วัตถุประสงค์

1) ศึกษาการสร้างหมู่คลื่นโดยอาศัยหลักการซ้อนทับ
2) ศึกษาการแปลงฟูเรียร์
3) ศึกษาฟังก์ชันเดลต้าดิแรก
4) ศึกษาปริภูมิโมเมนตัมและปริภูมิพิกัด
5) ศึกษาความสัมพันธ์สลับที่
6) ศึกษาหลักความไม่แน่นอน

เราใช้ คลื่นระนาบแทนฟังก์ชั่นคลื่น

$$\psi(x,t) = e^{i(kx-\omega t)} \qquad \text{เมื่อ} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$= e^{i(\frac{2\pi x}{\lambda}-\omega t)}$$

$$= e^{i\left(2\pi\frac{px}{\hbar}-\omega t\right)}$$

$$= e^{i\left(\frac{px}{\hbar}-\omega t\right)}$$

เป็น ฟังก์ชั่นสเตท ของอนุภาคอิสระที่มีโมเมนตัม p นอกจากนี้เราอาจจะแทนฟังก์ชั่นคลื่น ด้วย

$$\psi(x,t) = \sin(kx-\omega t)$$

หรือ $\psi(x,t) = \cos(kx-\omega t)$

หรือ $\psi(x,t) = A\cos(kx-\omega t) + B\sin(kx$ -01)

แต่ถ้ามีปัญหาเกี่ยวกับ ฟังก์ชั่นคลื่น ที่ จุดกำเนิด เราสามารถใช้

$$\psi(x+b,t) = \psi(x,t)e^{i\delta}$$

เมื่อ $e^{i\delta}$ คือ การเปลี่ยนแปลงของเฟส

$$\psi^*(x+b,t)\psi(x+b,t) = \psi^*(x,t)\psi(x,t)$$

ถ้า t=0 (ไม่ขึ้นกับเวลา)

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\alpha}^{\alpha}\varnothing(p)e^{ipx/\hbar}dp$$

3.1 การสร้างหมู่คลื่นโดยอาศัยหลักการซ้อนทับ (superposition)

เราสามารถสร้างหมู่คลื่นได้ โดยนำสเตทฟังก์ชั่นที่มีโมเมนตัมต่าง ๆ กัน มารวมกันโดยใช้วิธีซ้อนตำแหน่ง

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(p)\exp\left[i(px/\hbar)-i\omega(p)t\right]dp$$

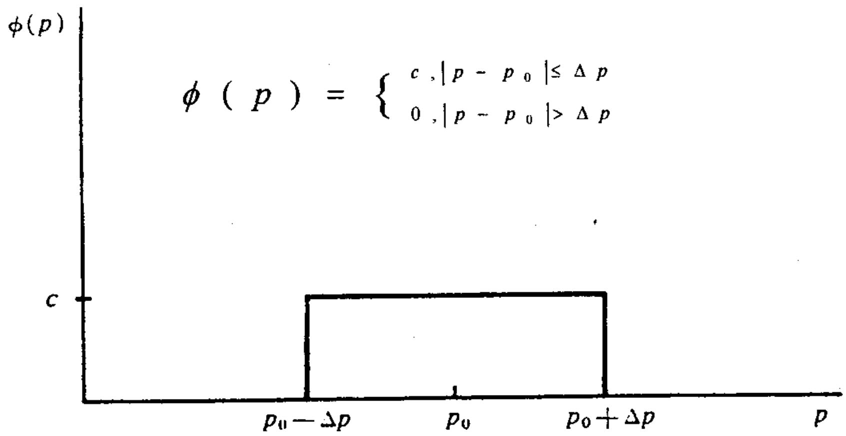
สเตทฟังก์ชั่น $\psi(p)$ ซึ่งสอดคล้องกับโมเมนตัม p จะแทนด้วย $\phi(p)$ เพื่อให้ง่ายขึ้น เราจะพิจารณาเมื่อ $t=0$ ก่อน

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(p)e^{ipx/\hbar}dp \qquad (3.1)$$

เมื่อ

$$\psi(x)=\psi(x,t=0)$$

สมมุติว่า $\phi(p)$ มีค่าคงที่ในช่วง Δp ทั้งสองข้างของโมเมนตัม p_0 และมีค่าเป็นศูนย์ภายนอกช่วงนี้ซึ่งก็คือ การกำหนดให้ $\phi(p)$ เป็นการกระจายแบบสี่เหลี่ยม



รูปที่ 3.1 การกระจายของโมเมนตัม

จากสมการ (3.1) จะได้

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{p_0-\Delta p}^{p_0+\Delta p} c \quad e^{ipx/\hbar}\, dp$$

$$= \frac{c}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{\hbar}{ix} \Big[\quad e^{ipx/\hbar} \Big]_{p_0-\Delta p}^{p_0+\Delta p}$$

$$= \frac{c\hbar}{ix\sqrt{2\pi\hbar}} \left(e^{i(p_0+\Delta p)x/\hbar} - e^{i(p_0-\Delta p)x/\hbar} \right)$$

$$= \frac{c\hbar}{ix\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ip_0x/\hbar\hbar} \left(e^{i\Delta px/\hbar} - e^{-i\Delta px/\hbar} \right)$$

$$= \frac{2c\hbar}{x\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ip_0x/\hbar} \sin\left(\frac{\Delta px}{\hbar} \right)$$

หาค่า c โดยอาศัยการนอร์มอลไลซ์

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\psi(x)dx = 1$$

$$\frac{4c^2\hbar^2}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip_0x/\hbar} e^{ip_0x/\hbar} \frac{\sin^2(\Delta px/\hbar)}{x^2} dx = 1$$

$$\frac{2c^2\hbar}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\Delta px/\hbar)}{x^2} dx = 1 ,$$

