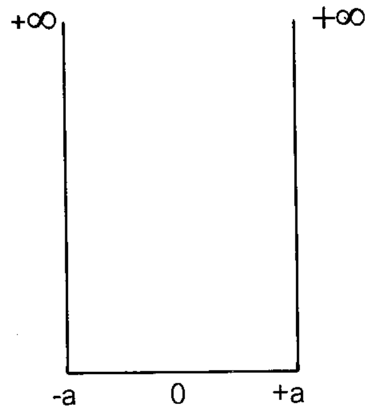
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} = 0.09$$

ตัวอย่างที่ 6.3 พิจารณาอนุภาคภายในหลุม 1 มิติ ลึกอนันต์

ก. จงแสดงว่า $< p_x > = 0$ ทุก ๆสเตทและจงอธิบายความหมายทางฟิสิกส์

ข. จงคำนวณ $< x^2 >$ และ $< {p_x}^2 >$ สำหรับสภาวะพื้นฐาน

ค. จงหาโอกาสมากที่สุดที่อนุภาคซึ่งอยู่ในสเตทที่มีพาริตี้คู่ จะอยู่ภายในช่วง $x = a/\ 2$ และ x=a



วิธีทำ

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0$$

$$\psi = A\sin kx + B\cos kx \qquad \text{เมื่อ} \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

จากภาวะขอบเขตที่ $x = \pm a, \psi = 0$

$$0 = A\sin ka + B\cos ka$$

$$0 = -A\sin ka + B\cos ka$$

$$\psi = A\sin kx = A\sin\frac{(n+1)\pi x}{2a} \quad , \quad n = \text{คู่}$$

$$\psi = B\cos kx = B\cos\frac{(n+1)\pi x}{2a} \quad , \quad n = \text{คี่}$$

$$\int \psi^* \psi dx = 1 \quad \rightarrow \quad A^2 = B^2 = \frac{1}{a}$$

$$\psi_{\text{คู่}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\sin\frac{(n+1)\pi x}{2a}$$

$$\psi_{\text{คี่}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\cos\frac{(n+1)\pi x}{2a}$$

(ก)

$$\begin{aligned}
<p> &= \int_{-a}^{a} \psi^{*} p \psi dx \\
&= \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} \sin\frac{(n+1)\pi x}{2a}(-i\hbar)\frac{d}{dx}\sin\frac{(n+1)\pi x}{2a}dx \\
&= \frac{-i\hbar}{a}\left(\frac{n+1}{2a}\right)\pi\int_{-a}^{a} \sin\frac{(n+1)\pi x}{2a}\cos\frac{(n+1)\pi x}{2a}dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

ความหมายทางฟิสิกส์ ก็คือ อนุภาคถูกขังอยู่ภายในหลุม เคลื่อนที่กลับไปกลับมาทำให้โมเมนตัมเฉลี่ยเท่ากับศูนย์

(ข) สำหรับสภาวะพื้น n=1

$$\begin{aligned}
<x^2> &= \int \psi^{*} x^2 \psi dx \\
&= \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} x^2\cos^2\left(\frac{\pi x}{2a}\right)dx
\end{aligned}$$

จากคณิตศาสตร์ $\int x^2\cos^2 ax dx$

$$= \frac{x^3}{6} + \left(\frac{x^2}{4a} - \frac{1}{8a^3}\right)\sin 2ax + \frac{x\cos 2ax}{4a^2}$$

$$\begin{aligned}
<x^2> &= \frac{1}{a}\left[\frac{a^3}{3} - \frac{2a^3}{\pi^2}\right] \\
&= \frac{a^2}{3} - \frac{2a^2}{\pi^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
<p_x^{\,2}> &= B^2\int\cos\frac{\pi x}{2a}(-i\hbar)^2\frac{d^2}{dx^2}\cos\frac{\pi x}{2a}dx \\
&= \frac{\hbar^2}{a}\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2\int_{-a}^{a} \cos^2\frac{\pi x}{2a}dx \\
&= \left(\frac{\hbar\pi}{2a}\right)^2
\end{aligned}$$

(ค) โอกาสสูงสุด

$$p_{\max} = \int_{a/2}^{a} \psi^* \psi dx$$

$$= B^2 \int \cos\frac{n\pi x}{2a}\cos\frac{n\pi x}{2a} dx$$

$$= \frac{1}{a}\left[\frac{x}{2} + \frac{a}{2n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2a}\right]_{a/2}^{a}$$

จะมีค่ามากที่สุด เมื่อ n=3

$$p_{\max} = \frac{1}{a}\left[\frac{a}{4} + \frac{a}{6\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{6\pi}$$

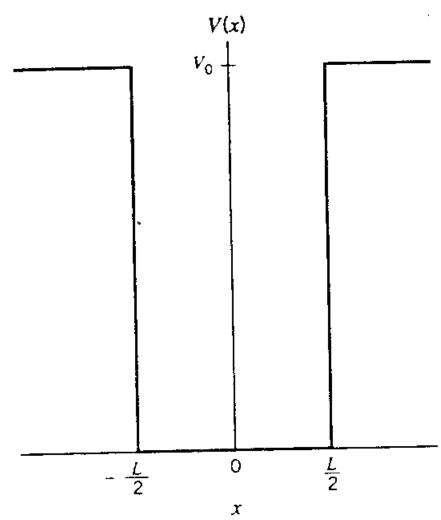
6.4 อนุภาคภายในศักย์สี่เหลี่ยมขนาดจำกัด

สมมุติว่าอนุภาคเคลื่อนที่ภายใต้ศักย์ $V(x)$ พลังงานของอนุภาค คือ

$$\mathrm{E} = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

สมการชเรอดิงเงอร์ คือ

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = \mathrm{E}\,\psi(x)$$



กรณีที่ 1 ภายในหลุมศักย์ $V(x)=0$ ถ้า $E<V_0$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}=-\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x)$$

ผลเฉลยจะอยู่ในรูป

$$\psi(x)=A\cos kx+B\sin kx$$

เมื่อ $k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

ฟังก์ชั่นคลื่นจะเหมือนกับฟังก์ชั่นคลื่นของอนุภาคในกล่องต่างกันที่ $\psi(x)$ จะไม่เป็นศูนย์ที่ผนังของบ่อ เนื่องจากอนุภาคถูกขังอยู่ในบ่อ ภาวะขอบเขต คือ

$$\lim_{x\to\infty}[\psi(x)]=0$$

และ

$$\lim_{x\to-\infty}[\psi(x)]=0$$

กรณีที่ 2 ภายนอกหลุมศักย์ $V(x)=V_0$ ถ้า $E<V_2$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}-\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}\psi(x)$$

หรือ

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}=\beta^2\psi(x)$$

เมื่อ $\beta=\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$

เนื่องจาก V_0-E เป็นบวก β จะเป็นค่าจริง ผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ จะอยู่ในรูป

$$\psi(x)=Ce^{\beta x}+De^{-\beta x}$$

เมื่อ C และ D เป็นค่าคงที่

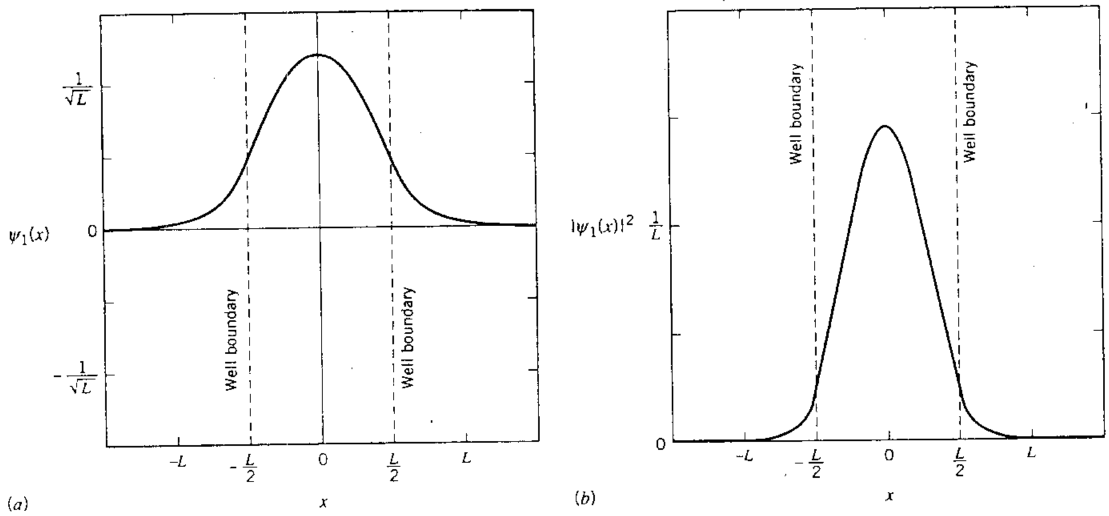
เนื่องจาก $\psi(x)\to 0$ เมื่อ $x\to+\infty$ และ $x\to-\infty$ จะได้

