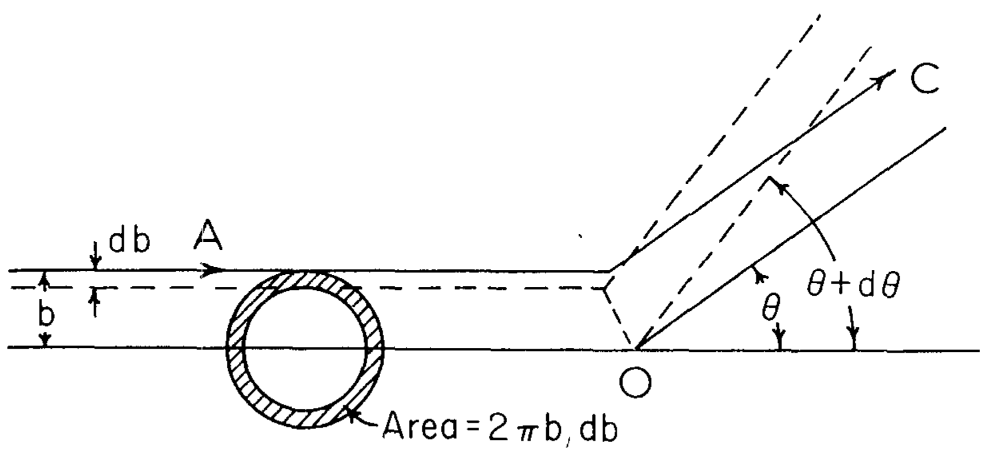
บทที่ 10
ทฤษฎีการกระเจิง

วัตถุประสงค์

1) ศึกษาทฤษฎีการกระเจิง
2) ศึกษาการชนกันโดยอาศัยฟิสิกส์ดั้งเดิม
3) ศึกษาการชนกันโดยอาศัยทฤษฎีควอนตัม

การศึกษาการชนกันระหว่างอนุภาคกับวัตถุใดๆ มีความสำคัญต่อความรู้พื้นฐานของวิชาฟิสิกส์ ตัวอย่างเช่น การชนกันของอนุภาคแอลฟา กับแผ่นทองคำเปลวหรือการชนกันระหว่างโมเลกุลของสาร ในบทนี้จะกล่าวถึงการชนทั้งจากฟิสิกส์ดั้งเดิมและฟิสิกส์ควอนตัม

10.1 การชนกันจากฟิสิกส์ดั้งเดิม



ลำอนุภาค (A) มีความเข้ม I วิ่งชนเป้า (target) ที่ 0 กำหนดให้พารามิเตอร์อิมแพกเท่ากับ b มุมที่เบี่ยงเบนไปเท่ากับ θ และค่าครอสเซคชั่นดิฟเฟอเรนเชียลของการชน (differential scattering cross-section) มีค่าดังนี้

$$\sigma_d(\theta,\phi) = \frac{I(\theta,\phi)}{I} \equiv \frac{d\sigma}{d\Omega} \qquad (10.1)$$

เมื่อ $I(\theta,\phi)$ เป็นจำนวนอนุภาคต่อวินาทีซึ่งสะท้อนเข้าในมุมตัน (solid angle) 1 หน่วย และ σ เป็นครอสเซคชั่นรวมของสมการของการสะท้อนทั้งหมด (ทุกมุม) ดังนั้น

$$d\sigma = \sigma_d(\theta,\phi)d\Omega \qquad (10.2)$$

สำหรับศักย์ที่สมมาตรกับศูนย์กลาง เช่น ศักย์ที่ขึ้นกับระยะห่าง r อย่างเดียว σ_d จะไม่ขึ้นกับ ϕ

ดังนั้น
$$\sigma = 2\pi \int_0^{\pi} \sigma_d(\theta)\sin\theta d\theta \qquad (10.3)$$

จากรูปจะเห็นได้ว่า จำนวนอนุภาคที่สะท้อนเข้าไปในมุมตัน $2\pi \sin\theta d\theta$ มีค่าเท่ากับจำนวนอนุภาคที่ไปถึงวงแหวน $2\pi b db$ นั่นคือ

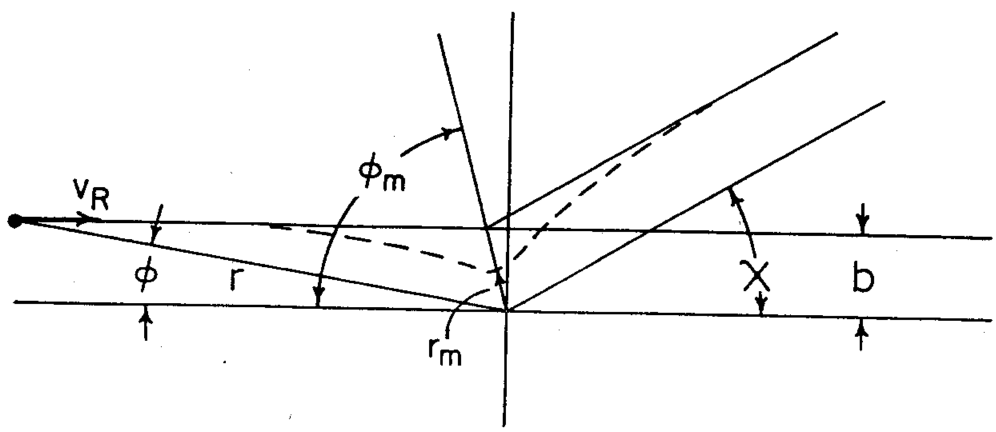
$$d\sigma = 2\pi b\,|db| \qquad (10.4)$$

