บทที่ 2
ฟังก์ชั่นคลื่น

วัตถุประสงค์

1) ศึกษาฟังก์ชั่นคลื่น
2) ศึกษาภาวะนอร์มอลไลซ์
3) ศึกษาการซ้อนทับของฟังก์ชั่นคลื่น
4) ศึกษาค่าคาดหมาย
5) ศึกษาหมู่คลื่น
6) ศึกษาหลักความไม่แน่นอนของไฮเซนแบร์ก

คลื่นจากฟิสิกส์ดั้งเดิม เช่น คลื่นในเส้นเชือก คลื่นเสียงหรือคลื่นแสง จะมีความหนาแน่นของพลังงาน (พลังงานต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรในคลื่น) เป็นสัดส่วนกับกำลังสองของฟังก์ชั่นคลื่น ความเข้ม (ความหนาแน่นของพลังงานคูณอัตราเร็วของคลื่น) ก็เป็นอัตราส่วนกับกำลังสองของฟังก์ชั่นคลื่น สำหรับคลื่นในเส้นเชือกฟังก์ชั่นคือ การกระจัดของเส้นเชือก $y(x,t)$ สำหรับคลื่นเสียงในอากาศฟังก์ชั่นคลื่น คือ การกระจัดของโมเลกุลของอากาศจากจุดสมดุลย์ หรือการเปลี่ยนแปลงของความดันเนื่องจากคลื่นเสียง สำหรับแสงและคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าอื่น ฟังก์ชั่นคลื่น คือ สนามไฟฟ้า ε

ฟังก์ชั่นคลื่นของคลื่นอิเล็กตรอน (หรือคลื่นสสารอื่น) แทนด้วยอักษรกรีก ψ คือ ผลเฉลย (solution) สมการชเรอดิงเงอร์ เช่นเดียวกับที่ฟังก์ชั่นคลื่น ε เป็นผลเฉลยของสมการคลื่นดั้งเดิมของแสง

$$\psi = \psi(x,t)$$

เป็นฟังก์ชั่นของพิกัด x (1 มิติ) และเวลา t

2.1 สเตทฟังก์ชั่น (state function) หรือฟังก์ชั่นคลื่น (wave function)

ในฟิสิกส์ดั้งเดิม จะหาค่าปริมาณต่างๆของระบบได้ ถ้าในช่วงเวลาหนึ่งเราทราบค่าพิกัด (x, y, z) โมเมนตัม (p_x, p_y, p_z) ของอนุภาคในระบบหรือแรงระหว่างอนุภาคเหล่านั้น แต่ในทฤษฎีควอนตัมจะอาศัยฟังก์ชั่นคลื่นของระบบ (ประกอบด้วยอนุภาค 1 ตัว หรือมากกว่า) ในการอธิบายระบบ ตัวอย่างของฟังก์ชั่นคลื่น คือ

ก) $\psi(x) = Ae^{-(x-x_0)^2/2L^2}$

ข) $\psi(x) = Ae^{i(x-x_0)/a}$

ค) $\psi(x) = A\sin kx$

ง) $\psi(x,t) = 3e^{ipt}A\sin\dfrac{3\pi x}{L}$

จ) $\psi(x) = B\sin\dfrac{\pi x}{\lambda} + C\sin\dfrac{2\pi x}{\lambda}$

ฉ) $\psi(x) = Ae^{igx} + Be^{-igx}$

ช) $\psi(x) = Ae^{ip_x x/\hbar} \cdot e^{-(x-x_0)^2/4E}$

เนื่องจาก สมการชเรอดิงเงอร์ ประกอบด้วยจำนวนจินตภาพ $i = \sqrt{-1}$ ฟังก์ชั่นคลื่นที่ใช้ในการอธิบายการเคลื่อนที่ของอนุภาค จึงไม่จำเป็นที่จะต้องเป็นค่าจริง อาจจะเป็นค่าเชิงซ้อนได้ แต่เนื่องจากความน่าจะเป็น (probability) จะต้องเป็นค่าจริงเสมอ จึงใช้ค่า $|\psi|^2$ แทนโอกาสในการพบอนุภาคภายในบริเวณหนึ่ง เนื่องจากโอกาสในการพบอนุภาคภายในปริมาตร dV จะเป็นสัดส่วนกับปริมาตร dV ดังนั้นในหนึ่งมิติ โอกาสที่จะพบอนุภาคในช่วง dx คือ $|\psi|^2$ dx ถ้ากำหนดให้ P (x , t) เป็นความน่าจะเป็นในการพบอนุภาคที่เวลา t ภายในช่วง dx จะได้

$$P(x,t) = |\psi(x,t)|^2 dx$$

$$= \psi^*(x,t)\psi(x,t)dx \geq 0$$

ψ^* เป็นสังยุคเชิงซ้อน (complex conjugate) ของ ψ

กำหนดให้ $$\rho(x,t)dx = \frac{P(x,t)dx}{\int P(x,t)dx}$$

เมื่อ $\rho(x,t)$ เป็นความน่าจะเป็นสัมบูรณ์ (absolute probabilities)

หรือ $$\rho(x,t) = \frac{\psi^*(x,t)\psi(x,t)}{\int \psi^*(x,t)\psi(x,t)dx}$$

เมื่อการอินทีเกรทครอบคลุมไปทั่วปริภูมิ (space) ซึ่งค่า ρdx ที่จริงก็คือค่าความน่าจะเป็นสัมบูรณ์

$$\int \rho dx = 1$$

หมายความว่า ความน่าจะเป็นในการพบอนุภาคที่ใดที่หนึ่งภายในปริภูมิ รวมกันทั้งหมดจะมีค่าเท่ากับหนึ่ง

หรือ $$\int \psi^*\psi\, dx = 1$$

ฟังก์ชั่นคลื่นที่เป็นไปตามสมการข้างบนนี้ เรียกว่า **ฟังก์ชั่นคลื่นถูกนอร์มอลไลซ์** **(normalized)** และภาวะเช่นนี้ เรียกว่า**ภาวะนอร์มอลไลซ์** **(normalization)** สำหรับฟังก์ชั่นคลื่นนอร์มอลไลซ์ $\psi^*\psi$ จะเป็นความหนาแน่นของความน่าจะเป็น

$$\rho(x,t) = \psi^*(x,t)\psi(x,t)$$

และอาจจะคิดว่า ψ เป็นแอมพลิจูดของความน่าจะเป็น (probability amplitude)

ตัวอย่างที่ 2.1 อนุภาคจากฟิสิกส์ดั้งเดิมเคลื่อนที่กลับไปกลับมาด้วยอัตราเร็วคงที่ระหว่างผนังสองด้านที่ x = 0 และ x = 8 เซนติเมตร

ก)จงหาความหนาแน่นของความน่าจะเป็น P(x)

ข)จงหาโอกาสในการพบอนุภาคที่ x = 2 เซ็นติเมตร

ค)จงหาโอกาสในการพบอนุภาคอยู่ระหว่าง x = 3.0 เซนติเมตรและ x = 3.4 เซนติเมตร

วิธีทำ ก) เราไม่ทราบตำแหน่งเริ่มต้นของอนุภาคเพราะว่า อนุภาคเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วคงที่ อนุภาคจะอยู่ที่ตำแหน่งใดก็ได้ภายในระหว่าง $0 < x < 8$ เซ็นติเมตร ดังนั้นความหนาแน่นของความน่าจะเป็น $P(x)$ จึงมีค่าคงที่ไม่ขึ้นกับพิกัด x ภายในช่วง $0 < x < 8$ เซนติเมตร และมีค่าเท่ากับศูนย์ภายนอกช่วงนี้

$$\begin{aligned} P(x) &= P_0 \quad , \quad 0 < x < 8 \\ &= 0 \quad , \quad x < 0 \text{ หรือ } x > 8 \end{aligned}$$

ความน่าจะเป็นในการพบอนุภาคในช่วง dx ที่จุด x_1 หรือที่จุด x_2 มีค่าเท่ากับผลรวมของความหนาแน่นจะเป็นในแต่ละจุด $P(x_1)\,dx + P(x_2)\,dx$ เนื่องจากอนุภาคจะต้องอยู่ที่ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่ง ผลรวมของความน่าจะเป็นทั้งหมดจะเท่ากับ 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\,dx = \int_{0}^{8\,cm} P_0\,dx = P_0(8) = 1$$

หมายเหตุ การอินทีเกรตกระทำจากศูนย์ 0 ถึง 8 เซนติเมตรเท่านั้น เพราะว่า $P(x)$ เป็นศูนย์ภายนอกช่วงนี้ (ฟิสิกส์ดั้งเดิม)