$$\psi(x)=Ce^{\beta x} \qquad \text{เมื่อ} \quad x<-\frac{L}{2}$$

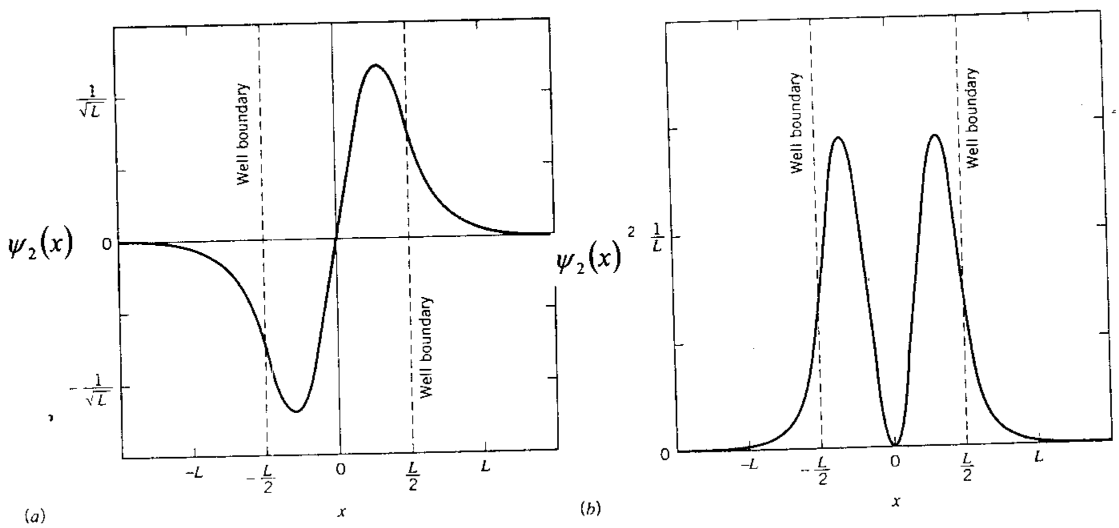
และ

$$\psi(x)=De^{-\beta x} \qquad \text{เมื่อ} \quad x>\frac{L}{2}$$

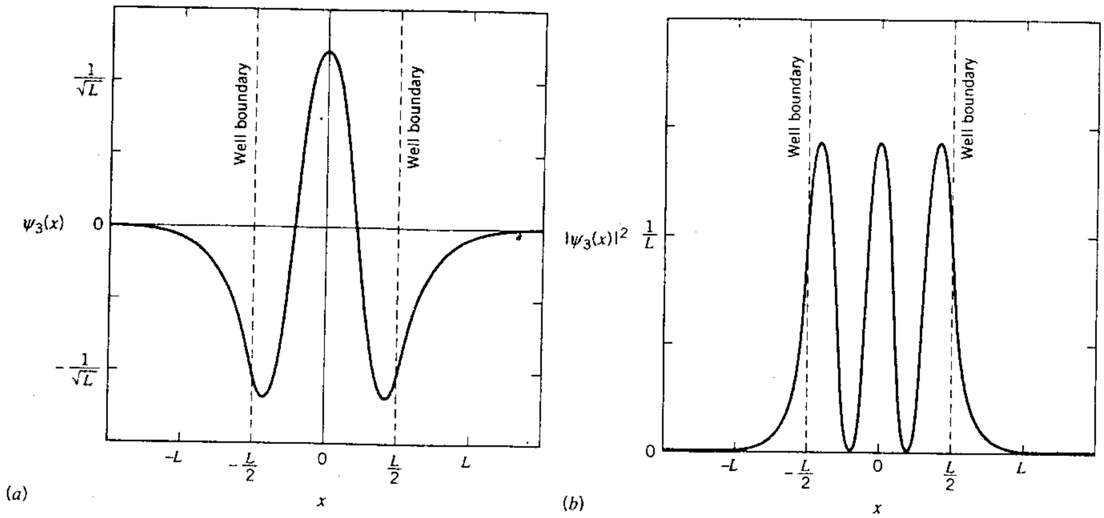
ต่อไป เราจะต้องหาค่าคงที่ A , B , C และ D เนื่องจากศักย์เป็นศักย์สมมาตร $V(x)=V(-x)$ ดังนั้น ความหนาแน่นของโอกาส $|\psi(x)|^2$ จะสมมาตรด้วย $|\psi(x)|^2=|\psi(-x)|^2$ ทำให้ฟังก์ชั่นคลื่นสมมาตรด้วย แบ่งเป็นฟังก์ชั่นคู่และฟังก์ชั่นคี่



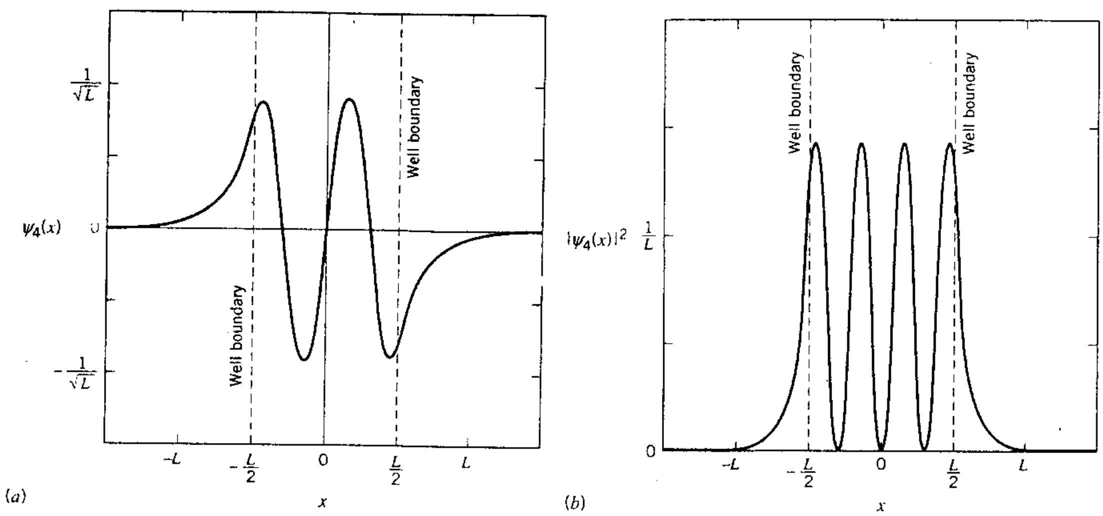
รูปที่ 6.7 ฟังก์ชั่นคลื่นระดับพื้น (n = 1)



รูปที่ 6.8 ฟังก์ชั่นคลื่นระดับกระตุ้นที่ 1 (n = 2)



รูปที่ 6.9 ฟังก์ชั่นคลื่นระดับกระตุ้นที่ 2 (n = 3)



รูปที่ 6.10 ฟังก์ชั่นคลื่นระดับกระตุ้นที่ 3 (n = 4)

กรณีที่ 1 ผลเฉลยคู่

สำหรับผลเฉลยคู่ $\psi(x)=\psi(-x)$ เนื่องจากฟังก์ชั่นไซน์ชนิดคี่

$$\sin(x) = -\sin(-x)$$

ดังนั้น ฟังก์ชั่นคลื่นภายในบ่อจะมีองค์ประกอบของฟังก์ชั่นไซน์ไม่ได้ ซึ่งหมายความว่า B = 0 ทำให้ได้

$$\psi(x) = A\cos kx$$

หาค่า พลังงานของผลเฉลยคู่

จากภาวะขอบเขตที่ $x = L/2$ จะได้

$$A\cos\left(\frac{kL}{2}\right) = De^{-\beta L/2}$$

และความต่อเนื่องของ $d\psi/dx$ ที่ $x = L/2$ จะได้

$$-kA\sin\left(\frac{kL}{2}\right) = -\beta De^{-\beta L/2}$$

ซึ่งจากทั้งสองสมการนี้ จะได้

$$\tan\left(\frac{kL}{2}\right) = \frac{\beta}{k}$$

หรือ

$$\tan\left(\frac{L\sqrt{2m\mathrm{E}}}{2\hbar}\right) = \sqrt{\frac{(V_0-\mathrm{E})}{\mathrm{E}}}$$

ซึ่งสมการสุดท้ายนี้ไม่สามารถแก้สมการได้ โดยอาศัยพีชคณิต จะต้องอาศัยคอมพิวเตอร์มาช่วยในการคำนวณ หรือใช้วิธีกราฟดังต่อไปนี้

กำหนดให้ $$\xi \equiv \frac{L\sqrt{2m\mathrm{E}}}{2\hbar}$$

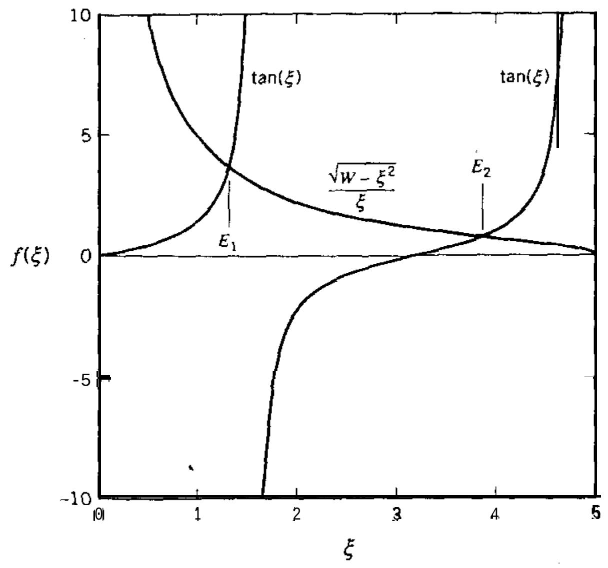
และ $$W \equiv \frac{mV_0L^2}{2\hbar^2}$$

ดังนั้น จะหาพลังงานในรูป ξ คือ

$$\mathrm{E} = \frac{2\xi^2\hbar^2}{mL^2}$$

ทำให้ได้ $$\tan\xi = \frac{\sqrt{W-\xi^2}}{\xi}$$

รูปที่ 6.11 แสดงกราฟของ $\tan\xi$ และ $(W-\xi^2)^{1/2}/\xi$ กับ ξ ค่าพลังงานที่เป็นไปได้ของสเตทคู่จะได้จากค่าของ ξ เมื่อฟังก์ชั่น $\tan\xi$ และ $(W-\xi^2)^{1/2}/2$ ตัดกัน(ที่จุดตัด) พลังงานของสเตทพื้นเกิดขึ้นที่ ξ ประมาณ $\pi/2$ พลังงานของสเตทคู่ต่อมา คือที่ ξ ประมาณ $3\pi/2$



รูปที่ 6.11 ผลเฉลยคู่

ถ้าหากว่า ความสูงของศักย์ (V_0) มากกว่าพลังงานพื้นมาก มีอีกวิธีการหนึ่งที่ใช้ในการคำนวณพลังงานของสเตทพื้น ฟังก์ชั่นคลื่นภายนอกบ่อจะลดลงอย่างเอ็กโพเนิน

$$\frac{1}{\beta} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E_1)}}$$

ดังนั้น พลังงานของสเตทพื้น จะคล้ายกับพลังงานของสเตทพื้นของอนุภาคภายในกล่อง โดยมีค่ามากกว่า $2/\beta$ พลังงานโดยประมาณ คือ

$$E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m\left(L + \frac{2}{\beta}\right)^2}$$

ตัวอย่างที่ 6.4 อิเล็กตรอนถูกขังอยู่ภายในบ่อยาว 0.2 nm ด้วยพลังงาน 1 keV จงหาพลังงานของระดับพื้น

วิธีทำ พลังงานของระดับพื้นของอนุภาคภายในกล่อง คือ

$$E_1^{box} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} = \frac{(197\text{eV}\cdot nm)^2\pi^2}{(2)(5.11\times10^5 eV)(0.2nm)}$$

$$= 9.4eV$$

$$\frac{1}{\beta} = \frac{\text{A}}{\sqrt{2m(V_0 - \text{E}_1)}}$$

$$= \frac{197eV\cdot nm}{\sqrt{(2)(5.11\times10^5 eV)(1000eV - 9.4eV)}}$$

$$= 0.00619nm$$

ค่าโดยประมาณของพลังงานของระดับพื้น คือ

$$\text{E}_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m\left(L+\frac{2}{\beta}\right)^2} = \text{E}_1^{box}\frac{L^2}{\left(L+\frac{2}{\beta}\right)^2}$$

$$= \frac{(9.4eV)(0.20nm)^2}{[0.20nm + (2)(0.0062nm)]}$$

$$= 8.3\ eV$$

ตัวอย่างที่ 6.5 อนุภาคแอลฟาถูกขังอยู่ภายในบ่อขนาด 3 fm ด้วยพลังงาน 40 MeV จงหาพลังงานของระดับพื้น