รวมสมการ (10.2) และ (10.4) และถ้า $\sigma_d \geq 0$ จะได้

$$\sigma_d = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right|$$

10.2 มุมสะท้อน (angle of deflection)

พิจารณาอนุภาคมวล μ ชนกับจุดศูนย์กลางที่มีศักย์ $V(r)$ โดยที่เมื่อเริ่มต้นอนุภาคอยู่ที่ $x = -\infty$ และมีความเร็ว V_R



แฮมมิลโทเนียนจากฟิสิกส์ดั้งเดิมของระบบสองอนุภาค คือ

$$H = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + V(r)\right) \qquad (10.5)$$

ที่ $r = \infty, V(r) = 0$ และพลังงานรวมมีค่าเท่ากับพลังงานจลน์ ซึ่งสามารถหาได้จากค่าเริ่มต้น ดังนั้น

$$\frac{\mu V_R^2}{2} = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) + V(r) \qquad (10.6)$$

$$|V_R| = \sqrt{(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + 2V(r)/\mu}$$

โมเมนตัมเชิงมุมเบื้องต้น

$$\left|\vec{L}\right| = \left|\vec{r} \times \vec{p}\right| = b\mu v_R$$

และจากนิยาม $L = \partial L/\partial\dot{\phi} = \mu r^2\dot{\phi}$ เมื่อ L เป็นลาการจ์เกียน

จากกฎการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม

$$b\mu v_R = \mu r^2\dot{\phi} \quad \text{หรือ} \quad v_R = r^2\dot{\phi}/b \qquad (10.7)$$

จาก $\dfrac{dr}{d\phi} = \dfrac{dr/dt}{d\phi/dt}$

ดังนั้นจากสมการ (10.6) จะได้

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm\left[v_R^2 - \frac{b^2v_R^2}{r^2} - \frac{2V(r)}{\mu}\right]^{1/2}$$

และจากสมการ (10.7) $\dot{\phi} = bv_R/r^2$ ดังนั้น

$$\frac{dr}{d\phi} = \pm\left(\frac{r^2}{b}\right)\left[1 - \left(\frac{b}{r}\right)^2 - \frac{2V(r)}{\mu v_R^2}\right]^{1/2} = \pm f(r)$$

ที่จุดใกล้สุด $dr/dt = 0$ และเราได้

$$\left(\frac{r^2}{b}\right)\left[1 - \left(\frac{b}{r}\right)^2 + \frac{2V(r)}{\mu V_R^2}\right]^{1/2} = 0$$

เพราะว่า $\chi = \pi - 2\phi_m$ เราจะหาค่า ϕ_m

จากข้อ ข) เราได้

$$\frac{dr}{d\theta} = -f(r)$$

เมื่อเครื่องหมายแสดงถึงจุดใกล้สุด

ดังนั้น $d\phi = -dr/f(r)$

และ $\phi_m = \int_0^{\phi_m} d\phi = -\int_{\infty}^{r_m} f(r)^{-1}\,dr$

จะหามุมเบี่ยงเบนได้จาก

$$\chi = \pi - 2b\int_{r_m}^{\infty}\left[1 - \left(\frac{b}{r}\right)^2 - \frac{2V(r)}{\mu v_R^2}\right]^{-1/2} r^{-2}\,dr$$

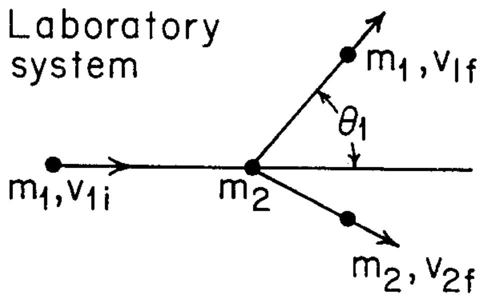
เมื่อ χ เป็นมุมของการสะท้อน

10.3 ความเร็วสัมพัทธ์

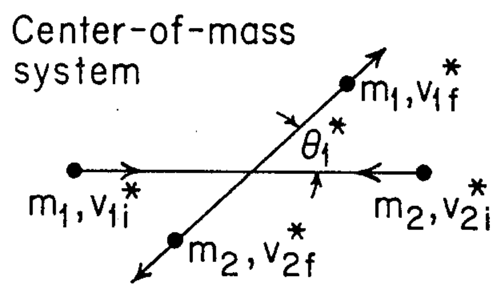
พิจารณาการชน

$$m_1 + m_2 \quad (\text{อยู่นิ่ง}) \quad \rightarrow \quad m_1 + m_2 \quad (\text{เคลื่อนที่})$$