ให้ $U = \dfrac{\Delta px}{\hbar}$

$$\frac{2c^2\hbar}{\pi} \frac{\Delta p}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 U}{U^2} dU = 1$$

เนื่องจาก $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 u}{U^2} dU = \hbar$

$$2c^2 \Delta p = 1$$

$$c = \sqrt{1/2\Delta p}$$

พิจารณา เมื่อ Δp เข้าใกล้ศูนย์ จะได้คลื่นเดอ เบรย ที่มีโมเมนตัม p_0 .

$$\psi(x) = \sqrt{\hbar/\pi\Delta p}\, \frac{\sin(\Delta px/\hbar)}{x} e^{ip_0x/\hbar}$$

$$\lim_{\Delta p \to 0} \psi(x) = \sqrt{\frac{\hbar}{\pi}} \frac{1}{x} \frac{\frac{\partial}{\partial \Delta p} \sin(\Delta px/\hbar)}{\frac{\partial}{\partial \Delta p} \sqrt{\Delta p}} e^{ip_0x/\hbar}$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{\pi}} \frac{1}{x} \frac{\cos(\Delta px/\hbar)}{\frac{1}{2}\Delta p^{-1/2}} e^{ip_0x/\hbar} \frac{x}{\hbar}$$

$$= 2\sqrt{\frac{\Delta p}{\pi\hbar}} e^{ip_0x/\hbar}$$

เทอม $\sqrt{\Delta p}$ ทำให้ขนาดของ ψ มีค่าน้อยมาก ซึ่งทำให้ $\int \psi^* \psi dx$ มีค่าน้อย หมายความว่า สเตทฟังก์ชั่นไม่ถูกนอร์มอลไลซ์ในช่วงนี้ จึงจำเป็นที่จะต้องให้อนุภาคถูกขังอยู่ภายในบริเวณที่มีพื้นที่จำกัดเท่านั้น เช่น ภายในความยาว L

$$\int_0^L \psi^*(x)\psi(x)\,dx = \int_0^L \frac{\Delta p}{\pi\hbar}dx$$

$$= \frac{\Delta pL}{\pi\hbar} = 1$$

$$\Delta pL \le \hbar$$

ซึ่งสามารถใช้คลื่นเดอ เบรยได้ ดังนั้น Δp สามารถเข้าใกล้ศูนย์ ได้ถ้า Δp น้อยกว่า $\hbar/L$ มาก

พิจารณาความหมายของ $\phi(p)$ สมมุติว่า มีสเตทฟังก์ชั่นสองสเตทซ้อนทับกัน

$$\psi(x) = a_1 e^{ip_1x/\hbar} + a_2 e^{ip_2x/\hbar}$$

$\phi(p)$ เป็นขนาดความน่าจะเป็นของปริภูมิโมเมนตัม (momentum space) ของคลื่น p เช่นเดียวกับ $\psi(x)$ เป็นขนาดความน่าจะเป็นของปริภูมิพิกัด (coordinate space) ที่จุด x

ในปริภูมิโมเมนตัม ถ้า $\rho(p)$ เป็นความหนาแน่นของความน่าจะเป็น จะเขียนโอกาสในการพบอนุภาคที่มีโมเมนตัมระหว่าง p และ p+dp ได้ดังนี้

$$\rho(p)dp = \frac{\phi^*\phi\,dp}{\int_{-\infty}^{\infty}\phi^*(p)\phi(p)\,dp}$$

ถ้า $\phi(p)$ ถูกนอร์มอลไลซ์

$$\int \phi^*(p)\phi(p)\,dp = 1$$

จะได้

$$\rho(p) = \phi^*\phi$$

และ $\phi(p)$ จะให้ค่าโอกาสของความน่าจะเป็นโดยตรง

ต่อไปเราจะพิจารณาเทอมนี้ เมื่อ L มีค่ามาก ๆ กำหนดให้

$$k_n \equiv n\pi/L$$

จะได้

$$\Delta k \equiv k_{n+1} - k_n = \pi/L$$

ดังนั้น

$$k_n = n\Delta k$$

จะได้

$$A_n \equiv (1/L)\sqrt{\pi/2}\,g(k_n)$$

$$= (1/L)\sqrt{\pi/2}\,g(n\Delta k)$$

จากค่าต่าง ๆ เหล่านี้ จะได้

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi/2}}{L} g(n\Delta k)e^{in\Delta kx}$$

$$= \sqrt{1/(2\pi)}\sum_{-\infty}^{\infty} g(n\Delta k)e^{in\Delta kx}\Delta k$$

$$g(n\Delta k) = \sqrt{1/2\pi}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\Delta kx}\,dx$$

เมื่อ $L \to \infty$ จะได้ $\Delta k \to 0$ ขณะที่ $n\Delta k \to k$ ทำให้ได้

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(k)e^{ikx}\,dx \qquad (3.2)$$

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\,dx \qquad (3.3)$$

สองสมการนี้ มีชื่อเรียกว่า **การแปลงฟูเรียร์** ซึ่งทำให้เราสามารถหาค่า $f(x)$ ได้ถ้ารู้ค่า $g(k)$ หรือหาค่า $g(k)$ ได้ถ้ารู้ค่า $f(x)$