ดังนั้น $$P_0 = \frac{1}{8}$$

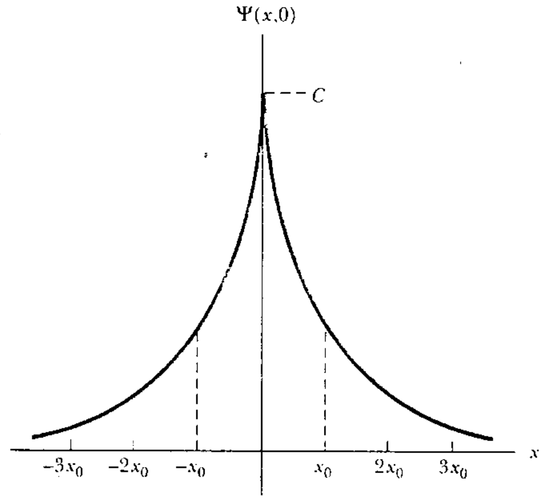
ข) โอกาสในการพบอนุภาคที่ dx จะเป็นสัดส่วนกับ dx เนื่องจาก $dx = 0$ โอกาสในการพบอนุภาคที่ $x = 2$ เท่ากับศูนย์

ค) เนื่องจากความหนาแน่นของความน่าจะเป็นมีค่าคงที่ โอกาสในการพบอนุภาคภายในช่วง Δx เท่ากับ $P_0 \Delta x$ โอกาสของอนุภาคที่จะอยู่ในช่วง $3.0 < x < 3.4$ มีค่าเท่ากับ

$$P_0 \Delta x = \left(\frac{1}{8}\right)(0.4) = 0.05$$

ตัวอย่างที่ 2.2 กำหนดให้ฟังก์ชั่นคลื่นของอนุภาคตัวหนึ่งมีค่าดังนี้ $\psi(x,0) = C\exp(-|x|/x_0)$ เมื่อ C และ x_0 มีค่าคงที่ จงวาดกราฟของฟังก์ชั่นคลื่นนี้ และจงหาค่า C ถ้าฟังก์ชั่นคลื่นถูกนอร์มอลไลซ์

วิธีทำ



รูปที่ 2.1 ฟังก์ชั่นคลื่น $\psi(x,0) = C\exp(-|x|/x_0)$

จาก
$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\psi(x)dx = 1$$

ดังนั้น
$$C^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|/x_0} dx = 1$$

หรือ
$$2C^2 \int_{0}^{\infty} e^{-2x/x_0} dx = 1$$

$$2C^2\left(\frac{x_0}{2}\right) = 1$$

$$C = 1/\sqrt{x_0}$$

ตัวอย่างที่ 2.3 จากตัวอย่าง 2.2 จงคำนวณโอกาสที่จะพบอนุภาคภายในช่วง $x_0 \le x \le x_0$

วิธีทำ

$$p = \int_{-x_0}^{x_0} |\psi(x,0)|^2 \, dx$$

$$= 2\int_{0}^{x_0} |\psi(x,0)|^2 \, dx$$

$$= 2C^2 \int_{0}^{x_0} e^{-2x/x_0} \, dx$$

$$= 2C^2 (x_0/2)(1 - e^{-2})$$

$$= 1 - e^{-2}$$

$$= 0.8647$$

โอกาสที่พบอนุภาคภายในช่วง $x_0 \le x \le x_0$ เท่ากับ 86.5%

2.2 การซ้อนทับของฟังก์ชั่นคลื่น (Superposition of wave function)

ให้ ψ_1 เป็นฟังก์ชั่นคลื่นที่เป็นไปได้ของระบบ
ψ_2 เป็นฟังก์ชั่นคลื่นอันที่สองที่เป็นไปได้ของระบบ

ดังนั้น

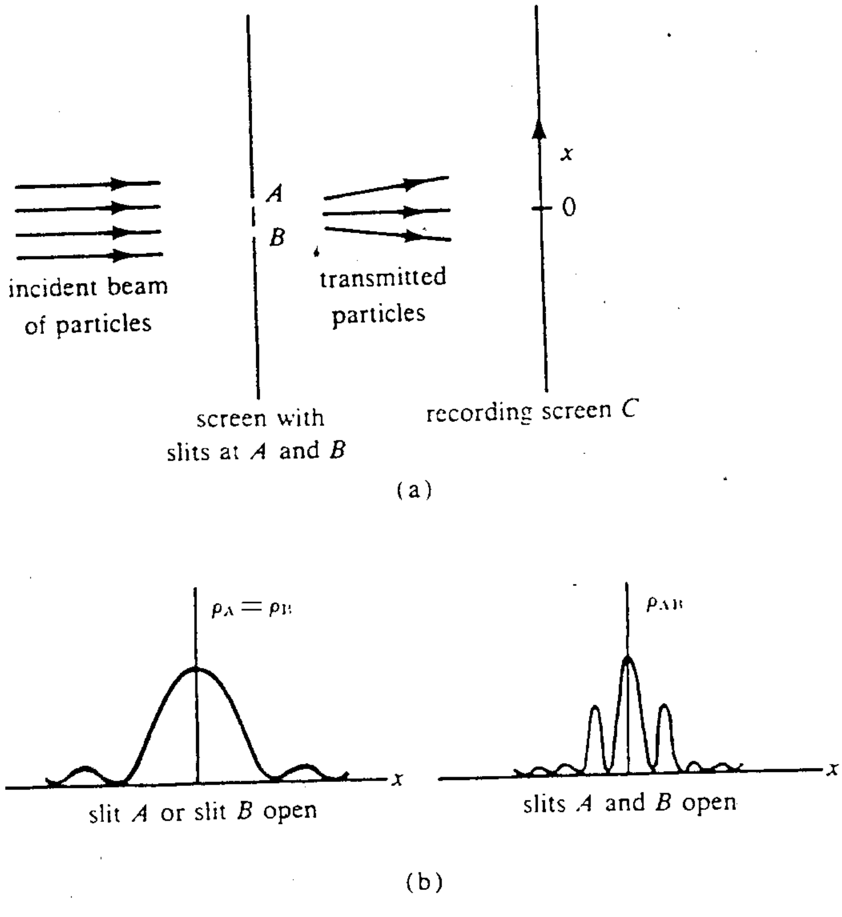
$$\psi_3 = a_1\psi_1 + a_2\psi_2$$

จะเป็นฟังก์ชั่นคลื่นที่เป็นไปได้อีกอันหนึ่งของระบบ เมื่อ a_1 และ a_2 เป็นค่าใดๆ ดังนั้น การซ้อนทับของเซทของฟังก์ชั่นคลื่นที่เป็นไปได้ จะทำให้ได้ฟังก์ชั่นคลื่นที่เป็นไปได้ของระบบ หลักการนี้มีชื่อเรียกว่า **หลักการซ้อนทับ (principle of superposition)**

พิจารณาฟังก์ชั่นคลื่น ψ_3 จะได้ความหนาแน่นของความน่าจะเป็นดังนี้

$$\psi_3^*\psi_3 = |a_1|^2\psi_1^*\psi_1 + |a_2|^2\psi_2^*\psi_2 + a_1a_2^*\psi_1\psi_2^* + a_1^*a_2\psi_1^*\psi_2$$

สองเทอมแรก คือ ผลรวมของความน่าจะเป็นฟังก์ชั่นคลื่น ซึ่งมีค่าเหมือนกับในกรณีของฟิสิกส์ดั้งเดิม แต่สองเทอมหลังเป็นเทอมที่ได้จากการสอดแทรก (interference) เป็นผลที่ได้จาก ψ_1 และ ψ_2 ร่วมกัน เครื่องหมายข้างหน้าเทอมทั้งสองได้มาจากเฟสสัมพัทธ์ของ $a_1\psi_1$ และ $a_2\psi_2$ อาจจะเป็นบวกหรือลบก็ได้ ถ้าเป็นบวกเป็นการสอดแทรกชนิดเสริม (constructive interference) แต่ถ้าเป็นลบ จะเป็นการสอดแทรกชนิดหักล้าง (destuctive interference)



รูปที่ 2.2 การทดลองสลิทคู่ a) การจัดการทดลอง b) การกระจายของอนุภาคบนฉาก C

ตัวอย่างที่น่าสนใจซึ่งแสดงถึงการซ้อนทับของคลื่น ก็คือ การทดลองโดยใช้ช่องเล็กยาวคู่ (double slit) ซึ่งจะสังเกตเห็นแบบอย่างการซ้อนทับ (interference pattern) บนฉากที่อยู่ข้างหลังดังแสดงในรูปที่ 2.2 (a) ลำอิเล็กตรอนเคลื่อนที่ผ่านช่อง A หรือช่อง B บนฉากด้านหน้า ไปตกกระทบกับฉากด้านหลัง ที่ฉากหลังจำนวนอิเล็กตรอนจะถูกบันทึกไว้ รูปที่ 2.2 (b) แสดงการกระจายของอิเล็กตรอนที่ได้ โดยรูปทางซ้ายเป็นการกระจายของอิเล็กตรอน เมื่อเปิดทั้งช่อง A และช่อง B พร้อมกัน