ในเฟรมของห้องปฏิบัติการการชนกันแสดง ดังรูป (ก) และในเฟรมของจุดศูนย์กลางมวล (ซึ่งจุดศูนย์กลางมวลอยู่นิ่ง) แสดงในรูป (ข)



รูป(ก)



รูป(ข)

จุดศูนย์กลางมวล คือ

$$\vec{R} = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{M_1} \qquad \text{เมื่อ} \qquad M = m_1 + m_2$$

และเวกเตอร์ตำแหน่งสัมพัทธ์ $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

ดังนั้น

$$\dot{\vec{r}}_1 = \vec{v}_1 = \vec{V}_c + \frac{m_2}{M}\vec{v}_R = \vec{V}_c + \vec{v}_1^*$$

$$\dot{\vec{r}}_2 = \vec{v}_2 = \vec{V}_c - \frac{m_1}{M}\vec{v}_R = \vec{V}_c - \vec{v}_2^*$$

เมื่อ $\vec{V}_c = \dot{\vec{R}}$ และ $\vec{v}_R = \dot{\vec{r}}$

ความเร็วของศูนย์กลางมวลในระบบปฏิบัติการสามารถหาได้จากการพิจารณาว่าอนุภาค 2 เริ่มต้นหยุดนิ่ง ดังนั้น

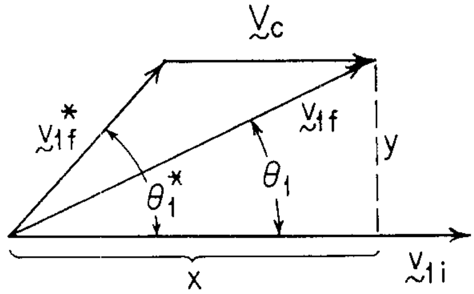
$$\vec{V}_c = \dot{\vec{R}} = \frac{m_1}{M}\vec{v}_{1i} = \frac{m_1}{M}\vec{v}_{Ri}$$

มุมเบี่ยงเบน

จาก $\vec{v}_1^* = \frac{m_2}{M}\vec{v}_R$

ดังนั้น เวกเตอร์ความเร็วในระบบบศูนย์กลางมวล จะขนานกับเวกเตอร์ความเร็วสัมพัทธ์ และ θ_1^* จะมีค่าเท่ากับมุมเบี่ยงเบน χ

หน้า364



เนื่องจากอนุภาค 2 เริ่มต้นหยุดนิ่ง $\vec{v}_{Ri} = \vec{v}_{1i}$ ซึ่งแสดงว่า $\vec{v}_1^*$ ขนานกับ $\vec{v}_1$ ดังนั้นมุมระหว่าง $\vec{v}_{1i}$ และ $\vec{v}_{1f}^*$ คือ $\vec{\theta}_1^*$ จากรูป จะได้

$$\tan\theta_1 = \frac{y}{x} = \frac{v_{1f}^*\sin\chi}{v_{1f}^*\cos\chi + V_c} \qquad (10.8)$$

$$= \frac{\sin\chi}{\cos\chi + \left(V_c/v_{1f}^*\right)}$$

เนื่องจาก

$$\left|\vec{V}_c\right| = V_c = \frac{m_1}{M}\left|\vec{v}_{1i}\right| = \frac{m_1}{M}v_{1i} = \frac{m_2}{M}v_{Rf}$$

และ

$$\left|\vec{v}^{\,*}_{1f}\right| = v^{*}_{1f} \quad = \quad \frac{m_2}{M}\left|\vec{v}_{Rf}\right| = \frac{m_2}{M} v_{Rf}$$

สามารถเขียนสมการ (10.8) เป็น

$$\tan\theta_1 \quad = \quad \frac{\sin\chi}{\cos\chi + \left(m_1 v_{Ri} / m_2 v_{Rf}\right)}$$

สำหรับการชนแบบยืดหยุ่น $v_{Ri} = v_{Rf}$ ดังนั้น

$$\tan\theta_1 \quad = \quad \frac{\sin\chi}{\cos\chi + \left(m_1 / m_2\right)}$$