พิสูจน์ คุณสมบัติของฟังก์ชั่นเดลต้า

1) $\int dx\ \ f(x)\delta(-x) = \int dx\ \ f(-x)\delta(x) = f(0)$

$\int dx\ \ f(x)\delta(x) = f(0) \quad \therefore \delta(x) = \delta(-x)$

2) $\int dx\ \ f(x)\frac{d}{dx}\delta(-x) = -\int dx\ \ f(-x)\frac{d}{dx}\delta(x) = \frac{df}{dx}\Big|_{x=0}$

$\int dx\ \ f(x)\frac{d}{dx}\delta(x) = -\frac{df}{dx}\Big|_{x=0} = 0 \quad \therefore \delta'(x) = -\delta'(-x)$

3) $\int dx\ \ f(x)\delta(x) = (f(x)x)\big|_{x=0} = 0 \quad \therefore x\delta(x) = 0$

4) $\int dx\ \ f(x)x\delta'(x) = -\frac{d}{dx}(f(x)x)\big|_{x=0} = -f(0) \quad \therefore x\delta'(x) = -\delta(x)$

5) $\int dx\ \ f(x)\delta(ax) = \frac{1}{a}\int dy\ \ f(y/a)\delta(y) = \frac{1}{a}f(0) \quad \therefore \delta(ax) = \frac{1}{a}\delta(x)$

6) $\int dx\ \ f(x)\delta(x^2-a^2) = \int_{-\infty}^{0} dx\ \ f(x)\delta(x^2-a^2) + \int_{0}^{\infty} dx\ \ f(x)\delta(x^2-a^2)$

กำหนดให้

$$u = x^2 - a^2 \quad , \quad du = 2xdx \quad , \quad x = \pm(u^2+a^2)^{1/2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \ f(x)\delta(x^2-a^2) = \int_{-\infty}^{0}\frac{du}{-2(u^2+a^2)^{1/2}} f\left(-(u^2+a^2)^{1/2}\right)\delta(u)$$

$$+ \int_{0}^{\infty}\frac{du}{2(u^2+a^2)^{1/2}} f\left((u^2+a^2)^{1/2}\right)\delta(u)$$

$$= \frac{1}{2a}f(-a) + \frac{1}{2a}f(a)$$

ดังนั้น $\delta(x^2-a^2) = \frac{1}{2a}\delta(x+a) + \frac{1}{2a}\delta(x-a)$

7) $\int da\ \ g(a)\int dx\ \ f(x)\delta(x-a)\delta(x-b) = \int dx\ \ f(x)\delta(x-b)g(x)$

$$= f(b)g(b)$$

3.4 ปริภูมิโมเมนตัมและปริภูมิพิกัด

ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชั่นคลื่นในปริภูมิพิกัด $\psi(x)$ และฟังก์ชั่นคลื่นในโมเมนตัมพิกัด $\phi(p)$ คือ

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) e^{ipx/\hbar}\, dp$$

และ

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-ipx/\hbar}\, dx$$

ในการแปลงฟูเรียร์ นักฟิสิกส์นิยมใช้ $\hbar = 1$ ซึ่งจะทำให้ได้

$$\overline{\phi}(p/\hbar) = \sqrt{\hbar}\phi(p)$$

ตัวแปร $p/\hbar = 2\pi/\lambda \equiv k$ เมื่อ k เป็นเลขคลื่น

เมื่อใช้ $p/\hbar = 2\pi/\lambda \equiv k$ และอาศัย

$f = \psi,\ g = \sqrt{\hbar}\phi$ จะได้

$$\int \psi^* \psi dx = \int \phi^* \phi dp$$

ออฟเพอเรเตอร์ของโมเมนตัมและพิกัด

ถ้าเราทราบค่าสเตทฟังก์ชั่น เราสามารถคำนวณค่าคาดหมายของฟังก์ชั่นต่างๆ เช่น ฟังก์ชั่นของตำแหน่ง ฟังก์ชั่นของโมเมนตัม ได้

$$\langle x \rangle = \int \psi^*(x) x \psi(x) dx$$
$$\langle f(x) \rangle = \int \psi^*(x) f(x) \psi(x) dx$$
$$\langle p \rangle = \int \phi^*(p) p \phi(p) dp$$
$$\langle f(p) \rangle = \int \phi^*(p) f(p) \phi(p) dp$$

ทั้งสี่สมการนี้ เราสามารถหาค่า $<x>$ ได้โดยใช้ $\psi(x)$ และหาค่า $<p>$ ได้โดยใช้ $\phi(p)$ แต่ที่จริงแล้วเราสามารถหา $<x>$ จาก $\phi(p)$ และ หา $<p>$ จาก $\psi(x)$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\langle p\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\phi^*(p)p\phi(p)dp \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\int\phi^*(p)p\psi(x)e^{-ipx/\hbar}dxdp \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\int_{-\infty}^{\infty}\int\psi^*(x')e^{ipx'/\hbar}p\psi(x)e^{-ipx/\hbar}dxdx'dp\end{aligned}$$

เนื่องจาก $$pe^{-ipx/\hbar} = \frac{-\hbar}{i}\frac{d}{dx}e^{-ipx/\hbar}$$

ดังนั้น $$\langle p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\int\int dpdxdx'\psi^*(x')e^{ipx'/\hbar}\psi(x)\left(\frac{-\hbar}{i}\frac{d}{dx}e^{-ipx/\hbar}\right)$$

ใช้การอินทีเกรตทีละส่วน และอาศัย $\psi(x)=0$ ที่ ∞ จะได้

$$\langle p\rangle = \frac{1}{2\pi\hbar}\int\int\int dpdxdx'\psi^*(x')\left[e^{ip(x'-x)/\hbar}\right]\frac{\hbar}{i}\frac{d\psi(x)}{dx}$$

