บทที่ 4
การเคลื่อนที่ของอนุภาคอิสระ

วัตถุประสงค์

1) ศึกษาสมการชเรอดิงเงอร์
2) ศึกษาออฟเพอเรเตอร์เฮอร์มิเทียน
3) ศึกษาหลักการสมนัย
4) ศึกษาสมาการชเรอดิงเงอร์ในปริภูมิพิกัด และปริภูมิโมเมนตัม

4.1 การเคลื่อนที่ของหมู่คลื่น : ความเร็วกลุ่ม

เราจะได้ศึกษาสเตทฟังก์ชั่นของระบบในช่วงเวลาใดเวลาหนึ่ง ต่อไปเราจะศึกษาสเตทฟังก์ชั่นเมื่อเวลาเปลี่ยนไป ในบทนี้จะศึกษาการเคลื่อนที่ของอนุภาคโดยไม่มีแรงกระทำจากภายนอก

จาก
$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) \exp\left[\frac{ipx}{\hbar} - i\omega(p)t\right] dp$$

เมื่อ เราไม่ทราบค่า $\omega(p)$

ที่ t = 0
$$\psi_0 = \psi(x,t=0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) e^{ipx/\hbar} dp$$

ปัญหาที่เราต้องศึกษาก็คือ ถ้ากำหนดหมู่คลื่นเริ่มต้น $\psi_0(x)$ จะหา $\psi(x,t)$ ได้อย่างไร

เพื่อให้ง่าย เราเริ่มต้นศึกษาปรากฏการณ์ที่มีไม่มีการกระจาย (dispersionless propagation) เช่น การกระจายของแสงในปริภูมิอิสระ (free space) ซึ่ง ω เป็นสัดส่วนกับ $p/\hbar$ หรือถ้า c เป็นค่าคงที่ของอัตราส่วน จะได้

$$\omega = cp/A = 2\pi\hbar/\lambda$$

ดังนั้น

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) e^{ip(x-ct)/\hbar} dp$$

จะเห็นได้ว่า สมการจะเหมือนกับกรณี ψ_0 เพียงแต่ว่า เปลี่ยนจากฟังก์ชั่น x เป็นฟังก์ชั่น x-ct หรือ

$$\psi(x,t) = \psi_0(x-ct)$$

ซึ่งหมายความว่า หมู่คลื่นเคลื่อนที่ไปทางขวาด้วยความเร็ว c โดยไม่เปลี่ยนแปลงรูปร่าง

สมมุติว่า $\phi(p)$ เป็นหมู่คลื่นเรียบในปริภูมิโมเมนตัม โดยมีจุดศูนย์กลางที่ p_0 และความกว้าง Δp

$$\phi(p) = g(p-p_0)$$

เมื่อ g เป็นฟังก์ชั่นเรียบ ซึ่งมีค่าเข้าใกล้ศูนย์เมื่ออยู่นอกช่วง Δp ซึ่งหมายความว่า ค่าอินทิเกรตได้มาจากบริเวณที่มีความกว้าง Δp เป็นส่วนใหญ่

ต่อไปเราสมมุติว่า $\omega(p)$ เป็นฟังก์ชั่นเรียบของ p เราจึงสามารถแตก ω โดยใช้อนุกรมเทเลอร์

$$\begin{aligned}\omega(p) &= \omega(p_0) + (p-p_0)\frac{d\omega(p_0)}{dp_0} + \frac{1}{2}(p-p_0)^2\frac{d^2\omega}{dp_0^2} + \dots\dots\dots, \\ &= \omega_0 + (p-p_0)\frac{v_g}{\hbar} + (p-p_0)^2\alpha + \dots\dots\dots\end{aligned}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \omega(p_0) \\ v_g &= \hbar\frac{d\omega}{dp_0} \\ \alpha &= \frac{1}{2}\frac{d^2\omega}{dp_0^2}\end{aligned}$$

กำหนดให้ $$s = p - p_0$$

จะได้ $$\psi(x,t) = f(x,t)\exp\left[\frac{ip_0 x}{\hbar} - i\omega_0 t\right]$$

เมื่อ $f(x,t)$ ซึ่งแทนเส้นภายนอกของหมู่คลื่น มีค่าดังนี้

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dsg(s)\exp\left[\frac{is}{\hbar}(x - v_0 t) - i\alpha s^2 t + \ldots\ldots\right]$$

ทำให้ได้

$$\psi_0(x) = f_0(x)e^{ip_0x/\hbar}$$

เมื่อ

$$f_0(x) = f(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dsg\ (s)e^{isx/\hbar}$$

จะเห็นได้ว่า ค่าจากการอินทีเกรตส่วนใหญ่ได้มาจากเมื่อ s น้อยกว่า Δp ดังนั้น ถ้า t มีค่าน้อยพอจนทำให้

$$\alpha(\Delta p)^2 t \ll 1$$

ทำให้เทอมหลัง ๆ ในอนุกรมมีค่าน้อย จนตัดทิ้งได้

$$f(x,t) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dsg\ (s)e^{is(x - v_g t)/\hbar}$$

จะเห็นได้ว่า เช่นเดียวกับสเตทฟังก์ชั่น

$$f(x,t) = f_0(x - v_0 t)$$

เราได้แสดงให้เห็นแล้วว่า สำหรับ $t \ll t_0$ เมื่อ

$$t_0 = \frac{1}{\alpha(\Delta p)^2} = \frac{2}{(\Delta p)^2\, d^2\omega/dp_0^2}$$

หมู่คลื่น จะที่ด้วยความเร็ว v_g โดยไม่เปลี่ยนรูปร่าง โดยที่

$$v_g = \hbar d\omega/dp_0$$

ปริมาณ v_g เรียกว่า ความเร็วกลุ่มของคลื่น เพราะว่าเป็นความเร็วของหมู่คลื่น และแตกต่างจากความเร็วเฟส ซึ่งเป็นความเร็วของคลื่นฮาร์มอนิก

$$v_p = \frac{\hbar \omega}{p_0}$$

โดยทั่วไป ความเร็วกลุ่มและความเร็วเฟสจะมีค่าต่างกัน ยกเว้นการเคลื่อนที่เป็นชนิดไม่มีการกระจาย เมื่อ ω เป็นสัดส่วน p ความเร็วทั้งสองจะเท่ากัน

เมื่อเริ่มต้น หมู่คลื่นจะเคลื่อนที่โดยไม่มีการเปลี่ยนแปลงของรูปร่าง แต่สุดท้ายหมู่คลื่นจะแตกกระจายออกภายในปริภูมิ

4.2 การเคลื่อนที่ของหมู่คลื่นในปริภูมิพิกัด

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) \left[\frac{ipx}{\hbar} - \frac{ip^2 t}{2m\hbar} \right] dp \qquad (4.1)$$

แทนสเตทฟังก์ชั่นของอนุภาค โดยขึ้นกับเวลา

ถ้า $\quad \psi_0(x) = \psi(x,0)$

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x) e^{ipx/\hbar} dx$$

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \int_{-\infty}^{\infty} dp\, d x' \psi_0(x') \exp\left[\frac{ip(x-x')}{\hbar} - \frac{ip^2 t}{2m\hbar} \right]$$

หรือ $\quad \psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x',0) K(x', x : t) dx'$

เมื่อ $\quad K(x', x : t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp \exp\left[\frac{ip(x-x')}{\hbar} - \frac{ip^2 t}{2m\hbar} \right]$

ทำการอินทีเกรตจะได้

$$K(x', x : t) = \sqrt{m/(2\pi i\hbar t)} \exp\left[i(x-x')^2 m/2\hbar t \right]$$

มีชื่อเรียกว่า **ตัวแผ่ (propagator)** ในที่นี้คือตัวแผ่อนุภาคอิสระ

4.3 การเคลื่อนที่ของหมู่คลื่นในปริภูมิโมเมนตัม

$$\phi(p,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,t) e^{-ipx/\hbar} dx$$

จะได้

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,t) e^{-ipx/\hbar} dp$$

ใช้วิธีการเดียวที่ใช้ในปริภูมิพิกัด

$$\phi(p,t) = \phi(p) e^{-ip^2t/2m\hbar} = \phi(p,t=o) e^{-ip^2t/2mt}$$

เมื่อ

$$\rho(p,t) = |\phi(p,t)|^2 = |\phi(p)|^2 = \rho(p,t=0)$$

เฟสของหมู่คลื่นในปริภูมิโมเมนตัม จะเปลี่ยนแปลงตามเวลา ความหนาแน่นความน่าจะเป็นจะไม่ขึ้นกับเวลา ดังนั้น ค่าคาดหมายของฟังก์ชั่นของโมเมนตัมจะไม่ขึ้นกับเวลาด้วย

พิจารณา เฉพาะพลังงานจลน์

$$< E >= \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(p,t) \frac{p^2}{2m} \phi(p,t) dp$$

และ

$$\frac{p^2}{2m} \phi(p,t) = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \phi(p,t)}{\partial t}$$

ดังนั้น

$$< E >= \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(p,t) \left[-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \phi(p,t)}{\partial t} \right] dp$$

สำหรับฟังก์ชั่นใด ๆ

$$< f(E) >= \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(p,t) f(-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}) \phi(p,t) dp$$

$$E = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}$$

ซึ่งจะมีค่าเช่นเดียวกัน ในปริภูมิพิกัด

4.4 การเปลี่ยนแปลงของหมู่คลื่นตามเวลา

พิจารณาหมู่คลื่นซึ่งเมื่อเริ่มต้นอยู่ในรูปเกาส์เซียน

$$\psi(x,0) = \psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{L\sqrt{\pi}\hbar}}\exp\left[\frac{ip_0 x}{\hbar} - \frac{x^2}{2L^2}\right]$$

ซึ่งใช้อธิบายอนุภาค ภายในช่วง L ของจุดกำเนิดและมีค่าโมเมนตัมเฉลี่ย p_0

เราสามารถหา $\psi(x,t)$ ได้

$$\psi(x,t) = \left[\sqrt{\pi}\left(L + \frac{i\hbar t}{mL}\right)\right]^{-1/2}\exp\left[\frac{L(-x^2/2L^2 + ip_0 x/\hbar - ip_0^2 t\ /2m\hbar)}{L + i\hbar t/mL}\right]$$