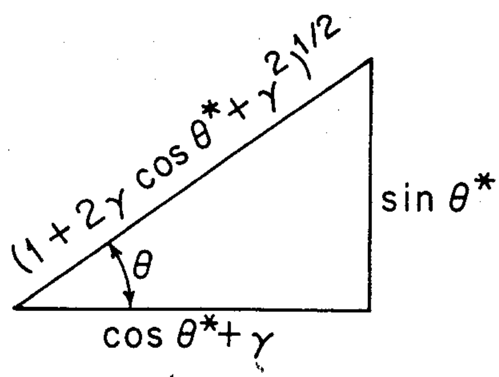
10.4 ครอสเซคชั่นดิฟเฟอเรนเชียล

ในระบบห้องปฏิบัติการแทนด้วย $\sigma_d(\theta,\phi)$ และในระบบศูนย์กลางมวลแทนด้วย $\sigma^*_d\ (\theta^*,\phi^*)$

จาก $$\tan\theta \quad = \quad \frac{\sin\theta^*}{\cos\theta^* + \gamma}$$

จากรูป จะได้

$$\cos\theta \quad = \quad \frac{\cos\theta^* + \gamma}{(1 + 2\gamma\cos\theta^* + \gamma^2)^{1/2}} \qquad (10.9)$$



ดิฟเฟอเรนชิเอทสมการ (10.9) จะได้

$$\sin\theta d\theta = \frac{\sin\theta^* d\theta^*(1+\gamma\cos\theta)}{(1+2\gamma\cos\theta^*+\gamma^2)^{3/2}} \qquad (10.10)$$

จากสมการของ ครอสเซคชั่นดิฟเฟอเรนเชียล

$$\sigma_d(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi = \sigma_d^*(\theta^*,\phi^*)\sin\theta^* d\theta^* d\phi \qquad (10.11)$$

เมื่อ $\phi = \phi^*$ และ $d\phi = d\phi^*$

แทนสมการ (10.9) ลงในสมการ (10.10) จะได้

$$\sigma_d(\theta,\phi) = \frac{(1+2\gamma\cos\theta^*+\gamma^2)^{3/2}}{|1+\gamma\cos\theta^*|}\sigma_d^*(\theta^*,\phi^*) \qquad (10.12)$$

ตัวหารจะต้องเป็นบวกเสมอเพราะว่า θ^* มีค่าจาก 0 ถึง π

ในกรณีพิเศษซึ่ง $\gamma = 1$ เช่น การชนแบบยืดหยุ่นสำหรับอนุภาคที่มีมวลเท่ากัน

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta^*}{\cos\theta^*+1} = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta+1}$$

หรือ $\phi^* = 2\theta$ จะได้

$$\sigma_d(\theta,\phi) = \frac{(1+2\cos 2\theta+\gamma^2)^{3/2}}{|1+\cos 2\theta|}\sigma_d^*(2\theta\ ,\phi\ ) \qquad (10.13)$$

แต่ $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ ดังนั้น

$$\sigma_d(\theta,\phi) = \frac{(4\cos^2\theta)^{3/2}}{2\cos^2\theta}\sigma_d^*(2\theta\ ,\phi\ )$$

$$= 4\cos\theta\sigma_d^*(2\theta\ ,\phi\ )$$

θ^* จะมีค่าอยู่ในช่วง θ ถึง π เมื่อ $\gamma = 1$

θ จะไม่เกิน $\pi/2$ ซึ่งก็คือ ไม่มีการสะท้อนกลับหลัง

10.5 การชนกันจากทฤษฎีควอนตัม

ในทางควอนตัมจะคิดว่าอนุภาคที่ตกกระทบ และอนุภาคที่สะท้อน สามารถแทนได้ด้วยคลื่นระนาบ เมื่อ $r >> b$ คลื่นที่ A จะอยู่ในรูป

$$\psi_{1n}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}.\vec{r}}$$

และ คลื่นที่ C จะอยู่ในรูป

$$\psi_{sc}(\vec{r})\alpha e^{i\vec{k}.\vec{r}} + f(\Omega)\frac{e^{ikr}}{r}, kr \to \infty \qquad (10.14)$$

ฟลั๊กของคลื่นเหล่านี้สามารถเขียนในรูปความหนาแน่นของกระแส

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2\mu}(\psi\vec{\nabla}\psi^* - \psi^*\vec{\nabla}\psi) \qquad (10.15)$$

จาก $I = \left|\vec{j}_{in}\right|$

$$I(\theta,\phi) = \lim_{r\to\infty}\left(\left|\vec{j}_{sc}\right|r^2\right)$$

จากสมการ (10.12), (10.14) และ (10.15) จะได้

$$\sigma_d = |f(\Omega)|^2$$

ในบทนี้ศึกษาการแก้สมการชเรอดิงเงอร์เพื่อหาขนาดของการสะท้อน (scattering amplitudes) และครอสเซคชั่น (cross-sections) สำหรับอนุภาคที่มีพลังงานจลน์ต่ำ จะใช้วิธีคลื่นบางส่วน (partial wave) และสำหรับอนุภาคที่มีพลังงานสูงจะแก้สมการอินทีเกรตโดยตรงและอาศัยการประมาณค่าของบอร์น (Born approximation)

