บทที่ 5
สมการชเรอดิงเงอร์

วัตถุประสงค์

1) ศึกษาการเคลื่อนที่ของหมู่คลื่น
2) ศึกษาการเคลื่อนที่ของหมู่คลื่นในปริภูมิพิกัด
3) ศึกษาการเคลื่อนที่ของหมู่คลื่นในปริภูมิโมเมนตัม
4) ศึกษาการเปลี่ยนแปลงของหมู่คลื่นตามเวลา
5) ศึกษาสมการชเรอดิงเงอร์ของอนุภาคอิสระ
6) ศึกษาการอนุรักษ์ของความน่าจะเป็น
7) ศึกษาการเครื่องหมายวงเล็บของดิแรก
8) ศึกษาสเตทคงที่
9) ศึกษาอนุภาคในกล่อง

5.1 การอนุรักษ์ของความน่าจะเป็น

เราจะพิจารณาอนุภาคเคลื่อนที่ใต้ศักย์ V(x) ใด ๆ โดยที่แรงที่กระทำต่ออนุภาคเป็นแรงอนุรักษ์

จากสมการชเรอดิงเงอร์

$$H\psi(x,t) = \frac{-\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} \qquad (5.1)$$

เมื่อ H เป็นออฟเพอเรเตอร์ใด ๆ เช่น ถ้าเป็นอนุภาคอิสระ H จะเป็นออฟเพอเรเตอร์พลังงานจลน์ เราสมมุติ H ว่าเป็นออฟเพอเรเตอร์ชนิดเส้นตรง ดังนั้นจะสามารถใช้หลักการซ้อนทับได้

จากการอนุรักษ์ของความน่าจะเป็นจะได้

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x,t)\psi(x,t)dx = 0$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi + \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)dx$$

หรือ จากสมการ (5.1) ทำให้เวลาหมดไป

$$\frac{dp}{dt} = \left(\frac{i}{\hbar}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\left[(H^*\psi^*)\psi - \psi^* H\psi\right]dx$$

วงเล็บของเทอมแรกใช้เน้นว่าออฟเพเรเตอร์ H^* กระทำกับ ψ^* อย่างเดียว ไม่รวม ψ ด้วย

ถ้า $\frac{dp}{dt} = 0$ จะได้ว่า

$$\int_{-\infty}^{\infty}(H^*\psi^*)\psi dx = \int_{-\infty}^{\infty}\psi^* H\psi dx$$

หรือ

$$\int_{-\infty}^{\infty}(H\psi)^*\psi dx = \int_{-\infty}^{\infty}\psi^* H\psi dx$$

ภาวะนี้เรียกว่า **เฮอร์มิเทียน** และออฟเพอเรเตอร์ที่เป็นไปตามนี้เรียกว่า **ออฟเพอเรเตอร์เฮอร์มิเทียน**

5.2 ออฟเพอเรเตอร์เฮอร์เทียน

ถ้า A เป็นออฟเพอเรเตอร์ใด ๆ

$$\langle A\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\psi^* A\psi dx$$

และ

$$\langle A\rangle^* = \int_{-\infty}^{\infty}\psi(A\psi)^* dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}(A\psi)^*\psi dx$$

ถ้า $\langle A\rangle$ เป็นค่าคงที่จริง สมการทั้งสองข้างบนนี้จะต้องเท่ากัน ซึ่งก็คือ A เป็นออฟเพอเรเตอร์ชนิดเฮอร์มิเทียน

ถ้าเขียนสมการฟังก์ชั่นอยู่ในรูปทั่วไป โดยสมมุติว่า A เป็นออฟเพอเรเตอร์ชนิดเฮอร์มิเทียน และ ψ_1, ψ_2 เป็นสเตทฟังก์ชั่น จะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty}(A\psi_1)^*\psi_2 dx = \int_{-\infty}^{\infty}\psi_1^* A\psi_2 dx \qquad (5.2)$$

พิจารณาสเตทฟังก์ชั่น

$$\psi = a_1\psi_1 + a_2\psi_2$$

ซึ่งได้จากการซ้อนทับของ ψ_1 และ ψ_2 จากนิยามของออฟเพอเรเตอร์ชนิดเฮอร์มิเทียน จะได้

$$\int(A\psi)^*\psi dx = \int\psi_1^* A\psi dx$$

แทนค่า ψ แล้วกระจายเทอม ได้

$$|a_1|^2\int(A\psi_1)^*\psi_1 dx + |a_2|^2\int(A\psi_2)^*\psi_2 dx + a_1^* a_2\int(A\psi_1)^2\psi_2 dx + a_1 a_2^*\int(A\psi_2)^*\psi_1 dx =$$

$$|a_1|^2\int\psi_1^* A\psi_1 dx + |a_2|^2\int\psi_2^* A\psi_2 dx + a_1^* a_2\int\psi_1^* A\psi_2 dx + a_1 a_2^*\int\psi_2^* A\psi_2 dx$$

เนื่องจาก A เป็นออฟเพอเรเตอร์ชนิดเฮอร์มิเทียน ดังนั้นเทอมที่ 1 และเทอมที่ 2 ทางด้านซ้ายของสมการจะมีค่าเท่ากับ เทอมที่ 1 และเทอมที่ 2 ทางด้านขวาของสมการจัดใหม่ จะได้

$$a_1^* a_2\left[\int(A\psi_1)^*\psi_2 dx - \int\psi_1^* A\psi_2 dx\right] = a_1 a_2^*\left[\int\psi_2^* A\psi_1 dx - \int(A\psi_2)^*\psi_1 dx\right]$$

เทอมทางขวาของสมการเป็นสังยุคเชิงซ้อนของเทอมทางซ้ายของสมการ แต่เฟสของแต่ละเทอมมีค่าใด ๆก็ได้ เพราะว่า a_1 และ a_2 เป็นค่าใด ๆ ดังนั้นเทอมทางซ้ายจะเท่ากับเทอมทางขวา เมื่อสองเทอมมีค่าเป็นศูนย์เท่านั้น

นั่นคือ $$\int(A\psi_1)^*\psi_2 dx = \int\psi_1^* A\psi_2 dx$$

และ $$\int(A\psi_2)^*\psi_1 dx = \int\psi_2^* A\psi_1 dx$$

ซึ่งก็คือเงื่อนไขของออฟเพอเรเตอร์ชนิดเฮอร์มิเทียน นั่นเอง

เราสามารถเขียนสมการ (5.2) ให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ของดิแรก ได้ดังนี้

$$< A\psi_1|\psi_2 > \ = \ < \psi_1|A\psi_2 >$$

เมื่อ $$< A\psi_1|\psi_2 > \ = \ \int (A\,\psi_1)^* \psi_2 dx$$

และ $$< \psi_1|A\psi_2 > \ = \ \int \psi_1^* A\,\psi_2 dx$$

คุณสมบัติข้อหนึ่ง ของออฟเพอเรเตอร์ชนิดเฮอร์มิเทียนก็คือ ผลบวกของออฟเพอเรเตอร์ชนิดเฮอร์มิเทียน จะเป็นออฟเพอเรเตอร์ชนิดเฮอร์มิเทียนด้วย ถ้า A และ B เป็นออฟเพอเรเตอร์ชนิดเฮอร์มิเทียน