และความหนาแน่นของความน่าจะเป็นคือ

$$\rho(x,t) = |\psi|^2 = \left[\pi\left(L^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2 L^2}\right)\right]^{-1/2}\exp\left[-\frac{(x - p_0 t/m)^2}{L^2 + \hbar^2 t^2/m^2 L^2}\right]$$

$$\rho(x,t=0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}L}e^{-x^2/L^2}$$

จะเห็นได้ว่า $\rho(x,t)$ เปลี่ยนแปลงตามเวลา t โดยที่ จุดกึ่งกลางของหมู่คลื่นเคลื่อนที่ด้วยความเร็วกลุ่ม p_0/m และความกว้างของหมู่คลื่นเพิ่มขึ้นตามเวลาที่เพิ่มขึ้น

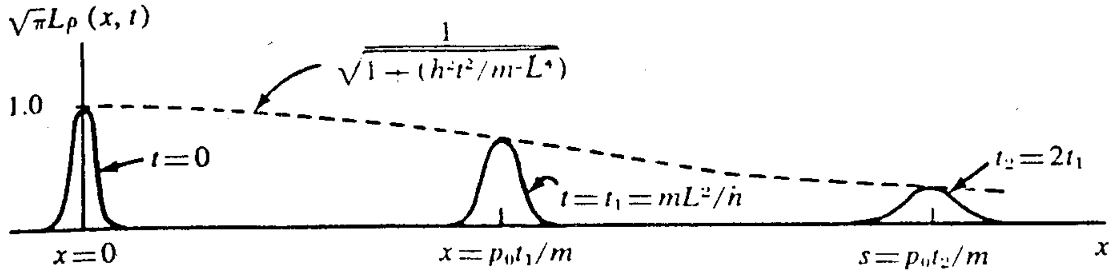
$$L(t) = \sqrt{L^2 + \hbar^2 t^2/m^2 L^2}$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า ตอนแรกหมู่คลื่นจะไม่เปลี่ยนแปลงรูปร่างจนกระทั่งเมื่อเวลาผ่านไปถ้า $\hbar^2 t^2/m^2 L^2 \cong 1$ หมู่คลื่นจะเริ่มเปลี่ยนแปลงรูปร่าง

เมื่อ t มีค่ามาก ความกว้างของหมู่คลื่นจะเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา

$$\frac{\hbar}{mL} = \frac{\Delta p}{m}$$

การเปลี่ยนแปลงของหมู่คลื่นชนิดเกาส์เซียน แสดงในรูปที่ 4.1 พื้นที่ใต้กราฟมีค่าคงที่ตลอดเวลา



รูปที่ 4.1 การกระจายของหมู่คลื่นรูปเกาส์เซียน

ตัวอย่างที่แสดงนี้เป็นตัวอย่างที่ดีในการแสดงถึงขอบเขตของกลศาสตร์ดั้งเดิม ผลลัพธ์จากควอนตัมจะไม่ปรากฏเมื่อ $\hbar \to 0$ ในกรณีนี้ จะได้

$$\rho(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}L}\exp\left[-(x-p_0t/m)^2/L^2\right]$$

ซึ่งสมการของการเคลื่อนที่ของอนุภาคอิสระตามกลศาสตร์ดั้งเดิม โมเมนตัมเริ่มต้นมีค่าเท่ากับ ρ_0 แต่ตำแหน่งเริ่มต้นจะกระจายรอบจุดกำเนิด โดยกระจายเป็นรูปกราฟชนิดเกาส์เซียนที่มีความกว้าง L จากกลศาสตร์ดั้งเดิม ตำแหน่งเริ่มต้นและโมเมนตัมเริ่มต้นจะต้องมีค่าแน่นอน ซึ่งจะทำได้โดยให้ $L \to 0$ ทำให้ได้

$$\rho(x,t) = \delta(x-p_0t/m)$$

ซึ่งก็คือค่าความหนาแน่นของความน่าจะเป็น สมการข้างบนนี้หมายความว่า โอกาสที่จะพบอนุภาคที่ตำแหน่งอื่น ๆ ที่ไม่ใช่ตำแหน่งที่ได้จากกลศาสตร์ดั้งเดิมจะมีค่าเป็นศูนย์

4.5 สมการชเรอดิงเงอร์ของอนุภาคอิสระ

ดิฟเฟอเรนชิเอทสมการ (4.1) จะได้

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi\ (p)\frac{p^2}{2m}\exp\left[\frac{ipx}{\hbar}-\frac{ip^2t}{2m\hbar}\right]dp$$

และจะได้ผลลัพธ์เช่นเดียวกัน โดยการดิฟเฟอเรนชิเอท $-(\hbar^2/2m)\partial^2\psi/\partial x^2$ ภายใต้เครื่องหมายอินทีเกรต เราจึงสรุปได้ว่า ฟังก์ชั่นใด ๆ $\psi(x,t)$ ที่เป็นไปตามสมการ (4.1) หรือสเตทฟังก์ชั่นของอนุภาคอิสระใด ๆ จะเป็นไปตามสมการดิฟเฟอเรนเชียล

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{4.2}$$

สมการ (4.1) เป็นการเขียนคำตอบทั่วไปของสมการ (4.2) ซึ่งก็คือสมการชเรอดิงเงอร์ในระบบพิกัดของอนุภาคอิสระใน 1 มิติ

การแปลความหมายของสมการนี้กระทำได้ง่าย เริ่มจากออฟเพอเรเตอร์โมเมนตัมในระบบพิกัด

$$p=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$$

และออฟเพอเรเตอร์ พลังงาน $\mathrm{E}=-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}$

ดังนั้น สมการชเรอดิงเงอร์ ก็คือ **สมการออฟเพอเรเตอร์**

$$\frac{p^2}{2m}\psi(x,t)=\mathrm{E}\psi(x,t) \tag{4.3}$$

จากกลศาสตร์ดั้งเดิมสำหรับอนุภาคอิสระ

$$\mathrm{E}=p^2/2m$$

จะเห็นได้ว่า ถ้าออฟเพอเรทสเตทฟังก์ชั่นของอนุภาคอิสระด้วยออฟเพอเรเตอร์ พลังงานรวม E จะได้ผลลัพธ์เท่ากับออฟเพอเรทด้วยออฟเพอเรเตอร์ $p^2/2m$ จากภาวะนี้ จะได้ว่า ค่าคาดหมายของฟังก์ชั่นใด ๆ ที่เป็นฟังก์ชั่นของพลังงานรวมจะมีค่าเท่ากับ ค่าคาดหมายของฟังก์ชั่นเดียวกันที่เป็นฟังก์ชั่นของพลังงานจลน์

$$< f(\mathrm{E}) >=< f(p^2/2m) >$$

นอกจากนี้ สมการชเรอดิงเงอร์ยังสามารถเขียนในระบบโมเมนตัมได้ดังนี้

$$\frac{p^2}{2m}\phi(p,t) = \mathrm{E}\,\phi(p,t) = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\phi}{\partial t} \qquad (4.4)$$

ซึ่งอยู่ในรูปแบบที่ง่ายกว่าสมการ (4.3) เพราะว่าในสมการ (4.4) p เป็นออฟเพอเรเตอร์เชิงตัวเลข เนื่องจากสมการ (4.3) และสมการ (4.4) มีรูปแบบเดียวกัน จึงไม่จำเป็นที่จะต้องแสดงถึงระบบว่าเป็นระบบพิกัดหรือระบบโมเมนตัม โดยการเขียน

$$\frac{p^2}{2m}\psi = \mathrm{E}\,\psi$$

โดยทิ้งไว้ให้นักศึกษาเข้าใจว่า ถ้าเป็นระบบพิกัด $\psi=\psi(x,t)$ และถ้าเป็นระบบโมเมนตัม $\psi=\phi(p,t)$

เนื่องจากสมการ (4.4) อยู่ในรูปที่ง่าย ทำให้สามารถหาคำตอบได้ทันที โดยการเขียนสมการ (4.4) ให้อยู่ในรูป

$$\frac{1}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{ip^2}{2m\hbar}$$

จะได้สมการคำตอบคือ

$$\phi(p,t) = \phi(p,t_0)\exp\left[-ip^2(t-t_0)/2m\hbar\right]$$

เมื่อ $\phi(p,t_0)$ เป็นค่าใด ๆ

สมการคำตอบของสมการชเรอดิงเงอร์ในระบบพิกัดซึ่งเป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียลชนิดพาร์เชียล แต่ไม่ใช่ชนิดออร์ดินารี จะหาได้ยากกว่า

4.6 การอนุรักษ์ของความน่าจะเป็น

จากทฤษฎีควอนตัม เราให้ $\psi^*\psi$ เป็นความหนาแน่นของความน่าจะเป็น และเราสมมุติว่า ψ ถูกนอร์มอลไลซ์ โดยทั่วไปเราเลือก ψ ซึ่งทำให้

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x,t)\psi(x,t)dx = 1$$

และ

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi^*(p,t)\phi(p,t)dp = 1$$

เราต้องพิสูจน์ว่า ไม่ว่าจะเป็นเวลาใดสมการทั้งสองนี้เป็นจริงเสมอ ก็คือ มีค่าเท่ากับหนึ่ง นั่นคือ จะต้องมีการอนุรักษ์ของความน่าจะเป็น

จาก

$$p(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x,t)\psi(x,t)dx$$

เราจะต้องแสดงว่า dp/dt มีค่าเท่ากับศูนย์

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}\left[\psi^*(x,t)\psi(x,t)\right]dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi + \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]dx\end{aligned}$$

จากสมการ (4.2)

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

จะได้

$$\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = \frac{-i\hbar}{2m}\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= \frac{i\hbar}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}\right]dx \\ &= \frac{i\hbar}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left[\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right]dx \\ &= \frac{i\hbar}{2m}\left[\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right]\Bigg|_{-\infty}^{\infty}\end{aligned}$$