ให้ ψ_A แทนฟังก์ชั่นคลื่นของอิเล็กตรอนเมื่อช่อง A เปิดและช่อง B ปิด

ψ_B แทนฟังก์ชั่นคลื่นของอิเล็กตรอนเมื่อช่อง A ปิดและช่อง B เปิด

ψ_{AB} แทนฟังก์ชั่นคลื่นของอิเล็กตรอนเมื่อช่อง A เปิดและช่อง B เปิดทั้งคู่

ρ_A , ρ_B , ρ_{AB} แทนความหนาแน่นของความน่าจะเป็นที่สัมพันธ์กัน

$$\psi_{AB} = \psi_A + \psi_B$$

เมื่อ

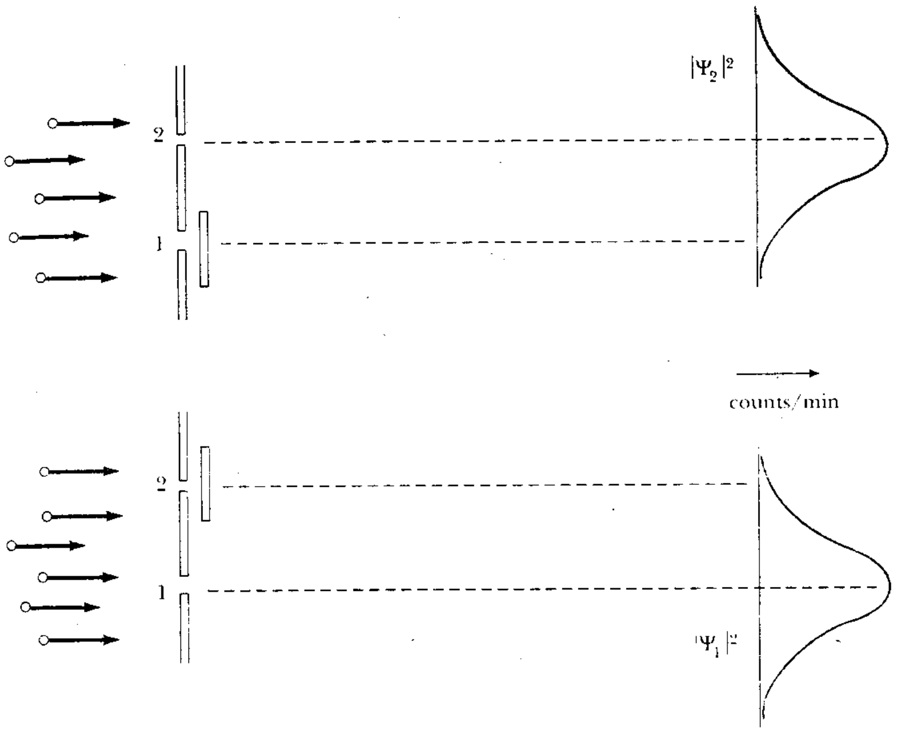
$$\rho_{AB} = |\psi_{AB}|^2 = |\psi_A|^2 + |\psi_B|^2 + \psi_A^*\psi_B + \psi_B^*\psi_A$$

เนื่องจาก $\rho_A = \rho_B$

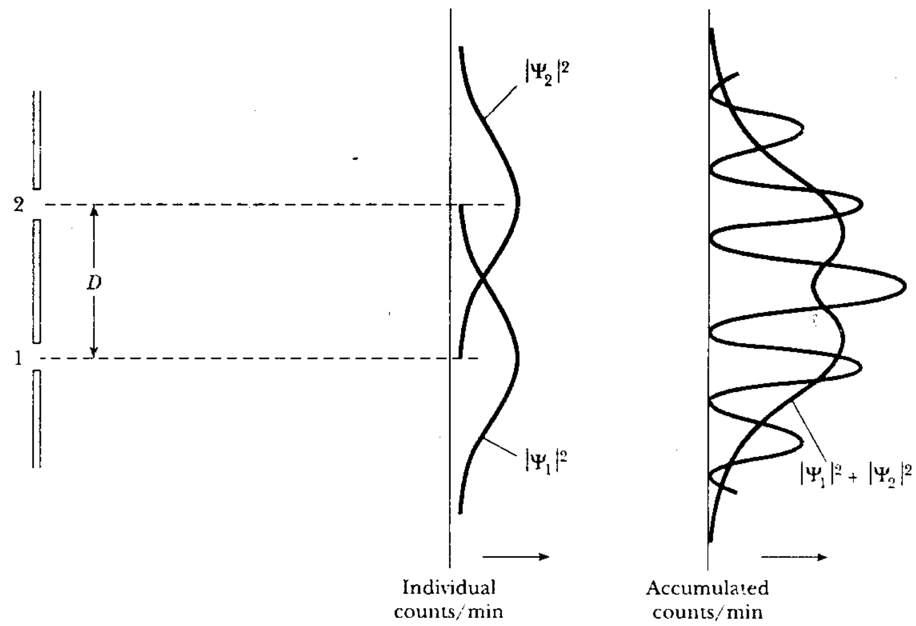
จะได้ $\rho_{AB} = 2\rho_A[1+\cos\delta(x)]$

เมื่อ $\delta(x)$ เป็นเฟสของ ψ_B เทียบกับ ψ_A

$$\psi_B = \psi_A e^{i\delta}$$



รูปที่ 2.3 โอกาสในการพบอิเล็กตรอนที่ฉากเมื่อสลิทอันใดอันหนึ่งปิด



รูปที่ 2.4 ผลจากการทดลองสลิทคู่

ตัวประกอบเฟส (**phase factor**) δ มีค่าเพิ่มขึ้นจากตำแหน่งศูนย์บนฉากไปตามแกน x และเกิดการซ้อนทับน้อยที่สุดเมื่อ δ มีค่าเป็นจำนวนเท่าที่เป็นเลขคี่ของ π ที่ตำแหน่งนี้จำนวนอิเล็กตรอนจะมีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งถ้าเปิดช่องเพียงช่องเดียวที่ตำแหน่งเดียวกันนี้ จะพบอิเล็กตรอนค่อนข้างมาก การทดลองนี้แสดงให้เห็นการซ้อนทับของฟังก์ชั่นคลื่น ของอิเล็กตรอนได้เป็นอย่างดี

ค่า ρ_{AB} ในกรณีนี้แตกต่างจากค่าที่ได้ฟิสิกส์ดั้งเดิม

$$\rho_{AB} = \rho_A + \rho_B = 2\rho_B$$

2.3 ค่าคาดหมาย (expectation values)

ค่าเฉลี่ยหรือค่าคาดหมายของตำแหน่ง จะสามารถเขียนได้เป็น $<x>$ โดยที่

$$<x> = \int x\rho(x,t)dx$$

ถ้า f(x) เป็นฟังก์ชั่นของตำแหน่งของอนุภาค

$$<f(x)> = \int f(x)\rho(x,t)dx$$

ตัวอย่างเช่น ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่ภายใต้ศักย์ V(x) และความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเท่ากับ $\rho(x,t)$ จะคำนวณหาค่าพลังงานศักย์เฉลี่ยได้จากสมการข้างบนโดยที่ f(x) = V(x)

$$<V(x)> = \int V(x)\rho(x,t)dx$$

$$<f(x)> = \frac{\int \psi^*(x,t) f(x)\psi(x,t)dx}{\int \psi^*(x,t)\psi(x,t)dx}$$

ถ้าฟังก์ชั่นคลื่นถูกนอร์มอลไลซ์

$$<f(x)> = \int \psi^*(x,t)f(x)\psi(x,t)dx$$

ตัวอย่าง เช่น

$$<x> = \int x\rho(x,t)dx$$

$$= \frac{\int \psi^*(x,t)\,x\,\psi(x,t)dx}{\int \psi^*(x,t)\psi(x,t)dx}$$

หรือ ถ้าฟังก์ชั่นคลื่นถูกนอร์มอลไลซ์

$$<x> = \int \psi^*(x,t)\,x\,\psi(x,t)dx$$

2.4 หมู่คลื่น (wave packet)

คลื่นบนเส้นเชือกสามารถเขียนโดยใช้ฟังก์ชั่นคลื่น

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t) \qquad (2.1)$$

เมื่อ k เป็นเลขคลื่น (wave number) ซึ่งสัมพันธ์กับความยาวคลื่น λ ดังนี้

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

และ ω เป็นความถี่เชิงมุม ซึ่งสัมพันธ์กับความถี่ตามสมการ

$$\omega = 2\pi f$$

ความเร็วของคลื่นสัมพันธ์กับความถี่และความยาวคลื่นตามสมการ

$$v = f\lambda = \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\left(\frac{2\pi}{k}\right) = \frac{\omega}{k}$$

สมการ (2.1) เป็นสมการของคลื่นฮาร์มอนิกด้วย ถ้าเราแทนการกระจัดของเส้นเชือก $y(x,t)$ ด้วยการกระจัดของโมเลกุลของอากาศ $s(x,t)$ หรือด้วยการเปลี่ยนแปลงของความดัน $p(x,t)$ นอกจากนี้ เราสามารถใช้สมการ (2.1) อธิบายคลื่นฮาร์มอนิกของอิเล็กตรอน โดยการแทนที่การกระจัด $y(x,t)$ ด้วยฟังก์ชั่นคลื่นของอิเล็กตรอน $\psi(x,t)$

