บทที่ 1
บทนำ

วัตถุประสงค์

1) ศึกษาความล้มเหลวของฟิสิกส์ดั้งเดิม ในการอธิบายสเปกตรัมจากอะตอม ปรากฏการณ์คอมป์ตัน ปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริกและอะตอมตามแบบของโบร์
2) ศึกษาคลื่นอิเล็กตรอน และกำเนิดทฤษฎีควอนตัม

ในช่วงระหว่างปี ค.ศ. 1890-1930 มีการค้นพบทางฟิสิกส์หลายอย่างทั้งจากการทดลองและจากทฤษฎี ที่แสดงว่า กฎเกณฑ์ทางฟิสิกส์ดั้งเดิม (Classical Physics) ไม่สามารถนำไปใช้อธิบายปรากฏการณ์บางอย่างที่เกิดขึ้นกับระบบที่มีขนาดเล็ก เช่นอนุภาคภายในอะตอมได้ เช่นเดียวกับความล้มเหลวเมื่อนำกฎเกณฑ์นี้ไปใช้กับวัตถุที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วใกล้ความเร็วของแสง ทำให้มีการพัฒนาฟิสิกส์แขนงใหม่คือกลศาสตร์ควอนตัม (Quantum mechanics) ขึ้นเพื่อที่จะอธิบายปรากฏการณ์เหล่านี้ กลศาสตร์ควอนตัม พัฒนาขึ้นมาบนพื้นฐานของสมมุติฐานซึ่งแตกต่างจากกลศาสตร์ดั้งเดิม สำหรับกลศาสตร์ควอนตัมการวัดค่าต่างๆ จะทำได้ไม่แน่นอน การวัดค่าพารามิเตอร์ตัวหนึ่งจะมีผลต่อการวัดค่าพารามิเตอร์ตัวอื่น ตัวอย่างเช่น การวัดค่าตำแหน่งของวัตถุจะมีผลต่อการวัดค่าโมเมนตัมของวัตถุนั้น

1.1 การค้นพบที่สำคัญในช่วงปลายศตวรรษที่ 19

การค้นพบและความพยายามที่จะอธิบายปรากฏการณ์ต่างๆ ในช่วงระหว่างปี คศ. 1884 ถึง ปี คศ. 1932 ซึ่งเป็นจุดเริ่มต้นของทฤษฎีควอนตัม สรุปโดยย่อได้ดังนี้

1884 บาลเมอร์ (Balmer) พบสูตรเอมพิริกัล (Empirical Formula) เพื่อคำนวณเส้นสเปกตรัมจากอะตอมไฮโดรเจน

1887 เฮิรตซ์ (Hertz) สร้างคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ได้เป็นผลสำเร็จ พิสูจน์ทฤษฎีของแมกซ์เวลล์ (Maxwell's Theory) และค้นพบปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริก (Photoelectric Effect) โดยบังเอิญ

1895 เรินต์เกน (Roentgen) ค้นพบรังสีเอกซ์ (x-rays)

1896 แบ็กเกอแรล (Becquerel) ค้นพบกัมมันตภาพรังสี (Radioactivity)

1897 ทอมสัน (Thomson) ค้นพบอิเล็กตรอน และการวัดอัตราส่วนประจุต่อมวลของอิเล็กตรอน

1900 พลังค์ (Planck) แนะนำว่าพลังงานของรังสีจากวัตถุดำที่มีค่าไม่ต่อเนื่อง

1900 เลนนาร์ด (Lenard) ศึกษาปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริก พบว่า พลังงานของอิเล็กตรอนที่หลุดออกมาไม่ขึ้นกับความเข้มของแสงที่ตกกระทบเป้า (target)

1905 ไอน์สไตน์ (Einstein) ตั้งทฤษฎีสัมพัทธภาพ (Theory of Relativity)

1905 ไอน์สไตน์ อธิบายปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริก โดยอาศัยหลักการว่า พลังงานของแสงมีค่าไม่ต่อเนื่อง

1907 ไอน์สไตน์ อาศัยหลักความไม่ต่อเนื่องของพลังงาน อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างความจุความร้อนของแข็งกับอุณหภูมิ

1909 มิลลิแกน (Millikan) อาศัยการทดลองของหยดน้ำมัน แสดงความไม่ต่อเนื่องของประจุไฟฟ้า

1911 รัทเทอร์ฟอร์ด (Rutherford) เสนอแนะแบบจำลองของอะตอม โดยอาศัยการทดลองการกระเจิงของอนุภาคแอลฟา

1912 โบร์ (Bohr) เสนอโครงสร้างของอะตอม โดยอาศัยสเปกตรัมจากอะตอมไฮโดรเจน

1914 ฟรังก์ และเฮิรตซ์ (Franck and Hertz) แสดงการกระตุ้นอะตอมด้วยอนุภาค

1915 วิลสันและซอมเมอร์เฟลด์ (Wilson and Sommerfield) เสนอกฎของการควอนไตส์ (Quantization) ของระบบที่เป็นระเบียบ

1916 มิลลิแกน พิสูจน์สมการโฟโตอิเล็กทริกของไอน์สไตน์

1923 คอมป์ตัน (Compton) อธิบายการกระเจิงของรังสีเอ็กซ์โดยอิเล็กตรอน และมีผลการทดลองพิสูจน์

1924 เดอ เบรย (De Broglie) เสนอหลักการความเป็นคลื่นอิเล็กตรอน โดยมีความยาวคลื่นเท่ากับ h/p

1925 ชเรอดิงเงอร์ (Schrodinger) พัฒนาคณิตศาสตร์ของกลศาสตร์คลื่นของอิเล็กตรอน

1925 ไฮเซนแบร์ก (Heisenberg) สร้างกลศาสตร์เมทริกซ์ (Matric Mechnics)

1926 เพาลี (Pauli) เสนอแนะหลักการกีดกัน (Exclusion Principle)

1927 ไฮเซนแบร์ก เสนอหลักความไม่แน่นอน (Uncertainty Principle)

1928 เดวิสสัน และ เจอร์เมอร์ (Davisson and Germer) ศึกษาการเลี้ยวเบนของอิเล็กตรอนจากผลึก

1927 ทอมสัน (G.P. Thomson) ศึกษาการเลี้ยวเบนของอิเล็กตรอนในแผ่นโลหะบาง

1929 ดิแรก (Dirac) พัฒนากลศาสตร์ควอนตัม และพยากรณ์การมีอยู่ของโพสิตรอน (positron)