เนื่อง จาก ψ มีค่าเท่ากับศูนย์เมื่อ $x = \pm\infty$

ดังนั้น $$\frac{dp}{dt} = 0$$

ซึ่งก็คือ มีการอนุรักษ์ของความน่าจะเป็น

ในระบบโมเมนตัม จะพิสูจน์ได้เช่นเดียวกัน

$$p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(p,t)\phi(p,t)\,dp$$

$$\frac{dp}{dt} = \int \left[\frac{\partial \phi^*}{\partial t}\phi + \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t}\right] dp$$

$$= \int \left[\frac{i\hbar}{2m} p^2 \phi^* \phi - \frac{i\hbar}{2m} p^2 \phi^* \phi\right] dp$$

$$= 0$$

4.7 เครื่องหมายวงเล็บของดิแรก

ดิแรก คิดค้นสัญลักษณ์ซึ่งไม่ขึ้นกับระบบไม่ว่าจะเป็นระบบพิกัด หรือระบบโมเมนตัม จะใช้เครื่องหมายเช่นเดียวกัน กำหนดให้ ψ เป็นสเตทฟังก์ชั่นใด ๆ จะเขียนค่าคาดหมายตามสัญลักษณ์ของดิแรกได้ดังนี้

$$\langle A \rangle \equiv \langle \psi | A | \psi \rangle$$

ในระบบพิกัด $$\langle \psi | A | \psi \rangle = \int \psi^*(x,t) A \psi(x,t)\,dx$$

ส่วนในระบบโมเมนตัม $$\langle \psi | A | \psi \rangle = \int \phi^*(p,t) A \phi(p,t)\,dp$$

สมมุติ A เป็นออฟเพอเรเตอร์เชิงตัวเลข 1 จะได้ว่า

ในระบบพิกัด $$\langle \psi | \psi \rangle = \int \psi^*(x,t)\psi(x,t)\,dx$$

และในระบบโมเมนตัม $$\langle \psi | \psi \rangle = \int \phi^*(p,t)\phi(p,t)\,dp$$

ภายใต้สัญลักษณ์นี้ ภาวะการนอร์มอลไลซ์จะเขียนได้สั้นๆ

$$< \psi | \psi > \quad = \quad 1$$

ถ้าจำเป็นจริง ๆ ที่จะเน้นถึงระบบ จะสามารถเขียนได้โดยเขียนเป็นสเตทฟังก์ชั่น เช่น

$$< A > \quad = \quad < \psi (x,t) | A | \psi (x,t) >$$

ในเครื่องหมายดิแรก ψ ตัวซ้ายจะไม่เขียนเป็น ψ^* แตกต่างจากในรูปของอินทีเกรต ซึ่ง ψ ด้านซ้ายเขียน เป็น ψ^*

4.8 สเตทคงที่

การแก้สมการชเรอดิงเงอร์ (สมการ 4.2) ในระบบพิกัดจะใช้วิธีการแยกตัวแปร โดยการสมมุติให้

$$\psi(x,t) \quad = \quad \psi(x)T(t) \tag{4.5}$$

แทนลงในสมการ (4.2) จะได้

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}T \quad = \quad -\frac{\hbar}{i}\psi\frac{dT}{dt}$$

จัดเทอมใหม่

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi}\frac{d^2\psi}{dx^2} \quad = \quad -\frac{\hbar}{i}\frac{1}{T}\frac{dT}{dt}$$

สมการทางด้านซ้ายขึ้นกับ x ส่วนสมการทางด้านขวาขึ้นกับ t แต่สมการทั้งสองข้างจะต้องเท่ากันทุกๆ ค่า x และ t ดังนั้นแต่ละข้างของสมการจะต้องมีค่าเท่ากับค่าคงที่ค่าหนึ่ง ให้ค่าคงที่นั้นเท่ากับ α ซึ่งมีชื่อเรียกว่า **ค่าคงที่ของการแยก**

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} \quad = \quad \alpha \tag{4.6}$$

และ

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi}\frac{d^2\psi}{dx^2} \quad = \quad \alpha \tag{4.7}$$

คำตอบของสมการ (4.6) คือ

$$T(t) = e^{-i\alpha t/\hbar}$$

จากสมการ (4.5)

$$\psi_{\alpha}(x,t) = \psi_{\alpha}(x)e^{-i\alpha t/\hbar} \qquad (4.8)$$

เมื่อ $\psi_{\alpha}(x)$ จะต้องเป็นไปตามสมการ (4.7)

สมมุติว่าสเตทฟังก์ชั่นในสมการ (4.8) ถูกนอร์มอลไลซ์

$$<E> = <\psi_{\alpha}(x,t)|E|\psi_{\alpha}(x,t)>$$

$$= \int \psi_{\alpha}^{*}\left[-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial \psi_{\alpha}}{\partial t}\right]dx = \alpha$$

เราสามารถใช้ E แทน α ได้

$$\psi_{E}(x,t) = \psi_{E}(x)e^{-iEt/\hbar}$$

สมการ (4.7) จะเขียนได้เป็น

$$-\frac{\hbar^{2}}{2m}\frac{d^{2}\psi_{E}}{dx^{2}} = E\psi_{E}(x) \qquad (4.9)$$

สมการ (4.9) ไม่ขึ้นกับเวลา จึงเป็นสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา

คำตอบของสมการ (4.9) คือ

$$\psi_{E}(x) = e^{\pm i\sqrt{2mE}x/\hbar}$$

ดังนั้น

$$\psi_{E}(x,t) = \exp\left[\pm\frac{i\sqrt{2mE}x}{\hbar} - \frac{iEt}{\hbar}\right]$$

E จะต้องเป็นบวกเสมอ ถ้า ψ_{E} ไม่เพิ่มขึ้นอย่างเอ็กโพเนนเชียลในทิศทางใดทิศทางหนึ่ง ดังนั้น

$$p = \sqrt{2mE}$$

เมื่อ p เป็นค่าโมเมนตัมที่สัมพันธ์กับพลังงาน E

$$\psi_{E}(x,t) = \exp\left[\pm\frac{ipx}{\hbar} - \frac{ip^{2}t}{2m\hbar}\right]$$

$$E = p^{2}/2m$$

4.8 อนุภาคในกล่อง

จากสมการชเรอดิงเงอร์

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$$

มีภาวะขอบเขต $\psi_E(x=0) = \psi_E(x=L) = 0$

สำหรับอนุภาคพลังงาน E

$$\psi_E = e^{\pm i\sqrt{2mE}x/\hbar}$$

คำตอบทั่วไปจะอยู่ในรูปของการรวมกัน

$$\psi_E = Ae^{i\sqrt{2mE}x/\hbar} + Be^{-\sqrt{2mE}x/\hbar}$$

จากภาวะขอบเขต

$$A+B = 0$$

$$Ae^{i\sqrt{2mE}L/\hbar} + Be^{-i\sqrt{2mE}L/\hbar} = 0$$

ดังนั้น

$$B = -A$$

และ $\sin\sqrt{2mE}\,L/\hbar = 0$

สมการนี้จะใช้ไม่ได้กับทุก ๆ ค่า E แต่จะใช้ได้บางค่าเท่านั้น ซึ่งค่า E ที่ใช้ได้จะต้องเป็นไปตามสมการ

$$\sqrt{2mE_n}\,\frac{L}{\hbar} = n\pi \qquad , n = 0, 1, 2, \ldots$$

หรือ

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \tag{4.10}$$

สเตทฟังก์ชั่นหลังจากนอร์มอลไลซ์แล้ว คือ

$$\psi_{E_n} = \sqrt{2/L}\,\sin(\frac{n\pi x}{L}) \tag{4.11}$$

สเตทต่ำสุด คือสเตทที่ n = 1 เพราะว่า เมื่อ n = 0 สเตทฟังก์ชั่นจะเป็นศูนย์ด้วย

$$\psi_{E_1} = \sqrt{2/L}\,\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

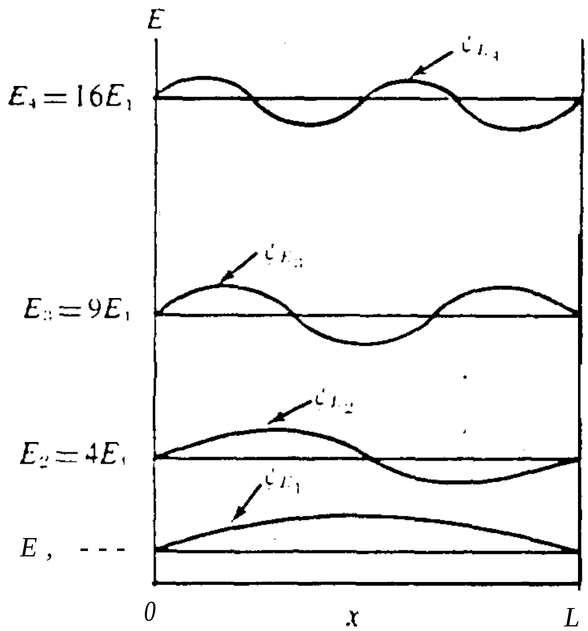
$$E_1 \qquad \frac{}{2mL^2} = \frac{\pi^2 \hbar 10^{-53}}{2mL^2} = \qquad \text{เอิร์ก}$$

เราสามารถเขียนพลังงานระดับต่าง ๆ ในเทอมของ E_1 ได้ดังนี้

$$E_n = n^2 E_1$$

จะเห็นได้ว่า อนุภาคภายในกล่องจะมีพลังงานได้บางค่าเท่านั้น ไม่ได้มีทุกค่าตามทฤษฎีฟิสิกส์ดั้งเดิม และพลังงานของอนุภาคจะไม่สามารถเป็นศูนย์ได้ จะต้องมีการเคลื่อนที่อยู่ตลอดเวลา

สเตทฟังก์ชั่นและพลังงานที่เป็นไปได้ของอนุภาคแสดงใน รูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2 สเปคตัมของพลังงานและสเตทฟังก์ชั่นของอนุภาคภายในบ่อรูปสี่เหลี่ยม

สเตทฟังก์ชั่นของอนุภาคภายในกล่องซึ่งเป็นฟังก์ชั่นของ x และ t คือ

$$\psi_{E_n}(x,t) = \psi_{E_n}(x)e^{-iE_nt/\hbar}$$

เมื่อ E_n และ ψ_{E_n} เป็นไปตามสมการ **(4.10)** และ **(4.11)** เราสามารถเขียนได้เป็น

$$\psi(x,t) = \sum_n A_n \psi_{E_n}(x)e^{-iE_nt/\hbar} \qquad (4.12)$$

จากสมการที่ (4.11) สเตทฟังก์ชั่นเป็นคลื่นรูปซายทำให้ได้

$$\int_0^L \psi^*_{E_m}(x)\psi_{E_n}(x)dx = \begin{cases} 1, m = n \\ 0, m \neq n \end{cases} = \delta_{mn} \qquad (4.13)$$