วิธีทำ

$$E_1^{box} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$$

$$= \frac{(197\,MeV\,.\,fm)^2\pi^2}{(2)(3730\ MeV)(3\ fm)}$$

$$= 5.7MeV$$

$$\frac{1}{\beta}=\frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0-\mathrm{E}_1)}}$$

$$=\frac{197MeV\cdot fm}{\sqrt{(2)(3730MeV)(40MeV-5.7MeV)}}$$

$$=0.39\,fm$$

พลังงานของระดับพื้นของอนุภาคภายในบ่อ คือ

$$\mathrm{E}_1=\frac{\hbar^2\pi^2}{2m\left(L+\frac{2}{\beta}\right)^2}=\mathrm{E}_1^{box}\frac{L^2}{\left(L+\frac{2}{\beta}\right)^2}$$

$$=\frac{(5.7MeV)(fm)}{[3fm+(2)(0.39fm)]^2}$$

$$=3.6\ MeV$$

กรณีที่ 2 ผลเฉลยคี่

ใช้วิธีการเดียวกันกับผลเฉลยคู่ เพียงแต่ว่าในกรณีของผลเฉลยคี่ ฟังก์ชั่นคลื่นภายในบ่อไม่มีองค์ประกอบของโคซายน์ $(A=0)$ ดังนั้น

$$\psi(x)=B\sin kx$$

หาค่าพลังงานของผลเฉลยคี่

จากภาวะขอบเขตที่ $x=L/2$

$$B\sin\left(\frac{kL}{2}\right)=Ce^{-\beta L/2}$$

และภาวะขอบเขตของความต่อเนื่อง $d\psi/dx$ ที่ $L/2$

$$kB\sin\left(\frac{kL}{2}\right)=-\beta Ce^{-\beta L/2}$$

จากสมการทั้งสอง จะได้

$$\tan\left(\frac{kL}{2}\right) = -\frac{k}{\beta}$$

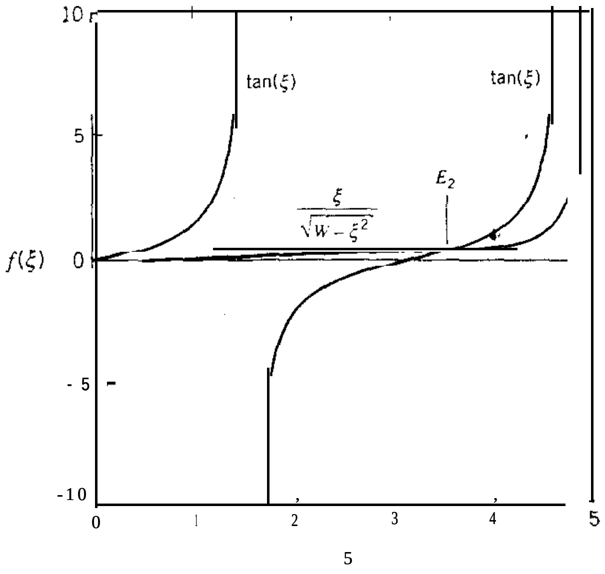
หรือ

$$\tan\left(\frac{L\sqrt{2mE}}{2h}\right) = \sqrt{\frac{E}{(V_0 - E)}}$$

ในเทอมของ ξ และ W จะได้

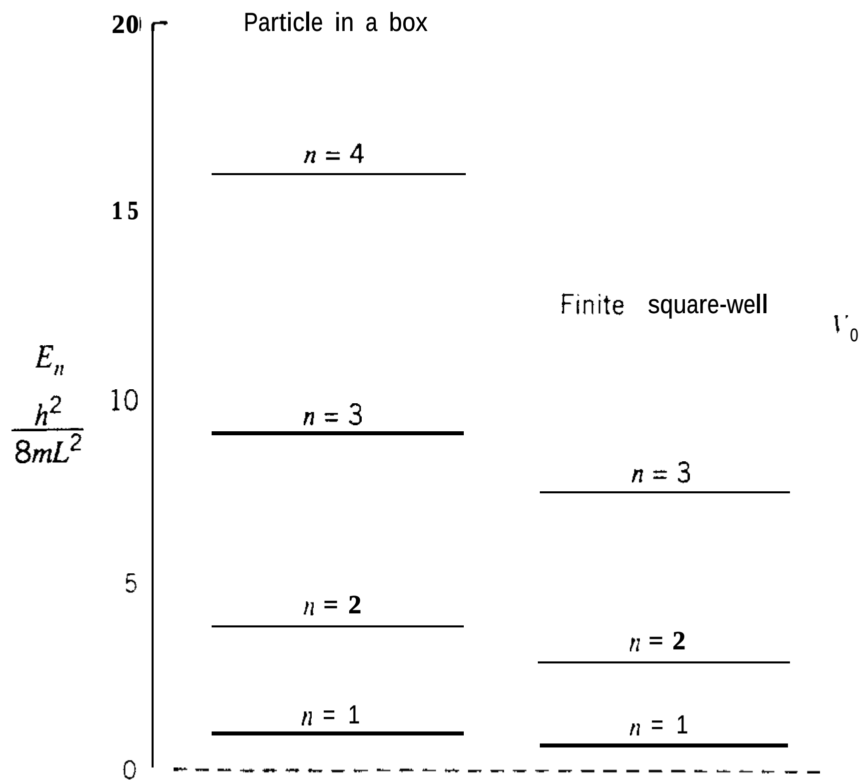
$$\tan\xi = \frac{\xi}{\sqrt{W - \xi^2}}$$

พลังงานต่ำสุด $\xi = \pi$



รูปที่ 6.12 ผลเฉลยคี่ของอนุภาคภายในบ่อจำกัด

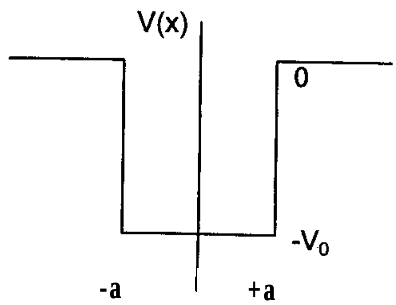
ถ้าเลือก $V_0 = \dfrac{12\hbar^2}{8mL^2}$ จะได้ระดับพลังงานของอนุภาคภายในบ่อ ดังรูป 6.13



รูปที่ 6.13 ระดับพลังงานของอนุภาคภายในบ่อจำกัด เปรียบเทียบกับระดับพลังงานของอนุภาคภายในกล่อง

ตัวอย่างที่ 6.6 พิจารณาศักย์ต่อไปนี้

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & , \quad -a < x < a \\ 0 & , \quad |x| > a \end{cases}$$



สมการชเรอดิงเงอร์ในช่วง $|x| \le a$ คือ

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0$$

$$\psi_{\mathrm{I}} = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x \qquad \text{เมื่อ} \qquad \alpha = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

ในช่วง $|x| > a$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}(E - V_0)\psi = 0$$

จะมี สเตทขัง เมื่อ $E < V_0$

$$\psi_{\mathrm{II}} = Ce^{-\beta x} + De^{\beta x} \qquad \text{เมื่อ} \qquad \beta = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)}$$

ψ มีขีดจำกัด เมื่อ $x \to \pm\ \infty$

$$\psi_{\mathrm{II}} \quad (x \to \infty) = Ce^{-\beta x}$$

$$\psi_{\mathrm{II}} \quad (x \to -\infty) = De^{\beta x}$$

โดยใช้ภาวะขอบเขตที่ $x = \pm a$ จะได้

$$\alpha\tan\alpha a = \beta \qquad \text{หรือ} \qquad a\alpha\tan\alpha a = a\beta$$

$$\alpha\cot\alpha a = -\beta \qquad \text{หรือ} \qquad a\alpha\cot\alpha a = -a\beta$$

ให้ $y = \alpha a$ และ $z = \beta a$

$$y^2 + z^2 = \frac{2mV_o a^2}{\hbar^2} \qquad \text{เมื่อ} \qquad V_o a^2 = \frac{6\hbar^2}{m}$$

$$y^2 + z^2 = 12$$

เราสามารถหาค่า y และ z ได้ โดยการพล๊อตกราฟ จะได้

$$y = 1.2 \quad , \quad z = 3.4$$

$$Y = \alpha a = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}a^2} = 1.2$$

$$E_1 \approx (1.2)^2\frac{\hbar^2}{2ma^2} = \frac{(1.2)^2}{12}V_o = 0.12V_o$$

$$E_2 \approx \frac{(2.4)^2}{12}V_o = 0.48\ V_o$$

$$E_3 \approx \frac{(3.4)^2}{12} V_0 = 0.935 \quad V_o$$

เปรียบเทียบกับหลุมลึกอนันต์ ซึ่ง

$$E_n = \frac{n^2\hbar^2\pi^2}{8ma^2}$$

$$E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2} = \frac{\pi^2}{48}V_o = 0.2 \quad V_o$$

$$E_2 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} = \frac{\pi^2}{12}V_o = \mathbf{0.82} \quad V_o$$

$$E_3 = \frac{9\hbar^2\pi^2}{8ma^2} = \frac{9\pi^2}{48}V_o = \mathbf{1.85} \quad V_o$$

ดังนั้น พลังงานของหลุมลึกอนันต์ จะมากกว่าหลุมลึกจำกัด

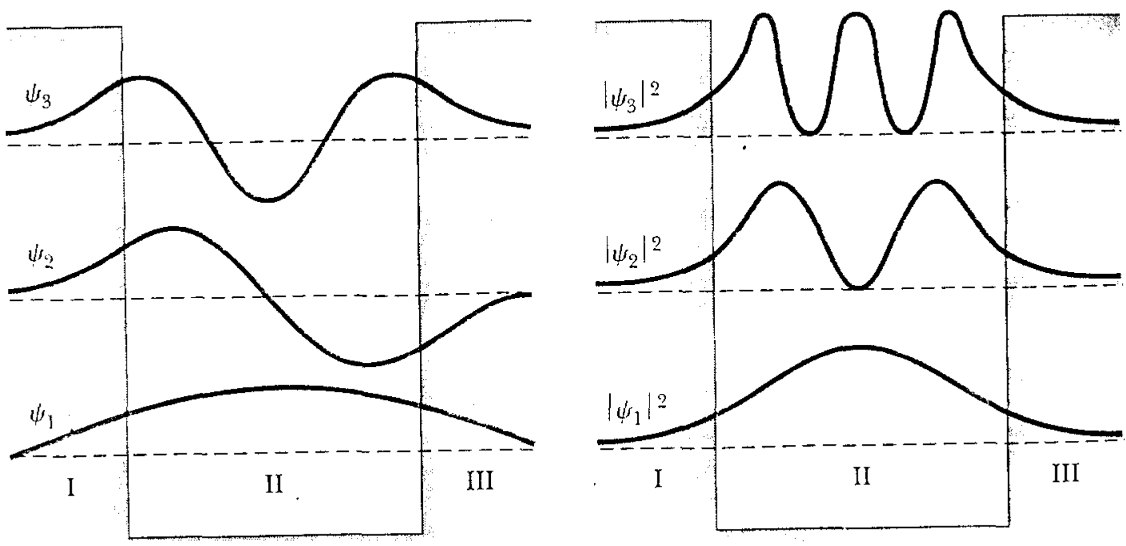
ฟังก์ชันไอเกนของหลุมลึกจำกัด คือ

$$\psi(x) = B\cos\alpha x \quad , \quad o < x < a$$

$$\psi(x) = Ce^{-\beta x} \quad , \quad x > a$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{2mE_1}{\hbar^2}} = \left[\frac{2m(0.12V_o)}{\hbar^2}\right]^{1/2} = \frac{1.2}{a}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_o - E_1)} = \frac{3.2}{a}$$