1932 แชดวิก (Chadwick) ค้นพบนิวตรอน

1932 แอนเดอร์สัน (Anderson) ค้นพบโพสิตรอน

ฟิสิกส์ดั้งเดิม (Classic Physics) ประกอบด้วยวิชาใหญ่ 2 สาขาคือ วิชากลศาสตร์ ซึ่งอาศัยกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน และวิชาแม่เหล็กไฟฟ้า ซึ่งอาศัยกฎของแมกเวลล์ นอกจากนี้ยังประกอบด้วยวิชาอุณหพลศาสตร์ และวิชากลศาสตร์เชิงสถิติ การเปรียบเทียบวิชาต่างๆ ในฟิสิกส์ดั้งเดิม แสดงในตารางที่ 1-1

ตารางที่ 1-1 เปรียบเทียบฟิสิกส์ดั้งเดิม

กลศาสตร์	แม่เหล็กไฟฟ้า	อุณหพลศาสตร์
มวล (m) ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วง (g) F=ma บอกค่า x(t) คำนวณ p กฎการอนุรักษ์ มวล พลังงาน โมเมนตัม	ประจุ (q) สนามแม่เหล็กไฟฟ้า $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$ บอกค่า E(x,t),H(x,t) $\left(\frac{1}{c^2}\frac{2^2}{dt^2} - \nabla^2\right)\left\{\frac{R(x,t)}{H(x,t)}\right\} = 0$ แสงเป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\vec{c}$	อิควิพาทิชัน (equipartition) ของพลังงาน

ในช่วงปี 1900 การคำนวณในกลศาสตร์ดั้งเดิม (กลศาสตร์นิวตัน) อาศัยสูตรที่สำคัญของลากรานจ์ (Lagrange) และแฮมมิลตัน (Hamilton) มาช่วยในการคำนวณ ดังแสดงในตัวอย่างที่ 1.1 และตัวอย่างที่ 1.2

ตัวอย่าง 1.1 ในช่วงความเร็วน้อยกว่าความเร็วของแสง (non-relativistic limit) สำหรับกลศาสตร์ดั้งเดิมจะเขียนสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล m และประจุ q ได้ดังนี้

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = q\left(\vec{E}+\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{H}\right)$$

ถ้า $\vec{A}$ เป็นศักย์เวกเตอร์ (vector potential) และ $\varnothing$ เป็นศักย์สเกลาร์ (scalar potential) ของสนามต่อไปนี้

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varnothing-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

จงแสดงว่า จะสามารถหาสมการการเคลื่อนที่ได้จากลากรานจ์เกียน (Lagrangian)

$$L = \frac{1}{2}mv^2+q\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{A}}{c}-\varnothing\right)$$

และจงหาโมเมนตัมสังยุคของลากรานจ์ (conjugate lagrange momenta) และแฮมมิลโทเนียน (Classical Hamitonian) ดั้งเดิม

วิธีทำ สมการการเคลื่อนที่ของลากรานจ์ คือ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \qquad (1.1)$$

เมื่อ i = 1,2,3,...........n

q_i เป็นโคออร์ดิเนต และ $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$ เป็นความเร็ว

จาก $L = \frac{1}{2}mv^2 + q\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{A}}{c} - \phi\right)$

จะได้ $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = mv + q\frac{\vec{A}}{c}$

และ $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{q}{c}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\vec{v}.\vec{A}\right) - q\frac{\partial \varnothing}{\partial q_i}$

ดังนั้นจากสมการ (1.1)

$$\frac{d}{dt}\left(mv + q\frac{\vec{A}}{c}\right) - \frac{q}{c}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\vec{v}.\vec{A}\right) + q\frac{\partial \varnothing}{\partial q_i} = 0$$

$$\left[\frac{d}{dt}(mv) + \frac{q}{c}\frac{d\vec{A}}{dt}\right] - \left[\frac{q}{c}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\vec{v}\cdot\vec{A}\right) - q\frac{\partial\phi}{\partial q_i}\right] = 0$$

$$\frac{d}{dt}(mv) = -\frac{q}{c}\frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{q}{c}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\vec{v}.\vec{A}\right) - q\frac{\partial \varnothing}{\partial q_i} \tag{1.2}$$

จากคณิตศาสตร์

$$\vec{\nabla}\left(\vec{v}.\vec{A}\right) = \vec{v}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} + \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v}) + (\vec{v}\times\vec{\nabla}) + (\vec{A}.\vec{\nabla})$$

เมื่อ v $\neq$ v(q) และให้ $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial q_i}$ จะได้

$$\vec{\nabla}(\vec{V}.\vec{\nabla}) = \vec{v}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} \tag{1.3}$$

และ

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{A} \tag{1.4}$$

แทนสมการ (1.3) และสมการ (1.4) ลงในสมการ (1.2) จะได้

$$\frac{d}{dt}(mv) = \frac{-q}{c}\left[\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A}\right] + \frac{q}{c}\vec{\nabla}\left(\vec{v}\cdot\vec{A}\right) - q\vec{\nabla}\phi$$

$$= \frac{-q}{c}\left[\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}\right]+\frac{q}{c}\left[(\vec{v}\times\vec{\nabla}\times\vec{A})+(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}\right]-q\vec{\nabla}\phi$$

$$= \frac{-q}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\frac{q}{c}(\vec{v}\times\vec{\nabla}\times\vec{A})-q\vec{\nabla}\phi$$

$$= q\left[\left(\frac{-1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\vec{\nabla}\phi\right)+\frac{1}{c}(\vec{v}\times\vec{\nabla}\times\vec{A})\right]$$

$$= q\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})\right)$$

$$= q\left(\vec{E}+\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{H}\right)$$

ซึ่งก็คือ สมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล m และประจุ q

เมื่อ $\vec{A}$ และ $\varnothing$ เป็นศักย์เวกเตอร์และศักย์สเกลาร์ ของสนามนี้

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varnothing - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{H} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

โมเมนตันสังยุค (Conjugate momentum)

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} = m\vec{v}+q\frac{\vec{A}}{c}$$

แฮมมิลโทเนียนดั้งเดิม (Classical hamiltonian)

$$H = \sum p_i q_i - L$$

$$H = mv^2+q\frac{\vec{v}.\vec{A}}{c}-\frac{1}{2}mv^2-q\frac{\vec{v}.\vec{A}}{c}+q\varnothing$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + q\varnothing \tag{1.5}$$

จาก $$p_i = mv + q\frac{\vec{A}}{c}$$

$$p_i - q\frac{\vec{A}}{c} = mv$$

$$\left(\frac{p_i - q\frac{\vec{A}}{c}}{m}\right) = v \tag{1.6}$$

แทนสมการ (1.6) ลงในสมการ (1.5)

$$H = \frac{1}{2}m\frac{\left(p_i - q\frac{\vec{A}}{c^2}\right)^2}{m^2} + q\varnothing$$

$$= \frac{1}{2m}\left(p_i - q\frac{\vec{A}}{c}\right)^2 + q\ \varnothing$$

ตัวอย่างที่ 1.2 สมการเคลื่อนที่จาก ตัวอย่างที่ผ่านมาจะยังคงใช้ได้ในช่วงความเร็วใกล้ความเร็วแสง (relativistic limit) โดยการแทนค่ามวลนิ่ง m ด้วยมวลสัมพัทธภาพ (relativistic mass)

$$M = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} m$$

จงแสดงว่าลากรานจ์เกียนจะเปลี่ยนเป็น

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + q\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{A}}{c} - \varnothing\right)$$