อินทีเกรตเทียบกับ p จะได้

$$\begin{aligned}\langle p\rangle &= \int\int dxdx'\psi^*(x')\frac{\hbar}{i}\frac{d\psi(x)}{dx}\delta(x-x') \\ &= \int dx\psi^*(x)\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\psi(x)\end{aligned}$$

เทียบกับ

$$\langle p\rangle = \int dx\psi^*(x)\hat{p}\psi(x)$$

เมื่อ $\hat{p}$ เป็นออฟเพอเรเตอร์ จะได้

$$\hat{p}\psi(x) = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\psi(x)$$

เช่นเดียวกัน สำหรับ p^n

$$\begin{aligned}\langle p^n\rangle &= \int\phi^*(p)p^n\phi(p)dp \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar}\int\int\int dpdx'dx\psi^*(x')e^{ipx'/\hbar}p^n\psi(x)e^{-ipx/\hbar}\end{aligned}$$

หรือ

$$\left\langle p^n \right\rangle = \frac{1}{2\pi\hbar}\int\int\int dp dx' dx \psi^*(x') e^{ipx'/\hbar} \psi(x) \left(\frac{-\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)^n e^{-ipx/\hbar} \tag{3.4}$$

โดยอาศัย

$$\begin{aligned} p^n e^{-ipx/\hbar} &= \left(\frac{-\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)^n e^{-ipx/\hbar} \\ &\equiv \left(\frac{-\hbar}{i}\right)^n \frac{d^n\left(e^{-ipx/\hbar}\right)}{dx^n} \end{aligned}$$

ใช้วิธีอินทีเกรตทีละส่วน n ครั้ง จะได้

$$\left\langle p^n \right\rangle = \frac{1}{2\pi\hbar}\int\int\int dp dx' dx \psi^*(x') e^{ip(x'-x)/\hbar} \left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)^n \psi(x)$$

อินทีเกรตเทียบกับ p จะได้ $2\pi\hbar\delta(x'-x)$

$$\begin{aligned} \left\langle p^n \right\rangle &= \int dx\, \psi^*(x)\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)^n \\ &\equiv \int dx\, \psi^*(x)\left(\frac{\hbar}{i}\right)^n \frac{d^n\psi(x)}{dx^n} \end{aligned}$$

สำหรับฟังก์ชั่นของ p ใดๆ $f(p)$

$$\left\langle f(p) \right\rangle = \int \psi^*(x) f\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)\psi(x) dx$$

เช่นเดียวกัน

$$\begin{aligned} \left\langle x \right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(p)\hat{x}\phi(p) dp \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(p)\left(\frac{-\hbar}{i}\frac{d}{dp}\right)\phi(p) dp \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} \left\langle x^n \right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(p)\hat{x}^n\phi(p) dp \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(p)\left(\frac{-\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}\right)^n\phi(p) dp \end{aligned}$$

$$\langle f(x)\rangle = \int \phi^*(p) f(x) \phi(p) dp$$

$$= \int \phi^*(p) f\left(\frac{-\hbar}{i}\frac{d}{dp}\right) \phi(p) dp$$

	ตัวแปรพลศาสตร์	
	ตำแหน่ง	โมเมนตัม
ปริภูมิตำแหน่ง	x	$\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$
ปริภูมิโมเมนตัม	$\frac{-\hbar}{i}\frac{d}{dp}$	p

พลังงานจลน์ $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$

$$\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)^2 = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$$

สำหรับปริภูมิพิกัด

$$\hat{A}(x, p) = \hat{A}\left(x, \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)$$

สำหรับปริภูมิโมเมนตัม

$$\hat{A}(x, p) = \hat{A}\left(\frac{-\hbar}{i}\frac{d}{dx}, p\right)$$

ออฟเพอเรเตอร์ ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชั่นไปเป็นอีกฟังก์ชั่นหนึ่ง ขบวนการนี้เรียกว่า ออฟเพอเรชั่น เราสามารถเขียน ได้ว่า

$$\hat{A}f(x) = g(x)$$

เมื่อ $\hat{A}$ เป็นออฟเพอเรเตอร์ ตัวอย่างของออฟเพอเรเตอร์ แสดงในตารางที่ 3.1

ตารางที่ 3.1 ตัวอย่างของออฟเพอเรเตอร์และออฟเพอเรชั่น

ออฟเพอเรชั่น	สมการ	ออฟเพอเรเตอร์
การคูณด้วย 2	$Af = 2f$	$A = 2$
การคูณด้วย $e^{i\phi(x)}$	$Af = e^{i\phi(x)}f$	$A = e^{i\phi(x)}$
การดิฟเฟอเรนชิเอท	$Af = df/dx$	$A = d/dx$
การยกกำลังสอง	$Af = f^2$	$A = \hat{}^{2}$
การทำให้เป็นสังยุคเชิงซ้อน	$Af = f^*$	$A = ^*$