คณิตศาสตร์ที่จำเป็น

จากสมการชเรอดิงเงอร์ของการชนของอนุภาค 2 ตัว

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} + 1\right)y_\ell = 0 \qquad (10.16)$$

เมื่อ $x = kr$ คำตอบทั่วไปของสมการนี้คือ

$$y_\ell = Ax^{1/2}J_{\ell+\frac{1}{2}}(x) + Bx^{1/2}J_{-\ell-\frac{1}{2}}(x) \qquad (10.17)$$

เมื่อ A และ B เป็นค่าคงที่ และ J_ℓ เป็นฟังก์ชั่นเบสเซล (Bassel function) กำลัง ℓ ดังนี้

$$J_\ell(x) \quad = \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{\ell+2m}}{m!\Gamma(m+\ell+1)}$$

เมื่อ $\Gamma(m+\ell+1)$ เป็นฟังก์ชั่นแกมมา (Gamma function) รูปแบบของฟังก์ชั่นเบสเซลซึ่งใช้ในทฤษฎีการสะท้อน คือ

$$J_\ell(x) \quad = \quad \sqrt{\frac{\pi}{2x}} + J_{\ell+\frac{1}{2}}(x)$$

เช่นเดียวกัน ฟังก์ชั่นนอยแมน ใช้รูปแบบดังนี้

$$n_\ell(x) \quad = \quad (-1)^{\ell+1}\sqrt{\frac{\hbar}{2x}} + J_{\ell+\frac{1}{2}}(x)$$

เมื่อ ฟังก์ชั่น J_ℓ มีค่าจำกัดที่จุดกำเนิด ขณะที่ฟังก์ชั่น n_ℓ มีค่าไม่จำกัดและหาค่าไม่ได้ที่จุดกำเนิด ฟังก์ชั่นเหล่านี้จะมีค่าขอบเขตจำกัด คือ

$$j_\ell(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{x^\ell}{1.3.5\ldots(2\ell+1)}$$

$$n_\ell(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{-1.3.5\ldots(2\ell-1)}{x^\ell}$$

$$j_\ell(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1}{x}\cos\left[x - \frac{1}{2}(\ell+1)\pi\right]$$

$$n_\ell(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1}{x}\sin\left[x \quad \frac{1}{2}(\ell+1)\pi\right]$$

สำหรับ $\ell = 0$ สมการ (10.16) จะเป็นการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายและเราได้

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, n_0(x) = -\frac{\cos x}{x}$$

10.6 ครอสเซคชั่น

ถ้า V(r) เป็นพลังงานศักย์ ซึ่งขนาดมีค่าลดลงมากว่า r^{-1} เมื่อ $r \to \infty$ คำตอบของสมการชเรอดิงเงอร์

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(r) - E\right]\psi(\vec{r}) = 0$$

ของคลื่นสะท้อนในช่วง $kr \to \infty$ สามารถเขียน ได้เป็น

$$\psi_{sc}(\vec{r})\alpha e^{i\vec{k}.\vec{r}} + f(\theta,\phi)\frac{e^{ikr}}{r} \qquad (10.18)$$

สมมุติว่า คลื่นตกกระทบอยู่ในรูป $\psi_{in}(r)\alpha \exp(i\vec{k}.\vec{r})$ ในกรณีที่ไม่คิดการกระเจิงไปด้านหน้าและลำอนุภาคมีลักษณะแคบ สามารถแทนสมการ (10.18) ด้วย

$$\psi_{sc}(r)\alpha f(\theta,\phi)\frac{e^{ikr}}{r} \qquad (10.19)$$

จาก

$$\sigma_d = \frac{I(\theta,\phi)}{I}$$

$$= \lim_{r\to\infty} \left(|\vec{j}_{sc}|r^2\right)/|\vec{j}_{in}| \qquad (10.20)$$

เมื่อ

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2\mu}(\psi\vec{\nabla}\psi^* - \psi^*\vec{\nabla}\psi) \qquad (10.21)$$

และ

$$\vec{\nabla} = \hat{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{e}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

แทน $\psi_{sc}(r)$ จากสมการ (10.19) ลงในสมการ (10.21) จะได้

$$j_{sc}\alpha\frac{\hbar k}{\mu}\frac{|f(\theta)|^2}{r^2}\hat{e}_r + \frac{i\hbar}{2\mu r^3}\left(f\frac{df^*}{d\theta} - f^*\frac{df}{d\theta}\right)\hat{e}_\theta$$

เพราะว่า ศักย์ไม่ขึ้นกับ ϕ แทน $\psi_{in}(r)$ ลงในสมการ (10.21) จะได้

$$j_{in}\alpha\frac{\hbar k}{\mu}(\cos\theta\hat{e}_r - \sin\theta\hat{e}_\theta)$$