และจงหาโมเมนตัมสังยุค และแฮมมินโทเนียน

วิธีทำ

$$M = \gamma m = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-\frac{1}{2}} m$$

$$L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} + q\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{A}}{c} - \varnothing\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = -mc^2\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{-2v}{c^2}\right)\right] + \frac{q}{c}\vec{A}$$

$$= -m\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}(-v) + q\frac{\vec{A}}{c}$$

$$= \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{q\vec{A}}{c}$$

จาก $$M = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ดังนั้น $$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = M\vec{v} + \frac{q}{c}\vec{A}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = q\left[\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{A}}{c}\right) - \frac{\partial \varnothing}{\partial q}\right]$$

จะได้

$$\frac{d}{dt}\left(M\vec{v} + q\frac{\vec{A}}{c}\right) - q\left[\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{A}}{c}\right) - \frac{\partial \varnothing}{\partial q}\right] = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(M\vec{v} + \frac{q}{c}\frac{d\vec{A}}{dt}\right) - \left[q\left(\frac{\partial}{\partial q}\frac{\left(\vec{v}\cdot\vec{A}\right)}{c} - \frac{\partial \phi}{\partial q}\right)\right] = 0$$

$$\frac{d}{dt}(M\vec{v}) = -\frac{q}{c}\frac{d\vec{A}}{dt}+\left[q\left(\frac{\partial}{\partial q}\frac{(\vec{v}\cdot\vec{A})}{c}-\frac{\partial\phi}{\partial q}\right)\right]$$

$$= -\frac{q}{c}\frac{d\vec{A}}{dt}+\frac{q}{c}\frac{\partial}{\partial q}(\vec{v}\cdot\vec{A})-q\frac{\partial\phi}{\partial q}$$

จากคณิตศาสตร์

$$\vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{A}) = (\vec{v}\times\vec{\nabla}\times\vec{A})+(\vec{A}(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}))$$

เมื่อ $v \neq v(q)$ และให้ $\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial q}$ จะได้

$$\vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{A}) = (\vec{v}\times\vec{\nabla}\times\vec{A})+(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$$

ดังนั้น จะได้

$$\frac{d}{dt}(M\vec{v}) = \frac{-q}{c}\left[\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}\right]+\left[\frac{q}{c}\vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{A})-q\vec{\nabla}\phi\right]$$

$$= \frac{-q}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\frac{q}{c}(\vec{v}\times\vec{\nabla}\times\vec{A})-q\vec{\nabla}\phi$$

$$= q\left[\frac{-1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\vec{\nabla}\phi+\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{\nabla}\times\vec{A}\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left(M\vec{v}\right) = q\left(\vec{E}+\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{H}\right)$$

เป็นสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคในช่วงความเร็วใกล้ความเร็วแสง

ดังนั้น สมการของลากรานจ์ คือ

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + q\left(\frac{\vec{v}\,.\,\vec{A}}{c} - \phi\right)$$

โมเมนตัมสังยุค $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = M\vec{v} + \frac{q}{c}\vec{A}$

แฮมมินโทเนียน H = $\sum p_i \dot{q}_i - L$

$$= \left(M\vec{v} + \frac{q}{c}\vec{A}\right)\vec{v} + mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - q\left(\frac{\vec{v}\,.\vec{A}}{c} - \varnothing\right)$$

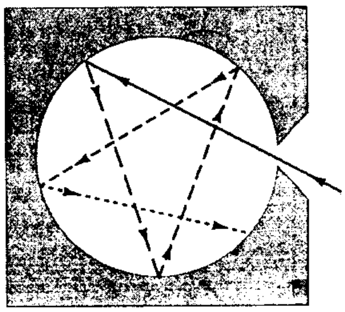
$$= Mv + mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + q\phi$$

เมื่อ $v = \frac{1}{M}\left(p - q\frac{A}{c}\right)$

ทฤษฎีทางฟิสิกส์ดั้งเดิมไม่สามารถอธิบายปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นกับระบบที่มีขนาดเล็ก เริ่มจากการอธิบายรังสีจากวัตถุดำ (Black-body Radiation) ปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริก การกระเจิงคอมป์ตัน (Compton Scattering) และโครงสร้างอะตอม

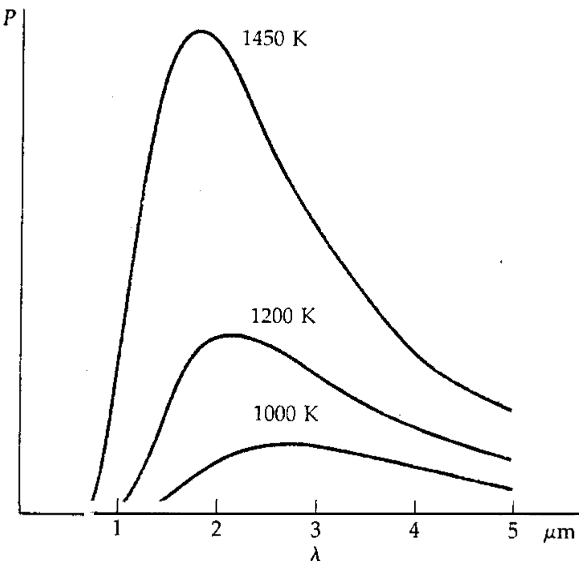
1.2 รังสีวัตถุดำ (Black body radiation)

วัตถุดำเป็นระบบอุดมคติ ซึ่งดูดกลืนรังสีทั้งหมดที่กระทบลงบนวัตถุนั้น อาจจะสมมุติว่าวัตถุดำเป็นโพรง (Cavity) ที่มีช่องเปิดขนาดเล็กดังรูปที่ 1-1 คุณสมบัติของรังสีภายในโพรง จะขึ้นกับอุณหภูมิของผนังเพียงอย่างเดียว ที่อุณหภูมิต่ำกว่า 600°C เราไม่สามารถมองเห็นรังสีความร้อนที่แผ่ออก มาจากวัตถุดำ เพราะว่าเป็นรังสีที่มีความถี่อยู่ในช่วงอินฟาเรด (Infared) เมื่อเพิ่มความร้อนให้กับวัตถุ ปริมาณของพลังงานที่ส่งออกมาจะเพิ่มขึ้น เป็นไปตามกฎของซเตฟาน-โบลต์ชมันน์ (Stefan-Boltzmann) และจำนวนรังสีส่วนใหญ่ จะมีความยาวคลื่นสั้นลง เมื่ออุณหภูมิอยู่ในช่วงระหว่าง 600 ถึง 700°C วัตถุจะมีสีแดง เป็นรังสีที่มีความถี่อยู่ในช่วงที่ตามองเห็นได้ ที่อุณหภูมิมากกว่า 700°C วัตถุจะมีสีแดงสว่างมากขึ้น จนกระทั่งเป็นสีขาว