คุณสมบัติที่สำคัญของคลื่นฮาร์มอนิกที่มีความถี่ ω และเลขคลื่น k ก็คือ ไม่มีจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายภายในปริภูมิ (space) หรือเวลา การที่เราจะอธิบายพัลส์ซึ่งอยู่เฉพาะที่ได้จะต้องใช้กลุ่มคลื่น โดยที่กลุ่มคลื่นเกิดจากการรวมของคลื่นฮาร์มอนิกหลายขบวนที่มีความถี่และเลขคลื่นต่างๆ กัน เนื่องจากเราสามารถพบอิเล็กตรอน ณ ที่ใดๆ ก็ได้ภายในปริภูมิ เราจึงแทนอิเล็กตรอนด้วยคลื่นฮาร์มอนิก อย่างไรก็ตาม ถ้าเราแทนอิเล็กตรอนซึ่งอยู่ที่ใดที่หนึ่ง เราจะต้องใช้กลุ่มคลื่น พิจารณากลุ่มคลื่นอย่างง่าย ซึ่งประกอบด้วยคลื่นสองขบวน ที่มีแอมพลิจูดเท่ากัน โดยที่ความถี่และเลขคลื่นต่างกันเล็กน้อย เราใช้กลุ่มคลื่นในการอธิบายปรากฏการณ์บีตส์ (beats)

กำหนดให้เลขคลื่นเท่ากับ k_1 และ k_2 และ ความถี่เชิงมุมเท่ากับ ω_1 และ ω_2 ผลรวมของคลื่นสองขบวน คือ

$$\psi(x,t) = A_0 \sin(k_1 x - \omega_1 t) + A_0 \sin(k_2 x - \omega_2 t)$$

เมื่อ A_0 เป็นแอมพลิจูดของคลื่นแต่ละขบวน

จาก $$\sin\theta_1 + \sin\theta_2 = 2\cos\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)\sin\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$$

จะได้คลื่นรวม

$$\psi(x,t) = 2A_0 \cos\left[\frac{1}{2}(k_1 - k_2)x - \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t\right]\sin\left[\frac{1}{2}(k_1 + k_2)x - \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t\right]$$

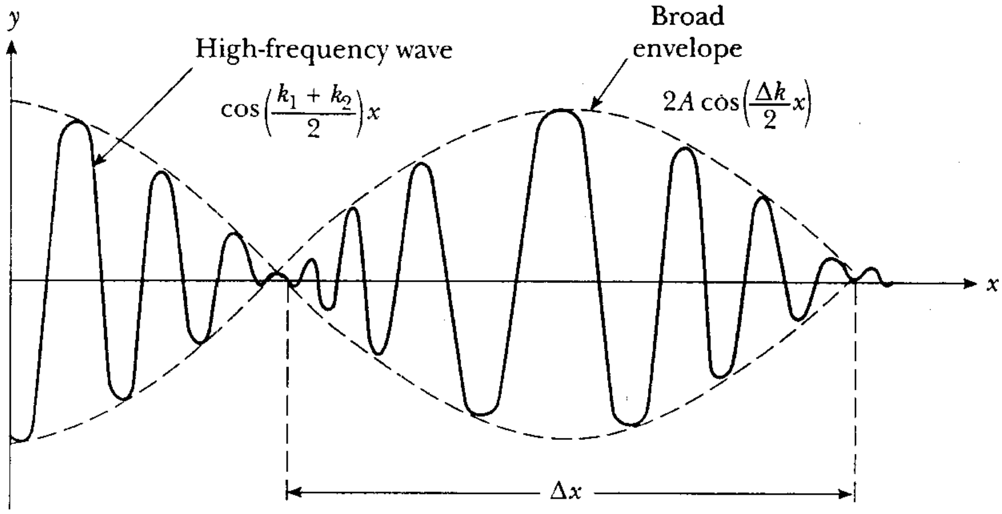
ใช้ $$k_{av} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \qquad \text{และ} \qquad \omega_{av} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

$$\Delta k = k_1 - k_2 \qquad \text{และ} \qquad \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$$

จะได้ $$\psi(x,t) = \left[2A_0 \cos\left(\frac{1}{2}\Delta kx - \frac{1}{2}\Delta\omega t\right)\right]\sin(k_{av}x - \omega_{av}t) \qquad (2.2)$$

รูปที่ 2.5 แสดงกราฟ $\psi(x,t)$ ณ เวลาหนึ่งเป็นฟังก์ชันของ x เส้นกราฟไข่ปลาเป็นเส้นเสมือนหุ้มคลื่นลัพธ์ โดยได้มาจากเทอมในวงเล็บของสมการ (2.2) คลื่นที่อยู่ภายในเส้นไข่ปลาเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว $v = \omega_{av}/k_{av}$ เรียกความเร็วนี้ว่า **ความเร็วเฟส (phase velocity)** ถ้าเราเขียน

เทอมในวงเล็บให้อยู่ในรูป $\left\{\frac{1}{2}\Delta k\left[x-(\Delta\omega/\Delta k)t\right]\right\}$ จะได้ว่า ตัวกลุ่มคลื่นที่อยู่ภายในเส้นไข่ปลา เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว $\Delta\omega/\Delta t$ เรียกความเร็วนี้ว่า **ความเร็วกลุ่ม (group velocity)**



รูปที่ 2.5 แสดงกลุ่มคลื่น

ถ้า x_1 และ x_2 เป็นจุดที่คลื่นรวมเป็นศูนย์ $\Delta x = x_2 - x_1$ เป็นการกระจัด การกระจายของกลุ่มคลื่นเนื่องจากฟังก์ชั่นโคไซน์จะเป็นศูนย์ เมื่อมุมเป็น $\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \ldots\ldots$

ดังนั้น $$\frac{1}{2}\Delta kx_2 - \frac{1}{2}\Delta kx_1 = \pi$$

หรือ $$\Delta k\Delta x = 2\pi$$

สำหรับค่า x ที่มีค่าคงที่ กราฟของฟังก์ชั่น $\psi(x,t)$ และ t จะเหมือนกับรูปที่ 2.5 โดยการแทนที่ เด้วย x การกระจายของเวลา Δt จะสัมพันธ์กับ $\Delta\omega$ โดย

$$\Delta\omega\ \Delta t = 2\pi$$

หรือจะใช้ค่าโดยประมาณ

$$\Delta k \Delta x \sim 1$$

$$\Delta\omega \; \Delta t \sim 1$$

อย่างไรก็ตาม ช่วงของ Δx และ Δt สำหรับกลุ่มคลื่นของเราได้มาจากคลื่นเพียงสองขบวนเท่านั้น ซึ่งกลุ่มคลื่นจะไม่มีค่าน้อยเมื่ออยู่ภายนอกช่วงนี้

ฟังก์ชั่นคลื่นของกลุ่มคลื่นโดยทั่วไป จะประกอบด้วยคลื่นฮาร์มอนิกมากมายหลายคลื่นรวมกัน

$$\psi(x,t) = \sum A_i \sin(k_i x - \omega_i t)$$

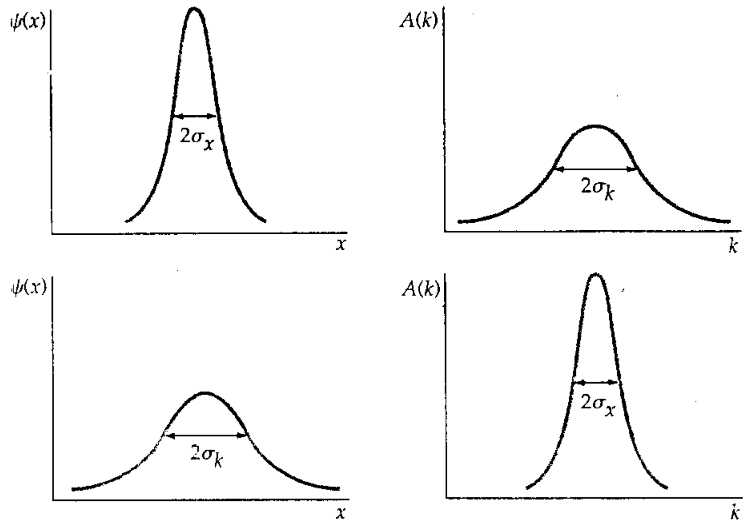
เมื่อ A_i เป็นแอมพลิจูดของคลื่นที่มีเลขคลื่น k_i และความถี่เชิงมุม ω_i การคำนวณแอมพลิจูด A_i เพื่อใช้ในการสร้างกลุ่มคลื่น จะต้องอาศัยอนุกรมฟูเรียร์ ถ้าเราใช้คลื่นจำนวนจำกัด จะไม่ได้กลุ่มคลื่นที่มีขนาดเล็กทุกๆ จุดภายในปริภูมิ เราจะต้องใช้คลื่นจำนวนไม่จำกัด โดยการแทน A_i ด้วย $A(k)dk$ และแทนการบวกด้วยการอินทีเกรท ปริมาณ $A(k)$ เรียกว่าฟังก์ชั่นการกระจายของเลขคลื่น k รูปร่างของกลุ่มคลื่นหรือการกระจายของเลขคลื่นสามารถหาได้โดยใช้วิธีวิเคราะห์ฟูเรียร์