ให้ $$C \ = \ \alpha A + \beta B$$

ดังนั้น C จะเป็นออฟเพอเรเตอร์ชนิดเฮอร์มิเทียน เมื่อ α และ β เป็นค่าจริง เท่านั้น

$$< \psi_1|C\psi_2 > \ = \ < \psi_1|(\alpha A + \beta B)\psi_2 >$$

ขณะที่ $$< C\psi_1|\psi_2 > \ = \ < \psi_1|(\alpha^* A + \beta^* B)\psi_2 >$$

ทั้งสองสมการจะมีค่าเท่ากัน เมื่อ α และ β เป็นค่าจริง

คุณสมบัติอีกข้อหนึ่งของเฮอร์มิเทียนออฟเพอเรเตอร์ ก็คือ คุณสมบัติการคูณ

$$D \ = \ AB$$

จะได้ $$< \psi_1|D\psi_2 > \ \equiv \ < \psi_1|AB\psi_2 >$$

เมื่อออฟเพอเรท ψ_2 ด้วย B จะได้ฟังก์ชั่นใหม่ให้มีค่าเท่ากับ ϕ_2

$$< \psi_1|AB\psi_2 > \ \equiv \ < \psi_1|A\phi_2 > \ = \ < A\psi_1|\phi_2 >$$

ถ้า A เป็นออฟเพอเรเตอร์ชนิดเฮอร์มิเทียน แทน $\phi_2 = A\psi_2$ กลับลงไปในสมการข้างบน

$$< A\psi_1|\phi_2 > \ = \ < A\psi_1|B\psi_2 >$$

เช่นเดียวกันให้ $\phi_1 = A\psi_1$ จะได้

$$<A\psi_1|B\psi_2> \;\equiv\; <\phi_1|\, B\psi_2> \;=\; <B\phi_1|\, \psi_2>$$

โดยคิดว่า B เป็นออฟเพอเรเตอร์ชนิดเฮอร์มิเทียน แทนค่า $\phi_1 = A\psi_1$ กลับลงไป จะได้

$$<\psi_1|D\psi_2> \;\equiv\; <\psi_1|AB\psi_2> \;=\; <BA\psi_1|\psi_2>$$

ซึ่งทำให้ได้ $$<D\psi_1|\psi_2> \;\equiv\; <AB\psi_1|\psi_2>$$

หมายความว่า D ไม่เป็นออฟเพอเรเตอร์ชนิดเฮอร์มิเทียน ยกเว้นค่า A และ B จะต้องสลับที่กันได้ D จึงจะเป็นออฟเพอเรเตอร์ชนิดเฮอร์มิเทียน

ออฟเพอเรเตอร์ชนิดเฮอร์มิเทียน จะมีค่าเท่ากับ **แอดจอยท์ (adjoint)** ของตัวเองถ้า A เป็นออฟเพอเรเตอร์ชนิดเฮอร์มิเทียน

$$A = A^+$$

เมื่อ A^+ เป็นแอดจอยท์ของ A

5.3 หลักการสมนัย (Correspondence principle)

จาก $$<\psi|p|\psi> = m\frac{d}{dt}<\psi|x|\psi>$$

และ $$\frac{d}{dt}<\psi|p|\psi> = -<\psi\left|\frac{dV}{dx}\right|\psi>$$

เมื่อ ψ เป็นคำตอบของสมการ (5.1)

พิจารณาออฟเพอเรเตอร์ใด ๆ A(p ,x ,t)

$$\frac{d}{dt}<\psi|A|\psi> = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x,t)A(p,x,t)\psi(x,t)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial\psi^*}{\partial t}A\psi + \psi^*\frac{\partial A}{\partial t}\psi + \psi^* A\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]dx$$

พิจารณาเทอมกลาง ซึ่งเป็นค่าคาดหมายของ $\partial A/\partial t$

$$\frac{d}{dt} < \psi|A|\psi > \quad = \quad < \psi\left|\frac{\partial A}{\partial t}\right|\psi > + \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\left[(H\psi)^* A\psi - \psi^* AH\psi\right]dx$$

เทอมแรกของการอินทีเกรต

$$\int(H\psi)^* A\psi dx \quad = \quad \int \psi^* HA\psi dx$$

เมื่อ

$$\frac{d}{dt} < \psi|A|\psi > \quad = \quad < \psi\left|\frac{\partial A}{\partial t}\right|\psi > + \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\psi^* HA\psi - \psi^* AH\psi\right)dx$$

$$\frac{d}{dt} \quad < \psi|A|\psi > \quad = \quad < \psi\left|\frac{\partial A}{\partial t}\right|\psi > + \frac{i}{\hbar} < \psi|(H, A)|\psi > \qquad (5.3)$$

ในวิชาควอนตัม สัญลักษณ์ x และ p เป็นออฟเพอเรเตอร์ ซึ่งไม่เปลี่ยนแปลงรูปแบบเมื่อเวลาผ่านไป หรืออาจจะกล่าวว่า x และ p เป็นออฟเพอเรเตอร์ซึ่งไม่ขึ้นกับเวลา

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial p}{at} = 0$$

สมมุติว่า A เป็นออฟเพอเรเตอร์ซึ่งไม่ขึ้นกับเวลาจากสมการ (5.3) จะได้

$$\frac{d}{dt} < \psi|x|\psi > \quad = \quad \frac{i}{\hbar} < \psi|(H, x)|\psi > \qquad (5.4)$$

เนื่องจาก

$$(f, x) \quad = \quad \frac{\hbar}{i}\frac{\partial f(x, p)}{\partial p}$$

เมื่อ f เป็นฟังก์ชั่นของ x และ p จะได้สมการ (5.4) ดังนี้

$$\frac{d}{dt} < \psi|x|\psi > \quad = \quad < \psi\left|\frac{\partial H}{\partial p}\right|\psi >$$

จาก

$$\frac{1}{m} < \psi|p|\psi > \quad = \quad < \psi\left|\frac{\partial H}{\partial p}\right|\psi >$$

ดังนั้น

$$\frac{p}{m} \quad = \quad \frac{\partial H}{\partial p} \qquad (5.5)$$

พิจารณาออฟเพอเรเตอร์โมเมนตัม p จากสมการ (5.3) จะได้

$$\frac{d}{dt}<\psi|p|\psi> \quad = \quad \frac{i}{\hbar}<\psi|(H,p)|\psi>$$

จาก $$(p,f) \quad = \quad \frac{\hbar}{i}\frac{\partial f}{\partial x}$$

จะได้ $$\frac{d}{dt}<\psi|P|\psi> \quad = \quad -<\psi\left|\frac{\partial H}{\partial x}\right|\psi> \qquad (5.6)$$

เช่นเดียวกัน จะแสดงได้ว่า

$$<\psi\left|\frac{dV}{dx}\right|\psi> \quad = \quad <\psi\left|\frac{\partial H}{\partial x}\right|\psi>$$

ซึ่งทำให้ได้สมการของออฟเพอเรเตอร์

$$\frac{\partial H}{\partial x} \quad = \quad \frac{dV}{dx} \qquad (5.7)$$

ปริมาณ H จะต้องเป็นไปตามสมการ (5.5) และสมการ (5.7)

$$\mathrm{H} \quad = \quad \frac{p^2}{2m}+V(x)$$

ออฟเพอเรเตอร์ H คือพลังงานรวมของระบบ ในเทอมของโมเมนตัมและตำแหน่งมีชื่อเรียกว่า ฟังก์ชั่นแฮมมิลโทเนียน ออฟเพอเรเตอร์ H เป็นออฟเพอเรเตอร์ชนิดเฮอร์มิเทียน สำหรับอนุภาคอิสระออฟเพอเรเตอร์ H จะมีค่าเท่ากับ $p^2/2m$

5.4 สมการชเรอดิงเงอร์ในปริภูมิพิกัดและปริภูมิโมเมนตัม

สำหรับระบบพิกัด

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+V(x)\psi \quad = \quad \frac{-\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} \qquad (5.8)$$

ถ้าเราสามารถกระจาย $V(x)$ เป็นอนุกรมของ x ยกกำลังต่าง ๆ ในระบบโมเมนตัม

$$\frac{p^2}{2m}\phi(p,t)+V\left(\frac{-\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}\right)\phi(p,t) \quad = \quad \frac{-\hbar}{i}\frac{\partial\phi}{\partial t} \qquad (5.9)$$

จากสมการ (5.8) แปลงให้อยู่ในระบบโมเมนตัมโดยตรง จะได้

$$\frac{p^2}{2m}\phi(p,t)+\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int W(p')\phi(p-p',t)dp' \quad = \quad \frac{-\hbar}{i}\frac{\partial\phi(p,t)}{\partial t} \qquad (5.10)$$

เมื่อ W เป็นการแปลงค่า V(x) ดังนี้

$$W(p') \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}V(x)e^{-ip'x/\hbar}dx \qquad (5.11)$$