สัญลักษณ์ δ_{mn} มีชื่อเรียกว่า **โครเนกเกอร์เดลต้า** ซึ่งจะมีค่าเท่ากับ 1 เมื่อ m = n และมีค่าเท่ากับ 0 เมื่อ m ≠ n เซทของฟังก์ชั่นที่เป็นไปตามสมการ (4.13) เรียกว่า **ออร์โทนอร์มอลเซท**

สมมุติว่า $\psi(x,t)$ ถูกนอร์มอลไลซ์

$$\int_0^L \psi^*(x,t)\psi(x,t)dx = 1$$

จากสมการ **(4.12)**

$$\int_0^L \left(\sum_n A_n^*\psi^*_{E_n}(x)e^{iE_nt/\hbar}\right)\left(\sum_m A_m\psi_{E_m}(x)e^{iE_mt/\hbar}\right)dx = 1$$

ในที่นี้เราให้ n เป็นดัชนีของผลบวกของ $\psi^*(x,t)$ และ m เป็นดัชนีของผลบวกของ $\psi(x,t)$ สลับการเรียงตัวของการบวกและการอินทีเกรต จะได้

$$\sum_{m,n} A_n^* A_m e^{i(E_n-E_m)t/\hbar}\int_0^L \psi^*_{E_n}(x)\psi_{E_m}(x)dx = 1$$

และจากการนอร์มอลไลซ์

$$\sum_m |A_m|^2 = 1$$

คำนวณค่าคาดหมายของพลังงาน

$$\langle\psi|E|\psi\rangle = \int_0^L \psi^*(x,t)\left[-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right]dx$$

จากสมการ(4.12)

$$<\psi|E|\psi> \;=\; \int_0^L (\sum_n A_n^* \psi_{E_n}^*(x) e^{iE_n t/\hbar})(\sum_m A_m E_m \psi_{E_m}(x) e^{-iE_m t/\hbar}) dx$$

อาศัยการออร์ทอโกนอลของ ψ_m จะได้

$$<\psi|E|\psi> \;=\; \sum E_m |A_m|^2$$

ใช้วิธีการเดียวกัน สำหรับทุก ๆ ค่า s

$$<\psi|E^s|\psi> \;=\; \sum_m E_m^2 \; |A_m|^2$$

และสำหรับฟังก์ชั่น f(E) ใด ๆ

$$<\psi|f(E)|\psi> \;=\; \sum f(E_m) \; |A_m|^2$$

เนื่องจาก f(E) เป็นฟังก์ชั่นใด ๆ ψ เป็นสเตทซึ่งโอกาสการวัดพลังงาน E_m มีค่าเท่ากับ $|A_m|^2$ A_m เป็นขนาดของโอกาส และ $|A_m|^2$ เป็นโอกาสที่ระบบจะอยู่ในสเตทที่ m โดยมีพลังงาน E_m

สมมุติว่าสเตทเริ่มต้นของอนุภาคภายในกล่องเริ่มต้นที่ t = 0

$$\psi(x,t=0) \;=\; \psi_0(x)$$

จากสมการ(4.12)

$$\psi_0(x) \;=\; \sum_n A_n \psi_{E_n}(x)$$

คูณด้วย $\psi_{E_n}(x)$ และอินทีเกรตจาก 0 ถึง L

$$\int_0^L \psi_{E_m}^*(x)\psi_0(x)dx \;=\; \sum_n A_n \iint \psi_{E_n}^*(x)dx$$

จากการออร์โทโกนอล ด้านซ้ายของสมการจะเหลือเพียง A_m

$$A_m \;=\; \int_0^L \psi_{E_m}^*(x)\psi_0(x)dx \;=\; <\psi_{E_m}|\,\psi_0> \qquad (4.14)$$

ดังนั้น สมการ (4.14) จึงให้ค่าขนาดของโอกาสซึ่งระบบอยู่ในสเตทที่ m

แทนสมการ (4.14) กลับเข้าไปในสมการ (4.12) จะได้

$$\psi(x,t) = \sum_{n} \left(\int_{0}^{L} \psi^{*}_{E_n}(x')\psi_{n}(x')dx'\,\psi_{E_n}(x)e^{-iE_n t/\hbar}\right.$$

จัดเทอมผลลัพธ์ที่ได้

$$\psi(x,t) = \int_{0}^{L} \psi_{0}(x')K(x',x\ :\ t)dx'$$

เมื่อ

$$K(x',x:t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi^{*}_{E_n}(x')\psi_{E_n}(x)e^{-iE_n t/\hbar}$$

จากสมการ (4.10) และสมการ (4.11) จะได้

$$K(x',x:t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x'}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\exp\left[-in^2\pi^2\hbar t/2mL^2\right]$$

เมื่อ $L \to \infty$ ให้แทนการบวกด้วยการอินทีเกรต

ตัวอย่างที่ 4.1 อนุภาคมวล m มี ฟังก์ชั่นคลื่น ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= c\left(1-\frac{x}{a}\right) 0 < x < a \\
&= c\left(1-\frac{x}{a}\right) -a < x < 0 \\
&= 0\ ,\ |x| > a
\end{aligned}$$

ก) จงนอร์มอลไลซ์ $\psi(x)$

ข) จงหาโมเมนตัมในปริภูมิของโมเมนตัม

$$\phi(k_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)e^{-ik}dx$$

ค) จงพิสูจน์ หลักความไม่แน่นอน

วิธีทำ

ก) $$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi dx = 2\int_0^a \psi^* \psi dx = 2c^2 \int_0^a \left(1-\frac{x}{2}\right)^2 dx$$

$$= 2c^2 \int_0^a \left(1-\frac{2x}{a}+\frac{x^2}{a^2}\right)dx$$

$$= 2c^2\left[x-\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{3a^2}\right] \Big|_0^a$$

$$= 2c^2\left[a-a+\frac{a}{3}\right] = 1$$

$$\therefore c = \sqrt{\frac{3}{2a}}$$

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{3}{2a}}\left(1-\frac{x}{a}\right), 0<x<a$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2a}}\left(1+\frac{x}{a}\right), -a<x<0$$

$$= 0 \quad , \quad |x|>a$$

ข) $$\varnothing(k_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-ikx} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)(\cos kx - \sin kx)dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2a}} . 2\int_0^a \left(1-\frac{x}{a}\right)\cos kx dx$$

$$= \sqrt{\frac{3}{a\pi}}\left[\int_0^a \cos kx dx - \int_0^a \frac{x}{a}\cos kx dx\right]$$

แต่ $$\int x\cos ax dx = \frac{\cos ax}{a^2}+\frac{x\sin ax}{a}$$

$$\therefore \varnothing(k_x) = \sqrt{\frac{3}{a\pi}}\left[\frac{\sin kx}{k}\Big|_o^a - \frac{1}{a}\left(\frac{\cos kx}{k^2}+\frac{x\sin kx}{k}\right)\Big|_0^a\right]$$

$$= \sqrt{\frac{3}{a\pi}}\left[\frac{1-\cos ka}{ak^2}\right]$$

$$= 2\sqrt{\frac{3}{a\pi}}\,\frac{\sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)}{k^2 a}$$

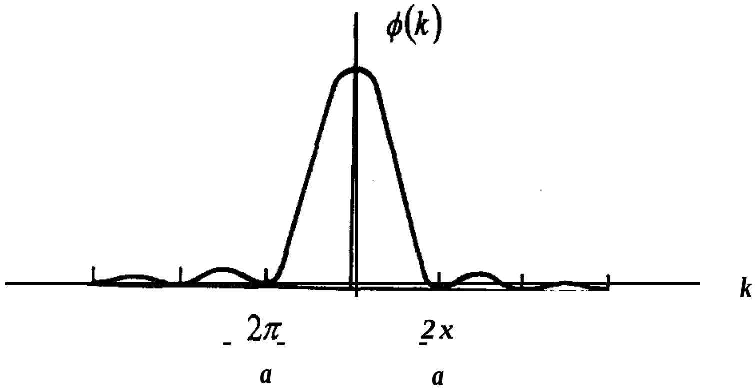
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3a}{\pi}}\,\frac{\sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)}{\left(\frac{ka}{2}\right)^2}$$

ค) Ak $= 4\pi / a$

$\Delta x = 2a$

$\Delta x . \Delta k = 8\pi$, $\Delta k = \frac{\Delta P}{\hbar}$

$\Delta x . \Delta P_x = 8\pi\hbar \geq \hbar$



ตัวอย่างที่ 4.2

ก) จงคำนวณค่า $<x>$ และ $<x^2>$ สำหรับค่าของ ฟังก์ชั่นคลื่น ในตัวอย่างที่ผ่านมา

ข) จงคำนวณ $<p_x>$ โดยใช้ $\psi(x)$ และ $\varnothing(k_x)$

ค) จงคำนวณ $<p^2{}_x>$ โดยต้องคำนึงถึง $\dfrac{d\psi(x)}{dx}$ ไม่ต่อเนื่องที่ x=0