$$\psi_1 = B\cos\left(\frac{1.2}{a}\right)x \quad ; \quad o < x < a$$

$$\psi_1 = Ce^{-\left(\frac{3.2}{a}\right)x} \quad . \quad x > a$$

$$\psi_2 = A\sin\left(\frac{2.4}{a}\right)x \quad , \quad o < x < a$$

$$\psi_2 = Ce^{-\frac{2.5}{a}x} \quad , \quad x > a$$

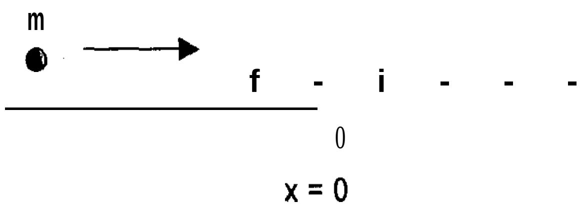
$$\psi_3 = B\cos\left(\frac{3.4}{a}\right)x \quad , \quad o < x < a$$

$$\psi_3 = Ce^{-\left(\frac{0.69}{a}\right)x} \quad . \quad x > a$$

6.5 อนุภาคเคลื่อนที่ผ่านศักย์ขั้น

สมมุติว่าอนุภาคเคลื่อนที่จากซ้ายชนกับกำแพงศักย์

$$V = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad x < 0$$
$$V = V_o \quad \text{เมื่อ} \quad x > 0$$



$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi$$

$x < o$

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \alpha\psi_1 = 0 \quad , \qquad \alpha = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\psi_1 = Ae^{i\alpha x} + Be^{-i\alpha x}$$

$x > 0$

$$\frac{d^2\psi_{II}}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_o)\psi_{II} = 0$$

$$\psi_{II} = Ce^{i\beta x} + De^{-\beta x} \qquad \text{เมื่อ} \qquad \beta = \sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar^2}}$$

$\psi(x)$ และ $\psi'(x)$ มีค่าต่อเนื่องที่ x=0

$$A + B = C$$

$$\alpha(A - B) = \beta C$$

แก้สมการจะได้

$$\frac{B}{A} = \frac{(\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta)} \quad \text{และ} \quad \frac{C}{A} = \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}$$

สัมประสิทธิ์การสะท้อน (R) $= \dfrac{v_1}{v_1}\left|\dfrac{B}{A}\right|^2$

$= \left(\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2$

สัมประสิทธิ์การทะลุผ่าน (T) $= \dfrac{v_2}{v_1}\left|\dfrac{C}{A}\right|^2$

$= \dfrac{\beta}{a}\left(\dfrac{2a}{\alpha+\beta}\right)^2$

$$R = \left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2 = \frac{V_o^2}{\left(\sqrt{E}+\sqrt{E-V_o}\right)^2}$$

$$T = \frac{4\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} = \frac{4\sqrt{E(E-V_o)}}{\left(\sqrt{E}+\sqrt{E-V_o}\right)^2}$$

$$R + T = 1$$

ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่มาจากทางด้านขวา

$$\psi_{I} = Ae^{i\beta x} + Be^{-i\beta x}$$

$$\psi_{II} = Ce^{,,}$$

$$A + B = c$$

$$\beta(A - B) = Ca$$

$$\frac{C}{A} = \frac{2a}{\alpha + \beta}$$

และ $$\frac{B}{A} = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right)$$

จะได้ค่าเท่าเดิม

ในกรณีซึ่ง $o < E < V_o$

$$\Rightarrow \quad \beta \to i\beta$$

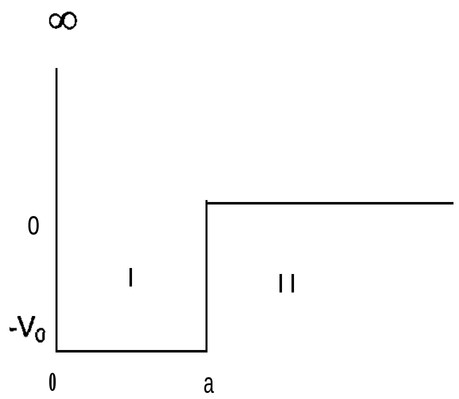
$$\frac{B}{A} = \frac{\alpha - i\beta}{a + i\beta}$$

$$\left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$= 1$$

เป็นการสะท้อนกลับหมด

6.6 อนุภาคภายในหลุมกึ่งอนันต์



$$\frac{d^2\psi_{\mathrm{I}}}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E+V_o)\psi_{\mathrm{I}} = 0$$

$$\psi_{\mathrm{I}} = \text{Asinax}$$

$$\frac{d^2\psi_{\mathrm{II}}}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_{\mathrm{II}} = 0$$

เมื่อ x มีค่ามากจะสามารถเขียน $\psi(x)$ ได้เป็น $\psi = Be^{ikx} + e^{-ikx}$

$$\psi_{\mathrm{II}} = Be^{ikx} + e^{-ikx}$$

ภาวะขอบเขตที่ $x = a$

$$\frac{\psi_{\mathrm{I}}}{\psi_{\mathrm{I}}'}\Big| x=a = \frac{\psi_{\mathrm{II}}}{\psi_{\mathrm{II}}'}\Big| x=a$$

$$\frac{\sin \alpha a}{\text{acosaa}} = \frac{Be^{ika} + e^{-ika}}{ik\left(Be^{ika} - i^{-ika}\right)}$$

$$ik\left(Be^{ika} - e^{-ika}\right)\tan\alpha a = a(Be^{ika} + e^{-ika})$$

$$(ik\tan\alpha a - \alpha)e^{ika}B = (ik\tan\alpha a + \alpha)e^{-ika}$$

$$\text{B} = \frac{(ik\tan\alpha a + \alpha)}{\text{iktanm-a}}e^{-2ika}$$

$$\text{B} = \frac{(a + ik\tan\alpha a)}{\alpha - ik\tan\alpha a}e^{-2ika}$$

จาก $x + yi = (x^2 + y^2)^{1/2} e^{i\tan^{-1}\frac{y}{x}}$

$$B = \frac{-(\alpha^2 + k^2\tan^2\alpha a)^{2}}{(\alpha^2 + k^2\tan^2\alpha a)^{1/2}} \cdot \frac{e^{i\tan^{-1}\left[\frac{k}{\alpha}\tan\alpha a\right]}e^{-2ika}}{e^{i\tan^{-1}\left[\frac{-k}{\alpha}\tan\alpha a\right]}}$$

$$= -e^{2i\tan^{-1}\left(\frac{k}{\alpha}\tan\alpha a\right)}e^{-2ika}$$

$$= e^{2i\left[\tan^{-1}\left(\frac{k}{\alpha}\tan\alpha a\right) - ka - \frac{\pi}{2}\right]}$$

เทียบกับ $B = e^{i\varnothing}$

$$\varnothing = 2\left[\tan^{-1}\left(\frac{k}{\alpha}\tan\alpha a\right) - ka - \frac{\pi}{2}\right]$$

เนื่องจาก $|B|^2 = 1$ จึงเป็นการสะท้อนกลับหมด

$$\begin{aligned}
\psi_{II} &= Be^{ikx} + e^{-ikx} \\
&= e^{i\varnothing}e^{ikx} + e^{-ikx} \\
&= e^{\frac{i\varnothing}{2}}\left[e^{i\left(kx+\frac{\varnothing}{2}\right)} + e^{-i\left(kx+\frac{\varnothing}{2}\right)}\right] \\
&= 2e^{\frac{i\varnothing}{2}}\cos\left(kx+\frac{\varnothing}{2}\right) \\
&= 2e^{\frac{i\varnothing}{2}}\sin\left(kx+\frac{\varnothing}{2}+\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

ถ้า x มีค่ามาก สามารถเขียนฟังก์ชั่นคลื่นได้ในรูป $\psi(x) = C\sin(kx+\delta)$ เมื่อ δ เป็นการเลื่อนของเฟส

เทียบกับ $\psi_{II} = \mathrm{C}\sin(kx+\delta)$

$$\begin{aligned}
C &= 2e^{i\varnothing/2} \\
&= 2e^{i\left[\tan^{-1}\left(\frac{k}{\alpha}\tan\alpha a\right)-ka-\frac{\pi}{2}\right]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta &= \frac{\varnothing}{2}+\frac{\pi}{2} \\
&= \tan^{-1}\left(\frac{k}{2}\tan\alpha a\right) - ka
\end{aligned}$$

6.7 อนุภาคภายใต้ศักย์เดลต้า

$$V(x) = -g^2\delta(x)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi &= \frac{2m}{\hbar^2}V(x)\psi \\
&= \frac{-2m}{\hbar^2}g^2\delta(x)\psi
\end{aligned}$$

อินทีเกรตจาก 0^- ถึง 0^+

$$\frac{d\psi}{dx}\Big|_{0^+} - \frac{d\psi}{dx}\Big|_{0^-} + \frac{2m}{\hbar^2}E\int_{0^-}^{0^+}\psi dx = \frac{-2m}{\hbar^2}g^2\int_{0^-}^{0^+}\delta(x)\psi(x)dx$$

$$\frac{d\psi}{dx}\Big|_{0^+} - \frac{d\psi}{dx}\Big|_{0^-} = \frac{-2m}{\hbar^2}g^2\psi(0)$$

แสดงว่า อนุพันธ์ของฟังก์ชั่นคลื่นไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$

V = 0 ทุกจุด ยกเว้นที่ x = 0

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2}|E|\psi = 0$$

$$\psi(x) = Ae^{\alpha x}, x < 0$$

$$Be^{-\alpha x}, x > 0$$

ภาวะขอบเขตที่ x = 0 $\psi(0^+) = \psi(0^-)$

A = B

$$\Rightarrow \quad -\alpha B - \alpha A = \frac{-2m}{\hbar^2} g^2 A$$

$$\alpha = \frac{mg^2}{\hbar^2}$$ แต่ $$\alpha = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}|E|}$$