จากสมการ (10.20) จะได้

$$\sigma_d = |f(0)|^2$$

เทอมที่สองใน $j_{sc}r^2$ จะศูนย์เมื่อ $r\to\infty$

ตัวอย่าง 10.1 ได้แสดงแล้วว่า $\sigma_d = |f(\theta,\phi)|^2$ ถ้าไม่มีการแทรกสอดระหว่างคลื่นตกกระทบกับคลื่นสะท้อน จงแสดงว่าค่า σ_d นี้ยังคงใช้ได้ ถึงแม้ว่าจะมีการแทรกสอดระหว่างคลื่นทั้งสองโดยอาศัย

$$\psi_{sc}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}.\vec{r}} + f(\theta,\phi)\frac{e^{ikr}}{r}$$

วิธีทำ ใช้วิธีการเดียวกับที่ผ่านมา จะได้

$$j_{sc} \quad \alpha \quad j_r \hat{e}_r + j_\theta \hat{e}_\theta$$

เมื่อ

$$j_r = \frac{\hbar k}{r}\left(\cos\theta + \frac{|f|^2}{r^2}\right) - \frac{i\hbar}{2\mu}\left\{ f\frac{e^{ik(r-z)}}{r}\left[ik\left(\cos\theta + 1 - \frac{1}{r}\right)\right] + f^*\frac{e^{ik(r-z)}}{r}\left[ik\left(\cos\theta + 1 + \frac{1}{r}\right)\right]\right\} \qquad (1)$$

และ

$$j_\theta = -\frac{\hbar k}{\mu}\sin\theta + \frac{i\hbar}{2\mu}\left\{\frac{e^{ik(r-z)}}{r}\left(ikf\sin\theta - \frac{f'}{r}\right) + \frac{e^{ik(z-r)}}{r}\left[\frac{(f^*)'}{r} + ikf^*\sin\theta\right] + \frac{1}{r^3}\left[f(f^*)' - (f^*)f'\right]\right\} \qquad (2)$$

จะมีเทอมที่อยู่ในรูป

$$F_k^{\pm}(\Omega, r)e^{\pm ik(r-z)}$$

เมื่อ $F_k^{\pm}(\Omega, r)$ เป็นฟังก์ชั่นที่มีค่าแปรเปลี่ยนเล็กน้อยของ Ω จากสมการ (1) และสมการ (2) ซึ่งประกอบด้วยสัมประสิทธิ์ของเทอมเอ็กโพเน็นเชียล เมื่อหัววัดมีขนาดจำกัดและมุมสะท้อนค่าหนึ่ง เทอมนี้จะเป็นศูนย์ ดังนั้น

$$\lim_{r\to\infty} F^{\pm}(\Omega,r)\frac{\int e^{\pm ik(r-z)}d\Omega}{\int d\Omega} = 0 \qquad \text{ถ้า}\,\theta \neq 0$$

ตัวอย่างที่ 10.2 สำหรับการชนกันของอนุภาค 2 ตัว ด้วยแรงผ่านศูนย์กลาง เช่น ศักย์สมมาตรทรงกลม สมการชเรอดิงเงอร์จะมีรูปแบบเดียวกับของอะตอมไฮโดรเจน ดังนั้น

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+V(r)-E\right]\psi_{\vec{k}}(\vec{r})=0 \tag{1}$$

ในเรื่องของการชนกัน จะง่ายขึ้นถ้ากระจาย $\psi_{\vec{k}}(\vec{r})$ เป็นเทอมของฟังก์ชั่นเลอจองค์ ดังนี้

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r})=\sum_{\ell=0} r^{-1}g_\ell(r)p_\ell(\cos\theta) \tag{2}$$

อาศัยวิธีการกระจายคลื่นบางส่วน (partial wave expansion) แสดงว่า สัมประสิทธิ์ g_ℓ จะมีค่า ตามสมการ

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}-U(r)+k^2\right]g_\ell(r)=0 \tag{3}$$

เมื่อ $U(r)=2\mu V(r)/\hbar^2$ และ $k^2=2\mu E/\hbar^2$

วิธีทำ จาก $\nabla^2=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}-\hat{L}^2\right]$

แทนสมการ (2) ลงในสมการ (1) จะได้

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\left[\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}-\hat{L}^2\right)-U(r)+k^2\right]g_\ell p_\ell r^{-1}=0$$

จาก $\hat{L}^2p_\ell(\cos\theta)=\ell(\ell+1)p_\ell(\cos\theta)$ จะได้

$$\sum_\ell\frac{p_\ell(\cos\theta)}{r}\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}-U(r)+k^2\right]g_\ell(r)=0 \tag{4}$$

คูณด้วย $p_{\ell'}(\cos\theta)$ และอาศัยหลักการออร์โทโกนอล

$$\int_{-1}^{+1}p_{\ell'}(x)p_\ell(x)dx=\frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'}$$

จะได้

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}-U(r)+k^2\right]g_\ell(r)=0$$