รูปที่ 1.1 โพรงสมมุติว่าเป็นวัตถุดำ เมื่อรังสีเข้าไปในภายในโพรง จะมีโอกาสน้อยมากที่จะหลุดออกมาจากโพรง

ปริมาณของรังสีเป็นฟังก์ชั่นของความยาวคลื่น ที่อุณหภูมิ 1000° K, 1200° K, 1450°K แสดงในรูปที่ 1.2 กราฟเหล่านี้มีชื่อเรียกว่า กราฟการกระจายสเปกตรัม (Spectral Distribution Curve) แกน y เป็นพลังงานที่แผ่ออกมาต่อความยาวคลื่น ใช้สัญลักษณ์ P เป็นฟังก์ชั่นของความยาวคลื่นและอุณหภูมิ มีชื่อเรียกว่า ฟังก์ชั่นการกระจายของสเปกตรัม (Spectral Distribution Function)



รูปที่ 1.2 การกระจายของสเปคตรัมจากรังสีวัตถุดำเป็นฟังก์ชั่นของความยาวคลื่น ที่อุณหภูมิต่าง ๆ

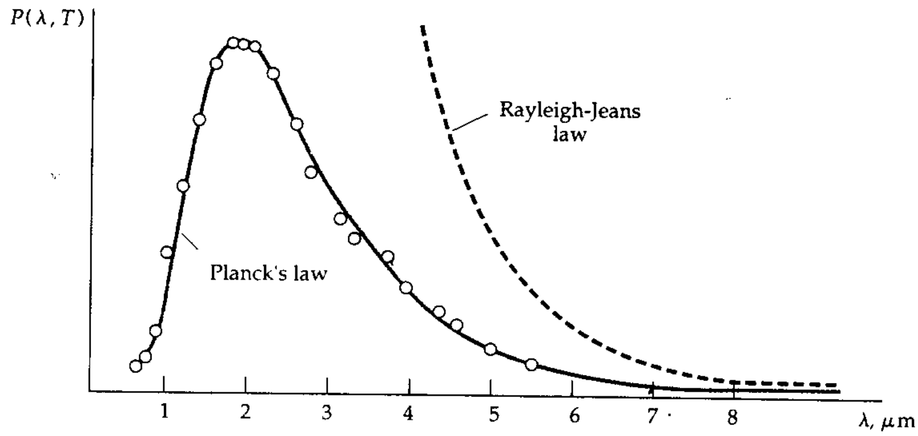
ฟังก์ชั่น $P(\lambda, T)$ มีค่าสูงสุดที่ความยาวคลื่น λ_{max} ซึ่งเป็นสัดส่วนกลับกับอุณหภูมิ เป็นไปตามกฎการกระจัดของวีน (Wien's Displacement Law)

$$\lambda_{max} = \frac{2.898mm.K}{T}$$

ฟังก์ชั่นการกระจายของสเปกตรัม $P(\lambda, T)$ สามารถคำนวณได้จากกฎของ เรย์ลี และจีน โดยอาศัยความรู้ทางด้านอุณหพลศาสตร์

$$P(\lambda, T) = 8\pi kT\lambda^{-4}$$

เมื่อ k เป็นค่าคงที่ของโบลต์ซมันน์ ค่าที่ได้จากการคำนวณจะมีค่าตรงกับการทดลองเฉพาะช่วงความยาวคลื่นมากเท่านั้น ในช่วงความยาวคลื่นน้อย $P(\lambda, T)$ จากการทดลองจะเข้าใกล้ศูนย์ แต่ค่าจากการคำนวณจะมีค่ามากเข้าใกล้ค่าอนันต์ ซึ่งเป็นความล้มเหลวของทฤษฎีในช่วงอัลตราไวโอเลต



รูปที่ 1.3 การกระจายของสเปคดรัมจากรังสีวัตถุดำ เป็นฟังก์ชั่นของความยาวคลื่น ที่อุณหภูมิ 1600K เปรียบเทียบค่าจากทฤษฎีและจากการทดลอง

ในปีค.ศ. 1900 นักฟิสิกส์ชาวเยอรมัน มักซ์ พลังค์ ตั้งสมมุติฐานว่า รังสีที่ส่งออกมาจากวัตถุดำมีค่าไม่ต่อเนื่อง โดยจะถูกส่งออกมาเป็นกลุ่มย่อยของพลังงานซึ่งเรียกว่าควอนตัม (Quantum) เขาพบว่าขนาดของควอนตัมเป็นสัดส่วนกับความถี่ของรังสี

$$E = hf$$

เมื่อ h เป็นค่าคงที่ ปัจจุบันเรียกว่า ค่าคงที่ของพลังค์ โดยที่ $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J.s = 4.136×10^{-15} eV.s

เมื่ออาศัยสมมุติฐานนี้มาช่วยในการคำนวณ จะได้ค่า $P(\lambda, T)$ ตรงกับค่าที่ได้จากการทดลอง ดังรูปที่ 1.3

พลังค์ไม่สามารถอธิบายค่าคงที่ h โดยอาศัยฟิสิกส์ดั้งเดิม ความสำคัญของสมมุติฐานเกี่ยวกับส่วนย่อยของพลังงาน (ควอนตัม) ไม่ได้รับการยอมรับ จนกระทั่งไอน์สไตน์นำสมมุติฐานนี้มาอธิบายขบวนการโฟโตอิเล็กทริก และแนะนำว่า ควอนตัม เป็นคุณสมบัติพื้นฐานของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

ตัวอย่างที่ 1.3 ก) จากฟิสิกส์ดั้งเดิม ซึ่งคิดว่าพลังงานมีค่าต่อเนื่อง พลังงานเฉลี่ย $<\varepsilon>$ ของระบบที่อยู่ในภาวะสมดุล (ความร้อน) มีค่าดังนี้

$$<\varepsilon> = \frac{\iint \varepsilon e^{-\varepsilon/k_B T} dpdx}{\iint e^{-\varepsilon/k_B T} dpdx} \tag{1.7}$$