กลุ่มคลื่นรูปเกาส์เซียน (gaussian - shaped wave packet) และฟังก์ชั่นการกระจายของกลุ่มคลื่นที่มีขนาด ก) แคบ ข) กว้าง แสดงในรูปที่ 2.6 ในกรณีพิเศษนี้ $A(k)$ เป็นฟังก์ชั่นเกาส์ ค่าเบี่ยงเบนมาตราฐานของฟังก์ชั่นนี้ คือ σ_x และ σ_k มีความสัมพันธ์กัน ดังนี้

$$\sigma_k \, \sigma_x = \frac{1}{2}$$

ซึ่งกลุ่มคลื่นชนิดอื่น จะได้ผลคูณเช่นเดียวกันนี้ สำหรับการกระจายอย่างต่อเนื่องของคลื่นความเร็วกลุ่มของกลุ่มคลื่น จะมีค่าดังนี้

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$



รูปที่ 2.6 กลุ่มคลื่นรูปเกาส์เชียน

ค่าพลังงานและโมเมนตัมของอิเล็กตรอน สัมพันธ์ความถี่และความยาวคลื่น ตามสมการของเดอ เบรย ดังนั้นจึงสัมพันธ์กับความถี่เชิงมุมและเลขคลื่น ดังนี้

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi/k} = \frac{hk}{2\pi}$$

และ
$$E = hf = h\frac{\omega}{2\pi}$$

ในเทอมของ $\hbar = h/2\pi$ จะได้

$$p = \hbar k$$

และ
$$E = \hbar\omega$$

พลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนที่กำลังเคลื่อนที่ โดยไม่มีแรงกระทำจากภายนอก คือ

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

แทนค่า E และ p จะได้

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

จะได้ความเร็วกลุ่ม

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}\left(\frac{\hbar k^2}{2m}\right) = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m} = v$$

ดังนั้น ความเร็วกลุ่มจะมีค่าเท่ากับความเร็วของอิเล็กตรอน แต่ความเร็วเฟสภายในกลุ่มคลื่นจะไม่เท่ากับความเร็วของอิเล็กตรอน

$$V_p = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} = \frac{E}{p} = \frac{p}{2m} = \frac{v}{2}$$

ตัวอย่าง 2.4 ก) ในน้ำลึก ความเร็วเฟสของคลื่นน้ำความยาวคลื่น λ คือ $v_p = \sqrt{g\lambda/2\pi}$ จงคำนวณความเร็วกลุ่มของคลื่นนี้

ข) ความเร็วเฟสของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าอยู่ในรูป $v_p = \dfrac{c}{\sqrt{1-(\omega_0/\omega)^2}}$ เมื่อ c เป็นความเร็วแสงในอวกาศ และ ω_0 เป็นความถี่ จงหาความเร็วกลุ่มของคลื่นนี้ จะพบว่า ความเร็วเฟสมีค่ามากกว่าความเร็วแสง จงอธิบายว่า ขัดแย้งกับทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษหรือไม่

วิธีทำ

ก) $$v_{p=\sqrt{g\lambda/2\pi}}$$

$$\omega = kv_p \qquad \text{เมื่อ} \qquad k = \tfrac{2\pi}{\lambda} = \frac{p}{h}$$

$$= k\sqrt{g\lambda/2\pi} = k\sqrt{g/k}$$

ดังนั้น
$$\omega^2 = gk$$
$$2\omega\frac{d\omega}{dk} = g$$

ดังนั้น ความเร็วกลุ่มคือ
$$v_p = \frac{d\omega}{dk} = \frac{g}{2\omega}$$
$$= \frac{g}{2\sqrt{gk}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \frac{1}{2}v_p$$

ข)
$$v_p = \frac{c}{\sqrt{1-(\omega_0/\omega)^2}}$$

$$\omega = kv_p$$
$$= \frac{kc}{\sqrt{1-(\omega_0/\omega)^2}}$$

$$\omega^2\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) = k^2c^2$$

$$\omega^2 = k^2c^2 + \omega_0^2$$

ดังนั้น
$$2\omega\frac{d\omega}{dk} = 2c^2k$$

$$v_p = \frac{d\omega}{dk} = c^2\frac{k}{\omega} = \frac{c^2}{v_p}$$
$$= c\sqrt{1-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$$

ความเร็วเฟสมากกว่า c แต่จะไม่ขัดแย้งกับทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ เพราะว่า ความเร็วเฟสไม่ใช่ความเร็วที่แท้จริงของอนุภาค ส่วนความเร็วกลุ่มจะต้องน้อยกว่า หรือเท่ากับ c

2.5 หลักความไม่แน่นอนของไฮเซนแบร์ก (Heisenberg's uncertainty principle)

กำหนดให้หมู่คลื่น $\psi(x,t)$ แทนอิเล็กตรอน (หรืออนุภาคชนิดอื่น) ตำแหน่งที่จะพบอิเล็กตรอนได้มากที่สุดคือ ตำแหน่ง x ที่ทำให้ $|\psi(x,t)|^2$ มีค่ามากที่สุด เนื่องจาก $|\psi(x,t)|^2$ เป็นความน่าจะเป็นที่อิเล็กตรอนอยู่ที่ตำแหน่ง x และ $|\psi(x,t)|^2$ จะไม่มีค่าเป็นศูนย์ในช่วง x ทำให้เกิดความไม่แน่นอนของตำแหน่งของอิเล็กตรอน ถ้าเราวัดตำแหน่งของอิเล็กตรอนหลายตัวที่มีลักษณะเหมือนกันหลาย ๆ ครั้ง จะได้ค่าไม่เท่ากัน ถึงแม้ว่าอิเล็กตรอนแต่ละตัวจะมีฟังก์ชั่นคลื่นเหมือนกัน ซึ่งที่จริงแล้ว ฟังก์ชั่นการกระจายของการวัดจะหาได้จาก $|\psi(x,t)|^2$ ถ้าหมู่คลื่นมีลักษณะแคบ ความไม่แน่นอนของตำแหน่งจะมีค่าน้อย อย่างไรก็ตามกลุ่มคลื่นจะมีลักษณะแคบเมื่อจำนวนเลขคลื่น (k) มีค่ามากเท่านั้น ดังนั้นกลุ่มคลื่นจะประกอบด้วยคลื่นที่มีโมเมนตัมแตกต่างกันมาก เพราะว่า $p = \hbar k$ ถ้าเราวัดค่าโมเมนตัมของอิเล็กตรอนที่เหมือนกันจะได้ค่าการกระจายของเลขคลื่นในหมู่คลื่นนั้น สรุปได้ว่า หมู่คลื่นแคบหมายถึงความไม่แน่นอนของตำแหน่งน้อย ซึ่งจะทำให้ความไม่แน่นอนของโมเมนตัมมีค่ามาก โดยทั่วไป

$$\Delta k \Delta x \sim 1$$

เช่นเดียวกัน หมู่คลื่นในช่วงเวลา Δt จะมีช่วงความถี่ $\Delta\omega$ ซึ่งจะได้

$$\Delta \omega \Delta t \sim 1$$

คูณสมการทั้งสองข้างบนด้วย $\hbar$ และอาศัย $p = \hbar k$ และ $E = \hbar\omega$ จะได้

$$\Delta p \Delta x \sim \hbar \qquad (2.3)$$

และ

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar \qquad (2.4)$$

สมการทั้งสองนี้ เป็นหลักของความไม่แน่นอนเสนอโดยแวร์เนอร์ คาร์ล ไฮเซนแบร์ก (Werner Karl Heisenberg) ในปี ค.ศ.1927 อธิบายว่าฟังก์ชั่นการกระจายของตำแหน่งและโมเมนตัม ไม่สามารถมีค่าน้อยในเวลาเดียวกันได้ ผลคูณของการวัดตำแหน่งและโมเมนตัมจะต้องมีค่าอย่างมากกว่า $\hbar$ เช่นเดียวกัน ถ้าช่วงเวลาในการวัดพลังงานเท่ากับ Δt ความไม่แน่นอนในการวัดพลังงาน ΔE จะต้องมีค่าอย่างน้อยเท่ากับ $\hbar/\Delta t$ สมการ (2.4) ใช้ประยุกต์ในการหาพลังงานกระตุ้นของอะตอมโมเลกุลและนิวเคลียส ตัวอย่างเช่น ถ้าสเตทกระตุ้นของอะตอมในช่วงชีวิต (life time) τ พลังงานของสเตทจะต้องมีค่าอยู่ในช่วง $\hbar/\tau$

ตัวอย่างที่ 2.5 มวล 5 กิโลกรัม แขวนบนสปริงซึ่งมีค่าคงที่ของสปริง 2×10^{3} นิวตัน /เมตร

ก) จงคำนวณพลังงานน้อยที่สุดของระบบ

ข) ถ้าตำแหน่งของมวลสามารถหาได้ถูกต้อง 10^{-7} เมตร จงหาความไม่แน่นอนของอัตราเร็วของมวลนี้