ตัวอย่างที่ 10.3 สำหรับการชนกันแบบยืดหยุ่นกับศักย์สมมาตร สามารถเขียนของสมการคลื่นสะท้อนได้เป็น

$$\psi_{sc}(\vec{r}) = N\left[\psi_{in}(\vec{r}) + f(\theta)/r\right]$$

ในช่วง $kr \to \infty$ ซึ่ง N มีค่าคงที่ กระจาย $\psi_{sc}(\vec{r})$ เป็นเทอมของฟังก์ชั่นเลอจองด์และอาศัยการกระจายอะซิมโทติก (asymptotie expansion) ของ $j_\ell(kr)$

$$j_\ell(kr) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{kr}\cos\left[kr - (\ell+1)\frac{\pi}{2}\right]$$
$$= \frac{1}{kr}\sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right)$$

เพื่อที่จะแสดงว่า ขนาดการสะท้อน (scattering amplitude) $f(\theta)$ สามารถเขียนในรูปการกระจายคลื่นบางส่วนได้ ดังนี้

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\left(e^{i2\delta_\ell} - 1\right)p_\ell(\cos\theta)$$

เมื่อ δ_ℓ เป็นการเปลี่ยนแปลงของเฟสของคลื่นส่วนที่ ℓ

วิธีทำ เราสามารถเขียนคลื่นสะท้อนได้เป็น

$$\psi_{sc}(\vec{r}) = N\sum_{\ell=0}^{\infty}A_\ell(2\ell+1)\frac{i^\ell}{kr}\sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_\ell\right)p_\ell(\cos\theta)$$
$$= N\left\{ \sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\frac{i^\ell}{kr}\sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right)p_\ell(\cos\theta) + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r} \right\}$$

ดังนั้น

$$f(\theta) = re^{-ikr}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\frac{i^\ell}{kr}\left[A_\ell\sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_\ell\right) - \sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right)\right]p_\ell(\cos\theta)$$

แตกฟังก์ชั่นไซน์ให้อยู่ในรูปเอ็กโพเน็น จะได้

$$f(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(2\ell+1)}{2ik}i^\ell\left\{A_\ell\left[e^{i\left(-\frac{\ell\pi}{2}+\delta_\ell\right)} - e^{i\left(-2kr+\frac{\ell\pi}{2}-\delta_\ell\right)}\right] - \left[e^{-i\frac{\ell\pi}{2}} - e^{i\left(-2kr+\frac{\ell\pi}{2}\right)}\right]\right\}p_\ell(\cos\theta) \qquad (5)$$

เนื่องจาก $f(\theta)$ ไม่ขึ้นกับ r ดังนั้นเทอมทางขวาของสมการที่ขึ้นกับ r จะมีค่าเป็นศูนย์ จะได้

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(2\ell+1)}{2ik} i^{\ell} e^{i\left(\frac{\ell\pi}{2}-2kr\right)} \left(A_{\ell} e^{-i\delta_{\ell}} - 1\right) p_{\ell}(\cos\theta) = 0 \qquad (6)$$

เนื่องจากสมการ (6) จะต้องเป็นจริงทุกค่า θ ดังนั้น

$$A_{\ell} e^{-i\delta_{\ell}} - 1 = 0 \qquad \text{หรือ} \qquad A_{\ell} = e^{-i\delta_{\ell}}$$

แทนค่า A_{ℓ} ลงในสมการ (5) จะได้

$$f(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(2\ell+1)}{2ik} i^{\ell} e^{-i\frac{\ell\pi}{2}} \left(e^{2i\delta_{\ell}} - 1\right) p_{\ell}(\cos\theta)$$

อาศัย $\exp\left(-\frac{i\ell\pi}{2}\right) = (-i)^{\ell}$ จะได้

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1)\left(e^{i2\delta_{\ell}} - 1\right) p_{\ell}(\cos\theta)$$

ซึ่งจะใช้ได้กับอนุภาคที่มีพลังงานต่ำ

สำหรับศักย์ที่มีค่าเป็นศูนย์ เมื่อระยะทางมากกว่ารัศมี r_0 อนุภาคที่มี $b > r_0$ จะไม่สะท้อน ดังนั้น การสะท้อนจะมีค่าน้อย เมื่อ

$$b = \frac{L}{p} > r_0 \qquad \text{หรือ} \qquad \ell > kr_0$$

สำหรับ

$$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar$$

$$p = mv = \hbar\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) = \hbar k$$

ซึ่งจากฟิสิกส์ดั้งเดิม L = bp โดยที่ b เป็นพารามิเตอร์อิมแพก

ครอสเซกชั่นรวมของการสะท้อนแบบยืดหยุ่น δ

จาก

$$\sigma = 2\pi \int_0^{\pi} \sigma_d(\theta) \sin\theta d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} |f(\theta)|^2 \sin\theta d\theta$$