ออฟเพอเรเตอร์ในวิชากลศาสตร์ควอนตัม เป็นออฟเพอเรเตอร์ชนิดเชิงเส้น (linear operator) นั่นคือ

$$A(f_1 + f_2) = Af_1 + Af_2$$

ออฟเพอเรเตอร์ในตารางที่ 3.1 เป็นชนิดเชิงเส้นทุกตัว ยกเว้นออฟเพอเรเตอร์การยกกำลังสอง เพราะว่า

$$A(f_1 + f_2) \equiv (f_1 + f_2)^2 = f_1^2 + 2f_1f_2 + f_2^2$$

แต่ $Af_1 + Af_2 = f_1^2 + f_2^2$ ซึ่งมีค่าไม่เท่ากัน

ออฟเพอเรเตอร์การยกกำลังสอง จึงไม่เป็นออฟเพอเรเตอร์ชนิดเชิงเส้น ส่วนออฟเพอเรเตอร์การคูณด้วย 2 จะได้

$$A(f_1 + f_2) = 2f_1 + 2f_2$$

ซึ่งเท่ากับ

$$Af_1 + Af_2 = 2f_1 + 2f_2$$

จึงเป็นออฟเพอเรเตอร์ชนิดเชิงเส้น

ลำดับของออฟเพอเรเตอร์ที่กระทำกับฟังก์ชั่นพร้อมกัน อาจจะมีผลต่อการคำนวณด้วย สมมุติว่า ออฟเพอเรเตอร์ B กระทำกับฟังก์ชั่นหนึ่ง และออฟเพอเรเตอร์ A กระทำกับผลลัพธ์ที่ได้นั้น

$$A(Bf)$$

หรือ อาจจะละวงเล็บทิ้ง

$$ABf$$

ถ้า C เป็นออฟเพอเรเตอร์ ตัวใหม่ที่ทำให้ผลลัพธ์เหมือนกัน จะเขียนได้ว่า

$$Cf = ABf$$

หรือ $$C = AB$$

C มีชื่อเรียกว่า ผลคูณของ A และ B

ออฟเพอเรเตอร์ยกกำลังสอง เป็นกรณีพิเศษของผลคูณ

$$= C = AA = A^2$$

ตัวอย่างที่ 3.1 ถ้า A เป็นการคูณด้วย $e^{i\phi(x)}$ และ B เป็นการดิฟเฟอเรนชิเอท ดังนั้น

$$ABf = e^{i\phi(x)}\frac{df}{dx}$$

$$ABf = e^{i\phi(x)}\frac{df}{dx}\left[e^{i\phi(x)}f(x)\right]$$

$$B^2 f = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

$$A^2 f = e^{i\phi(x)}f$$

ลำดับของออฟเพอเรเตอร์ จะเป็นตัวบ่งว่า ออฟเพอเรเตอร์ตัวใด กระทำก่อนหรือหลัง ซึ่งโดยทั่วไปผลลัพธ์ที่ได้จะขึ้นกับลำดับของออฟเพอเรเตอร์ นั่นคือ

$$AB \neq BA$$

เรียกว่า ออฟเพอเรเตอร์เป็นชนิดไม่สลับที่ (non-commutative) ซึ่งตรงข้ามกับตัวเลขในวิชาพีชคณิต

ตัวอย่างที่ 3.2 ถ้า $A = \frac{d}{dx}$ และ $B = e^{i\phi(x)}$ ออฟเพอเรเตอร์ทั้งสองเป็นชนิดสลับที่ หรือไม่

วิธีทำ

$$ABf = \frac{df}{dx}\left[e^{i\phi(x)}f\right]$$

$$= ie^{i\phi(x)}\frac{d}{dx}\phi(x) + e^{i\phi(x)}\frac{df}{dx}$$

$$BAf = e^{i\phi(x)}\frac{df}{dx}$$

ดังนั้น

$$ABf \neq BAf$$

หรือ

$$AB \neq BA$$ จึงเป็นชนิดไม่สลับที่

ตัวอย่างที่ 3.3 ถ้า $B = \frac{d}{dx}$ และ $C = ^*$ ออฟเพอเรเตอร์ทั้งสองเป็นชนิดสลับที่ หรือไม่

วิธีทำ

$$BCf = \frac{df^*}{dx}$$

$$CBf = \left(\frac{df}{dx}\right)^* = \frac{df^*}{dx}$$

สมมุติว่า $f = x^2 + ix$

$$BCf = \frac{d}{dx}\left(x^2 + ix\right)^*$$

$$= \frac{d}{dx}\left(x^2 - ix\right)$$

$$= 2x - i$$

$$CBf = \left[\frac{d}{dx}\left(x^2 - ix\right)\right]^*$$

$$= [2x + i]^*$$

$$= 2x - i$$

ดังนั้น

$$BC = CB$$

ออฟเพอเรเตอร์ทั้งสองเป็นชนิดสลับที่

ตัวอย่างที่ 3.4 กำหนดให้ $A = \frac{d}{dx}$ และ $B = x$ ออฟเพอเรเตอร์ ทั้งสองเป็นชนิดสลับที่ หรือไม่

วิธีทำ

$$ABf = \frac{d}{dx}[xf] = x\frac{df}{dx} + f$$

$$BAf = x\frac{df}{dx}$$

ดังนั้น $AB \neq BA$ จึงเป็นชนิดไม่สลับที่

3.5 ความสัมพันธ์สลับที่ (Commutation relations)

จากทฤษฎีทางฟิสิกส์ดั้งเดิม ผลคูณ xp จะเท่ากับ px แต่ทางควอนตัมจะไม่เท่า

$$xp\,\psi(x) = x\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\psi = \frac{\hbar}{i}x\frac{d\psi}{dx}$$

และ

$$px\,\psi(x) = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}(x\psi) = \frac{\hbar}{i}\psi + \frac{\hbar}{i}\times\frac{d\psi}{dx}$$

ดังนั้น

$$(px - xp)\psi = \frac{\hbar}{i}\psi$$

ความแตกต่างระหว่างผลคูณ px และ xp จะเป็นออฟเพอเรเตอร์เชิงตัวเลข และมีค่าเท่ากับ $\hbar/i$

$$(px - xp) \equiv (p,x) = \frac{\hbar}{i}$$

ผลต่างระหว่างผลคูณของออฟเพอเรเตอร์ 2 ตัวที่สลับที่กัน เรียกว่า ตัวสลับที่ (commutator)