วิธีทำ ก) ความถี่ธรรมชาติ ของมวลที่กำลังสั่น คือ

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\times10^{3}\ N/m}{5kg}} = 20Hz$$

พลังงานที่ศูนย์องศาสัมบูรณ์

$$E = \frac{1}{2}hf$$

$$= \frac{1}{4\pi}\times\left(6.63\times10^{-34}\times20\right)J.s.s^{-1}$$

$$= 1.05\times10^{-32}\,J$$

ค) ถ้ามวลมีค่าพลังงานจลน์มากที่สุด (พลังงานศักย์เป็นศูนย์)

$$E = \frac{1}{2}mv^{2}$$

หรือ

$$v^{2} = \frac{2\times1.05\times10^{-32}\,J}{5kg}$$

$$v = 2.0\times10^{-17}\ m/s$$

ถ้าความไม่แน่นอนในตำแหน่ง $\Delta x = 10^{-7}$ เมตร

จาก $$\Delta x \Delta p \geq \hbar$$

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{\Delta x}$$

$$m \Delta v \geq \frac{\hbar}{\Delta x}$$

$$\Delta v \geq \frac{h}{2\pi m \Delta x}$$

$$\geq \frac{6.63 \times 10^{-34}\ J.s}{2\pi \times 5 \times 10^{-7}\ m.kg}$$

$$\geq 2.1 \times 10^{-28}\ m/s$$

ค่าความไม่แน่นอนนี้มีค่าน้อยกว่าอัตราเร็วศูนย์องศา สมมุติว่า เราต้องการจะหาเวลาที่มวลเคลื่อนที่ได้ระยะทาง $x = 2 \times 10^{-7}$ เมตร

$$t = \frac{x}{v} = \frac{2 \times 10^{-7}\ m}{2 \times 10^{-17}\ s} = 10^{10} \quad \text{(ประมาณ 300 ปี)}$$

ซึ่งจะต้องใช้เวลานานถึง 300ปี

ตัวอย่างที่ 2.6 จงหาพลังงานน้อยที่สุดของฮาร์มอนิกออสซิสเลตเตอร์อย่างง่ายโดยหลักความไม่แน่นอนของไฮเซนแบร์ก

วิธีทำ พลังงานรวมของฮาร์มอนิกออสซิลเตอร์ มีค่าคงที่ จึงมีค่าเท่ากับพลังงานเฉลี่ย

$$E = \langle E \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \langle x^2 \rangle$$

$$(\Delta x)^2 = <(x - <x>)^2>$$

$$= <x^2> - 2<x><x> + <x>^2$$

$$= <x^2> - <x>^2$$

$$= <x^2> - 0$$
$$= <x^2>$$

และ

$$(\Delta p)^2 = <(p - <p>)^2>$$

$$= <p^2> - 2<p><p> + <p>^2$$
$$= <p^2> - 0$$
$$= <p^2>$$

ดังนั้น

$$E = \frac{1}{2m}(\Delta p)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(\Delta x)^2$$

จากหลักความไม่แน่นอน

$$\Delta p \, \Delta x \geq \hbar$$

หรือ

$$(\Delta p)^2 \geq \frac{\hbar^2}{(\Delta x)^2}$$

พลังงานรวม

$$E - \frac{1}{2}m\omega^2(\Delta x)^2 = \frac{1}{2m}(\Delta p)^2 \geq \frac{\hbar^2}{2m(\Delta x)^2}$$

หรือ

$$E \geq \frac{\hbar^2}{2m(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}m\omega^2(\Delta x)^2$$

ค่า Δx ที่ทำให้ ΔE มีค่าน้อยที่สุด จะหาได้จาก

$$\frac{dE}{d(\Delta x)} = 0$$

ดังนั้น

$$(-2)\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta x)^{-3} + (2)\frac{1}{2}m\omega^2\Delta x = 0$$

$$(\Delta x)^4 = \frac{\hbar^2}{2m^2\omega^2}$$

$$(\Delta x)^2 = \frac{\hbar}{m\,\omega}$$

$$E_{\min} = \frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{m\omega}{\hbar} + \frac{m\omega^2}{2}\cdot\frac{\hbar}{m\omega}$$

$$= \hbar\omega$$

ตัวอย่างที่ 2.7 อะตอมให้โฟตอนที่มีความยาวคลื่น $\lambda = 5200$ Å ออกมาในช่วงเวลา $\tau = 2\times 10^{-10}$ วินาที จงหาช่วงของความยาวคลื่นของโฟตอน

วิธีทำ พลังงานของโฟตอน

$$E = h\upsilon = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\frac{dE}{d\lambda} = -\frac{hc}{\lambda^2}$$

$$\Delta E \cong -\frac{hc}{\lambda^2}\Delta\lambda$$

จาก $$\Delta E\,\Delta t \geq \hbar$$

$$-\frac{hc}{\lambda^2}\Delta\lambda\,\Delta t \geq \hbar$$

$$\Delta \lambda \geq \frac{\hbar \lambda^2}{-hc\,\Delta t}$$

$$\Delta \lambda \geq \frac{\lambda^2}{-2\pi c \Delta t}$$

ดังนั้น

$$\Delta\lambda \geq \frac{(5200\ \mathring{A})^2}{(-2)(3.14)(3\times 10^{8}\ m/s)(2\times 10^{-10}\ s)}$$

$$\geq \frac{(5.2\times10^{-7}\,m)^2}{(37.68\times10^{-2}\,m)}$$

$$\geq -7.17\times10^{-13}\,m$$

ดังนั้นการกระจายความยาวคลื่นจะอยู่ในช่วงอย่างน้อย 7.17×10^{-13} เมตร

ตัวอย่างที่ 2.8 ถ้าอะตอมอยู่ในสภาวะกระตุ้นเป็นเวลานาน 10^{-8} วินาที จงหาความไม่แน่นอนของพลังงานของสเตทที่อยู่ในสภาวะกระตุ้นนั้น

วิธีทำ $\Delta E\,\Delta t \geq \hbar$

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{6.6\times 10^{-27}\ erg - \sec}{(3.17)(10^{-8}\ \sec)}$$

$$= 2.1\times10^{-19}\,\mathrm{erg}$$

ซึ่งเป็นค่าความถูกต้องของพลังงานของอะตอมในสภาวะกระตุ้นที่สามารถวัดได้ ค่าพลังงานค่านี้ เรียกว่า ความกว้างของพลังงานของสเตทที่อยู่ในสภาวะกระตุ้น (energy width of the excited state)

ตัวอย่างที่ 2.9 ความหนาแน่นของเพชรเท่ากับ 3.5 กรัม / ซม^3 จงหาความเร็วเฉลี่ยของอะตอมคาร์บอนในเพชรที่ 0 ^{0}K

วิธีทำ ความหนาแน่น $D = M/V$

เมื่อ M เป็นมวลในปริมาตร V

$$M = DV$$

จำนวนอะตอมคาร์บอน (n) ภายในมวลนี้มีค่าเท่ากับ M หารด้วยมวลเชิงอะตอม (atomic mass) ของคาร์บอน

$$n = \frac{M}{(12\ amu)} = \frac{DV}{(12\ amu)}$$

ดังนั้น ปริมาตรของอะตอมคาร์บอน 1 อะตอม คือ

$$\frac{V}{n} = \frac{(12\ amu)}{D}$$

$$\frac{V}{n} = \frac{(12\ amu)(1.66 \times 10^{-27}\ kg/amu)}{(3.5\ kg/m^3)}$$

$$= \frac{19.8 \times 10^{-27}\ m^3}{3.5}$$

$$= 5.7 \times 10^{-27}\ m^3$$

สมมุติว่า อะตอมคาร์บอน 1 อะตอม ครอบคลุมพื้นที่รูปลูกบาศก์ ซึ่งมีความยาวแต่ละข้าง ℓ

$$\ell^3 = 5.7 \times 10^{-27} m^3$$

$$\ell = 1.8 \times 10^{-10} m$$

มวลของอะตอมคาร์บอน

$$m = (12\ amu)(1.66 \times 10^{-27}\ kg/amu)$$
$$= 2 \times 10^{-26}\ kg$$

เนื่องจากอะตอมอยู่ภายในพื้นที่ลูกบาศก์ความยาว ℓ ความไม่แน่นอนของตำแหน่ง จึงมีค่าเท่ากับ ℓ

$$\Delta x = \ell$$

ดังนั้น จาก $\Delta p \Delta x \geq \hbar$

จะได้ $$\Delta p \geq \frac{\hbar}{\ell} = \frac{6.63 \times 10^{-34}\ J.s}{(2\pi)(1.8 \times 10^{-10}\ m)}$$

$$= 5.86 \times 10^{-25} N.s$$

ความไม่แน่นอนน้อยที่สุดของ p

$$\Delta p_{\min} = 5.86 \times 10^{-25}\ N.s$$

แต่ $$\Delta p_{\min} = m \Delta V_{\min}$$

$$\Delta V_{\min} = \frac{\Delta p_{\min}}{m}$$

$$= \frac{5.86 \times 10^{-25} N.s}{2 \times 10^{-26} kg}$$

$$= 29.3\ m/s$$

ซึ่งเป็นค่าความเร็วโดยประมาณของอะตอมคาร์บอน

พลังงานเฉลี่ย
$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

$$= \frac{1}{2}(2 \times 10^{-26}\,kg)(29.3\,m/s)^2$$

$$= (10^{-26}\,kg)(858.5\,m^2/s^2)$$

$$= 8.59 \times 10^{-24}\quad J$$

พลังงานที่ศูนย์องศาสัมบูรณ์

$$E_0 = \frac{1}{2}hf$$

ดังนั้น
$$f = \frac{2E_0}{h}$$

สมมุติว่า ขนาดของ E_0 เท่ากับพลังงานเฉลี่ย

$$f = \frac{(2)(8.59\times 10^{-24}\,Joules)}{(6.63\times 10^{-34}\,Joules-\sec)}$$

$$= 2.6\times 10^{10}\,Hz$$

ตัวอย่างที่ 2.10 สมมุติว่า สามารถวัดโมเมนตัมของอนุภาคหนึ่งได้ถูกต้องถึง 1 ใน 10^3 จงหาความไม่แน่นอนของตำแหน่ง ถ้า