สำหรับฮาร์โมนิคออสซิลเลเตอร์อย่างง่าย

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 \tag{1.8}$$

จงคำนวณหาพลังงานเฉลี่ย $<\varepsilon>$

ข) ถ้าพลังงานของออสซิลเลเตอร์มีค่าไม่ต่อเนื่อง โดยมีค่าดังนี้

$\varepsilon_i = ih\upsilon$ เมื่อ i เป็นเลขจำนวนเต็มบวก

ดังนั้นพลังงานเฉลี่ยจะมีค่าดังนี้

$$<\varepsilon> = \frac{\sum_{i=0} \varepsilon_i e^{-\varepsilon_i/k_B T}}{\sum_{i=0} e^{\varepsilon_i/k_B T}} \tag{1.9}$$

จงคำนวณหาพลังงานเฉลี่ยของฮาร์โมนิคออสซิลเลเตอร์อย่างง่ายนี้

ค) จงแสดงว่าเมื่อช่องว่างระดับพลังงานลดลงจนเข้าใกล้ศูนย์พลังเฉลี่ยในข้อ ข) จะเท่ากับในข้อ ก)

วิธีทำ ก) แทนค่า ε จากสมการ (1.8) ลงในสมการ (1.7)

$$< \varepsilon > = \frac{\iint \varepsilon e^{-\varepsilon/k_B T} dpdx}{\iint e^{-\varepsilon/k_B T} dpdx}$$

$$= \frac{\iint \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2\right) e^{-\frac{p^2}{2mk_BT}} e^{-\frac{kx^2}{2k_BT}} dpdx}{\iint e^{-\frac{p^2}{2mk_BT}} e^{-\frac{kx^2}{2k_BT}} dpdx}$$

$$= \frac{\frac{1}{2m}\int_{-\infty}^{+\infty} p^2 e^{-\frac{p^2}{2mk_BT}} dp}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{p^2}{2mk_BT}} dp} + \frac{\frac{1}{2}k\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{kx^2}{2k_BT}} dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{kx^2}{2k_BT}} dx}$$

$$= \frac{(2mk_BT)^{3/2}\left(\sqrt{\pi}/4\right)}{2m(2mk_BT)^{1/2}\left(\sqrt{\pi}/4\right)} + \frac{k(2k_BT/k)^{3/2}\left(\sqrt{\pi}/4\right)}{2(2k_BT/k)^{1/2}\left(\sqrt{\pi}/4\right)}$$

$$= \frac{k_BT}{2} + \frac{k_BT}{2} = k_BT$$

ข) ถ้าคิดว่าพลังงานมีค่าไม่ต่อเนื่อง

$$< \varepsilon > = \frac{E_{TOTAL}}{N_{TOTAL}} = \frac{\sum_{i=0} \varepsilon_i n_i}{\sum_{i=0} n_i}$$

$$= \frac{\sum_{i=0} i h\upsilon N_0 e^{-\frac{ih\upsilon}{k_BT}}}{\sum_{i=0} N_0 e^{-\frac{ih\upsilon}{k_BT}}}$$

$$= h\upsilon \frac{\sum_i i y^i}{\sum_i y^i}$$

เมื่อ

$$y = e^{-\frac{h\upsilon}{k_B T}}$$

เนื่องจาก

$$\sum_{i=0} y^i = 1 + y + y^2 + \ldots = (1-y)^{-1}$$

และ

$$\sum_{i=0} iy^i = y + 2y^2 + 3y^3 + \ldots = y(1 + 2y + 3y^2 + \ldots) = y(1-y)^{-2}$$

จะได้

$$<\varepsilon> \; = h\upsilon \frac{y(1-y)^{-2}}{(1-y)^{-1}} = h\upsilon \frac{y}{(1-y)}$$

$$= h\upsilon \frac{e^{-h\upsilon/k_B T}}{1 - e^{-h\upsilon/k_B T}} = \frac{h\upsilon}{e^{h\upsilon/k_B T} - 1}$$

ค) ในกรณีที่ $k_B T >> h\upsilon$

$$e^{h\upsilon/k_B T} = 1 + \left(\frac{h\upsilon}{k_B T}\right) + \ldots \approx 1 + \frac{h\upsilon}{k_B T}$$

ดังนั้น

$$<\varepsilon> = \frac{h\upsilon}{1 + \frac{h\upsilon}{k_B T} - 1} = k_B T$$

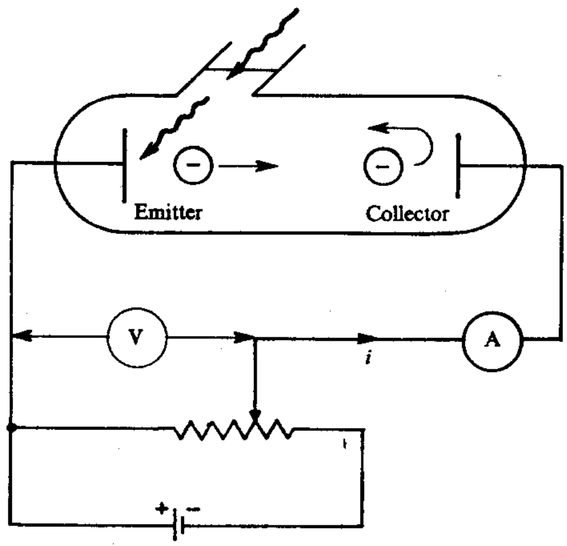
จะเห็นได้ว่า เมื่อระยะห่างระหว่างระดับพลังงานลดลงจนเป็นศูนย์ ซึ่งหมายความว่า $k_B T >> h\upsilon$ จะได้ผลตรงกับข้อ ก) ซึ่งเป็นกรณีที่พลังงานมีค่าต่อเนื่อง

1.3 ปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริก

เมื่อฉายแสงลงบนพื้นผิวโลหะ ซึ่งอยู่ภายในหลอดสูญญากาศ จะทำให้อิเล็กตรอนหลุดออกมาจากพื้นผิวนี้ได้ ดังแสดงในรูปที่ 1.4 ในการทดลองเราสามารถเปลี่ยนค่าความถี่ (υ) และความเข้ม (I) ของแสง เปลี่ยนค่าศักย์หน่วง (V) และเปลี่ยนชนิดของอีมิเตอร์ได้ ถ้าอิเล็กตรอนได้รับพลังงานมากพอ จะสามารถเคลื่อนที่ผ่านศักย์หน่วงไปถึงคอลเล็กเตอร์ ทำให้มีกระแส (i) ไหลผ่านแอมมิเตอร์ การที่อิเล็กตรอนจะเคลื่อนที่ไปถึงคอลเล็กเตอร์ได้ จะต้องมีพลังงานจลน์ เท่ากับ หรือมากกว่าพลังงานศักย์ไฟฟ้าที่ได้รับในการเคลื่อนที่ระหว่างอิมิตเตอร์และคอลเลกเตอร์