หรือ

$$\frac{m^2 g^4}{\hbar^4} = \frac{2m}{\hbar^2}|E|$$

$$E = \frac{mg^4}{2\hbar^2}$$

เป็นค่าพลังงานของอนุภาคภายในสภาวะขัง

$$\int_{-\infty}^{0^-} A^2 e^{2\alpha x} dx + \int_{0^+}^{\infty} A^2 e^{-2\alpha x} dx = 1$$

$$2A^2 \int_0^{\infty} e^{-2\alpha x} dx = \frac{A^2}{\alpha} = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\psi(x) = \sqrt{\hbar^2 / mg^2}\, e^{mg^2 x/\hbar^2}, \quad x < 0$$

$$\sqrt{\hbar^2 / mg^2}\, e^{-mg^2 x/\hbar^2}, \quad x > 0$$

เป็นค่าฟังก์ชั่นคลื่นของอนุภาค

6.8 ฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์

พลังงานศักย์ของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์จะอยู่ในรูป

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

ซึ่งจะเขียนสมการชเรอดิงเงอร์ได้ดังนี้

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{1}{2}m\psi^2x^2\psi = E\psi$$

$$\frac{\hbar}{m\omega}\frac{d^2\psi}{dx^2}-\frac{m\omega}{\hbar}x^2\psi = \frac{-2E}{\hbar\omega}\psi$$

ให้ $y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x \Rightarrow x^2 = \frac{\hbar}{m\omega}y^2$

$$dy = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}dx \Rightarrow dy^2 = \frac{m\omega}{\hbar}dx^2$$

$$\frac{\hbar}{m\omega}\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\frac{d^2\psi}{dy^2}-y^2\psi = \frac{-2E}{\hbar\omega}$$

$$\frac{d^2\psi_E}{dy^2}+\left(\frac{2E}{\hbar\omega}-y^2\right)\psi_E = 0$$

รากของสมการ จะต้องประกอบด้วยเทอม $e^{-y^2/2}$ เพราะว่า $y^2 >> \frac{2E}{\hbar\omega}$

สมมุติ $\psi_E(y) = U(y)e^{-y^2/2}$

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} = \frac{d}{dy}\left(-U(y)ye^{-y^2/2}+\frac{dU}{dy}e^{-y^2/2}\right)$$

$$= \frac{-dU}{dy}ye^{-y^2/2}-Ue^{-y^2/2}+Uy^2e^{-y^2/2}+\frac{d^2U}{dy^2}e^{-y^2}-y\frac{dU}{dy}e^{-y^2/2}$$

$$\left(\frac{d^2U}{dy^2}-2y\frac{dU}{dy}-U+Uy^2+\frac{2E}{\hbar\omega}U-Uy^2\right)e^{-y^2/2} = 0$$

$$\frac{d^2U}{dy^2}-2y\frac{dU}{dy}+\left(\frac{2E}{\hbar\omega}-1\right)U = 0$$

รากของสมการแบ่งเป็น U_+ (คู่) และ U_- (คี่)

สเตทคู่ $U(y) = U(-y)$

กระจาย U เป็นอนุกรมยกกำลังคู่

$$U = \sum a_s y^{2s}$$

แทนลงในสมการข้างบน

$$\sum 2s(2s-1)a_s y^{2s-2} - \sum 2(2s)a_s y^{2s} + \left(\frac{2E}{\hbar\omega} - 1\right)\sum_s a_s y^{2s} = 0$$

เฉพาะเทอมแรกให้ $s = s+1$

$$\sum_s \left[(2s+2)(2s+1)a_{s+1} - 4sa_s + \left(\frac{2E}{\hbar\omega} - 1\right)a_s\right]y^{2s} = 0$$

แต่ละเทอมเท่ากับศูนย์ $\therefore$ สัมประสิทธิ์ของ y เท่ากับศูนย์

$$a_{s+1} = \frac{4s - \left(\frac{2E}{\hbar\omega} - 1\right)}{(2s+2)(2s+1)} a_s$$

$$a_1 = \frac{\left(1 - \frac{2E}{\hbar\omega}\right)a_o}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2E}{\hbar\omega}\right)a_o$$

เมื่อ $s \to \infty$

$$\frac{a_{s+1}}{a_s} \quad \frac{4s}{4(s+1)\left(s + \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{(s+1)\left(1 + \frac{1}{2s}\right)} \approx \frac{1}{s}$$

แต่ $e^{y^2} = 1 + y^2 + \frac{y^4}{2!} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{y^{2s}}{s!} + \frac{y^{2(s+1)}}{(s+1)!}$

$$\frac{a_{s+1}}{a_s} = \frac{\frac{1}{(s+1)!}}{\frac{1}{s!}} = \frac{1}{s+1} \approx \frac{1}{s}$$

$$\psi \,\alpha \quad e^{y^2} e^{-y^2/2} \quad \rightarrow \quad e^{y^2/2}$$

ซึ่งจะมีค่ามากเมื่อ y มาก จึงต้องจำกัดขอบเขตของ E

ถ้า

$$E = \frac{\hbar\omega}{2}(4r+1), r = 0,1,2,............$$

$$\frac{a_{s+1}}{a_s} = \frac{4s-4r}{(2s+1)(2s+2)}$$

ดังนั้น $\frac{a_{r+1}}{a_r} = 0$ หมายความว่า เทอม r+1 และเทอม > r เป็นศูนย์

$$E = \frac{\hbar\omega}{2}, \frac{5\hbar\omega}{2}, \frac{9\hbar\omega}{2}, ...$$

$$\psi_E = \sum_{s=0}^{r} a_s y^{2s} e^{-y^2/2}$$

$r = O \qquad E_o = \frac{\hbar\omega}{2} \qquad \psi_{E_O} = a_o e^{-y^2/2}$

$r = 1 \qquad E_1 = \frac{5\hbar\omega}{2} \qquad \psi_{E_1} = a_o\left(1-2y^2\right)e^{-y^2/2}$

$r = 2 \qquad E_2 = \frac{9\hbar\omega}{2} \qquad \psi_{E_2} = a_o\left(1-4y^2+\frac{4}{3}y^4\right)e^{-y^2/2}$

สเตทคี่ $\quad U(y) = -U(-y)$

$$U(y) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s y^{2s+1}$$

แทนลงใน

$$\frac{d^2U}{dy^2} - 2y\frac{dU}{dy} + \left(\frac{2E}{\hbar\omega} - 1\right)U = 0$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} a_s (2s+1)(2s) y^{2s-1} - 2\sum_{s=0}^{\infty} a_s (2s+1) y^{2s+1} + \left(\frac{2E}{\hbar\omega} - 1\right) \sum_{s=0}^{\infty} a_s y^{2s+1} = 0$$

เฉพาะเทอมแรก ให้ $s = s+1$

$$\sum_{s} \left[a_{s+1}(2s+3)(2s+2) - 2a_s(2s+1) + \left(\frac{2E}{\hbar\omega} - 1\right) a_s \right] y^{2s+1} = 0$$

$$a_{s+1}(2s+3)(2s+2) \quad = \quad a_s\left(2(2s+1) - \left(\frac{2E}{\hbar\omega} - 1\right)\right)$$

$$\frac{a_{s+1}}{a_s} = \frac{4s+3-\dfrac{2E}{\hbar\omega}}{(2s+3)(2s+2)} \quad \underset{s\to\infty}{\rightarrow} \quad \frac{1}{s}$$

เมื่อ y มีค่ามาก

$\psi(y) \underset{y\to\infty}{\rightarrow} e^{y^2} e^{-y^2/2} \rightarrow e^{y^2/2}$ จะมีค่ามากด้วย จึงต้องจำกัดค่า E

$$E = \frac{\hbar\omega}{2}(4r+3) \quad , \quad r = 0,1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots$$

เมื่อ $s = r, \dfrac{a_{r+1}}{a_r} = 0$

เทอม a_{s+1} และ $s \geq r$ จะเท่ากับศูนย์

$$r = 0 \qquad E_0^- = \frac{3}{2}\hbar\omega \qquad \psi_0^- = a_0 y e^{-y^2/2}$$

$$r = 1 \qquad E_1^- = \frac{7}{2}\hbar\omega \qquad \psi_1^- = a_0 y\left(1 - \frac{2y^2}{3}\right)e^{-y^2/2}$$

$$r = 2 \qquad E_2^- = \frac{11}{7}\hbar\omega \qquad \psi_2^- = a_1 y\left(1 - \frac{4y^2}{3} + \frac{4y^4}{5}\right)e^{-y^2/2}$$

สเตทฟังก์ชันโดยทั่วไป

$$\psi_n(x) = \frac{c_n}{2^{n/2}} h_n(y) e^{-y^2/2}$$

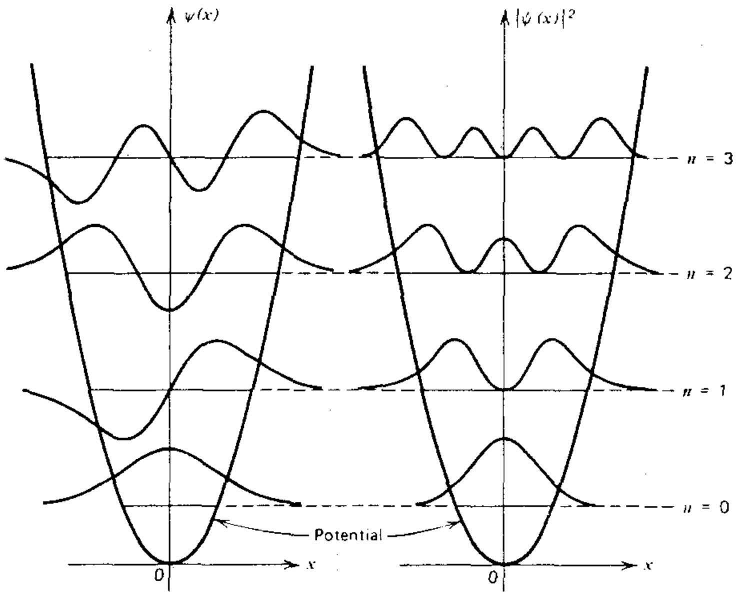
$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

เมื่อ

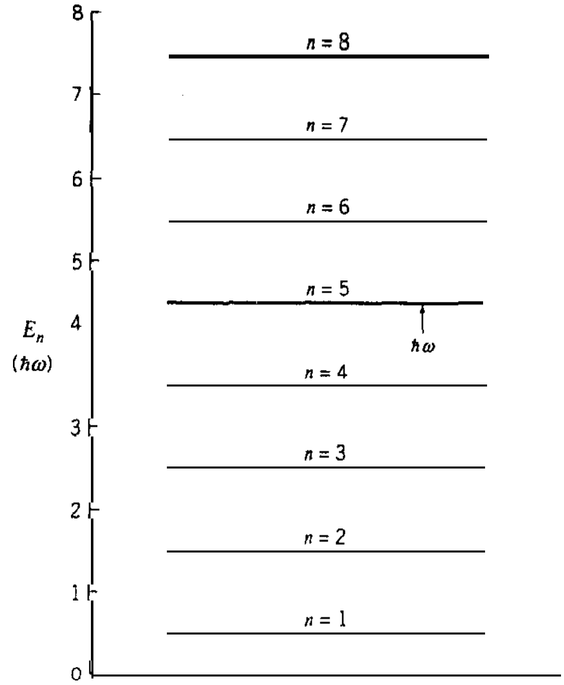
$$y = \sqrt{m\omega/\hbar}\,x$$

$$c_n = \left(\frac{\sqrt{m\omega/\hbar\pi}}{n!}\right)^{1/2}$$

$h_0(y) = 1$	$h_3(y) = 8y^3 - 12y$
$h_1(y) = 2y$	$h,(y) = 16y^4 - 48y^2 + 12$
$h_2(y) = 4y^2 - 2$	$h,(y) = 32y^5 - 160y^3 + 120y$