พิจารณาออฟเพอเรเตอร์พลังงาน

$$E \quad = \quad \frac{-\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}$$

$$< E > \quad \equiv \quad <\frac{p^2}{2m}>+<V> \quad = \quad < H >$$

จากสมการ(5.1)

$$< E > \quad = \quad \int\psi^* H\psi dx \quad = \quad \int\psi^*\left(\frac{-\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi dx$$

เมื่อ ψ เป็นคำตอบของสมการชเรอดิงเงอร์ เนื่องจากพลังงานไม่ขึ้นกับเวลา จะได้

$$\frac{d<f(H)>}{dt} \quad = \quad 0$$

เพราะ $[H,f(H)] \quad = \quad 0$ สำหรับ f ใด ๆ

จึงสามารถเขียนสมการชเรอดิงเรอร์ในรูปสมการออฟเพอเรเตอร์ ได้ดังนี้

$$H\psi \quad = \quad E\psi$$

จากฟิสิกส์ดั้งเดิม

$$\mathbf{H} \quad = \quad \frac{p^2}{2m}+V(x) \quad = \quad \mathbf{E}$$

จากความสัมพันธ์ของพลังค์ และความสัมพันธ์ของเดอ เบรย จะได้

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \quad = \quad \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\lambda \quad = \quad \frac{p^2}{2m}\psi$$

สำหรับอนุภาคเคลื่อนที่ภายใต้ศักย์ $V(x)$

$$\frac{p^2}{2m} \quad = \quad E - V(x)$$

หรือ เขียนในรูปทั่วไป

$$\frac{-\hbar^2}{2\mathrm{m}}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+V(x)\psi \quad = \quad E\psi$$

หรือ ถ้าเขียนในรูปของเวลา

$$\frac{-\hbar^2}{2\ m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+V(x)\psi \quad = \quad \frac{-\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

สมการข้างบนนี้ก็คือ **สมการชเรอดิงเงอร์** ในระบบพิกัด

5.5 สเตทอยู่นิ่ง

คำตอบของสมการชเรอดิงเงอร์ ที่ขึ้นกับเวลาสามารถให้หลักการแยกส่วน ได้ดังนี้

$$\psi_E(x,t) \quad = \quad \psi_E(x)e^{-iEt/\hbar}$$

เมื่อ $\psi_E(x)$ เป็นคำตอบของสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา

$$\mathrm{H}\,\psi_E \quad = \quad \left[\frac{p^2}{2m}+V(x)\right]\psi_E$$

$$= \quad \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_E}{dx^2}+V(x)\psi_E(x)$$

$$= \quad \mathrm{E}\psi_E(x)$$

คำตอบโดยทั่วไปจะอยู่ในรูปการซ้อนทับของสเตทอยู่นิ่ง

$$\psi\ (x,t) \quad = \quad \sum_E C_E\psi_E e^{-iEt/\hbar}$$

5.6 ออฟเพอเรเตอร์

เราสามารถหาค่าคาดหมายจากปริภูมิพิกัดและปริภูมิโมเมนตัมได้

$$< x > \quad = \quad \int \psi^*(x) x \psi(x) dx$$

$$< f(x) > \quad = \quad \int \psi^*(x) f(x) \psi(x) dx$$

$$< p > \quad = \quad \int \varnothing^*(p) p \varnothing(p) dp$$

$$< f(p) > \quad = \quad \int \varnothing^*(p) f(p) \varnothing(p) dp$$

ถ้าต้องการหาค่าคาดหมายของโมเมนตัมจากปริภูมิพิกัด

$$< p > \quad = \quad \int_{\infty}^{\infty} \varnothing^*(p) p \varnothing(p) dp$$

$$= \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\infty}^{\infty} \varnothing^*(p) p \psi(x) e^{-ipx/\hbar} dx dp$$

$$= \quad \frac{1}{2\pi\hbar} \int\int_{-\infty}^{\infty} \int \psi^*(x) e^{ipx'/\hbar} p \psi(x) e^{-ipx/\hbar} dx dx' dp$$

ให้ $\quad U \quad = \quad \psi(x) \qquad du \quad = \quad \frac{d\psi(x)}{dx} dx$

$\quad dv \quad = \quad e^{-ipx/\hbar} dx \qquad v \quad = \quad \frac{-\hbar}{ip} e^{-ipx/\hbar}$

$$< p > = \frac{1}{2\pi\hbar} \int\int dx' dp \psi^*(x') e^{ipx'/\hbar} p \left[\frac{-\hbar}{ip} \psi(x) e^{-ipx/\hbar} |_{-\infty}^{\infty} + \frac{\hbar}{ip} \int_{\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) dx \right]$$

เทอม $\frac{-\hbar}{ip} \psi(x) e^{-ipx/\hbar} |_{-\infty}^{\infty} = 0$ เพราะว่า $\psi(x) = 0$ ที่ ∞

$$< p > \quad = \quad \frac{1}{2\pi\hbar} \int\int_{-\infty}^{\infty} \int dx' dx dp \psi^*(x') \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x}(x) e^{ip(x'-x)/\hbar}$$

หรือ $$< p > \quad = \quad \frac{\hbar}{2\pi\hbar i} \int\int_{-\infty}^{\infty} \int dp dx dx' \psi^*(x') \frac{\partial \psi}{\partial x'}(x) e^{ip(x-x')/\hbar}$$

$$= \quad \frac{1}{i} \int\int dx dx' \psi^*(x) \frac{\partial \psi}{\partial x'}(x) \frac{\hbar}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\hbar} e^{ip(x-x')/\hbar}$$

$$= \quad \frac{\hbar}{i} \int\int dx dx' \psi^*(x) \frac{\partial \psi}{\partial x'}(x) \delta(x - x')$$

$$= \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\hat{p}\psi(x)dx$$

เมื่อ $\hat{p}$ เป็นออฟเพอเรเตอร์ ซึ่ง $\hat{p}\psi(x) = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial x}(x)$ ซึ่งเป็นค่าคาดหมายของโมเมนตัม โดยคำนวณจากปริภูมิพิกัด

เช่นเดียวกัน

$$< p^n > = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\hat{p}^n\psi(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^n\psi(x)dx$$

และ

$$< x^n > = \int_{-\infty}^{\infty} \varnothing^*(p)\hat{x}^n\varnothing(p)dp$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varnothing^*(p)\left(\frac{-\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}\right)^n\varnothing(p)dp$$

พลังงานจลน์ $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$

$$\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

ระบบโคออร์ดิเนต $\hat{A}(x,p) = \hat{A}\left(x, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)$

ระบบโมเมนตัม $\hat{A}(x,p) = \hat{A}\left(\frac{-\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}, p\right)$

คุณสมบัติของออฟเพอเรเตอร์

1. เชิงเส้น $\hat{A}\sum\psi = \sum\hat{A}\psi$

2. ผลคูณ $\hat{A}\hat{B}\psi = \hat{A}\left(\hat{B}\psi\right)$

จะได้ $\hat{A}\left(\hat{B}+\hat{C}\right)\psi = \hat{A}\hat{B}\psi + \hat{A}\hat{C}\psi$

ตัวอย่างที่ 5.1 $\hat{A}=\frac{\partial}{\partial x},\hat{B}=x$

$$AB\psi = \frac{\partial x\psi}{\partial x}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(x\psi)$$
$$= \psi + x\frac{\partial\psi}{\partial x}$$
$$BA\psi = x\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

ดังนั้น $\Rightarrow AB \neq BA$

3. เฮอร์มิเทียน

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)A\chi(x)dx = \int\chi(x)A^*\psi^*(x)dx$$

ตัวอย่างที่ 5.2 $<A>= \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)A\psi(x)dx$ ถ้า $\chi(x)=\psi(x)$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)A^*\psi^*(x)dx$$
$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*A\psi dx\right]^* = <A>^*$$