ก) มวล $5\times10^{-3}\,kg$ เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 2 m/s

ข) อิเล็กตรอนเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว $1.8\times10^{2}\,m/s$

วิธีทำ

ก) $$\frac{\Delta p}{p} = 10^{-3}$$

หรือ $$\Delta p = 10^{-3}p = 10^{-3}mv$$

จาก $$\Delta x\Delta p \geq \hbar$$

$$\Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p} = \frac{\hbar}{10^{-3}mv}$$

$$\Delta x = \frac{6.63\times10^{-34}\,J\cdot s}{4\pi - 10^{-3}(5\times10^{-3}\,kg)(2\,m/s)}$$

$$= 5.28\times10^{-30}\,m$$

$$= 5.28\times10^{-20}\,\text{Å}$$

ดังนั้น ความไม่แน่นอนน้อยที่สุด เท่ากับ $5.28\times10^{-20}\,\text{Å}$

ข) relativistic mass ของอิเล็กตรอน

$$m = m_0/\sqrt{1-cv^2/c^2}$$

$$\Delta x \geq \frac{\hbar\sqrt{1-(c^2/v^2)}}{10^{-3}m_0 v}$$

$$= \frac{(6.63\times10^{-34}\,J\cdot s)\sqrt{1-(0.6)^2}}{4\pi\cdot10^{-3}(9.11\times10^{-31}\,kg)(1.8\times10^{8}\,m/s)}$$

$$= 5.27\times10^{-10}\,m$$

$$= 2.57\,\text{Å}$$

ตัวอย่างที่ 2.11 ถ้าเราคิดว่า $E = \frac{1}{2}mv^2$ สำหรับอนุภาคซึ่งกำลังเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง

จงแสดงว่า $\Delta E \Delta t \geq \hbar$ เมื่อ $\Delta t = \frac{\Delta x}{v}$

วิธีทำ

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

$$\Delta E = \frac{p\Delta p}{m} = \frac{mv\Delta p}{m} = v\Delta p$$

จาก $$\Delta p \Delta x = \hbar$$

ดังนั้น $$\frac{\Delta E}{v} \cdot \Delta x \geq \hbar \quad \text{หรือ} \quad \Delta E \Delta t \geq \hbar$$

ตัวอย่างที่ 2.12 จงหาความไม่แน่นอนของโฟตอนความยาวคลื่น 3000 Å ถ้าการวัดความยาวคลื่นถูกต้อง 1 ใน 10^6

วิธีทำ โมเมนตัมของโฟต้อน

$$p = \frac{hc}{\lambda c}$$

$$p = \frac{12.40 \times 10^3 eV \cdot \text{Å}}{\left(3 \times 10^3 \text{ Å}\right)(c)}$$

$$= 4.13 eV/c$$

ความไม่แน่นอนของโมเมนตัม

$$\Delta p = \left|\frac{-h}{\lambda^2}\right| \Delta \lambda$$

$$= p\frac{\Delta \lambda}{\lambda}$$

$$= p \times 10^{-6}$$

$$= 4.13 \times 10^{-6} eV/c$$

$$\Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p}$$

$$= \frac{hc}{4\pi c\Delta p} = \frac{12.4\times10^{3}\,eV\cdot \mathring{A}}{4\pi c\left(4.13\times10^{-4}\,eV/c\right)}$$

$$= 239\times10^{6}\ \mathring{A}$$

$$= 23.9\quad \text{nm}$$

หมายเหตุ $\Delta p = h\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = h(-1)\frac{1}{\lambda^{2}}\Delta\lambda$

ตัวอย่างที่ 2.13 สมมุติว่าความไม่แน่นอนของอนุภาคเท่าความยาวคลื่นเดอเบรย จงแสดงว่าความไม่แน่นอนของความเร็วเท่ากับหรือมากกว่า $\frac{1}{2\pi}$ คูณความเร็ว

วิธีทำ

เมื่อ $\Delta x = \lambda = h/mv_x$

$$\Delta x.\Delta\left(mv_x\right) \geq \frac{h}{2\pi}$$

$$\frac{h}{mv_x}.\Delta(mv_x) \geq \frac{h}{2\pi}$$

m มีค่าคงที่ $\frac{h}{v_x}.\Delta v_x \geq \frac{h}{2\pi}$

$$\Delta v_x \geq \frac{1}{2\pi}.v_x$$

ตัวอย่างที่ 2.14 จากความสัมพันธ์ $\Delta p \Delta x \geq \hbar$ จงแสดงว่าสำหรับอนุภาคที่เคลื่อนที่เป็นวงกลม $\Delta L.\Delta\theta \geq \hbar$ เมื่อ ΔL เป็นความไม่แน่นอนของโมเมนตัมเชิงมุมและ $\Delta\theta$ เป็นความไม่แน่นอนของมุม

วิธีทำ อนุภาควิ่งเป็นวงกลม ความไม่แน่นอนจะใช้กับทิศทางสัมผัสกับวงกลม ดังนั้น

$$\Delta p_s \Delta s \geq \frac{h}{2\pi}$$

เมื่อ s วัดตามเส้นรอบวงของวงกลม

$$L = mvR = P_s R$$

$$\rightarrow \quad \Delta p_s = \Delta L / R$$

ระยะทางตามแนวเส้นรอบวงสัมพันธ์กับมุม θ ดังนี้

$$\theta = s/R$$

$$\Delta s = R\Delta\theta$$

ดังนั้น

$$\Delta P_s \Delta s = \left(\frac{\Delta L}{R}\right)(R\Delta\theta)$$

$$= \Delta L.\Delta\theta \geq \hbar$$

ตัวอย่างที่ 2.15 ถ้าความไม่แน่นอนของเวลาระหว่างที่อิเล็คตรอนยังคงอยู่ในสภาวะกระตุ้นเท่ากับ 10^{-7} วินาที จงหาความไม่แน่นอนน้อยที่สุด (เป็น J) ของพลังงานของระดับกระตุ้นนี้

วิธีทำ ให้ W เป็นพลังงานของระดับกระตุ้น

$$\Delta W.\Delta t \geq \frac{h}{2\pi}$$

$$(\Delta W)(10^{-7}) \geq \frac{6.63\times10^{-34}}{2\pi}$$

ดังนั้น

$$\Delta W \geq \frac{6.63\times10^{-27}}{2\pi}$$

$$= 1.05477\times10^{-27} J$$

ถ้าเราจะให้นิยามที่แน่นอนของคำว่า ความไม่แน่นอนในการวัดตำแหน่งและโมเมนตัม โดยกำหนดให้ σ_k เป็นค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานในการวัดเลขคลื่น k และเป็นค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานในการวัดตำแหน่ง x ผลคูณ $\sigma_x\sigma_k$ จะมีค่าน้อยที่สุดเท่ากับ $\frac{1}{2}$ ถ้าฟังก์ชั่นการกระจายเป็นชนิดเกาส์เซียน ถ้าเรานิยาม Δx และ Δp เป็นค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน ค่าน้อยที่สุดของผลคูณคือ $\frac{1}{2}\hbar$ ดังนั้น

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{1}{2}\hbar$$

เช่นเดียวกัน $$\Delta E \Delta t \geq \frac{1}{2}\hbar$$

โดยทั่วไป ผลคูณจะมากกว่า $\hbar/2$ มาก

ตัวอย่างที่ 2.16 ลูกหินมวล 25 กรัม อยู่ในกล่องยาว 10 เซ็นติเมตร จงหาความไม่แน่นอนของโมเมนตัม อัตราเร็ว v และพลังงานจลน์ สมมติว่า $p = \Delta p$