ถ้า A และ B เป็นออฟเพอเรเตอร์ใด ๆ

$$(A,B) \equiv AB - BA = -(B,A)$$

ตรงข้ามกับการคูณโดยทั่วไป ผลคูณของตัวแปรพลศาสตร์ในกลศาสตร์ควอนตัมจะไม่สลับที่

พิจารณาการสลับที่ของ p และ x ในปริภูมิโมเมนตัม

$$xp\phi(p) = \frac{-\hbar}{i}\frac{d}{dp}(p\phi) = \frac{-\hbar}{i}\phi - \frac{\hbar}{i}p\frac{d\phi}{dp}$$

และ

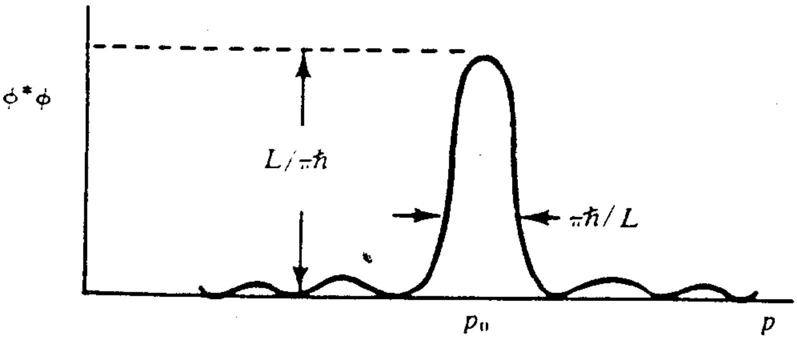
$$px\,\phi(p) = p\left(\frac{-\hbar}{i}\frac{d}{dp}\right)\phi = \frac{-\hbar}{i}p\frac{d\phi}{dp}$$

ดังนั้น

$$(p,x)\phi = (px - xp)\phi = \frac{\hbar}{i}\phi$$

หรือ

$$(p,x) = \hbar/i$$



รูปที่3.2 การกระจายของโมเมนตัมของหมู่คลื่นรูปสี่เหลี่ยมจตุรัส

หมู่คลื่นรูปเกาส์เซียน

พิจารณาหมู่คลื่นรูปเกาส์เซียน

$$\psi(x) = \sqrt{1/L\sqrt{\pi}}\ \exp\left[\frac{ip_0 x}{\hbar} - \frac{x^2}{2L^2}\right]$$

เป็นสเตทฟังก์ชั่นใช้แทนอนุภาคซึ่งอยู่ภายในช่วงระยะทาง L จากจุดกำเนิด และมีโมเมนตัมเฉลี่ย p_0 ในปริภูมิโมเมนตัม จะได้

$$\phi(p) = \sqrt{L/\hbar\sqrt{\pi}}\ \exp\left[-(p-p_0)^2 L^2/2\hbar^2\right]$$

ซึ่งยังคงเป็นกราฟเกาส์เซียนที่มีความกว้างแปรผกผันกับ L จะเห็นได้ว่าโมเมนตัมมีค่าอยู่ในช่วง $\hbar/L$ โดยที่จุดศูนย์กลางของช่วงอยู่ที่ p_0

$$\Delta x \sim 2L$$

$$\Delta p \sim \frac{2\hbar}{L}$$

ดังนั้น $$\Delta x \Delta p \sim \hbar$$

ตัวอย่างที่ 3.5 กำหนดให้ $\psi(x) = Ae^{-x^2/2a^2}$ จงพิสูจน์หลักความไม่แน่นอน

วิธีทำ จาก

$$\psi(x) = Ae^{-x^2/2a^2}$$

$$p(x) = |A|^2 e^{-x^2/a^2}$$

$$\Delta x \sim 2a$$

$$\phi(p) = \int \psi(x) e^{-ipx/\hbar} dx$$

$$= Be^{-p^2a^2/2\hbar^2}$$

$$P(p) = |B|^2 e^{-p^2a^2/\hbar^2}$$

$$\Delta p \sim 2\hbar/a$$

$$\Delta x \Delta p \sim \hbar$$

พิจารณาหมู่คลื่นรูปต่อไปนี้

$$\psi(x) = f(x) e^{ip_0x/\hbar}$$

โดยที่ $f(x)$ เป็นค่าจริงและเป็นฟังก์ชั่นชนิดเรียบ (smooth function) ซึ่งมีความกว้าง L และจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด ถ้า ψ ถูกนอร์มอลไลซ์

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx = 1$$

เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\langle p \rangle = p_0$$ สำหรับหมู่คลื่นนี้

และเราสามารถหา $\phi(p)$ ได้

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i(p_0 - p)x/\hbar} dx$$

เนื่องจาก $f(x)$ เป็นฟังก์ชั่นชนิดเรียบ มีพีกอยู่ที่จุดกำเนิดและมีความกว้าง L ดังนั้น ส่วนที่มีผลต่อการอินทีเกรตจะอยู่ในช่วง $|x| \leq L$