หมายความว่า ค่าคาดหมายเป็นค่าจริง

4. คุณสมบัติสลับที่

เมื่อออฟเพอเรเตอร์สองตัวกระทำกับฟังก์ชันคลื่น ลำดับของออฟเพอเรเตอร์จะมีความสำคัญ เพราะว่าออฟเพอเรเตอร์มีผลต่อฟังก์ชันคลื่น

$$[A,B]\equiv AB-BA$$

ตัวอย่างที่ 5.3

$$[p,x]\psi = px\psi(x)-xp\psi(x)$$
$$= \frac{\hbar}{i}\left(\frac{\partial}{\partial x}x\psi(x)-x\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)\right)$$
$$= \frac{\hbar}{i}\psi(x)$$

ตัวอย่างอื่น

$$[p,f(x)]\psi(x) = \frac{\hbar}{i}\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x)\psi(x)-f(x)\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)\right)$$

$$= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}f(x)\psi(x)$$

$$[p,f(x)] = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}f(x)$$

$$[x,f(p)]\varnothing(p) = \frac{-\hbar}{i}\left(\frac{\partial}{\partial p}(f(p)\varnothing(p))-f(p)\frac{\partial}{\partial p}\varnothing(p)\right)$$

$$= \frac{-\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}f(p)\varnothing(p)$$

ตัวอย่างที่ 5.4 จงพิสูจน์หลักความไม่แน่นอนเมื่อฟังก์ชั่นคลื่นมีค่าดังนี้

ก) $\psi(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2L}}e^{ip_0x/\hbar}, |x|\le 1\\ 0 \quad , |x|>L\end{cases}$

ข) $\psi(x)=Ae^{-x^2/a^2}$

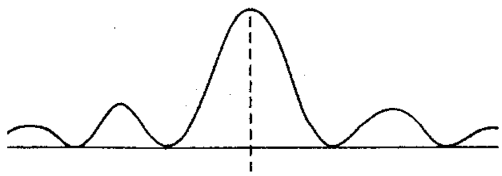
วิธีทำ

ก) $$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}}e^{ip_0x/\hbar}, |x|\le L$$

$$= 0, |x|>L \Rightarrow \Delta x = 2L$$

$$\varnothing(p) = \sqrt{\frac{\hbar}{\pi L}}\frac{\sin[(p_o-p)L/\hbar]}{p_o-p}$$

$$\varnothing^*(p)\varnothing(p) = \frac{\hbar}{\pi L}\frac{\sin^2[(p_o-p)L/\hbar]}{(p_o-p)}$$



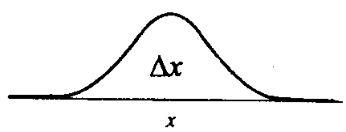
$$\Delta p = \frac{\pi\hbar}{L}$$

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar$$

ข)

$$\psi(x) = Ae^{-x^2/2a^2}$$

$$\rho(x) = |A|^2 e^{-x^2/a^2}$$

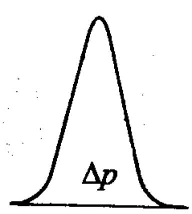


รูป $\Delta x \sim 2a$

$$\varnothing(p) = \int \psi(x) e^{-ipx/\hbar} dx$$

$$= Be^{-p^2a^2/2\hbar^2}$$

$$\rho(p) = |B|^2 e^{-p^2a^2/\hbar^2}$$ รูป



$\Delta x \Delta p \sim \hbar$ $\Delta p \sim 2\hbar / a$

ตัวอย่างที่ 5.4 **จงหา** Fourier transform **ของฟังก์ชันต่อไปนี้**

$$f(x) = \begin{cases} |x|, |x| < 1 \\ 0, |x| \geq 1 \end{cases}$$

วิธีทำ

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-ikx} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-1}^{0} -x e^{ikx} dx + \int_{0}^{1} x e^{-ikx} dx \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{0}^{1} x e^{ikx} dx + \int_{0}^{1} x e^{-ikx} dx \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} 2x \frac{\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right)}{2} dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} x \cos kx dx$$

u = x dv = cos kx dx

d u = d x $v = \frac{\sin kx}{k}$

$$g(k) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{x \sin kx}{k} \Big|_0^1 - \int_{0}^{1} \frac{\sin kx}{k} dx \right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{\sin k}{k} - \frac{1}{k} \left(\frac{-\cos kx}{k} \right) \Big|_0^1 \right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{\sin k}{k} + \frac{1}{k^2} (\cos k - 1) \right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{\sin k}{k} - 2 \frac{\sin^2 \frac{k}{2}}{k^2} \right]$$

เมื่อ $k \to o, g \to \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[1 - \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

ตัวอย่างที่ 5.5 **พิจารณากลุ่มคลื่น**

$$\psi = A \exp\left[-\left(|x| / L\right) + i p_o x / \hbar \right]$$

1. จงนอร์มอลไลซ์ ψ
2. จงคำนวณ $\varnothing(p)$ และพิสูจน์ว่า $\varnothing(p)$ ถูกนอร์มอลไลซ์

วิธีทำ ก) นอร์มอลไลซ์ $\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\psi(x)dx = 1$

$$|A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|/L} e^{-ip_o x/\hbar} e^{-|x|/L} e^{ip_o x/\hbar} dx$$

$$= |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|/L} dx$$

$$= |A|^2 \left[\int_{-\infty}^{0} e^{2x/L} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-2x/L} dx \right]$$

$$= |A|^2 \left[\int_{0}^{\infty} e^{-2x/L} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-2x/L} dx \right]$$

$$= 2|A|^2 \int_{0}^{\infty} e^{-2x/L} dx$$

$$= -|A|^2 L\left(o - e^0\right) = |A|^2 \mathrm{L} = 1$$

$$\therefore \quad A = \sqrt{\frac{1}{L}}$$

ข)

$$\varnothing(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-ipx/\hbar} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{L}} e^{-|x|/L} e^{i(p_o - p)x/\hbar} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{\frac{x}{L} + i(p_o - p)x/\hbar} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{x}{L} + i(p_o - p)x/\hbar} dx \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left[\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{x}{L} - i(p_o - p)x/\hbar} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{x}{L} + i(p_o - p)x/\hbar} dx \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar L}} \left[\frac{e^{-\left(\frac{1}{L} + i\left(\frac{p_o - p}{\hbar}\right)x\right)}}{\left(\frac{1}{L} + i\frac{(p_o - p)}{\hbar}\right)} \Big|^{\infty}_{0} + \frac{e^{-\left(\frac{1}{L} - i\frac{p_o - p}{\hbar}x\right)}}{\left(\frac{1}{L} - i\frac{(p_o - p)}{\hbar}\right)} \Big|^{\infty}_{0} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar L}} \frac{1}{\frac{1}{L} + i\frac{(p_o - p)}{\hbar}} + \frac{1}{\frac{1}{L} - i\frac{(p_o - p)}{\hbar}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar L}} \frac{\frac{1}{L} - i\frac{(p_o - p)}{\hbar} + \frac{1}{L} + i\frac{(p_o - p)}{\hbar}}{\frac{1}{L^2} + \frac{(p_o - p)^2}{\hbar^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi\hbar L^3}} \frac{1}{\frac{1}{L^2} + \frac{(p_o - p)^2}{\hbar^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\hbar^3}{\pi L^3}} \frac{1}{\frac{\hbar^2}{L^2} + (p_o - p)}$$

พิสูจน์ว่า $\varnothing(p)$ นอร์มอลไลซ์ หรือไม่

$$\int_{\infty}^{\infty} \varnothing^*(p)dp = \frac{2\hbar^3}{\pi L^3} \int_{\infty}^{\infty} \frac{dp}{\left(\frac{\hbar^2}{L^2} + (p_o - p)^2\right)^2}$$

$$= \frac{2\hbar^3}{\pi L^3} \int_{\infty}^{\infty} \frac{dy}{\left(\frac{\hbar^2}{L^2} + y^2\right)^2}$$

ให้ $p_o - p = y$ dp = -dy

$$= \frac{-2\hbar^3}{\pi L^3}\left[\frac{y}{\frac{2\hbar^2}{L^2}\left(\frac{\hbar^2}{L^2} + y^2\right)}\Big|^{\infty}_{-\infty} + \frac{1}{2\hbar^2/L^2} \int_{\infty}^{\infty} \frac{dy}{\frac{\hbar^2}{L^2} + y^2}\right]$$

$$= \frac{\hbar}{\pi L}\left[\frac{1}{\sqrt{\hbar^2/L^2}} \tan^{-1}\left(\frac{y}{\hbar/L}\right)\Big|^{\infty}_{-\infty}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{-\pi}{2}\right)\right] = 1$$