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = eV$$

ถ้าพลังงานของอิเล็กตรอนน้อยกว่าค่านี้ อิเล็กตรอนจะถูกผลักกลับก่อนถึงคอลเลกเตอร์ จึงไม่มีกระแสไหลผ่านแอมมิเตอร์



รูปที่ 1.4 ไดอะแกรมแสดงเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริก

ผลจากการทดลอง พบว่า

1. วัดกระแสได้ทันทีที่แสงตกกระทบ แม้ว่าความเข้มแสงน้อย ช่วงเวลาระหว่างที่แสงตกกระทบกับเมื่อเริ่มมีกระแส จะมีค่าประมาณ 10^{-9} วินาที และช่วงเวลานี้จะไม่ขึ้นกับความเข้มของแสง

2. ถ้าความถี่และศักย์หน่วงคงที่ กระแสจะเป็นสัดส่วนกับความเข้มของแสงที่ตกกระทบ

3. เมื่อจัดให้ความถี่และความเข้มแสงมีค่าคงที่ กระแสจะลดลงเมื่อศักย์หน่วงมีค่าเพิ่มขึ้น และกระแสจะมีค่าเป็นศูนย์เมื่อศักย์หน่วงมีค่าเพิ่มขึ้นจนถึงค่าที่เรียกว่า **ศักย์หยุด (stopping Voltage, V_s)** ค่าศักย์หยุดนี้จะไม่ขึ้นกับความเข้มของแสง

4. สำหรับพื้นผิวชนิดใดชนิดหนึ่ง ค่าศักย์หยุดจะแปรอย่างเชิงเส้นกับความถี่ ตามความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$eV_s = h\upsilon - eW_0$$

ค่า eW_0 จะขึ้นอยู่กับชนิดของพื้นผิว แต่ค่าความชัน h จะมีค่าเท่ากันไม่ว่าพื้นผิวจะเป็นสารอะไร ค่า h มีค่าเท่ากับค่าคงที่ของพลังค์ (Planck's constant)

5. ค่าความถี่ขีดเริ่มเปลี่ยน (Threshold frequency, υ_{th}) จะขึ้นอยู่กับชนิดของพื้นผิว แสงที่มีความถี่น้อยกว่าความถี่ขีดเริ่มเปลี่ยนจะไม่สามารถทำให้อิเล็กตรอนหลุดออกมาจากพื้นผิวได้เลย ไม่ว่าจะใช้แสงที่มีความเข้มมากเท่าไร

ทฤษฎีของปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริก

ถ้าอาศัยฟิสิกส์ดั้งเดิมโดยคิดว่าแสงเป็นคลื่น จะอธิบายผลการทดลองได้เฉพาะข้อ (2) เพียงข้อเดียวเท่านั้น เพราะว่า แสงที่มีความเข้มมาก จะส่งผ่านพลังงานให้แก่พื้นผิวได้มาก ทำให้จำนวนอิเล็กตรอนที่หลุดออกมาจากพื้นผิวมาก ตามค่าความเข้มของแสง ส่วนผลการทดลองข้ออื่นๆ ไม่สามารถอาศัยฟิสิกส์ดั้งเดิมมาอธิบายได้

ผลการทดลองอีก 4 ข้อที่เหลือจะต้องอาศัยทฤษฎีควอนตัมมาอธิบาย ในเชิงของควอนตัม พลังงานของโฟตอนหนึ่งตัว จะดูดกลืนคลื่นโดยอิเล็กตรอนเพียงตัวเดียว ถ้าอิเล็กตรอนหลุดออกจากพื้นผิวของวัตถุ อิเล็กตรอนจะมีพลังงานจลน์เท่ากับความแตกต่างระหว่างพลังงานที่ถูกดูดกลืนโดยอิเล็กตรอน และพลังงานที่อิเล็กตรอนถูกดึงดูดติดกับพื้นผิว อิเล็กตรอนแต่ละตัวจะถูกยึดเหนี่ยวติดกับพื้นผิวด้วยพลังงานที่มีค่าต่างๆกัน แต่พลังงานยึดเหนี่ยวที่น้อยที่สุดจะมีค่าขึ้นกับชนิดของพื้นผิวของวัตถุ พลังงงานที่น้อยที่สุดที่จะทำให้อิเล็กตรอนหลุดออกมาจากพื้นผิวเรียกว่า เวิร์กฟังก์ชั่น (Work Function,ϕ) ของวัตถุ ดังนั้นอิเล็กตรอนที่หลุดออกมาจากพื้น ผิวจะมีพลังงานจลน์ตั้งแต่ศูนย์จนถึงค่ามากที่สุด ซึ่งพลังงานจลน์ที่มีค่ามากที่สุดจะมีค่าดังนี้

พลังงานจลน์มากที่สุดของอิเล็กตรอนที่ถูกส่งออกมา

= พลังงานของโฟตอน – พลังงานที่น้อยที่สุดซึ่งยึดเหนี่ยวอิเล็กตรอนไว้

สมการนี้อธิบายผลการทดลองในข้อ (3) ได้เนื่องจาก $K_{max} = eV_s$ และเราสามารถเขียนสมการข้างบนได้เป็น

$$eV_s = h\upsilon - \phi \text{ เมื่อ } \phi = eW_0$$

ซึ่งจะอธิบายผลการทดลองในข้อ (4) ได้

ผลการทดลองในข้อ (5) ซึ่งมีความถี่ขีดเริ่มเปลี่ยน จะหาได้จาก

$$h\upsilon_{th} = eW_0$$

ถ้าโฟตอนที่ตกกระทบมีความถี่น้อยกว่าความถี่ของขีดเริ่มเปลี่ยน โฟตอนจะไม่มีพลังงานมากพอที่จะทำให้อิเล็กตรอนหลุดออกจากพื้นผิวได้ ไม่ว่าความเข้มของแสงจะมีค่ามากเพียงไร

ผลการทดลองข้อ (1) ซึ่งเกิดกระแสทันทีทันใด ก็สามารถอธิบายได้เพราะว่า การดูดกลืนโฟตอนเกิดขึ้นทันทีที่โฟตอนตกกระทบพื้นผิว

แสงที่มีความเข้มมาก จะมีความหนาแน่นของโฟตอนมาก จึงทำให้อิเล็กตรอนหลุดออกจากพื้นผิวมาก เป็นการอธิบายผลการทดลองในข้อ (2)