แทนค่า $f(\theta)$ จะได้

$$\sigma = \frac{\pi}{2k^2} \sum_{\ell=0} \sum_{\ell'=0} (2\ell+1)(2\ell'+1)\left(e^{-2i\delta_{\ell}} - 1\right)\left(e^{+2i\delta_{\ell'}} - 1\right) \int_0^{\pi} p_{\ell}(\cos\theta) p_{\ell'}(\cos\theta) \sin\theta d\theta$$

$$= \frac{\pi}{k^2} \sum_{\ell} (2\ell+1)\left[2 - \left(e^{2i\delta_{\ell}} + e^{-2i\delta_{\ell}}\right)\right]$$

$$= \frac{2\pi}{k^2} \sum_{\ell} (2\ell+1)(1 - \cos 2\delta_{\ell})$$

$$= \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \sin^2 \delta_{\ell}$$

10.7 อนุภาคพลังงานสูง

สำหรับอนุภาคที่มีพลังงานสูง จะอาศัยการประมาณค่าตามสมการแบบของบอร์น ถ้าศักย์เป็นศักย์ทรงกลมชนิดสมมาตร ขนาดของการกระเจิง คือ

$$f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2 q}\int_0^\infty drr \sin qrV(r)$$

เมื่อ $\qquad q \equiv ak \sin\frac{\theta}{2}$

ค่าครอสเซกชั่น คือ

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

ก) ศักย์ยูกาวา $\qquad V(r) = V_0 e^{-\alpha r/r}$

$$f(\theta) = -\frac{2mV_0}{\hbar^2 q}\int_0^\infty dr \sin qre^{-\alpha r} = -\frac{2mV_0}{\hbar^2 q}\frac{q}{\alpha^2 + q2}$$

$$= -\frac{2mV_0}{\hbar^2}\frac{1}{\alpha^2 + q2}$$

ค่าครอสเซกชั่น (S_0) $\quad \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \left(\frac{2mV_0}{\hbar^2}\right)^2 \frac{1}{(\alpha^2 + q2)^2}$

$$\sigma = 2\pi\left(\frac{2mV_0}{\hbar^2}\right)^2 \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \frac{1}{\left(\alpha^2 + 4k^2 \sin^2 \theta/2\right)^2}$$

$$= 2\pi\left(\frac{2mV_0}{\hbar^2}\right)^2 \frac{2}{\alpha^2\left(\alpha^2 + 4k^2\right)}$$

ข) ศักย์เกาส์เซียน $\qquad V(r) = V_0 e^{-\alpha^2 r^2}$

$$f(\theta) = -\frac{2mV_0}{\hbar^2 q}\int_0^\infty drr\sin qre^{-\alpha^2 r^2} = -\frac{2mV_0}{\hbar^2 q}\frac{\sqrt{\pi}q}{4\alpha^3}e^{-q^2/4\alpha^2}$$

$$= -\frac{mV_0\sqrt{\pi}}{2\hbar^2\alpha^3}e^{-q^2/4\alpha^2}$$

ค่าครอสเซกชั่น (S_0) $\quad \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \left(\frac{mV_0\sqrt{\pi}}{2\hbar^2\alpha^3}\right)^2 e^{-q^2/2\alpha^2}$

$$\sigma = 2\pi\left(\frac{mV_0\sqrt{\pi}}{2\hbar^2\alpha^3}\right)^2\int_0^\pi d\theta \sin\theta e^{-\frac{2k^2}{\alpha^2}\sin^2\theta/2}$$

$$= 2\pi\left(\frac{mV_0\sqrt{\pi}}{2\hbar^2\alpha^3}\right)^2\frac{\alpha^2}{k^2}\left[1-e^{-2k^2/\alpha^2}\right]$$

ค) ศักย์เอ็กโพเนิ่นเชียล $V(r) = V_0e^{-\alpha r}$

$$f(\theta) = -\frac{2mV_0}{\hbar^2 q}\int_0^\infty drr\sin qre^{-\alpha r} = -\frac{2mV_0}{\hbar^2 q}\frac{2\alpha q}{(\alpha^2+q^2)^2}$$

$$= -\frac{4mV_0\alpha}{\hbar^2}\frac{1}{(\alpha^2+q^2)^2}$$

ค่าครอสเซกชั่น (S_0) $\quad \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \left(\frac{4mV_0\alpha}{\hbar^2}\right)^2\frac{1}{(\alpha^2+q^2)^4}$

$$\sigma = 2\pi\left(\frac{4mV_0\alpha}{\hbar^2}\right)^2\int_0^\infty d\theta\sin\theta\left(\alpha^2+4k^2\sin^2\theta/2\right)^{-4}$$

$$= 2\pi\left(\frac{mV_0\alpha}{\hbar^2}\right)^2\frac{2}{3}\frac{\left[3\alpha^4+12\alpha^2k^2+16k^4\right]}{(\alpha^2+4k^2)^3}$$