ดังนั้น 0 (p) จึงนอร์มอลไลซ์

ตัวอย่างที่ 5.6 กำหนดให้

$$\varnothing(p) = \begin{cases} C, |p - p_0| \le \Delta p \\ 0, (p - p_0) > \Delta p \end{cases}$$

จงหา $\psi(x)$ และ จงนอมอลไลซ์ $\psi(x)$

วิธีทำ

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{p_o-\Delta p}^{p_o+\Delta p} Ce^{ipx/\hbar}dp$$

$$= \frac{C}{\sqrt{2\pi\hbar}}\frac{\hbar}{ix}\left[e^{ipx/\hbar}\Big|_{p_o-\Delta p}^{p_o+\Delta p}\right]$$

$$= \frac{C\hbar}{ix\sqrt{2\pi\hbar}}\left(e^{i(p_o+\Delta p)x/\hbar} - e^{i(p_o-\Delta p)x/\hbar}\right)$$

$$= \frac{C\hbar}{ix\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ip_0x/\hbar}\left(e^{i\Delta px/\hbar} - e^{-i\Delta px/\hbar}\right)$$

$$= \frac{2C\hbar}{x\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ip_ox/\hbar}\sin\left(\frac{\Delta p}{\hbar}x\right)$$

หาค่า C โดยอาศัยนอร์มอลไลซ์

$$\int\psi^*(x)\psi(x)dx = 1$$

$$\frac{4C^2\hbar^2}{2\pi\hbar}\int_{\infty}^{\infty} e^{-ip_ox/\hbar}e^{ip_ox/\hbar}\frac{\sin^2\frac{\Delta px}{\hbar}}{x^2}dx = 1$$

$$\frac{2c^2\hbar}{\pi}\int_{\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{\Delta px}{\hbar}}{x^2}dx = 1$$

กำหนดให้ $u = \frac{\Delta px}{\hbar}$

$$\frac{2c^2\hbar}{\pi}\frac{\Delta p}{\hbar}\int_{\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}du = 1$$

$$2c^2\Delta p = 1$$

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{\hbar}{\pi\Delta p}}\frac{\sin\Delta px/\hbar}{x}e^{ip_ox/\hbar}$$

ตัวอย่างที่ 5.7 กำหนดให้ $\psi(x,o) = Ae^{ip_o x/\hbar}e^{-|x|/L}$

ก. จงนอร์มอลไลซ์ $\psi(x,o)$

ข. จงหาฟังก์ชั่นคลื่นในระบบโมเมนตัม

ค. จงหาค่าคาดหมายของโมเมนตัม

ช. จงหาค่าคาดหมายของพลังงาน

วิธีทำ

(ก) $\int \psi^*(x,o)\psi(x,o)dx$

$$= |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|/L}dx$$

$$= |A|^2\left[\int_{-\infty}^{0} e^{2x/L}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-2x/L}dx\right]$$

$$= |A|^2\left[\frac{e^{2x/L}}{2/L}\Big|^0_{-\infty} + \frac{e^{-2x/L}}{-2/L}\Big|^{\infty}_0\right]$$

$$= |A|^2\left[\frac{L}{2}+\frac{L}{2}\right] = 1 \quad \rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{1}{L}}$$

$$\psi(x,o) = \sqrt{\frac{1}{L}}e^{ip_o x/\hbar}e^{-|x|/L}$$

(ข) $$\varnothing(p,o) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,o)e^{-ipx/\hbar}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ip_o x/\hbar}e^{-|x|/L}e^{-ipx/\hbar}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{\left(\frac{1}{L}+i\frac{(p_0-p)x}{\hbar}\right)}dx + \int_{0}^{\infty} e^{\left(-\frac{1}{L}+i\frac{(p_o-p)x}{\hbar}\right)}dx\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left[\frac{e^{\left(\frac{1}{L}+i\frac{(p_o-p)}{\hbar}\right)x}}{\frac{1}{L}+i\frac{(p_o-p)}{\hbar}}\Big|^0_{-\infty} + \frac{e^{\left(\frac{-1}{L}+i\frac{(p_o-p)}{\hbar}\right)x}}{-\frac{1}{L}+i\frac{(p_o-p)}{\hbar}}\Big|^{\infty}_0\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left[\frac{1}{\frac{1}{L}+i\frac{(p_o-p)}{\hbar}}+\frac{1}{\frac{1}{L}-i\frac{(p_o-p)}{\hbar}}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar L}}\frac{2/\ L}{\left(\frac{1}{L}\right)^2+\frac{(p_o-p)^2}{\hbar^2}}$$

$$\phi(p,0) = \sqrt{\frac{2\hbar^3}{\pi L^3}}\frac{1}{\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2+(p_0-p)}$$

$$\varnothing(p,t) = \varnothing(p,o)e^{-ip^2t/2m\hbar}$$

(ค) $$<p> = \int_{-\infty}^{\infty}\varnothing^*(p,t)p\varnothing(p,t)dp$$

$$= \frac{2\hbar^3}{\pi L^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{pdp}{\left[\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2+(p_o-p)^2\right]}$$

$= p_0$ ไม่ขึ้นกับเวลา

(ง) $$<E> = -\frac{\hbar}{i}\int_{-\infty}^{\infty}\phi^*(p,o)e^{ip^2t/2m\hbar}\frac{\partial}{\partial t}\phi(p,o)e^{-ip^2t/2m\hbar}dp$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\phi^*(p,o)\frac{p^2}{2m}\phi(p,0)dp$$

$$= \frac{\hbar^2}{2mL^2}+\frac{p_0^2}{2m}$$

ตัวอย่างที่ 5.10 ออฟเพอเรเตอร์ เป็นชนิดเฮอร์มิเทียนเมื่อเป็นไปตามสมการต่อไปนี้

$$\int \psi_n^* \hat{A} \psi_m d\tau = \int \psi_m \left(\hat{A} \psi_n\right)^* d\tau$$

จงแสดงว่า $\hat{p}_x = -i\hbar \dfrac{\partial}{\partial x}$ เป็นออฟเพอเรเตอร์ ชนิดเฮอร์มิเทียน

วิธีทำ

ถ้า $-i\hbar \dfrac{\partial}{\partial x}$ เป็นออฟเพอเรเตอร์เฮอร์มิเทียน ดังนั้น

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi_m dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi_n\right)^* dx$$

อินทีเกรตสมการข้างบนนี้

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi_m dx &= -i\hbar \left(\psi_n^* \psi_m\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m \frac{\partial}{\partial x} \psi_n^* dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi_n^*\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi_n\right)^* dx
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\hat{p}_x = -i\hbar \dfrac{\partial}{\partial x}$ เป็นออฟเพอเรเตอร์เฮอร์มิเทียน

ตัวอย่างที่ 5.11 จงแสดงว่าค่าไอเกนของออฟเพอเรเตอร์ชนิดเฮอร์มิเทียน เป็นค่าจริง

วิธีทำ

ให้ $\hat{A}$ เป็นออฟเพอเรเตอร์ชนิดเฮอร์มิเทียน โดยมีค่าไอเกน a

ดังนั้น $$\hat{A}\psi = a\psi \qquad (1)$$

หาสังยุคเชิงซ้อนทั้งสองข้างได้

$$\hat{A}^*\psi^* = a^*\psi^* \qquad (2)$$

คูณ (1) ด้วย ψ^* และ อินทีเกรต

$$\int\psi^*\hat{A}\psi d\tau = \int\psi^* a\psi d\tau = a\int\psi^*\psi d\tau \qquad (3)$$

คูณ (2) ด้วย ψ และ อินทีเกรต

$$\int\psi\hat{A}^*\psi^* d\tau = \int\psi a^*\psi^* d\tau = a^*\int\psi^*\psi d\tau \qquad (4)$$