ถ้า $$(p_0 - p)L/\hbar << 1$$

จะสามารถตัดเทอมเอ็กโพเนนเชียลทิ้งได้ ทำให้ $\phi(p)$ มีค่าคงที่ และเป็นสัดส่วนกับพื้นใต้ฟังก์ชั่น $f(x)$ เมื่อ $(p_0 - p)$ มีค่าเพิ่มขึ้น เทอมเอ็กโพเนนเชียลจะเริ่มต้นสั่นเร็วขึ้น จนกระทั่ง $\phi(p)$ มีค่าน้อย จุดที่เริ่มเกิดการสั่น คือ

$$(p_0 - p)L/\hbar \cong 1$$

ดังนั้น ความกว้างของหมู่คลื่นในปริภูมิโมเมนตัม

$$\Delta p \cong \hbar / L$$

แต่ความกว้างในปริภูมิตำแหน่ง $\Delta x = L$

ดังนั้น $\Delta x \Delta p \cong \hbar$ เมื่อ $f(x)$ เป็นชนิดเรียบ

ถ้า $f(x)$ เป็นชนิดไม่เรียบแต่ยังคงมีรูปร่าง ดังนั้น $(p_0 - p)$ จะมีค่ามากกว่าเดิม ถ้าการสั่นของเทอมเอ็กโพเนนเชียลเร็วมาก ทำให้ความกว้าง Δp ของกลุ่มคลื่นมีค่ามาก จะได้

$$\Delta p \Delta x \geq \hbar$$

และเช่นเดียวกัน ถ้าพลังงานของระบบมีค่าอยู่ในช่วง ΔE ช่วงเวลาในการวัด Δt จะมีความสัมพันธ์กันดังนี้

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar$$

ตัวอย่างที่ 3.6 ถ้าอนุภาคถูกดึงดูดอยู่ภายในปริมาตรหนึ่ง (รัศมี a) ด้วยแรงดึงดูด $V(r)$ โดยที่ $V(r) \sim \frac{1}{a}$ จงใช้หลักความไม่แน่นอน หาค่าพลังงานต่ำสุด

วิธีทำ

$$\Delta x \sim a$$

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{a}$$

$$\langle p \rangle = 0$$

$$\langle p \rangle = \frac{(\Delta p)^2}{2m} \geq \frac{\hbar^2}{2ma^2}$$

$$
\begin{aligned}
E &= \langle T \rangle + \langle V \rangle \\
&\cong \frac{\hbar^2}{2ma^2} + V(a) \\
&\cong \frac{\hbar^2}{2ma^2} - \frac{e^2}{a^2}
\end{aligned}
$$

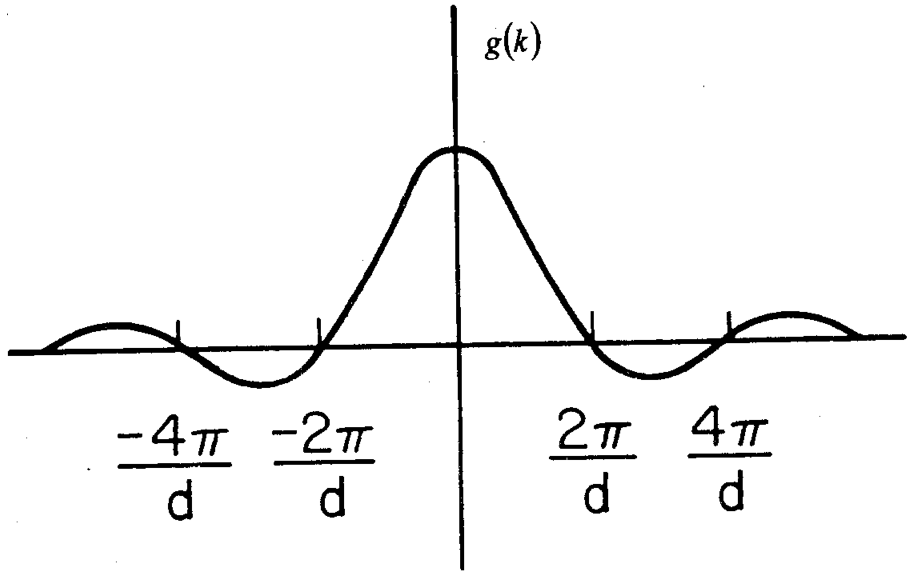
หาค่าต่ำสุดของ a

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0$$

$$\frac{-2\hbar^2}{2ma^2} + \frac{e^2}{a^2} = 0$$

$$a = \frac{\hbar^2}{me^2}$$ ซึ่งเป็นค่ารัศมีบอร์

ดังนั้น จากหลักความไม่แน่นอน อธิบายได้ว่า อิเล็กตรอนจะไม่ตกลงสู่นิวเคลียส เพราะว่าอิเล็กตรอนจะต้องมีพลังงานต่ำที่สุด ซึ่งจะมีค่าน้อยกว่านี้ไม่ได้อีกแล้ว



ตัวอย่างที่ 3.8 จงหาการแปลงฟูเรียร์ $g(k)$ สำหรับกลุ่มคลื่น $\psi(x)$ เมื่อ

$$\psi(x) = he^{ik_0 x} \quad , -d/2 \le x \le +d/2$$

$$= 0 \quad , \text{ อื่นๆ}$$

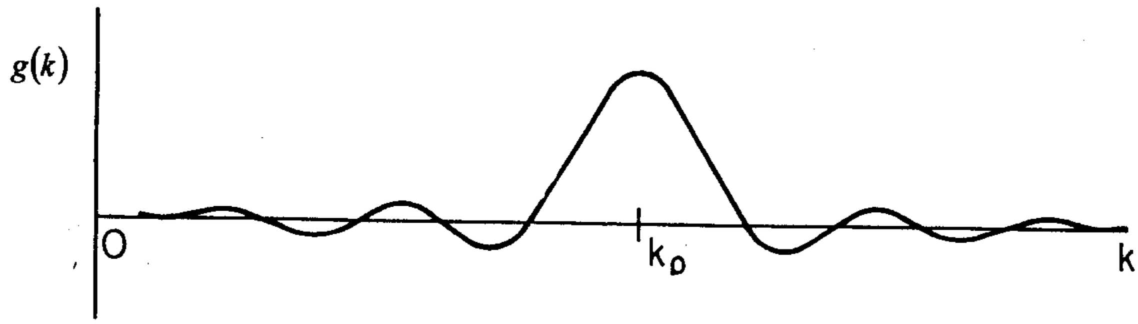
วิธีทำ จาก $g(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx}\, dx$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{-ikx}\, dx$$