วิธีทำ

ก)

$$<x> = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* x\ \psi dx$$

$$= \frac{3}{2a}\left[\int_{-a}^{0} x\left(1+\frac{x}{a}\right)^2 dx + \int_{0}^{a} x\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 dx\right]$$

$$= \frac{3}{2a}\left[\int_{a}^{0}\left(1-\frac{x}{a}\right)^2(-x)d(-x) + \int_{0}^{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 xdx\right]$$

$$= -\frac{3}{2a}\int_{0}^{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 xdx + \frac{3}{2a}\int_{0}^{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 xdx$$

$$= 0$$

$$<x^2> = \int_{-\infty}^{\infty}\psi^* x^2\psi dx$$

$$= \frac{3}{2a}\left[\int_{-a}^{0}x^2\left(1+\frac{x}{a}\right)^2 dx + \int_{0}^{a}x^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 dx\right]$$

$$= \frac{3}{2a}\cdot 2\int_{0}^{a}x^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 dx$$

$$= \frac{3}{a}\int_{0}^{a}\left(x^2 - \frac{2x^3}{a} + \frac{x^4}{a^2}\right)dx$$

$$= \frac{a^2}{10}$$

ข)

$$<p_x> = \int_{-a}^{a}\psi^*(x)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x)dx$$

$$= -i\hbar.\frac{3}{2a}\left[\int_{-a}^{0}\left(1+\frac{x}{a}\right)\frac{d}{dx}\left(1+\frac{x}{a}\right)dx + \int_{0}^{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)\frac{d}{dx}\left(1-\frac{x}{a}\right)dx\right]$$

$$= \frac{-3i\hbar}{2a}\left[\int_{-a}^{0}\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(\frac{1}{a}\right)dx + \int_{0}^{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(-\frac{1}{a}\right)dx\right]$$

$$= 0$$

$$< p_x > = \int_{-\infty}^{\infty} \varnothing^*(k_x)(\hbar k_x)\varnothing(k_x)dk_x \qquad (k = k_x)$$

$$= \frac{\hbar}{4}\left(\frac{3a}{\pi}\right)\int_{-a}^{a} \frac{\sin^4 \frac{ka}{2} kdk}{\left(\frac{ka}{2}\right)^4}$$

$$= \frac{\hbar}{4}\left(\frac{3a}{\pi}\right)\int_{-a}^{a} \frac{\sin^4\left(\frac{ka}{2}\right)}{\left(\frac{a}{2}\right)^4 k^3}dk$$

$$= 0$$

ค) $$< p_x^2 > = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \psi dx$$

$$= -\hbar^2 \int_{0-}^{0+} \psi^*(x)\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)dx$$

$$= -\hbar^2 \int_{0-}^{0+} \psi(o)\frac{d^2\psi}{dx^2}dx$$

$$= -\hbar^2\psi(0)\frac{d\psi}{dx}\Big|_{0-}^{0+}$$

$$= -\hbar^2\psi(0)\left[\frac{d\psi}{dx}/_{0+} \frac{-d\psi}{dx}/_{0-}\right]$$

$$= -\hbar^2\sqrt{\frac{3}{2a}}\left[\frac{-1}{a}\sqrt{\frac{3}{2a}} - \frac{1}{a}\sqrt{\frac{3}{2a}}\right]$$

$$= \frac{3\hbar^2}{a^2}$$

ตัวอย่างที่ 4.3 จงแสดงว่า $< p_x >$ ของหมู่คลื่น เป็นค่าจริง

วิธีทำ

จาก หมู่คลื่น $\psi(x,y,z,t)$

$$< p_x > \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi dxdydz$$

$$< p_x >^* \quad = \quad \left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi dxdydz\right]^*$$

$$= \quad i\hbar\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}dxdydz$$

อินทีเกรตแบบแยกส่วน

$$= \quad i\hbar\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\psi\psi^*\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}dx\right]dydz$$

เนื่องจาก ฟังก์ชั่นคลื่นเป็นศูนย์ที่ x = ∞

$$= \quad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi dxdydz$$

$= \; < p_x >$ ดังนั้น $< p_x >$ เป็นค่าจริง

ตัวอย่างที่ 4.4 กำหนด $\psi(x) = e^{-\alpha x^2}$ จงหา $\varnothing(k)$ และจงพิสูจน์หลักความไม่แน่นอน

วิธีทำ

$$\varnothing(k) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx \quad e^{-ikx}e^{-\alpha x^2}$$

$$= \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx \quad e^{-\alpha x^2 - ikx + \frac{k^2}{4\alpha} - \frac{k^2}{4\alpha}}$$

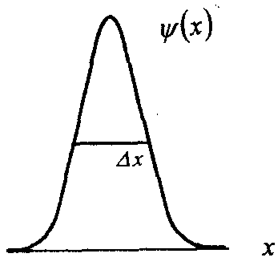
$$= \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{k^2}{4\alpha}}\int_{-\infty}^{\infty} dx \quad e^{-\alpha\left(x+\frac{ik}{2\alpha}\right)^2}$$

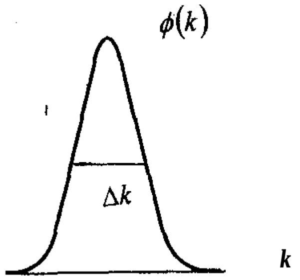
$$\left(let \;\; y = x + \frac{ik}{2\alpha} \right)$$

$$\varnothing(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-k^2}{4\alpha}} \int_{-\infty+\frac{ik}{2\alpha}}^{\infty+\frac{ik}{2\alpha}} dy e^{-\alpha y^2}$$

$$= \frac{e^{-\frac{k^2}{4\alpha}}}{\sqrt{2\alpha}}$$

$$\Delta x \Delta k \approx \frac{2}{\sqrt{\alpha}} 4\sqrt{\alpha} \sim 8$$





ตัวอย่างที่ 4.5 $\psi(x) = e^{ik_o x}$ จงหา $\varnothing(k)$ และพิสูจน์หลักความไม่แน่นอน

วิธีทำ

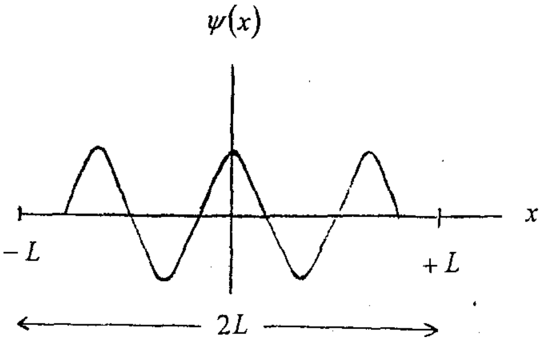
$$\varnothing(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^{L} dx e^{-ikx} e^{ik_0 x}$$

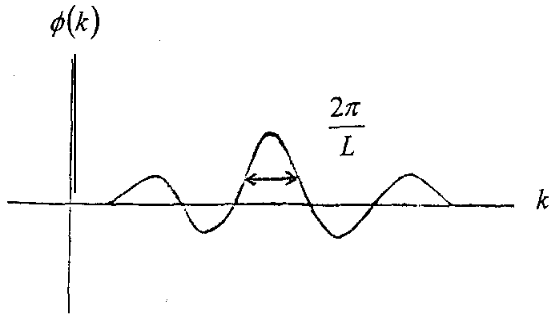
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i(k_0-k)x}}{i(k_o - k)} \Bigg|_{-L}^{L}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i(k_o k)L} - e^{-i(k_o k)L}}{i(k_o - k)}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(k_o - k)L}{(k_o - k)}$$

$$\Delta x \Delta k \sim (2L)\left(\frac{2\pi}{L}\right) \sim 4\pi$$





ตัวอย่างที่ *4.6* $\psi\left(\vec{r}\right)=\dfrac{e^{-\mu r}}{r}$ จงหา $0(k)$

วิธีทำ

$$\varnothing\left(\vec{k}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\vec{x}e^{-i\vec{k}.\vec{x}}e^{-\mu r}/r$$

เลือกทิศ k ในแกน z

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\,\mathrm{I}\,r^2 dr\sin\theta d\theta d\phi e^{-ikr\cos\theta}\frac{e^{-\mu r}}{r}$$

$$= \frac{2\pi}{(2\pi)^{3/2}}\mathop{I}_{0}^{\infty} * d * e^{-\mu r}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta e^{-ik*\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} dr\frac{e^{-\mu r}}{ik}\left[e^{-ikr\cos\theta}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} dr\frac{e^{-\mu r}}{ik}\left(e^{ikr}-e^{-ikr}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}ik}\left[\frac{e^{(ik-\mu)r}}{ik-\mu}-\frac{e^{(-ik-\mu)r}}{-ik-\mu}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}ik}\left[\frac{1}{\mu-ik}-\frac{1}{\mu+ik}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}ik}\frac{2ik}{\mu^2+k^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\mu^2+k^2}$$

ตัวอย่างที่ 4.7 กำหนดฟังก์ชั่นคลื่น $\psi(x) = \quad e^{-\alpha|x|}$ จงหา $\varnothing(k)$

วิธีทำ

$$\varnothing(k) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx \;\; e^{-ikx}\psi(x)$$

$$= \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx \;\; e^{-ikx}e^{-\alpha|x|}$$

$$= \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} dx \;\; e^{-ikx+\alpha x} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} dx \;\; e^{-ikx-\alpha x}$$

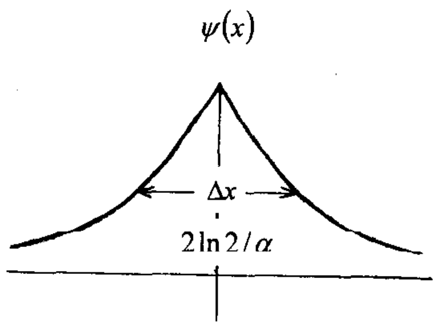
$$= \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-ikx+\alpha x}}{-ik+\alpha}\Bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-ikx-\alpha x}}{-ik-\alpha}\Bigg|_{0}^{\infty}$$

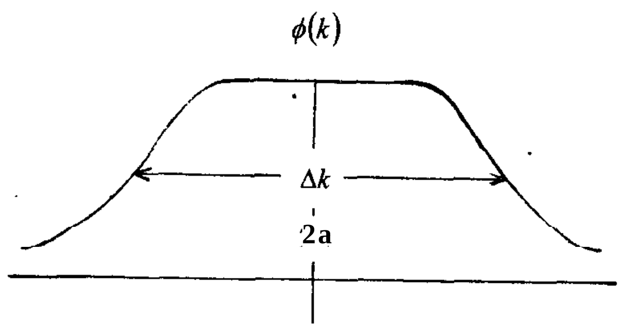
$$= \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{-ik+\alpha} + \frac{1}{ik+\alpha}\right]$$

$$= \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2\alpha}{k^2+\alpha^2}$$

$$\Delta x \Delta k \quad \sim \quad \left(\frac{2}{\alpha}\right)(2\alpha)\ln^2$$

$$\sim 4 \text{ In } 2$$





ตัวอย่างที่ 4.8 จงพิสูจน์ ว่า

$$< f(\mathrm{E}) > = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t) f\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi(x,t)dx$$