วิธีทำ

$$(\Delta p)_{\min} = \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{1.05 \times 10^{-34}\ J.s}{2(0.1m)}$$

$$= 5.3 \times 10^{-34}\ kg.m/s$$

ความเร็ว

$$v = \frac{p}{m} = \frac{5.3 \times 10^{-34}\ kg.m/s}{0.025\ kg}$$

$$= 2.1 \times 10^{-32}\ m/s$$

ซึ่งมีค่าน้อยมาก จนถือได้ว่า ลูกหินหยุดนิ่ง

พลังงานจลน์

$$k_{\min} = \frac{(\Delta p_{\min})^2}{2m} = \frac{(5.3 \times 10^{-34}\ kg.m/s)^2}{0.050\ kg}$$

$$= 5.6 \times 10^{-66}\ J$$

ตัวอย่างที่ 2.17 จากตัวอย่างที่ 2.16 ถ้าวัตถุเป็นอิเล็กตรอนถูกขังอยู่ภายในช่วงความยาว L = 0.1 nm ซึ่งมีค่าประมาณขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางของอะตอม

วิธีทำ ในกรณีนี้ความไม่แน่นอนที่น้อยที่สุดของโมเมนตัมคือ

$$(\Delta p)_{\min} = \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{1.05 \times 10^{-34}\ J.s}{2(10^{-10}\ m)}$$
$$= 5.3 \times 10^{-25}\ kg.m/s$$

อัตราเร็วของอิเล็กตรอนคือ

$$v = \frac{p}{m} = \frac{5.3\times10^{-25}\ kg.m/s}{9.1\times10^{-31}\ kg}$$
$$= 5.8 \times 10^{5}\ kg.m/s$$

ซึ่งมีค่าค่อนข้างมาก

พลังงานจลน์

$$k_{\min} = \frac{(\Delta p_{\min})^2}{2m} = \frac{(5.3\times10^{-25} kg\cdot m/s)^2}{2(9.1\times1.^{-31} kg)}$$
$$= 1.5\times10^{-19} J$$

ตัวอย่างที่ 2.18 ลูกกอล์ฟมวล 50 กรัมเคลื่อนที่ในแนวระดับด้วยความเร็ว 80 เมตร/วินาที จงหาขอบเขตของความไม่แน่นอนในตำแหน่ง ถ้าความไม่แน่นอนของความเร็วเท่ากับ 0.01 เมตร/วินาที สมมุติว่าความไม่แน่นอนของมวลน้อยมาก

วิธีทำ

$$\Delta x.\Delta(mv_x) \geq \frac{h}{4\pi}$$

m คงที่

$$(\Delta x)(m\Delta v_x) \geq \frac{h}{4\pi}$$

$$(\Delta x)(0.050)(0.01) \geq \frac{6.63x10^{-34}}{4\pi}$$

$$\Delta x \geq 1.06\times10^{-31} m$$

ตัวอย่างที่ 2.19 รัศมีของนิวเคลียสประมาณ 5×10^{-15} เมตร สมมุติว่า ความไม่แน่นอนของตำแหน่งของโปรตอนในนิวเคลียสเป็น 5×10^{-15} เมตร จงหาความไม่แน่นอนน้อยที่สุดของพลังงานของโปรตอน

วิธีทำ

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$$

$$\Delta p = \frac{h}{4\pi\left(5\times10^{-15}\right)}$$

$$= 1.05\times10^{-20}\, kg\cdot {}^{m}\!/_{s}$$

$$v = \frac{\Delta p}{m_0}$$

$$= \frac{\Delta p}{1.67\times10^{-27}}$$

$$= 6.3\times10^{6}\, {}^{m}\!/_{s} \qquad \text{(ต่ำกว่าแสง)}$$

$$E = \frac{p^2}{2m} \rightarrow dE = (2pdp)/2m$$

p จะมากกว่า Δp ดังนั้น ΔE จะไม่น้อยกว่า $\frac{\Delta p^2}{m} = 6.6\times10^{-14} J = 412 keV$

ตัวอย่างที่ 2.20 รถยนต์มวล 1×10^{3} กิโลกรัม เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว 10 เมตร / วินาที ถ้าขณะหนึ่ง เราวัดตำแหน่งของรถยนต์ได้ถูกต้องแม่นยำ 1×10^{-6} เมตร จงหาความถูกต้องในการวัดอัตราเร็วของรถยนต์

วิธีทำ ถ้า Δx เป็นความไม่แน่นอนในการวัดตำแหน่ง

Δp เป็นความไม่แน่นอนในการวัดโมเมนตัม

$$\Delta x \Delta p = \Delta x m \Delta v \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta v = \frac{h}{(\Delta x) 4\pi m}$$

$$= \frac{6.6\times10^{-34}\, J.s}{(1\times10^{-6}\, m)(4\pi)(1\times10^{3}\, kg)}$$

$$= 5.3\times10^{-32}\, m/s$$

ซึ่งมีค่าน้อยมาก จนไม่สามารถวัดค่าได้

ตัวอย่างที่ 2.21 สมมุติว่าอัตราเร็วของอิเล็กตรอนเท่ากับ 1×10^6 เมตร / วินาที และความไม่แน่นอนในการวัดเท่ากับ 1 เปอร์เซ็นต์ จงหาความไม่แน่นอนในการวัดตำแหน่ง

วิธีทำ ความไม่แน่นอนในการวัดอัตราเร็ว

$$\Delta v = (0.01)(1\times10^6\ m/s) = 1\times10^4\ m/s$$

หมายความว่า อัตราเร็วของอิเล็กตรอน $=1\times10^6 \pm 1\times10^4\ m/s$

จาก

$$\Delta p \Delta x = m\Delta v \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta x = \frac{h}{(\Delta v)4\pi m}$$

$$= \frac{6.6\times10^{-34}\ J.s}{(1\times10^4\ m/s)(4)(3.14)(9.\times10^3\ kg)}$$

$$= 5.8\times10^{-9}\ m$$

ซึ่งความไม่แน่นอนในตำแหน่งนี้มีค่ามากกว่าขนาดของอิเล็กตรอนถึง 100 ล้านเท่า

ตัวอย่างที่ 2.22 จงอาศัยหลักความไม่แน่นอนหาค่าพลังงานของสเตทพื้นฐานของระบบ ต่อไปนี้

ก) อนุภาคภายในกล่องยาว L

ข) ฮาร์มอนิคออสซิลเลเตอร์ ความถี่ ω

ค) อนุภาควางอยู่บนโต๊ะภายใต้แรงโน้มถ่วง

วิธีทำ ก) อนุภาคภายในกล่อง ความยาว L

จากหลักความไม่แน่นอน $\Delta x\Delta p_x \approx \hbar$, $\Delta y\Delta p_y \approx \hbar$, $\Delta z\Delta p_z \approx \hbar$

จาก $\Delta x = \Delta y = \Delta z = L$

ดังนั้น $\Delta p_x = \Delta p_y = \Delta p_z = \dfrac{\hbar}{L}$

พลังงานของอนุภาคที่อยู่ภายในกล่อง คือ

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m}$$

$$= \frac{1}{2m} \times 3\left(\frac{\hbar}{L}\right)^2$$

$$= \frac{3}{2}\frac{\hbar^2}{mL^2}$$

ดังนั้น พลังงานที่สถานะพื้น คือ $\approx \frac{\hbar^2}{mL^2}$

ข) ฮาร์มอนิกออสซิเลเตอร์ที่ ความถี่ ω

$$E = T + V$$

$$= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

จากหลักความไม่แน่นอน $p \approx \frac{\hbar}{x}$

ดังนั้น $E = \frac{\hbar^2}{2mx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{\hbar^2}{mx^3} + m\omega^2 x$$

พลังงานที่น้อยที่สุด E , $\frac{dE}{dx} = 0 \Rightarrow m^2\omega^2 x^4 = \hbar^2$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{\hbar}{m\omega}$$

ดังนั้น พลังงานที่สถานะพื้น คือ

$$E = \frac{\hbar^2}{2m\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)} + \frac{1}{2}m\omega^2 \frac{\hbar}{m\omega}$$

$$= \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{1}{2}\hbar\omega$$

$$= \hbar\omega$$

ค) อนุภาควางอยู่บนโต๊ะภายใต้แรงโน้มถ่วง

$$E = T + V$$

$$= \frac{p^2}{2m} + mgx$$

จากหลักความไม่แน่นอน $p \approx \frac{\hbar}{x}$

$$E = \frac{\hbar^2}{2mx^2} + mgx$$

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{2\hbar^2}{2mx^3} + mg$$

$$\frac{dE}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2m^2gx^3 = \hbar^2$$

$$\Rightarrow \quad x = \left(\frac{\hbar^2}{m^2 g}\right)^{\frac{1}{3}}$$

ดังนั้น พลังงานที่สถานะพื้น คือ

$$E = \frac{\hbar^2}{2m\left(\frac{\hbar^2}{2m^2 g}\right)^{\frac{2}{3}}} + mg\left(\frac{\hbar^2}{m^2 g}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{4m^4 g^2}{\hbar^4}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{m^3 g^3 \hbar^2}{m^2 g}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(\frac{m\hbar^2 g^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{m\hbar^2 g^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 2\left(\frac{m\hbar^2 g^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\approx \left(m\hbar^2 g^2\right)^{\frac{1}{3}}$$