เนื่องจาก A เป็นออฟเพอเรเตอร์ ชนิดเฮอร์มิเทียน

$$\int\psi^*\hat{A}\psi d\tau = \int\psi\hat{A}^*\psi^* d\tau$$

ดังนั้น จะได้ (4) เป็น

$$\int\psi^*\hat{A}\psi d\tau = a^*\int\psi^*\psi d\tau \qquad (5)$$

$$0 = (a-a^*)\int\psi^*\psi d\tau$$

ดังนั้น $a = a^*$

นั่นคือ ค่าไอเกนของออฟเพอเรเตอร์ชนิดเฮอร์มิเทียน เป็นค่าจริง

วิธีอื่นที่จะพิสูจน์โดยอาศัยสัญลักษณ์ ดิแรก

$$\hat{A}|\psi> = a|\psi> \qquad (1)$$

· $\hat{A}$ เฮอร์มิเทียน , $\hat{A}^* = \hat{A}$

$$<\psi|\hat{A}^* = <\psi|a^* \Rightarrow <\psi|\hat{A} = <\psi|a^* \qquad (2)$$

สมการ (1)

$$<\psi|\hat{A}|\psi> = <\psi|a|\psi> = a <\psi|\psi> \qquad (3)$$

สมการ (2) $$<\psi|\hat{A}|\psi> = <\psi|a^*|\psi> = a^* <\psi|\psi> \qquad (4)$$

(3) - (4) , $$0 = (a-a^*)<\psi|\psi>$$

ดังนั้น $a = a^*$

ค่าไอเกนของออฟเพอเรเตอร์ชนิดเฮอร์มิเทียน เป็นค่าจริง

ตัวอย่างที่ 5.12 กำหนดออฟเพอเรเตอร์ชนิดเฮอร์มิเทียน

$$\hat{H} = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right)$$

ก) จงแสดงว่าฟังก์ชั่นไอเกนของ $\hat{H}$ คือ $Ax \exp\left(-x^2/2\right)$ และจงหาค่าไอเกน

ข) จงนอร์มอลไลซ์ ฟังก์ชั่นไอเกน

ค) จงหาค่าคาดหมายของ x โดยใช้สเตทฟังก์ชั่น

$$\psi(x) = Ax \exp\left(-x^2/2\right)$$

วิธีทำ

ก) ฟังก์ชั่น $\psi = Axe^{-x^2/2}$ เป็นฟังก์ชั่นไอเกนของ $\hat{H}$ ถ้า $\hat{H}\psi = \lambda\psi$

$$-\frac{d^2}{dx^2}\left(Axe^{-x^2/2}\right) = -A\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)e^{-x^2/2}\right]$$

$$= A\left(3-x^2\right)xe^{-x^2/2}$$

ดังนั้น

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right)Axe^{-x^2/2} = 3Axe^{-x^2/2}$$

และ

$$\hat{H}\psi = 3\psi$$

ψ เป็นฟังก์ชั่นไอเกนของ $\hat{H}$ โดยมีค่าไอเกน เท่ากับ 3

ข) จากการนอร์มอลไลซ์

$$\int \psi^* \psi dx = 1$$

จะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty} A^2 x^2 e^{-x^2} dx =$$

$$A^2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$$

$$\mathbf{A} = (4/\pi)^{1/4}$$

ค)

$$< x > = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 x dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} A^2 x^3 e^{\ x^2} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} A^2 x^3 e^{-x^2} dx + \int_{0}^{\infty} A^2 x^3 e^{-x^2} dx$$

$$= 0$$

ตัวอย่างที่ 5.8 พิจารณาอนุภาคซึ่งแทนด้วยฟังก์ชั่นคลื่น

$$\psi = A\exp\left[-(x-x_0)^2/2a^2\right]$$

ก) จงคำนวณ A X I ψ ถูกนอร์มอลไลซ์

ข) จงคำนวณ $<x>$

ค) จงคำนวณ $<(x-<x>)^2>$

9) สมมุติว่าอนุภาคเคลื่อนที่ภายในศักย์ $V(x)$ จงคำนวณ $<V>$ สำหรับ $V = mgx$ และสำหรับ $V = \frac{1}{2}kx^2$

94 arm

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2}}dx = \sqrt{2\pi}a$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}}dx = \sqrt{2\pi}\cdot\frac{a}{2}$$

$$= \sqrt{\pi}\cdot a$$

หมู่คลื่นชนิดเกาส์เซียน $\psi = Ae^{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2}}$

ก) $$\int\psi^*\psi dx = A^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}}dx$$

$$= A^2\sqrt{2\pi}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$= A^2\sqrt{\pi}a$$

แต่ถ้า ψ เป็นนอร์มอลไลซ์

$$\int\psi^*\psi dx = 1$$

ดังนั้น $A^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot a}$ n% $A = \frac{1}{\pi^{1/4}a^{1/2}}$

ข) $$<x> = \int\psi^* x\psi dx$$

$$= A^2\int_{-\infty}^{\infty} xe^{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}}dx$$

ให้ $\frac{x-x_0}{a} = u$

ดังนั้น $dx = adu$

$$
\begin{aligned}
<x> &= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} (x_0 + au) e^{-u^2} a\,du \\
&= A^2 a x_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du + \frac{A^2 a^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du^2 \\
&= A^2 a x_0 \sqrt{\pi} + \frac{A^2 a^2}{2} \left[-e^{-u^2} \right]_{-\infty}^{\infty} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi} a} \cdot a x_0 \sqrt{\pi} \\
&= x_0
\end{aligned}
$$

ค) $$< \left(x - < x >^2\right)^2 > \;=\; < x^2 - 2x < x > + < x >^2 >$$

$$= \; < x^2 > - < x >^2$$

จาก

$$
\begin{aligned}
< x^2 > &= \int \psi^* x^2 \psi dx \\
&= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2}} dx \\
&= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 e^{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} dx \\
&\quad + A^2 \int_{-\infty}^{\infty} 2x_0 x e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} dx - A^2 \int_{-\infty}^{\infty} x_0^2 e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} dx \\
&= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} dx + 2x_0 < x > - A^2 x_0^2 \sqrt{\pi} a
\end{aligned}
$$

กำหนดให้ $u = \frac{x - x_0}{a}$ & I L $dx = adu$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} a^2 u^2 e^{-u^2} a\,du \\
&= -\frac{a^3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u\,d\left(e^{-u^2}\right) \\
&= -\frac{a^3}{2} \left[\left(u e^{-u^2}\right)_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du \right] \\
&= -\frac{a^3}{2} \left[0 - \sqrt{\pi} \right] \\
&= \frac{a^3 \sqrt{\pi}}{2}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\quad < x^2 > \quad = \quad A^2 \cdot \frac{a^3\sqrt{\pi}}{2} + 2x_0 \cdot x_0 - A^2 x_0^2 \sqrt{\pi} a$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}a} \cdot \frac{a^3\sqrt{\pi}}{2} + 2x_0^2 - \frac{1}{\sqrt{\pi}a} \cdot x_0^2 \sqrt{\pi} a$$

$$= \frac{a^2}{2} + x_0^2$$

ดังนั้น $\quad <(x - < x >)^2 > \quad = \quad < x^2 > - < x >^2$

$$= \left(\frac{a^2}{2} + x_0^2\right) - x_0^2$$

$$= \frac{a^2}{2}$$

ง) $\quad V(x) = mgx$

$$< V > = mg < x >$$

$$= mgx_0$$

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$< V > = \frac{1}{2}k < x^2 >$$

$$= \frac{1}{2}k\left(\frac{a^2}{2} + x_0^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{4}ka^2$$