วิธีทำ

$$\phi(p,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x',t)e^{-i\frac{px}{\hbar}}dx$$

$$\phi^*(p,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x',t)e^{-i\frac{px'}{\hbar}}dx'$$

$$< f(\mathrm{E}) > = \int_{-\infty}^{\infty}\phi^*(p,t) f\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)\phi(p,t)dp$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\iiint\psi^*(x',t)e^{i\frac{px'}{\hbar}} f\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi(x,t)e^{-i\frac{px}{\hbar}}dx'dxdp$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x',t) f\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi(x,t)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\frac{p}{\hbar}(x'-x)}}{2\pi\hbar}dpdx'dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x',t) f\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi(x,t)\delta(x'-x)dx'dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x,t) f\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi(x,t)dx$$

ตัวอย่างที่ 4.9 พิจารณาหมู่คลื่น

$$\psi(x,0)=\psi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{L\sqrt{\pi}}}\exp\left[\frac{ip_0x}{\hbar}-\frac{x^2}{2L^2}\right]$$

ก) จงพิสูจน์ว่า

$$\psi(x,t)=\left[\sqrt{\pi}\left(L+\frac{i\hbar t}{mL}\right)\right]^{-1/2}\exp\left[\frac{L\left(-x^2/2L^2+ip_0x/\hbar-ip_0^2t/2m\hbar\right)}{L+i\hbar t/mL}\right]$$

ข) และจงพิสูจน์ว่า

$$\rho(x,t)=|\psi|^2=\left[\pi\left(L^2+\frac{\hbar^2t^2}{m^2L^2}\right)\right]^{-1/2}\exp\left[-\frac{(x-p_0t/m)^2}{L^2+\hbar^2t^2/m^2L^2}\right]$$

ค) จงคำนวณ $\phi(p,t)$

ง) จงคำนวณ $<E>$ และฟังก์ชั่น $<(E-<E>)^2>$

วิธีทำ

$$\psi(x,0)=\psi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{L\sqrt{\pi}}}e^{\frac{ip_0x}{\hbar}-\frac{x^2}{2L^2}}$$

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(p)e^{\frac{ip\,x}{\hbar}-\frac{ip^2t}{2m\hbar}}dp$$

$$\phi(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_0(x')e^{-\frac{ip\,x'}{\hbar}}dx'$$

$$\therefore\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\int_{-\infty}^{\infty}dp\,dx'\,\psi_0(x')e^{\frac{ip(x-x')}{\hbar}-\frac{ip^2t}{2m\hbar}}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\psi_0(x',0)K(x',x;t)dx'$$

เมื่อ K หาได้จาก

$$K(x',x;t)=\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{ip(x-x')}{\hbar}-\frac{ip^2t}{2m\hbar}}dp$$

ก)

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2x-\beta x}dx=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}$$

$$K(x',x;t)=\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{it}{2m\hbar}p^2-\frac{i(x-x')}{\hbar}p}dp$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\sqrt{\frac{\pi(2m\hbar)}{it}}e^{\left[\frac{i(x-x')}{\hbar}\right]^2 \frac{2m\hbar}{4it}}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}}e^{\frac{i(x-x')^2 m}{2\hbar t}}$$

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\psi(x',0)K(x',x;t)dx'$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}}\frac{1}{\sqrt{L\sqrt{\pi}}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{i(x-x')^2 m}{2\hbar t}+\frac{ip_0 x'}{\hbar}-\frac{x'^2}{2L^2}}dx'$$

$$\frac{i(x-x')^2 m}{2\hbar t} + \frac{x'^2 \; ip_0 x'}{\hbar \qquad 2L^2} = \frac{1}{2\hbar tL^2}\left[imL^2\left(x^2 - 2xx' + x'^2\right) + 2tL^2 ip_0 x' - \hbar t x'^2\right]$$

$$= \frac{1}{2\hbar tL^2}\left[-\left(\hbar t - imL^2\right)x'^2 - 2iL^2(mx - p_0 t)x' + imL^2x^2\right]$$

$$= \frac{-\left(\hbar t - imL^2\right)}{2\hbar tL^2}x'^2 - \frac{i(mx - p_0 t)}{ht}x' + \frac{imx^2}{2ht}$$

$$\therefore \psi(x,t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar itL\sqrt{\pi}}}e^{\frac{imx^2}{2\hbar t}}\sqrt{\frac{\pi\left(2\hbar tL^2\right)}{\hbar t - imL^2}}e^{\left[\frac{i(mx-p_0t)}{\hbar t}\right]^2\frac{2\hbar tL^2}{4(\hbar t - imL)}}$$

$$= \sqrt{\frac{mL}{\sqrt{\pi}\left(mL^2 + i\hbar t\right)}}\exp\left[\frac{imx^2}{2\hbar t} - \frac{iL^2}{2\hbar t}\frac{\left(m^2x^2 - 2mxp_0t + p_0^2t^2\right)}{i\hbar t + 4mL^2}\right]$$

$$= -\sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi}\left(L + \frac{i\hbar t}{mL}\right)}}\exp\left[\frac{ix^2\hbar t + 2imxp_0tL^2 - ip_0^2t^2L^2}{2\hbar t\left(mL^2 + i\hbar t\right)}\right]$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi}\left(L + \frac{i\hbar t}{mL}\right)}}\exp\left[\frac{L\left(-\frac{x^2}{2L^2} + \frac{ip_0x}{\hbar} - \frac{ip_0^2t}{2m\hbar}\right)}{L + \frac{i\hbar t}{mL}}\right]$$

ข) $$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi}\left(L + \frac{i\hbar t}{mL}\right)}}e^{\frac{imx^2}{2\hbar t}}e^{-\frac{(mx-p_0t)^2}{2\hbar t}\frac{L^2}{\hbar t - imL^2}}$$

$$\therefore \rho(x,t) = \psi^*\psi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{1}{\left(L + \frac{i\hbar t}{mL}\right)\left(L - \frac{i\hbar t}{mL}\right)}}e^{-\frac{(mx-p_0t)^2L^2}{2\hbar t}\left[\frac{1}{\hbar t - imL^2} + \frac{1}{\hbar t + imL^2}\right]}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{1}{L^2 + \left(\frac{\hbar t}{mL}\right)^2}} e^{-\frac{(mx-p_0t)^2 L^2}{2\hbar t} \frac{2\hbar t}{\hbar^2 t^2 + m^2 L^4}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\pi\left(L^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2 L^2}\right)}} \exp\left[-\frac{\left(x - \frac{p_0 t}{m}\right)^2}{L^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2 L^2}}\right]$$

ค)

$$\phi_0(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x) e^{-\frac{ipx}{\hbar}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{1}{\sqrt{L\sqrt{\pi}}} \int e^{\frac{ipx}{\hbar} - \frac{x^2}{2L^2}} e^{-\frac{ipx}{\hbar}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sqrt{\pi}\hbar L}} \int e^{-\frac{x^2}{2L^2} - \frac{i(p-p_0)x}{\hbar}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sqrt{\pi}\hbar L}} \sqrt{\pi(2L^2)} e^{\left[\frac{i(p-p_0)}{\hbar}\right]^2 \frac{2L^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{L}{\sqrt{\pi}\hbar}} e^{-\frac{(p-p_0)^2 L^2}{2\hbar^2}}$$

$$\therefore \phi(p,t) = \phi_0(p) e^{-\frac{ip^2 t}{2m\hbar}}$$

$$= \sqrt{\frac{L}{\sqrt{\pi}\hbar}} e^{-\frac{(p-p_0)^2 L^2}{2\hbar^2} - \frac{p^2 t}{2m\hbar}}$$

ง)

$$\frac{\partial \phi(p,t)}{\partial t} = \sqrt{\frac{L}{\sqrt{\pi}\hbar}} e^{-\frac{(p-p_0)^2 L^2}{2\hbar^2} - \frac{ip^2 t}{2m\hbar}} \left(-\frac{ip^2}{2m\hbar}\right)$$

$$= -\frac{ip^2}{2m\hbar} \phi(p,t)$$

$$\therefore \langle\ E\ \rangle = \int \phi^*(p,t) - \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} \phi(p,t) dp$$

$$= \frac{L}{\sqrt{\pi}\hbar} \int \left(-\frac{\hbar}{i}\right)\left(-\frac{i}{2m}\frac{p^2}{\hbar}\right) e^{-\frac{(p-p_0)^2 L^2}{\hbar^2}} dp$$

$$= \frac{L}{\sqrt{\pi}\,2m\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} p^2 e^{-\frac{(p-p_0)^2 L^2}{\hbar^2}}\,dp$$

ให้ $p - p_0 = u$ ดังนั้น $dp = du$

$$\langle E \rangle = \frac{L}{\sqrt{\pi}\,2m\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} (u + p_0)^2 e^{-\frac{L^2}{\hbar^2}u^2}\,du$$

$$= \frac{L}{\sqrt{\pi}\,2m\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\left(u^2 e^{-\frac{L^2}{\hbar^2}u^2} + 2p_0 u e^{-\frac{L^2}{\hbar^2}u^2} + p_0^2 e^{-\frac{L^2}{\hbar^2}u^2}\right)^2 du$$

$$= \frac{L}{\sqrt{\pi}\,2m\hbar}\left\{2\times\frac{\hbar^2}{2^2L^2}\sqrt{\frac{\pi\hbar^2}{L^2}} + 0 + p_0^2\sqrt{\frac{\pi\hbar^2}{L^2}}\right\}$$

$$= \frac{L}{2m\hbar}\left[\frac{\hbar^3}{2L^3} + p_0^2\frac{\hbar}{L}\right]$$

$$= \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar^2}{2L^2} + p_0^2\right)$$

$$\frac{\partial^2\phi(p,t)}{\partial t^2} = \sqrt{\frac{L}{\sqrt{\pi}\hbar}}\left(-\frac{i}{2m}\frac{p^2}{\hbar}\right)^2 e^{-\frac{(p-p_0)^2L^2}{2\hbar^2}-\frac{ipt}{2m\hbar}}$$

$$= -\left(\frac{p^2}{2m\hbar}\right)^2 \phi(p,t)$$

$$\langle E^2 \rangle = \int\phi^*(p,t)\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\phi(p,t)dp$$

$$= \frac{L}{\sqrt{\pi}\hbar}\int\left(-\hbar^2\right)\left(-\left(\frac{p^2}{2m\hbar}\right)^2\right)e^{-\frac{(p-p_0)^2L^2}{\hbar^2}}dp$$

$$= \frac{L}{\sqrt{\pi}\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p^4}{4m^2}e^{-\frac{(p-p_0)^2L^2}{\hbar^2}}dp$$