ตัวอย่างที่ 1.4 พิจารณาผิวโปแตสเซียม ที่อยู่ห่างจากหลอดไฟ 100 วัตต์เป็นระยะทาง 75 เซ็นติเมตร สมมุติว่าพลังงานที่ส่งออกมาจากหลอดไฟมีค่า 5% ของกำลังอินพุท และอะตอมโปแตสเซียมเป็นแผ่นกลมขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 1 A^0 จงหาเวลาที่อะตอมใช้ในการดูดกลืนพลังงานเท่ากับค่าเวิร์กฟังก์ชั่น 2.5 eV โดยคิดว่าแสงเป็นคลื่นตามฟิสิกส์ดั้งเดิม

วิธีทำ คิดว่าหลอดไฟเป็นแหล่งกำเนิดแสงที่มีขนาดเล็ก (point source) จะคำนวณหาความเข้มของแสงที่ผิวโปตัสเซียมได้ดังนี้

$$\text{ความเข้ม} = \frac{\text{กำลัง}}{\text{พื้นที่ทรงกลม}} = \frac{100 \text{ W} \times 0.05}{4\pi(0.75m)^2}$$

กำลังที่ตกกระทบอะตอมโปแตสเซียม = 0.707 w/m^2

กำลังต่ออะตอม	=	ความเข้ม x พื้นที่ต่ออะตอม
	=	$(0.707)\dfrac{w}{m^2}\,\dfrac{\pi(1x10^{10}m)^2}{4}$
	=	$5.56\times10^{21}w$

จะหาช่วงเวลาในการดูดกลืนพลังงาน 2 eV ได้จาก

$$\text{เวลา} = \frac{\text{พลังงาน}}{\text{กำลัง}} = \frac{(2eV)(1.6x10^{-19}J/eV)}{5.56x10^{21}J/S}$$

$$= 57.6 \text{ วินาที}$$

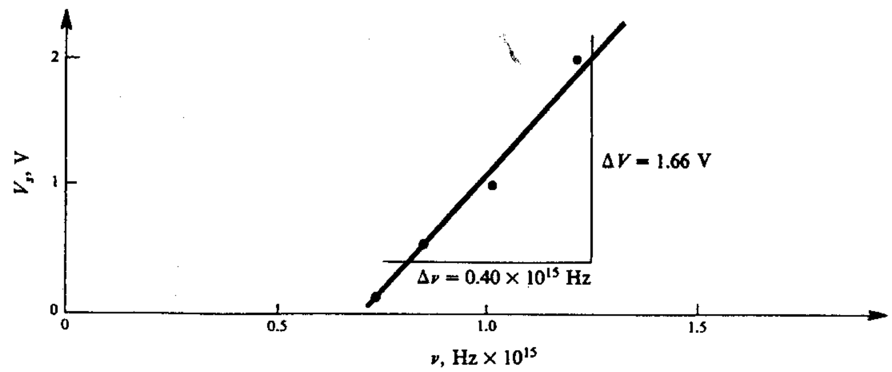
ซึ่งมีค่าแตกต่างจากการทดลองมาก ค่าที่ได้จากการทดลอง คือ 10^{-9} วินาที

ตัวอย่างที่ 1.5 ถ้าในการทดลองใช้แคลเซียมเป็นอิมิตเตอร์ได้ค่าศักย์หยุดดังนี้

$\lambda\,(\dot{A})$	2536	3132	3650	4047
$\upsilon(H_z\times10^{15})$	1.18	0.958	0.822	0.741
$V_O(V)$	1.95	0.98	0.50	0.14

จงหาค่าคงที่ของแพล็งค์ จากข้อมูลชุดนี้

วิธีทำ นำข้อมูลไปเขียนกราฟ



รูปที่ 1.5 กราฟจากข้อมูลการทดลอง

ความชันของกราฟจะมีค่าเท่ากับ h/e ดังนั้น

$$h = e(\text{slope})$$

$$= \left(1.6\times10^{-19}\,\text{C}\right)\frac{1.66\text{V}}{0.4\times10^{15}\,\text{s}^{-1}} = 6.6\times10^{-34}\,J/s$$

ตัวอย่างที่ 1.6 พลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนที่หลุดออกมาจากพื้นผิวของวัตถุมีค่าระหว่างศูนย์ถึง 4.0 x 10^{-19} จูลน์ เมื่อแสงที่มีความยาวคลื่น 3000 อังสตรอมตกกระทบกับพื้นผิวของวัตถุ จงหาศักย์หยุดของแสงนี้

วิธีทำ

$$K_{max} = 4.0\times10^{-19}\ \text{J} \times \frac{1eV}{1.6\times10^{-19}J}$$

$$= 2.5\ \text{eV}$$

จาก $eV_s = K_{max}$

จะได้ V_s = 2.5 โวลต์

ตัวอย่างที่ 1.7 จงหาความยาวคลื่นขีดเริ่มเปลี่ยน (threshold wavelength) ของวัตถุในตัวอย่างที่ 1.6

วิธีทำ

$$eV_s = h\upsilon - eW_0$$

$$= \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_{th}}$$

แทนค่า

$$2.5eV = \frac{12.4\times10^{3}eV.\mathring{A}}{3000\ \mathring{A}} - \frac{\times10^{3}eV.\mathring{A}}{\lambda_{th}}$$

แก้สมการได้

$$\lambda_{th} = 7590\,\mathring{A}$$

ตัวอย่างที่ 1.8 สารที่ใช้เป็นอิมิตเตอร์ในหลอดโฟโตอิเล็กทริก มีความยาวคลื่นขีดเริ่มเปลี่ยน 6000 Å จงหาความยาวคลื่นของแสงที่ตกกระทบ ถ้าศักย์หยุดสำหรับแสงนี้เท่ากับ 2.5 โวลต์

วิธีทำ เวิร์กฟังก์ชั่นคือ

$$eW_0 = h\upsilon_{th} = \frac{hc}{\lambda_{th}}$$

$$= \frac{12.4\times10^3 eV.\text{Å}}{6000\,\text{Å}}$$

$$= 2.07 \text{ eV}$$

จากสมการของปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริก

$$eV_s = h\upsilon - eW_0 = \frac{hc}{\lambda} - eW_0$$

แทนค่า

$$2.5 \text{ eV} = \frac{12.40\times10^3 eV\cdot\text{Å}}{\lambda} - 2.07eV$$

แก้สมการหาค่า λ ได้

$$\lambda = 2{,}713 \text{ Å}$$

ตัวอย่างที่ 1.9 จงหาเวิร์กฟังก์ชันของโปตัสเซียม ถ้าความยาวคลื่นมากที่สุดของโฟตอนที่จะทำให้อิเล็กตรอนหลุดออกมาเท่ากับ 5,620 Å