ตัวอย่างที่ 5.9 ก) ทำเหมือนตัวอย่างที่ผ่านมา แต่เปลี่ยนฟังก์ชั่นคลื่นเป็น

$$\psi_1 = A\exp[i(x - x_0)/a]\exp\left[-(x - x_0)^2 / 2a^2\right]$$

ข) พิจารณาการซ้อนทับของสเตท

$$\psi_\pm = C_\pm[\psi_1 \pm \psi]$$

เมื่อ ψ เป็นหมู่คลื่นจากตัวอย่างที่ผ่านมา ψ_1 มาจากของ ก) จงหาค่า $C_\pm$ และจงพล๊อต และเปรียบเทียบความหนาแน่น ความน่าจะเป็นของกรณีต่อไปนี้

$$\psi^*\psi \ , \ \psi_1^*\psi_1 \ , \ \psi_+^*\psi_+ \ , \ \psi_-^*\psi_-$$

วิธีทำ

ก) $\psi_1 = Ae^{\frac{i(x-x_0)}{a}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2}}$

i) $\int \psi_1^* \psi_1 dx = A^2 \int e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2}\cdot 2} dx$

$= A^2 \int e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} dx$

$= A^2 \cdot \sqrt{\pi} a$

$= 1$

ดังนั้น $A^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi} a}$ หรือ $A = \frac{1}{\pi^{1/4} a^{1/2}}$

ii) $< x > = \int \psi_1^* x \psi_1 dx$

$= A^2 \int x e^{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} dx$

$= x_0$

iii) $<(x-<x>)^2> = <x^2> - <x>^2$

$<x^2> = \int \psi_1^* x^2 \psi_1 dx$

$= A^2 \int x^2 e^{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} dx$

$= \frac{a^2}{2} + x_0^2$

ดังนั้น $<(x-<x>)^2> = \left(\frac{a^2}{2} + x_0^2\right) - x_0^2$

$= \frac{a^2}{2}$

iv) V = mgx

<v> $= mg <x>$

$= mgx_0$

V $= \frac{1}{2} kx^2$

$$\begin{aligned}
< V > &= \frac{1}{2}k < x^2 > \\
&= \frac{1}{2}k\left(\frac{a^2}{2} + x_0^2\right) \\
&= \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{4}ka^2
\end{aligned}$$

ข)

$$\begin{aligned}
\psi_\pm &= C_\pm[\psi_1 \pm \psi_1] \\
\int \psi_+^* \psi_+ dx &= \int C_+^2 (\psi_1^* + \psi^*)(\psi_1 + \psi) dx \\
&= C_+^2 \int_{-\infty}^{\infty} (\psi_1^* \psi_1 + \psi^* \psi + \psi_1^* \psi + \psi^* \psi_1) dx \\
&= C_+^2 A^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} \left(1 + 1 + e^{-\frac{i(x-x_0)}{a}} + e^{\frac{i(x-x_0)}{a}}\right) dx \\
&= C_+^2 A^2 \left[2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}} dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - i\frac{(x-x_0)}{a}} dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + i\frac{(x-x_0)}{a}} dx\right]
\end{aligned}$$

พิจารณา $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - i\frac{(x-x_0)}{a}} dx$

ให้ $\frac{x - x_0}{a} = t$ 6 & $dx = adt$

$$t^2 + it = \left(t + \frac{i}{2}\right)^2 - \left(\frac{i}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2 - it} adt &= a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(t + \frac{i}{2}\right)^2 + \left(\frac{i}{2}\right)^2} dt \\
&= a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(t + \frac{i}{2}\right)^2} dt \cdot e^{\frac{i^2}{2}} \\
&= ae^{-1/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(t + \frac{i}{2}\right)^2} dt \\
&= ae^{-1/4} \cdot \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

เช่นเดียวกัน

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+i\frac{(x-x_0)}{a}}dx = a\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(t-\frac{i}{2}\right)^2+\left(\frac{i}{2}\right)^2}dt$$

$$= ae^{-1/4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(t-\frac{i}{2}\right)^2}dt$$

$$= ae^{-1/4}\cdot\sqrt{\pi}$$

i) $$\int \psi_+^*\psi_+ dx = C_+^2A^2\left[2\sqrt{\pi}a+2ae^{-1/4}\sqrt{\pi}\right]$$

$$= C_+^2\frac{1}{\sqrt{\pi}a}\cdot 2\sqrt{\pi}a\left(1+e^{-1/4}\right)$$

$$= C_+^2 2\left(1+e^{-1/4}\right)$$

ad $$\mathrm{I}\psi_+^*\psi_+ dx = 1$$

ดังนั้น $$C_+^2 = \frac{1}{2\left(1+e^{-1/4}\right)}$$

$$|C_+| = \left[2\left(1+e^{-1/4}\right)\right]^{-1/2}$$

$$\int \psi_-^*\psi_- dx = \int C_-^2\left(\psi_1^*-\psi^*\right)\left(\psi_1-\psi\right)dx$$

$$= C_-^2\int_{-\infty}^{\infty}\left(\psi_1^*\psi+\psi^*\psi-\psi_1^*\psi-\psi^*\psi_1\right)dx$$

$$= C_-^2A^2\left[2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}}dx-\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-i\frac{(x-x_0)}{a}}dx-\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+i\frac{(x-x_0)}{a}}dx\right]$$

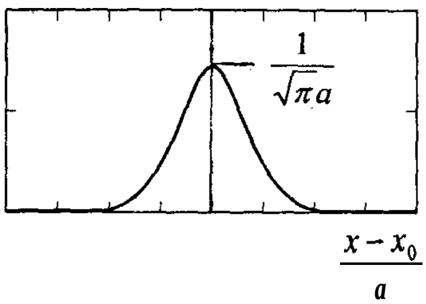
$$= C_-^2 2\left(1-e^{-1/4}\right)$$

$$= 1$$

ดังนั้น $$|C_-| = \left[2\left(1-e^{-1/4}\right)\right]^{-1/2}$$

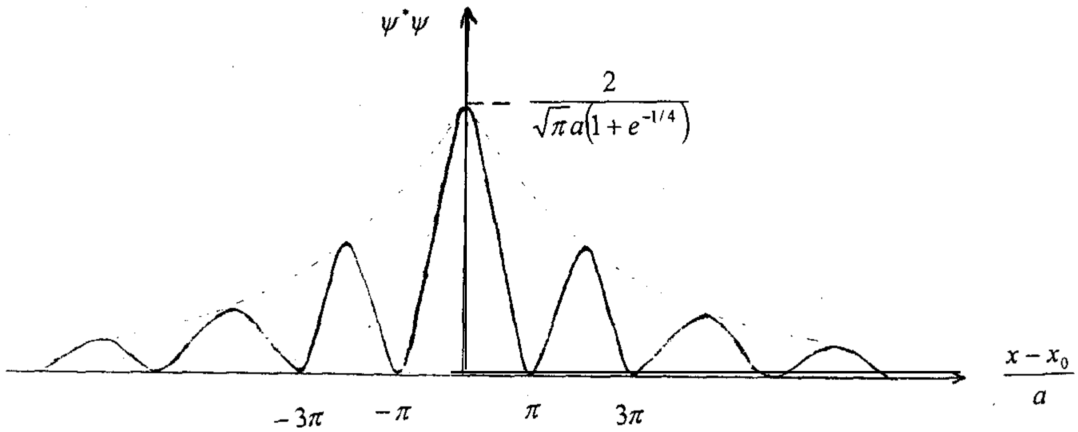
$$\psi^*\psi = A^2e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}a}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}}$$