$$= \frac{L}{4m^2\sqrt{\pi}\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} p^4 e^{-\frac{(p-p_0)^2L^2}{\hbar^2}}dp$$

$$= \frac{L}{4m^2\sqrt{\pi}\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} (u+p_0)^4 e^{-\frac{L^2}{\hbar^2}u^2}du$$

$$= \frac{L}{4m^2\sqrt{\pi}\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} \left(u^4 + 4u^3p_0 + 6u^2p_0 + 4up_0^3 + p_0^4\right)e^{-\frac{L^2}{\hbar^2}u^2}du$$

$$= \frac{L}{4m^2\sqrt{\pi}\hbar}\left\{2\times\frac{1\cdot 3}{2^3}\left(\frac{\hbar^2}{L^2}\right)^2 + 6\times 2\times\frac{1}{2^2}\frac{\hbar^2}{L^2}p_0^2 + p_0^4\right\}\sqrt{\frac{\pi\hbar^2}{L^2}}$$

$$\therefore <(E-<E>)^2> = <E^2> - <E>^2$$

$$= \frac{1}{4m^2}\left\{\frac{3}{4}\frac{\hbar^4}{L^4} + 3\frac{\hbar^2}{L^2}p_0^2 + p_0^4\right\} - \frac{1}{4m^2}\left\{\frac{\hbar^4}{4L^2} + \frac{\hbar^2}{L^2}p_0^2 + p_0^4\right\}$$

$$= \frac{1}{4m^2}\left\{\frac{1}{2}\frac{\hbar^4}{L^4} + 2\frac{\hbar^2}{L^2}p_0^2\right\}$$

$$= \frac{1}{8m^2}\frac{\hbar^4}{L^4} + \frac{1}{2m^2}\frac{\hbar^2}{L^2}p_0^2$$

ตัวอย่าง 4.10 พิจารณาหมู่คลื่น $\psi = A\exp\left[-(|x|/L) + \frac{ip_0x}{\hbar}\right]$

ก) จงนอร์มอลไลซ์ ψ

ข) จงคำนวณ $\phi(p)$ และพิสูจน์ว่า $\phi(p)$ ถูกนอร์มอลไลซ์

ค) จงหาความกว้างของหมู่คลื่นในปริภูมิพิกัดและปริภูมิโมเมนตัมและจงพิสูจน์หลักความไม่แน่นอน

วิธีทำ $\psi = Ae^{-|x|/L + ip_0x/\hbar}$

ก) $$\int\psi^*\psi dx = A^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2|x|}{L}}dx$$

$$= A^2\left[\int_{-\infty}^{0} e^{\frac{2x}{L}}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{2x}{L}}dx\right]$$

$$= A^2\left\{\frac{L}{2}\left[e^{\frac{2x}{L}}\right]_{-\infty}^{0} - \frac{L}{2}\left[e^{-\frac{2x}{L}}\right]_{0}^{\infty}\right\}$$

$$= \frac{A^2L}{2}\{1+1\}$$

$$= A^2L$$

แต่ $\int \psi^*\psi\, dx = 1$

$$\therefore A^2 = \frac{1}{L} \qquad \text{หรือ} \qquad A = L^{-\frac{1}{2}}$$

ข)

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)e^{-\frac{ipx}{\hbar}}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{L}}e^{-\frac{|x|}{L}}e^{\frac{ip_0x}{\hbar}}e^{-\frac{ipx}{\hbar}}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar L}}\left\{\int_{-\infty}^{0}e^{\left[\frac{i}{\hbar}(p_0-p)+\frac{1}{L}\right]x}dx + \int_{0}^{\infty}e^{\left[\frac{i}{\hbar}(p_0-p)-\frac{1}{L}\right]x}dx\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar L}}\left\{\frac{1}{\frac{i}{\hbar}(p_0-p)+\frac{1}{L}}e^{\left[\frac{i}{\hbar}(p_0-p)+\frac{1}{L}\right]x}\Bigg|_{-\infty}^{0} + \right.$$

$$\left.\frac{1}{\frac{i}{\hbar}(p_0-p)-\frac{1}{L}}e^{\left[\frac{i}{\hbar}(p_0-p)-\frac{1}{L}\right]x}\Bigg|_{0}^{\infty}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar L}}\left\{\frac{1}{\frac{i}{\hbar}(p_0-p)+\frac{1}{L}} - \frac{1}{\frac{i}{\hbar}(p_0-p)-\frac{1}{L}}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar L}}\,\frac{-\frac{2}{L}}{-\left(\frac{p_0-p}{\hbar}\right)^2-\left(\frac{1}{L}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2\hbar^3}{\pi L^3}}\,\frac{1}{(p-p_0)^2+\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi^*(p)\phi(p)dp = \frac{2\hbar^3}{\pi L^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left[(p-p_0)^2+\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2\right]^2}dp$$

ให้ $$p - p_0 = \frac{\hbar}{L}\tan\theta, dp = \frac{\hbar}{L}\sec^2 ede$$

เมื่อ

$$p = \infty, \theta = \pi/2$$
$$p = -\infty, \theta = -\pi/2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi^*(p)\phi(p)dp = \frac{2\hbar^3}{\pi L^3}\frac{\hbar}{L}\frac{1}{\left(\frac{\hbar}{L}\right)^4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sec^2\theta d\theta}{\sec^4\theta}$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$
$$= \frac{2}{\pi}\times\frac{1}{2}\left[\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$
$$= 1$$

$\therefore \phi(p)$ ถูกนอร์มอลไลซ์

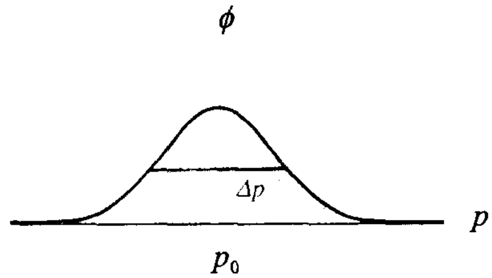
ค) $$\phi^*(p)\phi(p) = \left(\sqrt{\frac{2\hbar^3}{\pi L^3}}\frac{1}{(p-p_0)^2+\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2}\right)^2$$

ความสูงของพีค $$= \left(\sqrt{\frac{2\hbar^3}{\pi L^3}}\frac{1}{\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2}\right)^2$$

ความกว้าง : $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2}\right)^2 = \left[\frac{1}{(p-p_0)^2+\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2}\right]^2$

$$\therefore\ p - p_0 = \pm 0.41\,\frac{\hbar}{L}$$

หรือ $\Delta p \cong \frac{\hbar}{L}$



จาก $\psi^*(x)\psi^*(x) = A^2 e^{-\frac{2|x|}{L}}$

สำหรับ $\psi(x)$

$$\frac{1}{2} = e^{-\frac{2x}{L}}$$

$$2x = (\ln 2)L = 0.69\,L$$

$$\Delta x \approx L$$

ดังนั้น $\Delta p\,\Delta x \approx \mathbf{A}$

ตัวอย่างที่ 4.11 พิจารณากลุ่มคลื่นซึ่งเมื่อ $t = 0$ จะอยู่ในรูปต่อไปนี้

$$\psi(x,0) = Ae^{ip_0x/\hbar}e^{-i|x|/L}$$

ก) จงนอร์มอลไลซ์ $\psi(x,0)$

ข) จงคำนวณ $\phi(p,0)$ และ $\phi(p,t)$ และจงพิสูจน์ว่าคลื่นทั้งสองถูกนอร์มอลไลซ์แล้ว

ค) จงคำนวณ $<p>$ และอธิบายว่าขึ้นกับเวลาอย่างไรเปรียบเทียบกับ $<E>$

ง) จงพล๊อต $|\phi(p,t)|^2$ กับ p สมมุติว่า 1) $L \geq \hbar/p_0$ และ 2) $L << \hbar/p_0$ อธิบายความแตกต่างของทั้งสองกรณีโดยอาศัยหลักความไม่แน่นอน

จ) จงคำนวณ $<x>$ ที่ $t = 0$ และที่เวลา $t > 0$ (ข้อแนะนำ คำนวณในระบบโมเมนตัม)

วิธีทำ $t = 0, \psi(x,0) = Ae^{ip_0x/\hbar}e^{-|x|/L}$

ก) $$\int \psi^*(x,0)\psi(x,0)dx = A^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2|x|}{L}}dx$$

$$= A^2\int_{-\infty}^{0} e^{\frac{2x}{L}}dx + A^2\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{2x}{L}}dx$$

$$= 2A^2\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{2x}{L}}dx$$

$$= 2A^2\left(-\frac{L}{2}\right)\left[e^{-\frac{2x}{L}}\right]_0^{\infty}$$

$$= A^2L = 1$$

$$\therefore A^2 = \frac{1}{L} \qquad \text{หรือ} \qquad A = \frac{1}{\sqrt{L}}$$

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{L}}e^{\frac{ip_0x}{\hbar}}e^{-\frac{|x|}{L}}$$

ข)

$$\phi(p,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,0)e^{-\frac{ipx}{\hbar}}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\frac{1}{\sqrt{L}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{ip_0x}{\hbar}-\frac{ipx}{\hbar}-\frac{|x|}{L}}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar L}}\left\{\int_{-\infty}^{0}e^{\left[\frac{i}{\hbar}(p_0-p)+\frac{1}{L}\right]x}dx + \int_{0}^{\infty}e^{\left[\frac{i}{\hbar}(p_0-p)-\frac{1}{L}\right]x}dx\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar L}}\left\{\frac{1}{\frac{i}{\hbar}(p_0-p)+\frac{1}{L}}\left[e^{\left[\frac{i}{\hbar}(p_0-p)+\frac{1}{L}\right]x}\right]_{-\infty}^{0} + \right.$$

$$\left.\frac{1}{\frac{i}{\hbar}(p_0-p)-\frac{1}{L}}\left[e^{\left[\frac{i}{\hbar}(p_0-p)-\frac{1}{L}\right]x}\right]_{0}^{\infty}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar L}}\left\{\frac{1}{\frac{i}{\hbar}(p_0 - p)+\frac{1}{L}} - \frac{1}{\frac{i}{\hbar}(p_0 - p)-\frac{1}{L}}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar L}}\frac{-\frac{2}{L}}{-\left(\frac{p_0 - p}{\hbar}\right)^2 - \left(\frac{1}{L}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2\hbar^3}{\pi L^3}}\frac{1}{(p-p_0)^2+\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi^*(p)\phi(p)dp = \frac{2\hbar^3}{\pi L^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(p-p_0)^2+\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2}dp$$