รูปที่ 6.15 ฟังก์ชั่นคลื่นของฮาร์มอนิกส์ออสซิเลเตอร์



รูปที่ 6.16 ระดับพลังงานของฮาร์มอนิกส์ออสซิเลเตอร์

ตัวอย่างที่ 6.7 อนุภาคมวล M เคลื่อนที่อยู่บนทางเดินรูปวงกลม รัศมี R สมการชเรอดิงเงอร์ ที่ขึ้นกับเวลา คือ

$$\frac{\hbar}{2MR}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} \qquad \text{เมื่อ} \qquad \psi = \psi(\phi,t)$$

เมื่อ ϕ เป็นมุมที่อนุภาคเคลื่อนที่ไป ภาวะเริ่มต้น คือ $\psi_E(0) = \psi_E(2\phi)$

ก) จงแก้สมการชเรอดิงเงอร์ เพื่อคำนวณหาค่าไอเกน E_m และฟังก์ชั่นไอเกน ψ_m

ข) จงเขียนสเตทฟังก์ชั่นที่นอร์มอลไลซ์ แล้วอย่างสมบูรณ์

วิธีทำ

ก) $$\frac{-\hbar^2}{2mR^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

ลองใช้ ผลเฉลย $\psi = \Phi(\phi)T(t)$

$$\frac{-\hbar^2}{2MR^2}T(t)\frac{\partial^2\Phi(\phi)}{\partial\phi^2} = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial T}{\partial t}\Phi(\phi)$$

แยกตัวแปร

$$\frac{-\hbar^2}{2MR^2}\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi(\phi)}{\partial\phi^2} \quad \frac{A}{i}\frac{\partial T(t)}{\partial t}\frac{1}{T} = \alpha^2$$

ซึ่งจะได้

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi(\phi)}{\partial\phi^2} \quad \frac{2MR^2}{\hbar^2} = \alpha^2 \quad \text{และ} \quad \frac{1}{T}\frac{\partial T(t)}{\partial t} = - \; - \frac{i}{A}\alpha^2$$

ให้ $\phi = Ae^{2\phi}$

$$Aa^2e^{a\phi} = -\left(\frac{2MR^2}{\hbar^2}\right)\alpha^2 Aa^{2\phi} \qquad T = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha^2 t}$$

$$a^2 = -\left(\frac{2MR^2}{\hbar^2}\right)\alpha^2 \qquad \alpha^2 = E$$

$$a = \pm i\left(\frac{2MR^2}{\hbar^2}\right)^{1/2}\alpha \qquad T = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$$

$$\Phi(\phi) = Ae^{\pm i\left(\frac{2MR^2}{\hbar^2}\right)^{1/2}\alpha\phi}$$ เป็นฟังก์ชั่นไอเกน

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi)$$

$$A = Ae^{\pm i\left(\frac{2MR^2}{\hbar^2}\right)^{1/2}\alpha 2\pi}$$

$$\pm\left(\frac{2MR^2}{\hbar^2}\right)^{1/2}\alpha 2\pi = m2\pi$$

$$m = \left(\frac{2MR^2}{\hbar^2}\right)^{1/2}\alpha$$ เมื่อ $m = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots.$

ให้ $\Phi(\phi) = Ae^{im\phi}$ เป็น ไอเกนฟังก์ชั่น

ดังนั้น ค่าไอเกน คือ

$$E_m = \alpha^2 = m^2\left(\frac{\hbar^2}{2MR^2}\right)$$

ข) นอร์มอลไลซ์

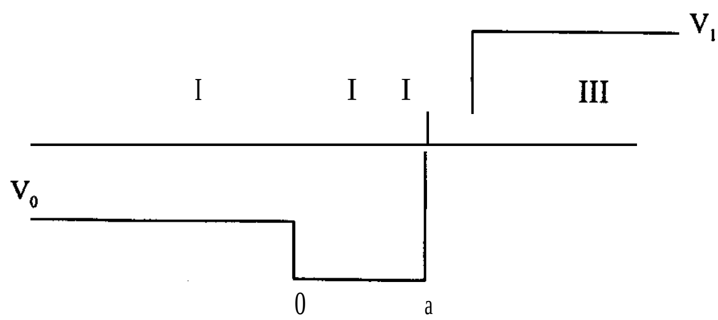
$$\int_0^{2\pi}\Phi^*\Phi d\phi = A^2\int_0^{2\pi}d\phi = A^2 2\pi = 1$$

$$A^2 = \frac{1}{2\pi} \quad \text{ดังนั้น} \quad A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

ดังนั้น $\psi = \Phi(\phi)\cdot T(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-im\phi}e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$ เป็นค่านอร์มอลไลซ์ ของฟังก์ชั่นคลื่น

ตัวอย่างที่ 6.8 อนุภาคมวล m เคลื่อนที่ตามแกน x ภายใต้ศักย์

$$v(x)=\begin{cases} V_1 & ,x>a \\ 0 & ,0<x<a \\ V_0 & ,x<0 \end{cases}$$



ก) จงเขียนสมการชเรอดิงเงอร์ทั้งสามบริเวณ เมื่อ $V_0 < E < V_1$

ข) จงเขียนฟังก์ชั่นคลื่นทั้งสามบริเวณ

ค) เขียนภาวะขอบเขตที่ $x=0$ และ $x=a$

วิธีทำ

ก) $$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+V(x)\psi = E\psi$$

ที่บริเวณ I สมการชเรอดิงเงอร์

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)\psi = 0 \quad \text{บริเวณ I}$$

ที่บริเวณ II $V_0 = 0$ สมการชเรอดิงเงอร์ คือ

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0 \quad \text{บริเวณ I I}$$

ที่บริเวณ III สมการชเรอดิงเงอร์ คือ

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{2m}{\hbar^2}(V_1 - E)\psi = 0 \quad \text{เป็นบริเวณ III}$$

ข) ฟังก์ชั่นคลื่นที่บริเวณ I คือ

$$\psi_{\mathrm{I}} = Ae^{i\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}x} + Be^{-i\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}x}$$

$$= Ae^{iK_1x} + Be^{-iK_2x} \quad \text{เมื่อ} \quad K_{\mathrm{I}} = \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$$

ฟังก์ชั่นคลื่นที่บริเวณ II คือ

$$\psi_{\mathrm{II}} = Ce^{i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}x} + De^{-i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}x}$$

$$= Ce^{1K_{\mathrm{II}}x} + De^{-iK_{\mathrm{II}}x} \quad \text{เมื่อ} \quad K_{\mathrm{II}} = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

ฟังก์ชั่นคลื่นที่บริเวณ III คือ

$$\psi_{\mathrm{III}} = Ee^{\sqrt{\frac{2m(V_1-E)}{\hbar^2}}x} + Fe^{-\sqrt{\frac{2m(V_1-E)}{\hbar^2}}x}$$

$$= Ee^{K_{\mathrm{III}}x} + Fe^{-K_{\mathrm{III}}x} \quad \text{เมื่อ} \quad K_{\mathrm{III}} = \sqrt{\frac{2m(V_1-E)}{\hbar^2}}$$

$$\psi_{\mathrm{III}} = Fe^{-K_{\mathrm{III}}x}$$

ค) ภาวะขอบเขต คือ

(i) $\psi_{\mathrm{I}}(0) = \psi_{\mathrm{II}}(0)$

(ii) $\left.\frac{d\psi_{\mathrm{I}}}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{d\psi_{\mathrm{II}}}{dx}\right|_{x=0}$

(iii) $\psi_{\mathrm{II}}(a) = \psi_{\mathrm{III}}(a)$

(iv) $\left.\frac{d\psi_{\mathrm{II}}}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{d\psi_{\mathrm{III}}}{dx}\right|_{x=a}$

ดังนั้น ที่ภาวะ (i) จะได้

$$A + B = C + D$$

ที่ภาวะ (ii) จะได้

$$(A - B)K_{\mathrm{I}} = (C - D)K_{\mathrm{II}}$$

ที่ภาวะ (iii) จะได้

$$Ce^{iK_{\mathrm{II}}a} + De^{-iK_{\mathrm{II}}a} = Fe^{-iK_{\mathrm{III}}a}$$

ที่ภาวะ (iv) จะได้

$$iK_{\mathrm{II}}\left(Ce^{iK_{\mathrm{II}}a} - De^{-iK_{\mathrm{II}}a}\right) = iK_{\mathrm{III}}Fe^{-iK_{\mathrm{III}}a}$$

ตัวอย่างที่ 6.9 จงหาค่าไอเกนพลังงานของอนุภาคภายใต้ พลังงานศักย์สมมาตร

$$V = \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r}$$

วิธีทำ เขียนในรูป สมการ ชเรอดิงเงอร์ คือ

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{\hbar^2}{2m}\ell(\ell+1)\frac{1}{r^2} - \frac{A}{r^2} + \frac{B}{r}\right)R = 0$$

$$\rho = \frac{2\sqrt{(-2mE)}r}{\hbar}$$

$$2mA/\hbar^2 + \ell(\ell+1) = s(s+1)$$

$$\frac{B\sqrt{m/(-2E)}}{\hbar} = n$$

กำหนดให้ $$R'' + \frac{2R'}{\rho} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{n}{\rho} - \frac{s(s+1)}{\rho_2}\right)R = 0$$

โดยที่ $$R' = \frac{dR}{d\rho} \quad , \quad R'' = \frac{d^2R}{d\rho^2}$$

ดังนั้น ผลเฉลยจะหาได้จาก

$$R = \rho^s e^{-\rho/2}\omega(\rho) \quad \text{เมื่อ} \quad \omega(\rho) = F(-n+s+1, 2s+2, \rho)$$

$$\therefore R = \rho s e^{-\rho/2}F(-n+s+1, 2s+2, \rho)$$

จาก $$\frac{2mA}{\hbar^2} + \ell(\ell+1) = s(s+1)$$

ให้ n - s - l = p

$$E_n = \frac{-B^2m}{2\hbar^2n^2} \quad \text{เมื่อ} \quad n = 0,1,2,\ldots\ldots \qquad \text{(A)}$$

ให้ $$\frac{B}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{-2E}} = n$$

n-s-l=p , $\therefore n = s + 1 + \rho$

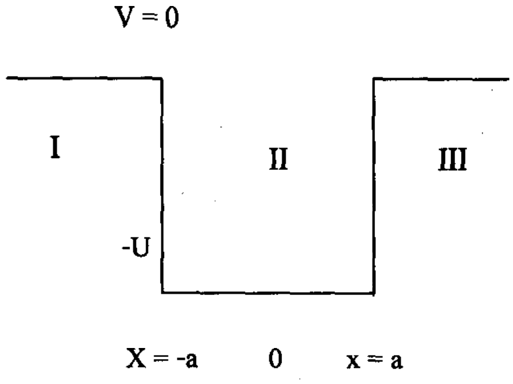
$$\frac{2mA}{\hbar^2} + \ell(\ell-1) = s(s+1)$$