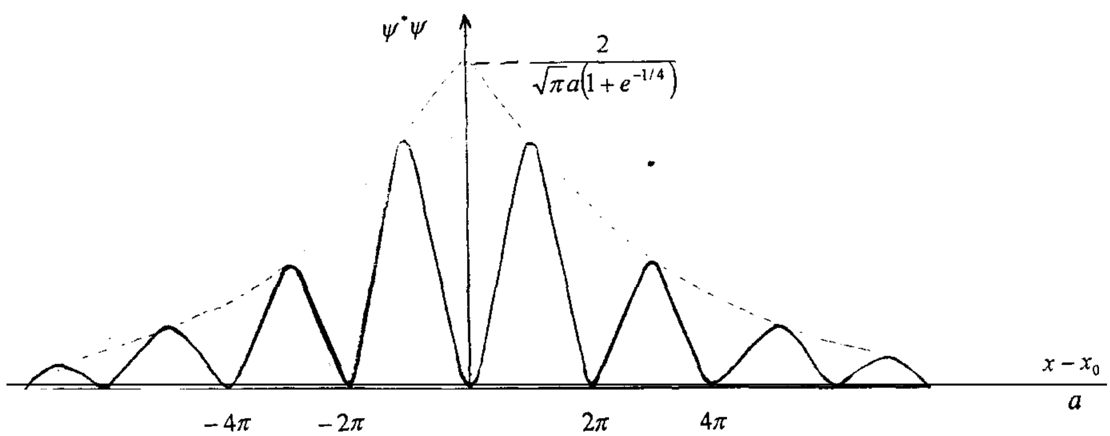


$$\psi_1^*\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}a}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}}$$
$$= \psi^*\psi$$

$$\psi_+^*\psi_+ = C_+^2(\psi_1^* + \psi^*)(\psi_1 + \psi)$$
$$= C_+^2 A^2 e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}}\left[2 + e^{i\frac{(x-x_0)}{a}} + e^{-i\frac{(x-x_0)}{a}}\right]$$
$$= C_+^2 A^2 e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}}\left(2 + 2\cos\frac{x-x_0}{a}\right)$$
$$= 2\cdot\frac{1}{2\left(1+e^{-1/4}\right)}\frac{1}{\sqrt{\pi}a}\cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}}\left(1+\cos\frac{x-x_0}{a}\right)$$
$$= \frac{1}{\left(1+e^{-1/4}\right)}\frac{1}{\sqrt{\pi}a}\cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}}\cdot 2\cos^2\frac{x-x_0}{2a}$$
$$= \frac{2e^{-(x-x_0)^2/a^2}}{\sqrt{\pi}a\left(1+e^{-1/4}\right)}\cos^2\cdot\frac{x-x_0}{2a}$$



$$
\begin{aligned}
\psi_-^*\psi_- &= C_-^2\left(\psi_1^* - \psi^*\right)\left(\psi_1 - \psi\right) \\
&= C_-^2 A^2 e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}}\left[2 - e^{i\frac{(x-x_0)}{a}} - e^{-i\frac{(x-x_0)}{a}}\right] \\
&= C_-^2 A^2 e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}}\left[2 - 2\cos\frac{x-x_0}{a}\right] \\
&= \frac{1}{2\left(1-e^{-1/4}\right)}\frac{1}{\sqrt{\pi}a}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}}\cdot 2\left(1-\cos\frac{x-x_0}{a}\right) \\
&= \frac{2e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}}}{\sqrt{\pi}a\left(1-e^{-1/4}\right)}\sin^2\frac{x-x_0}{2a}
\end{aligned}
$$



ตัวอย่างที่ 5.13 พิจารณาอนุภาคภายในกล่อง ซึ่ง $V(x)=0$ เมื่อ $-a/2<x<-a/2$ และ $V(x)=\infty$ เมื่อ x มีค่าอื่น ฟังก์ชั่นคลื่นของสภาวะพื้น คือ $\psi(x)=\sqrt{2/a}\cos(\pi x/a)$ ให้ $\delta x = x-<x>$ และ $\delta p = p-<p>$

ก) จงคำนวณค่าคาดหมายของผลคูณ $\delta x\delta p$ (ก็คือหาค่า $|<\delta x\delta p>|$ สำหรับอนุภาคที่อยู่ที่สเตท $\psi(x)$)

ข) จงหาค่าคาดหมายของผลคูณ $\delta p\delta x$ และเทียบผลลัพธ์ ที่ได้กับ ก)

วิธีทำ

ก) จากนิยาม $<\delta x\delta p>=\int\psi^*(x)(\delta x\delta p)_{op}\psi(x)dx$ สำหรับกล่องสมมาตร $<x>=<p>=0$ และ $\delta x = x$, $\delta p = p$

อาศัย $p\rightarrow -i\hbar\dfrac{d}{dx}$

จะได้
$$<xp> = \int_{-a/2}^{a/2}\frac{2}{a}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)x(-i\hbar)\frac{d}{dx}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx$$
$$= \frac{2i\hbar\pi}{a^2}\int_{-a/2}^{a/2}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)xdx$$

แต่ sin 2y = 2sin y cos y **ดังนั้น**
$$<xp> = \frac{i\hbar\pi}{a^2}\int_{-a/2}^{a/2}\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)xdx$$
$$= \frac{i\hbar\pi}{a^2}\left[\frac{\sin(2\pi x/a)}{(2\pi/a)}-x\frac{\cos(2\pi x/a)}{(2\pi/a)}\right]\Bigg|_{-a/2}^{a/2}$$
$$= \frac{i\hbar}{2}$$

ดังนั้น
$$|<\delta x\delta p>| = \frac{A}{2}$$

ข)
$$<px> = <[\hat{p},x]>+<xp>$$
$$= -i\hbar+\frac{i\hbar}{2}$$
$$= -\frac{i\hbar}{2}$$

ตัวอย่างที่ 5.14 อนุภาคอยู่ภายในกล่องความยาว L จงคำนวณ

$$< \psi_{E_n}|x|\psi_{E_n} > \quad , \quad < \psi_{E_n}|x^2|\psi_{E_n} > \quad , \quad < \psi_{E_n}|p|\psi_{E_n} > \quad , \quad < \psi_{E_n}\left|\frac{p^2}{2m}\right|\psi_{E_n} >$$

วิธีทำ

$$< \psi_{E_n}|p|\psi_{E_n} > \quad = \quad \int_0^L \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi x}{L}\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= \quad \frac{2}{L}\left(\frac{n\pi}{L}\right)\frac{\hbar}{i}\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= \quad \frac{1}{L}\left(\frac{n\pi}{L}\right)\frac{\hbar}{i}\int_0^L \sin\frac{2n\pi x}{L}dx$$

$$= \quad \frac{1}{L}\left(\frac{n\pi}{L}\right)\frac{\hbar}{i}\left(\frac{L}{2n\pi}\right)\left[\cos\frac{2n\pi x}{L}\right]_0^L$$

$$= \quad \frac{1}{L}\left(\frac{n\pi}{L}\right)\frac{\hbar}{i}\left(\frac{L}{2n\pi}\right)(1-1)$$

$$= \quad 0$$

$$< \psi_{E_n}\left|\frac{p^2}{2m}\right|\psi_{E_n} > \quad = \quad \frac{1}{2m}\int_0^L \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi x}{L}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)^2\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= \quad -\left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\frac{1}{2m}\frac{2}{L}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\int_0^L \sin^2\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= \quad \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2}{L}\right)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$= \quad \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

$$= \quad E_n$$

$$<\psi_{E_n}|x|\psi_{E_n}> = \int_0^L \left(\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi x}{L}\right)x\left(\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{2}{L}\int_0^L x\sin^2\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= \frac{2}{L}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\int_0^{n\pi} u\sin^2 u\,du$$

$$= \frac{2}{L}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\frac{1}{4}\left\{[\sin u(\sin u - 2u\cos u)]_0^{n\pi} + 2\int_0^{n\pi} u\,du - 0\right\} \text{bn n}$$

$$= \frac{1}{2L}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\left[0+(n\pi)^2\right]$$

$$= \frac{L}{2}$$

$$<\psi_{E_n}|x^2|\psi_{E_n}> = \frac{2}{L}\int_0^L x^2\sin^2\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= \frac{2}{L}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^3\int_0^{n\pi} u^2\sin^2 u\,du$$

$$= \frac{2}{L}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^3\frac{1}{4}\left\{[u\sin u(2\sin u - 2u\cos u)]_0^{n\pi} + 2\int_0^{n\pi} u^2 du - 2\int_0^{n\pi}\sin^2 u\,du\right\}$$

$$= \frac{1}{2L}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^3 2\left[\int_0^{n\pi} u^2 du - \frac{1}{2}\int_0^{n\pi}(1-\cos 2u)du\right]$$

$$= \frac{1}{L}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^3\left[\frac{(n\pi)^3}{3} - \frac{1}{2}n\pi\right]$$

$$= \frac{L^2}{3}\left(1 - \frac{3}{2n^2\pi^2}\right)$$