$$= \int_{-d/2}^{+d/2} he^{i(k_0-k)x}\, dx$$

$$= \left. \frac{he^{i(k_0-k)x}}{i(k_0-k)} \right|_{-d/2}^{+d/2}$$

$$= hd\, \frac{\sin\left((k_0-k)d/2\right)}{\left((k_0-k)d/2\right)}$$



ตัวอย่างที่ 3.9 จงหาการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชั่น

$$f(x) = \frac{\delta}{\pi}\frac{1}{\delta^2 + x^2}$$

เมื่อ δ เป็นค่าคงที่บวก และไม่เท่ากับศูนย์

วิธีทำ

$$g(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx}\, dx$$

$$= \frac{\delta}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\delta^2 + x^2\right)^{-1} e^{-ikx}\, dx$$

$$= \frac{2\delta}{\pi} \int_0^\infty \left(\delta^2 + x^2\right)^{-1} \cos\, kx\, dx$$

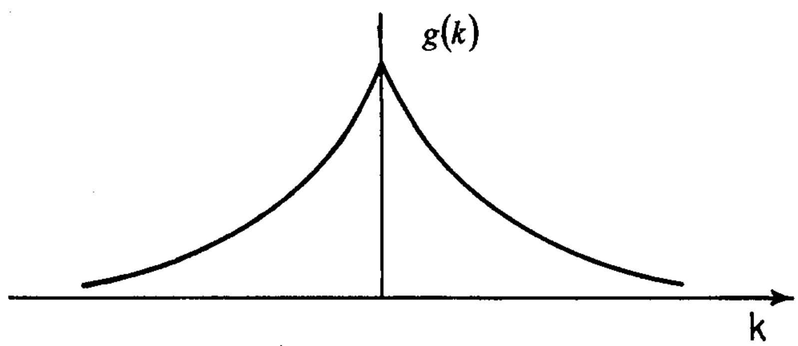
$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left(1 - y^2\right)^{-1} \cos\, \left(k\delta y\right) dy$$

เมื่อ $y = x/\delta$

จากคณิตศาสตร์ จะได้

$$g(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot e^{-\delta|k|}$$

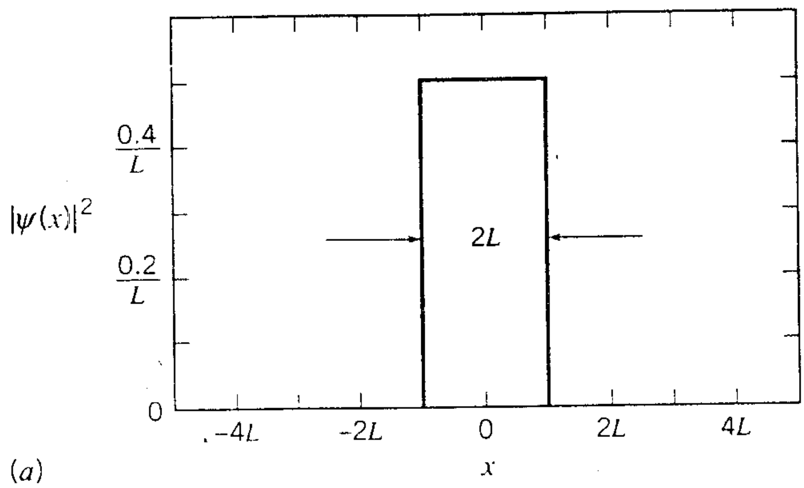
$$= e^{-\delta|k|} \qquad \text{ถ้า } \delta > 0$$



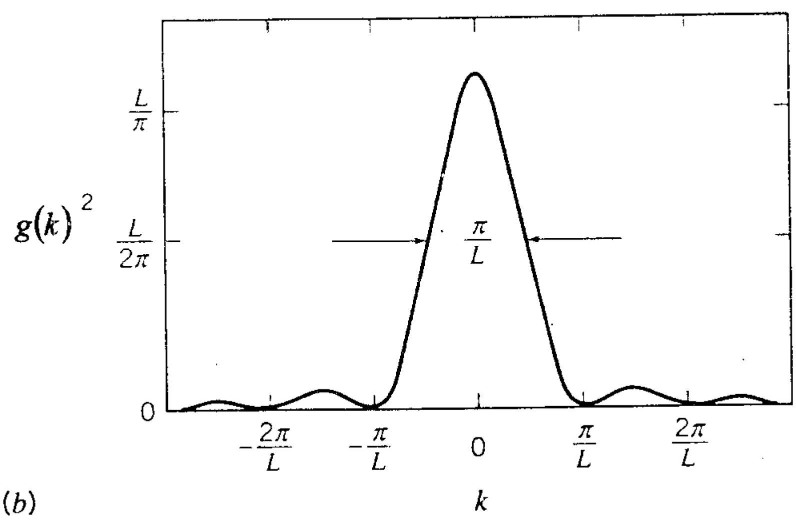
กำลังสองของ $g(k)$ คือ

$$|g(k)|^2 = \frac{1}{\pi L}\frac{\sin^2(kL)}{k^2}$$

กราฟแสดงการกระจายของเลขคลื่น คือ



(a)



(b)