ดังนั้น ค่าไอเกน ของอนุภาค จากสมการ (A) คือ

$$E_\rho = -\frac{2B^2m}{\hbar^2}\left[(2\rho+1) + \sqrt{(2\ell+1)^2 + \frac{8mA}{\hbar^2}}\right]^{-2}$$

ตัวอย่างที่ 6.10 จงหาค่าไอเกนและฟังก์ชั่นไอเกน ของอนุภาคภายใต้ศักย์ ดังรูป

$$V = \begin{cases} -U & ,-a \le x \le a \\ 0 & ,x > |a| \end{cases}$$



วิธีทำ สมการ ชเรอดิงเงอร์ คือ

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = [E - V(x)]\psi$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi = 0$$

ฟังก์ชั่นคลื่นที่บริเวณ I จะอยู่ในเงื่อนไข $V < E$, $E > 0$

ดังนั้น ที่บริเวณ I

$$\frac{\partial^2\psi_I}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi_I = 0 \qquad \text{เมื่อ} \quad V = 0$$

$$\frac{\partial^2\psi_I}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi_I = 0$$

$$\frac{\partial^2\psi_I}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}k_I^2\psi_I = 0 \qquad k_I = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

ดังนั้น ฟังก์ชั่นคลื่นที่บริเวณ I คือ

$$\psi_I = Ae^{ik_I x} + Be^{-ik_I x}$$

ที่บริเวณ II

$$\frac{\partial^2\psi_{\text{II}}}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\psi_{\text{II}} = 0 \qquad \text{เมื่อ} \quad V=-u$$

$$\frac{\partial^2\psi_{\text{II}}}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E+u)\psi_{\text{II}} = 0$$

$$\frac{\partial^2\psi_{\text{II}}}{\partial x^2}+k_2^2\psi_{\text{II}} = 0 \qquad k_2=\frac{\sqrt{2m(E+u_0)}}{\hbar}$$

ดังนั้น ฟังก์ชั่นคลื่นที่บริเวณ II คือ

$$\psi_{\text{II}} = Ce^{ik_2x}+De^{-ik_2x}$$

ที่บริเวณ III

$$\frac{\partial^2\psi_{\text{III}}}{\partial x^2}+\frac{\cdots}{\hbar^2}E\psi_{\text{III}} = 0 \qquad \text{เมื่อ} \quad V=0$$

$$\frac{\partial^2\psi_{\text{III}}}{\partial x^2}+k_1^2\psi_{\text{III}} = 0$$

ดังนั้น ฟังก์ชั่นคลื่นที่บริเวณ III คือ

$$\psi_{\text{III}} = Fe^{ik_1x}$$

$$\psi_{\text{I}}(-a) = \psi_{\text{II}}(-a)$$

$$\psi_{\text{II}}(a) = \psi_{\text{III}}(a)$$

$$\psi_{\text{I}}^1(-a) = \psi_{\text{II}}^1(-a)$$

$$\psi_{\text{II}}^1(a) = \psi_{\text{III}}^1(a)$$

ดังนั้น

$$Ae^{-ik_1a}+Be^{ik_1a} = Ce^{-ik_2a}+De^{ik_2a} \qquad (1)$$

$$Ce^{ik_2a}+De^{-ik_2a} = Fe^{ik_1a} \qquad (2)$$

$$k_1(Ae^{-ik_1a}+Be^{ik_1a}) = k_2\,(Ce^{-ik_2a}-De^{ik_2a}) \qquad (3)$$

$$k_2\,(Ce^{ik_2a}-De^{-ik_2a}) = k_1Fe^{ik_1a} \qquad (4)$$

$$2\times k_2 \rightarrow k_2\left(Ce^{ik_2a}+De^{-ik_2a}\right)= k_2Fe^{ik_1a} \qquad (2')$$

ผลบวกระหว่าง 2′ กับ 4

$$2k_2Ce^{ik_2a} = (k_1 + k_2)Fe^{ik_1a}$$

$$C = \frac{F(k_1 + k_2)}{2k_2e^{ik_2a}}e^{ik_1a}$$

$$C = \frac{F(k_1 + k_2)}{2k_2}e^{i(k_1-k_2)a}$$

ผลลบระหว่าง 2′ กับ 4

$$2k_2De^{-ik_2a} = (k_2 - k_1)Fe^{ik_1a}$$

$$D = \frac{F(k_2 - k_1)}{2k_2e^{ik_2a}}e^{ik_1a}$$

$$D = \frac{F(k_2 - k_1)}{2k_2}e^{i(k_1+k_2)a}$$

$$Ae^{-ik_1a} + Be^{ik_1a} = \frac{F(k_1 + k_2)}{2k_2}e^{i(k_1-k_2)a}e^{-ik_2a} + \frac{F(k_2 - k_1)}{2k_2}e^{i(k_1+k_2)a}e^{ik_2}$$

$$Ae^{-ik_1a} + Be^{ik_1a} = \frac{F(k_1 + k_2)}{2k_2}e^{i(k_1-2k_2)a} + \frac{F(k_2 - k_1)}{2k_2}e^{i(k_1+2k_2)a} \qquad (1')$$

$$k_1(Ae^{-ik_1a} - Be^{ik_1a}) = k_2\left[\frac{F(k_1 + k_2)}{2k_2}e^{i(k_1-2k_2)a} - \frac{F(k_2 - k_1)}{2k_2}e^{i(k_1+2k_2)a}\right] \qquad (3')$$

$$k_1(Ae^{-ik_1a} + Be^{ik_1a}) = \frac{Fk_1(k_1 + k_2)}{2k_2}e^{i(k_1-2k_2)a} + \frac{Fk_1(k_2 - k_1)}{2k_2}e^{i(k_1+2k_2)a} \qquad (1'')$$

ผลบวกระหว่าง 1″ กับ 3′

$$2k_1Ae^{-ik_1a} = \frac{F(k_1 + k_2)^2}{2k_2}e^{i(k_1-2k_2)a} + \frac{F(k_2 - k_1)(k_1 - k_2)}{2k_2}e^{i(k_1+2k_2)a}$$

$$A = \frac{F(k_1 + k_2)^2}{4k_1k_2}e^{i2(k_1-k_2)a} + \frac{F(k_2 - k_1)(k_1 - k_2)}{4k_1k_2}e^{i2(k_1+k_2)a}$$

$$= Fe^{2ik_1a}\left[\frac{k_1^2 + k_2^2 + 2k_1k_2}{4k_1k_2}e^{-2ik_2a} + \frac{2k_1k_2 - k_1^2 - k_2^2}{4k_1k_2}e^{ik_2a}\right]$$

$$= Fe^{2ik_1a}\left[\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1} + 2\right)e^{-2ik_2a} + \left(2 - \frac{k_1}{k_2} - \frac{k_2}{k_1}\right)e^{2ik_2a}\right\}\right]$$

$$= Fe^{2ik_1a}\frac{1}{4}\left[\frac{k_1}{k_2}e^{-2ik_2a} + \frac{k_2}{k_1}e^{-2ik_2a} + 2e^{-2ik_2a} + 2e^{2ik_2a} - \frac{k_1}{k_2}e^{2ik_2a} - \frac{k_2}{k_1}e^{2ik}\right]$$

$$= \frac{1}{4}Fe^{2ik_1a}\left[2\left(e^{2ik_2a} + e^{-2ik_2a}\right) + \frac{k_1}{k_2}\left(e^{-2ik_2a} - e^{2ik_2a}\right) + \frac{k_2}{k_1}\left(e^{-2ik_2a} - e^{2ik_2a}\right)\right]$$

กำหนดให้ $\quad \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\cos x \quad , \quad \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2\;i}=\sin x$

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{4}Fe^{2ik_1a}\left[4\cos 2k_2a-\frac{k_1}{k_2}\left(e^{2ik_2a}-e^{-2ik_2a}\right)-\frac{k_2}{k_1}\left(e^{2ik_2a}-e^{-2ik_2a}\right)\right] \\
&= Fe^{2ik_1a}\left[\cos 2k_2a-\frac{1}{2}i\frac{k_1}{k_2}\frac{\left(e^{2ik_2a}-e^{-2ik_2a}\right)}{2i}-\frac{1}{2}i\frac{k_2}{k_1}\frac{\left(e^{2ik_2a}-e^{-2ik_2a}\right)}{2i}\right] \\
&= Fe^{2ik_1a}\left[\cos 2k_2a-\frac{i}{2}\frac{k_1}{k_2}\sin 2k_2a-\frac{i}{2}\frac{k_2}{k_1}\sin 2k_2a\right] \\
&= Fe^{2ik_1a}\left[\cos 2k_2a-\frac{i}{2}\left(\frac{k_1}{k_2}+\frac{k_2}{k_1}\right)\sin 2k_2a\right]
\end{aligned}
$$

ผลลบระหว่าง 1″ กับ 3′

$$
2Bk_1e^{ik_1a} = \frac{F(k_1+k_2)(k_1-k_2)}{2k_2}e^{i(k_1-2k_2)a}+\frac{F(k_2-k_1)(k_1-k_2)}{2k_2}e^{i(k_1+2k_2)a}
$$

$$
\begin{aligned}
B &= F\left\{\frac{(k_1+k_2)(k_1-k_2)}{4k_1k_2}e^{-2ik_2a}+\frac{(k_2-k_1)(k_1+k_2)}{4k_1k_2}e^{2ik_2a}\right\} \\
&= \frac{F}{4}\left\{\left(\frac{k_1}{k_2}-\frac{k_2}{k_1}\right)e^{-2ik_2a}+\left(-\frac{k_1}{k_2}+\frac{k_2}{k_1}\right)e^{2ik_2a}\right\} \\
&= \frac{F}{4}\left\{-\frac{k_1}{k_2}\left(\frac{e^{2ik_2a}-e^{-2ik_2a}}{2i}\right)2i+\frac{k_2}{k_1}\left(\frac{e^{2ik_2a}-e^{-2ik_2a}}{2i}\right)2i\right\} \\
&= \frac{i}{2}F\left\{-\frac{k_1}{k_2}\sin 2k_2a+\frac{k_2}{k_1}\sin 2k_2a\right\} \\
&= \frac{i}{2}F\left[\frac{k_2}{k_1}-\frac{k_1}{k_2}\right]\sin 2k_2a
\end{aligned}
$$

ถ้าพลังงานเป็นบวก $R=0$ ดังนั้น $T=1$

$$\therefore \quad \frac{1}{T} = \left|\frac{A}{F}\right|^2 = \cos^2 2k_2a + \frac{1}{4}\left(\frac{k_1}{k_2}+\frac{k_2}{k_1}\right)^2 \sin^2 2k_2a$$

$$\frac{1}{T} = 1+\frac{1}{4}\left(\frac{k_1}{k_2}-\frac{k_2}{k_1}\right)^2 \sin^2 2k_2a$$