ให้ $$p - p_0 = \frac{\hbar}{L}\tan\theta, \; dp = \frac{\hbar}{L}\sec^2\theta d\theta$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi^*(p)\phi(p)dp = \frac{2\hbar^3}{\pi L^3}\frac{\hbar}{L}\frac{1}{\left(\frac{\hbar}{L}\right)^4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sec^2\theta d\theta}{\sec^4\theta}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$= \frac{2}{a} \times \frac{\pi}{2}$$

$$= 1$$

$\therefore \phi(p)$ ถูกนอร์มอลไลซ์

$$\phi(p,t) = \phi(p)e^{-\frac{ip^2x}{2m\hbar}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\hbar^3}{\pi L^3}}\frac{1}{(p-p_0)^2+\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2}e^{-\frac{ip^2x}{2m\hbar}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi^*(p,t)\phi(p,t)dp = \int_{-\infty}^{\infty}\phi^*(p)\phi(p)dp$$

$$= 1$$

$\therefore \phi(p,t)$ ถูกนอร์มอลไลซ์

ค) $$<p> = \int_{-\infty}^{\infty}\phi^*(p,t)p\phi(p,t)dp$$

$$= \frac{2\hbar^3}{\pi L^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{pdp}{\left[(p-p_0)^2+\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2\right]^2}$$

ให้ $p - p_0 = u$ จะได้ $dp = du$

$$<p> = \frac{2\hbar^3}{\pi L^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(u+p_0)du}{\left[u^2+\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2\right]^2}$$

$$= \frac{2\hbar^3}{\pi L^3}p_0\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{\left[u^2+\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2\right]^2}$$

$$= \frac{4\hbar^3}{\pi L^3}p_0\int_{0}^{\infty}\frac{du}{\left[u^2+\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2\right]^2}$$

$$= \frac{4\hbar^3}{\pi L^3}p_0\left\{\frac{u}{2\frac{\hbar^2}{L^2}\left(\frac{\hbar^2}{L^2}+u^2\right)}+\frac{1}{2\frac{\hbar^2}{L^2}}\times\frac{1}{\sqrt{\frac{\hbar^2}{L^2}}}\tan^{-1}\frac{u\sqrt{\hbar^2/L^2}}{\frac{\hbar^2}{L^2}}\right\}_0^{\infty}$$

$$= \frac{4\hbar^3}{\pi L^3}p_0\frac{L^3}{2\hbar^3}\tan^{-1}\infty$$

$$= \frac{4\hbar^3}{\pi L^3}p_0\left(\frac{L^3}{2\hbar^3}\right)\frac{\pi}{2} = p_0$$

$$
\begin{aligned}
\langle E \rangle &= \int \phi^*(p,t)\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\phi(p,t)\right)dp \\
&= \int \phi^*(p,t)\left[-\frac{\hbar}{i}\left(-\frac{ip^2}{2m\hbar}\right)\phi(p,t)\right]dp \\
&= \frac{2\hbar^3}{\pi L^3}\frac{1}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p^2\,dp}{\left[(p-p_0)^2+\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2\right]^2} \\
&= \frac{\hbar^3}{\pi L^3 m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(u+p_0)^2\,du}{\left[u^2+\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2\right]^2} \\
&= \frac{\hbar^3}{\pi L^3 m}\left\{p_0^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{\left[u^2+\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2\right]^2}+2p_0\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u\,du}{\left[u^2+\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2\right]^2}+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u^2\,du}{\left[u^2+\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2\right]^2}\right\} \\
&= \frac{\hbar^3}{\pi L^3 m}\left\{\frac{L^3\pi}{2\hbar^3}p_0^2+2\int_0^{\infty}\frac{u^2\,du}{\left[u^2+\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2\right]^2}\right\} \\
&= \frac{\hbar^3}{\pi L^3 m}\left\{\frac{L^3\pi}{2\hbar^3}p_0^2+2\left(\frac{\hbar}{L}\right)^3\int_0^{\pi/2}\frac{\tan^2\theta\sec^2\theta d\theta}{\left(\frac{\hbar}{L}\right)^4\sec^4\theta d\theta}\right\} \\
&= \frac{p_0^2}{2m}+\frac{\hbar^3}{\pi L^3 m}2\left(\frac{L}{\hbar}\right)\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)d\theta \\
&= \frac{p_0^2}{2m}+\frac{\hbar^3}{\pi L^3 m}\left(2\frac{L}{\hbar}\right)\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{p_0^2}{2m}+\frac{\hbar^2}{2mL^2}
\end{aligned}
$$

ง)
$$\phi^*(p,t)\phi(p,t)=\frac{2\hbar^3}{\pi L^3}\frac{1}{\left[(p-p_0)^2+\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2\right]^2}$$

ความสูงของพีค $= \dfrac{2\hbar^3}{\pi L^3}\dfrac{L^4}{\hbar^4} = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{L}{\hbar}$

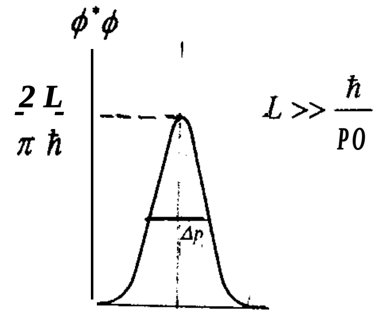
ความกว้าง :
$$\frac{2\hbar^3}{\pi L^3}\frac{1}{\left[(p-p_0)^2+\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2\right]^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{2L}{\pi\hbar}\right)$$

$$\left[(p-p_0)^2+\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2\right]^2=\frac{2\hbar^4}{L^4}$$

$$(p-p_0)^2=0.4\frac{\hbar^2}{L^2}$$

$$p-p_0\approx\frac{\hbar}{L}$$

หรือ
$$\Delta p\approx\frac{\hbar}{L}$$



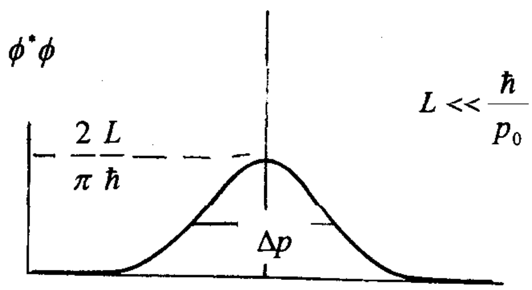
สำหรับ $\psi(x)$

$$\psi^*(x)\psi^*(x)=\frac{1}{2}e^{-\frac{2|x|}{L}}$$

$$\frac{1}{2}=e^{\frac{2x}{L}}$$

$$2x=(\ln 2)L=0.619\,L$$

$$\Delta x\approx L$$



จากหลักความไม่แน่นอน

$$\Delta p\Delta x\approx\hbar$$

เมื่อ $L >> \dfrac{\hbar}{p_0}$, Δx มีค่ามาก เนื่องจากหลักความไม่แน่นอน Δp มีค่าน้อยมาก

เมื่อ $L << \dfrac{\hbar}{p_0}$, Δx มีค่าน้อย ดังนั้น Δp มีค่ามาก

จ)

$$\phi(p)=\sqrt{\frac{2\hbar^3}{\pi L^3}}\,\frac{1}{(p-p_0)^2+\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2}$$

$$\frac{\partial\phi(p)}{\partial p}=\sqrt{\frac{2\hbar^3}{\pi L^3}}\,\frac{-2(p-p_0)}{\left[(p-p_0)^2+\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2\right]^2}$$

ที่เวลา $t = 0$

$$<x> \;=\int\phi^*(p)\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}\phi(p)\right)dp$$

$$=\frac{2\hbar}{i}\left(\frac{2\hbar^3}{\pi L^3}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(p-p_0)}{\left[(p-p_0)^2+\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2\right]^3}dp$$

$$=\quad 0$$

$$\phi(p,t)=_{\boldsymbol{A}}\;\frac{2\hbar^3}{\pi L^3}\,\frac{1}{(p-p_0)^2+\left(\frac{A}{L}\right)^2}e^{-\frac{\&}{2m\hbar}}$$

$$<x> \;=\int_{-\infty}^{\infty}\phi^*(p,t)\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}\phi(p,t)\right)dp$$

$$=-\frac{A}{i}\left(\frac{2\hbar^3}{\pi L^3}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{-it}{m\hbar}p\left[(p-p_0)^2+\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2\right]-2(p-p_0)}{\left[(p-p_0)^2+\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2\right]^3}dp$$

$$=-\frac{\hbar}{i}\left(\frac{2\hbar^3}{\pi L^3}\right)\left(\frac{-it}{m\hbar}\right)p_0\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{,\left[u^2+\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2\right]}$$

$$=\frac{2\hbar^5 t}{\pi m L^5}\,p_0\,\boldsymbol{X2}\int_{0}^{\infty}\frac{du}{\left[u^2+\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2\right]^3}$$

$$=\frac{4\hbar^5 t}{\pi m L^5}\,p_0\times\frac{3}{4\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2}\times\frac{1}{2\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2}\,\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2}}\left[\tan^{-1}\frac{u\sqrt{\hbar^2/L^2}}{\hbar^2/L^2}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{4\hbar^5 t p_0}{\pi m L^5} \frac{3L^5}{8\hbar^5} \times \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{3}{4} \frac{p_0 t}{m}$$

สำหรับอนุภาคที่อยู่ในกล่องความยาว L

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0 \qquad \text{เมื่อ} \qquad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\psi = A \cos kx + B \sin kx$$

สภาวะขอบเขต

$$\psi(0) = 0, \psi(L) = 0$$

ดังนั้น $0 = A(1) + B(0) \Rightarrow A = 0$

และ $0 = B \sin kL$

$$\Rightarrow kL = n\pi, n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\Rightarrow k = \frac{n\pi}{L}, (n \neq 0, E \neq 0)$$

ดังนั้น $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$

$$\int \psi^*(x)\psi(x)dx = 1$$

$$B^2 \int_0^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx = 1$$

$$B^2 \cdot \frac{L}{2} = 1$$

$$B = \sqrt{2/L}$$

$$\psi_E(x) = B \sin kx = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$$