ให้ $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, $k_2 = \frac{\sqrt{2m(E+u_0)}}{\hbar}$

ดังนั้น

$$\frac{1}{T} = 1+\frac{1}{4}\frac{u_0^2}{E(E+u_0)}\sin^2 2k_2a$$

$$\therefore \quad \frac{1}{T} = 1+\frac{1}{4}\frac{u_0^2}{E(E+u_0)}\sin^2 2k_2a = 1$$

$$\frac{1}{4}\frac{u_0^2}{E(E+u_0)}\sin^2 2k_2a = 0$$

ดังนั้น

$$\sin^2 2k_2a = 0$$

$$2k_2a = n\pi$$

$$k_2 = \frac{n\pi}{2a}$$

$$\frac{\sqrt{2m(E+u)}}{\hbar} = \frac{n\pi}{2a}$$

$$\frac{2m(E+u)}{\hbar^2} = \frac{n^2\pi^2}{4a^2}$$

$$2mE = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{4a^2} - 2mu_0$$

ดังนั้น ค่าไอเกน $E = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8ma^2} - u_0$

ฟังก์ชั่นไอเกน

$$\psi_{\mathrm{I}} = F\left[e^{2ik_1a}\left\{\cos 2k_2a - \frac{i}{2}\left(\frac{k_1}{k_2}+\frac{k_2}{k_1}\right)\sin 2k_2a\right\}e^{ik_1x} + \frac{i}{2}\left\{\frac{k_2}{k_1}-\frac{k_1}{k_2}\right\}\sin 2k_2a \, . \, e^{-ik_1x}\right]$$

$$\psi_{\mathrm{II}} = F\left[\frac{(k_1-k_2)}{2k_2}e^{i(k_1-k_2)a}e^{ik_2x} + \frac{(k_2-k_1)}{2k_2}e^{i(k_1+k_2)a}e^{-ik_2x}\right]$$

$$\psi_{\mathrm{III}} = Fe^{ik_1x}$$

กรณีที่ 2 $E < V \therefore E < -u_0 < 0$

จากสมการชเรอดิงเงอร์ $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\psi = 0$

ที่บริเวณ I

$$\frac{d^2\psi_{\mathrm{I}}}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi_{\mathrm{I}} = 0 \qquad \text{เมื่อ} \quad V = 0$$

$$\frac{d^2\psi_{\mathrm{I}}}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2}(-E_1)\psi_{\mathrm{I}} = 0$$

$$\frac{d^2\psi_{\mathrm{I}}}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2}|E|\psi_{\mathrm{I}} = 0$$

$$\frac{d^2\psi_{\mathrm{I}}}{dx^2} - \mathrm{K}_1\psi_{\mathrm{I}} = 0 \qquad \text{เมื่อ} \quad \mathrm{K}_1 = \frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar}$$

$$\psi_{\mathrm{I}} = Ae^{\mathrm{K}_1x} + Be^{-\mathrm{K}_1x}$$

แต่ $\psi_1(-\infty) = 0$ ดังนั้น $B = 0$

ดังนั้น ฟังก์ชั่นไอเกนที่บริเวณ I คือ $\psi_1 = Ae^{\mathrm{K}_1x}$

ที่บริเวณ II

$$\frac{d^2\psi_{II}}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}[E-(-u)]\psi_{II} = 0$$

$$\frac{d^2\psi_{II}}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}[E+u_0]\psi_{II} = 0$$

$$\frac{d^2\psi_{II}}{dx^2}+k_2\psi_{II} = 0$$ เมื่อ $k_2=\frac{\sqrt{2m(E+u_0)}}{\hbar}$

ดังนั้น $\psi_{II} = Ce^{ik_2x}+De^{-ik_2x}$

ที่บริเวณ III

$$\frac{d^2\psi_{III}}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi_{III} = 0$$

$$\frac{d^2\psi_{III}}{dx^2}\mathrm{K}_1\psi_{III} = 0$$ เมื่อ $\mathrm{K}, =\frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar}$

ดังนั้น $\psi_{III} = Ee^{\mathrm{K}_1x}+Fe^{-\mathrm{K}_1x}$

แต่ $F=0$ ดังนั้น $\psi_{III} = Ee^{\mathrm{K}_1x}$

ดังนั้น $C^2=D^2$ $\therefore C=D$

และ $A=E$

ถ้า $C=D$

$$k_2a = n\pi$$

$$k_2 = \frac{n\pi}{a}$$

$$\frac{\sqrt{2m(E+u)}}{\hbar} = \frac{n\pi}{a}$$

ดังนั้น $E = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}-u$, $n=1,2,3,\ldots$

ตัวอย่างที่ 6.11 จงคำนวณสัมประสิทธิ์การทะลุผ่านของกำแพงศักย์ ต่อไปนี้

$$U(x) = \frac{U_0}{\cosh^2(\alpha x)}$$

พลังงานของอนุภาคน้อยกว่า U_0

วิธีทำ กำหนดให้ $u(x) = \frac{U_0}{\cosh^2(\alpha x)}$ เมื่อ $U_0 > E$

จากสมการ ชเรอดิงเงอร์ $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E-U]\psi = 0$

ให้ $$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - \frac{U_0}{\cosh^2(\alpha x)}\right]\psi = 0$$

(1)

และ $$\psi = (\cosh\alpha x)^{-2s}\xi \quad , \quad s = \frac{1}{\psi}\left(\sqrt{1-\frac{8mU_0}{\alpha^2\hbar^2}} - 1\right)$$

ดังนั้น $$k = \sqrt{\frac{mE}{2\alpha^2\hbar^2}}$$

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} - \psi s\cosh(\alpha x)\frac{d\xi}{dx} + \psi\alpha^2(s^2 + k^2)\xi = 0 \qquad (2)$$

ให้ $$y = \sinh^2(\alpha x)$$

ดังนั้น สมการ 2 จะได้

$$y(1-y)\frac{d^2\xi}{dy^2} + \left[\frac{1}{2} - (1-2s)y\right]\frac{d\xi}{dy} - (s^2 + h^2)\xi = 0 \qquad (3)$$

$$z(1-z)\frac{d^2\lambda}{dz^2} + [c - (a+b+1)z]\frac{d\lambda}{dz} + abz = 0 \qquad (4)$$

ผลเฉลย คือ

$$\lambda(z) = z^{1-c}F(a+1-c, b+1-c, 2-c, y)$$

ดังนั้น ผลบวก ระหว่าง (3) กับ (4) คือ

$$c = 1/2, a + b + 1 = 1 - 2s, ab = s^2 + h^2$$

$$\therefore \quad c = 1/2 \qquad a = -s + ik \quad , \qquad b = -s - ih$$

ผลเฉลยของสมการ (3) do

$$z(y) = y^{1-1/2} F\left(-s + ih - \frac{1}{2}, -s - ik + 1 - \frac{1}{2}, \alpha - \frac{1}{2}, y\right)$$

$$= y^{1/2} F\left(-s - \frac{1}{2} + ik, -s + \frac{1}{2} - ik, \alpha \frac{1}{2}, y\right)$$

$$\psi = (\cosh \alpha x)^{-2s} z = (\cosh \alpha x)^{-2s} y^{1/2} F\left(-s - \frac{1}{2} + ik, -s + \frac{1}{2} - ih, \alpha \frac{1}{2}, y\right)$$

$$= (\cosh \alpha x)^{-2s} (\sinh \alpha x) F\left(-s - \frac{1}{2} + ik, -s + \frac{1}{2} - ik, -\alpha \frac{1}{2}, \sinh^2 \alpha x\right)$$

$$\psi(x) \approx e^{-i2\alpha kx} \frac{\Gamma(i2\alpha k)\Gamma(1 - i2\alpha k)}{\Gamma(-2s)\Gamma(1 + 2s)} + e^{i2\alpha kx} \frac{\Gamma(-i2\alpha k)\Gamma(1 - i2\alpha k)}{\Gamma(-i2\alpha k - 2s)\Gamma(-i2\alpha k + 2s + 1)}$$

$$\psi(x) \approx e^{-i2\alpha kx} \psi_{\mathrm{I}} + e^{i2\alpha kx} \psi_{\mathrm{II}}$$

$$\psi_{\mathrm{I}} = \frac{\Gamma(i2\alpha k)\Gamma(1 - i2\alpha k)}{\Gamma(-2s)\Gamma(1 + 2s)}$$

$$\psi_{\mathrm{II}} = \frac{\Gamma(-i2\alpha k)\Gamma(1 - i2\alpha k)}{\Gamma(-i2\alpha k - 2s)\Gamma(-i2\alpha k + 2s + 1)}$$

$$D = \frac{|\psi_{\mathrm{II}}|^2}{|\psi_{\mathrm{I}}|^2}$$

$$D = \frac{\sinh^2(2\pi k)}{\sinh^2(2\pi k) + \cosh^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{1 - \frac{8mu_0}{\alpha^2\hbar^2}}\right)}$$

ถ้า $\dfrac{8mu_0}{\alpha^2\hbar^2} < 1$

และ

$$D = \frac{\sinh^2(2\pi k)}{\sinh^2(2\pi k) + \cosh^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{1 - \frac{8mu_0}{\alpha^2\hbar^2}} - 1\right)}$$

ถ้า $\dfrac{8mu_0}{\alpha^2\hbar^2} > 1$

ตัวอย่างที่ 6.12 กำหนด สเตทฟังก์ชั่นของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์

$$\psi_n(x)=\frac{C_n}{2^{n/2}}h_n(y)e^{-y^2/2},\; y=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$$

$$C_n=\left(\frac{\sqrt{m\omega/\hbar\pi}}{n!}\right)^{1/2},\; h_1(y)=2y$$

จงหา $<x^2>$ สำหรับฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ ที่อยู่ในสเตท $n=1$

วิธีทำ สำหรับ $n=1$

$$\psi_1(x) = \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar\pi}}\right)^{1/2}\frac{1}{2^{1/2}}2ye^{-y^2/2}$$

$$<x^2> = \int_{-\infty}^{\infty}\psi_1^* x^2\psi_1 dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar\pi}}\right)^{1/2}\frac{1}{2^{1/2}}2ye^{-y^2/2}\left(\frac{y}{\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}}\right)^2\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar\pi}}\right)^{1/2}\frac{1}{2^{1/2}}2ye^{-y^2/2}\frac{dy}{\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}}$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar\pi}}\left(\frac{1}{2}\right)(4)\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\int_{-\infty}^{\infty}y^4e^{-y^2}dy$$

$$= \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)\frac{2\times 2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}y^4e^{-y^2}dy$$

$$= \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)\left(\frac{4}{\sqrt{\pi}}\right)\left(\frac{3}{2^3}\right)\sqrt{\pi}$$

$$2\,\frac{3}{2}\frac{\hbar}{m\omega}$$

$$= 3\left(\frac{1}{2}\hbar\omega\right)\left(\frac{1}{m\omega^2}\right)$$

$$= \frac{3E_0}{m\omega^2}$$