วิธีทำ

$$\phi = eW_0 = \frac{hc}{\lambda_{th}}$$

$$= \frac{12.4\times10^3 eV\cdot\text{Å}}{5{,}620\,\text{Å}}$$

$$= 2.21 \text{ eV}$$

ตัวอย่างที่ 1.10 จงหาความเข้มของสนามแม่เหล็กที่ทำให้โฟโตอิเล็กตรอนเคลื่อนที่เป็นวงกลมรัศมี 20 เซนติเมตร เมื่อแสงความยาวคลื่น 4000 $\mathring{A}$ ตกกระทบพื้นผิวแบเรียม กำหนดให้ค่าเวิร์กฟังก์ชันของแบเรียมเท่ากับ 2.5 eV

วิธีทำ

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = h\upsilon - eW_0$$

$$= \frac{hc}{\lambda} - \phi$$

แทนค่า

$$\frac{1}{2}\left(9.11\times10^{-31}\,kg\right)V_{\max}^2 = \frac{\left(6.63\times10^{-34}\,J\cdot s\right)\left(3\times10^8\,{}^{m}\!/_{s}\right)}{4\times10^{-7}\,m} \text{-(2.5 ev)}\left(1.6\times10^{-19}\,{}^{J}\!/_{eV}\right)$$

แก้สมการจะได้

$$V_{\max} = 4.62\times10^5\,{}^{m}\!/_{s}$$

เมื่ออิเล็กตรอนเหล่านี้เคลื่อนที่ภายใต้สนามแม่เหล็กจะได้

$$eV_{\max}B = \frac{m\left(V_{\max}\right)^2}{R_{\max}}$$

หรือ

$$\text{B} = \frac{mV_{\max}}{eR_{\max}}$$

$$= \frac{\left(9.11\times10^{-31}\,kg\right)\left(4.62\times10^5\,{}^{m}\!/_{s}\right)}{\left(1.6\times10^{-19}\,c\right)\left(0.20m\right)}$$

$$= 1.32\times10^{-5}\,T$$

ซึ่งมีค่าใกล้เคียงกับความเข้มของสนามแม่เหล็กโลก $\left(5.8\times10^{-5}\,T\right)$

ตัวอย่างที่ 1.11 แสงที่มีความเข้ม 1.0 ไมโครวัตต์/ ตารางเซนติเมตร ตกกระทบกับผิวเหล็กในบริเวณพื้นที่ 1.0 ตารางเซ็นติเมตร ถ้าแสงสะท้อนขึ้นมาจากพื้นผิว 96% และแสงเพียง 3.0% ที่ถูกดูดกลืนอยู่ในช่วงไวโอเลต มากกว่าขีดเริ่มเปลี่ยน

ก) จงหาความเข้มของแสงที่ทำให้เกิดปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริก

ข) สมมุติว่า โฟตอนในช่วงไวโอเลตมีความยาวคลื่นเฉลี่ย 250 นาโนเมตร จงหาจำนวนอิเล็กตรอนที่ถูกส่งออกมาในหนึ่งวินาที

ค) จงคำนวณกระแสในหลอดสุญญากาศ

ง) ถ้าความถี่ขีดเริ่มเปลี่ยน (υ_0) เท่ากับ 1.1×10^{15} เฮิรตซ์ จงหาเวิร์กฟังก์ชันของเหล็ก

จ) จงหาศักย์หยุดของเหล็ก ถ้าแสงที่ตกกระทบมีความยาวคลื่น 250 นาโนเมตร

วิธีทำ ก) เนื่องจากแสงถูกดูดกลืน 4.0% และเพียง 3.0% ของแสงที่ถูกดูดกลืนนี้ที่ทำให้เกิดปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริก ดังนั้น ความเข้มของแสงที่ทำให้เกิดปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริก คือ

$$
\begin{aligned}
I &= (0.030)(0.040)\, I_0 \\
&= (0.030)(0.040)\left(1.0 \,{}^{\mu W}\!/_{cm^2}\right) \\
&= 1.2 \text{ นาโนวัตต์ / ซม}^2
\end{aligned}
$$

ข) ถ้าคิดว่าประสิทธิภาพเท่ากับ 100 % ก็คือ โฟตอนหนึ่งตัวพลังงาน $h\upsilon$ ทำให้อิเล็กตรอนหลุดออกมาหนึ่งตัว

จำนวนอิเล็กตรอนต่อวินาที

$$
= \frac{1.2 \times 10^{-9} W}{h\upsilon}
$$

$$
= \frac{\lambda\left(1.2 \times 10^{-9}\right)}{hc} \, \frac{\lambda\left(1.2 \times 10^{-9}\right)}{hc}
$$

$$= \frac{(250\times10^{-9}\,m)(1.2\times10^{-9}\,J/s)}{(6.6\times10^{-34}\,J\cdot s)(3.0\times10^{8}\,m/s)}$$

$$= 1.5\times10^{9}$$

ค) $$i = (1.6\times10^{-19}\,C)(1.5\times10^{9}\,electrons/s)$$

$$= 2.4\times10^{-10}\,A$$

ง) $$\phi = h\upsilon_0$$

$$= (4.14\times10^{-15}\,eV\cdot s)(1.1\times10^{15}\,s^{-1})$$

$$= 4.5\ eV$$

จ) $$eV_S = h\upsilon - \phi$$

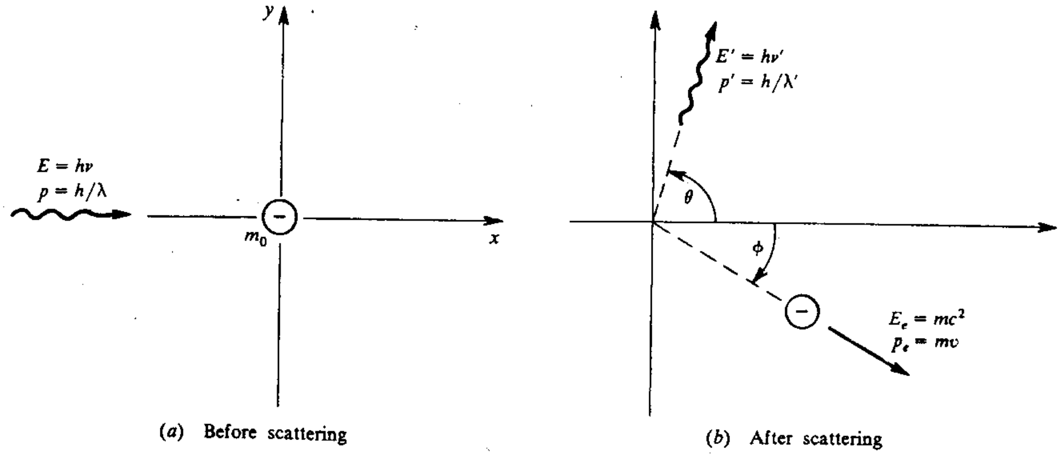
$$= \frac{hc}{\lambda} - \phi$$

$$= \frac{(4.14\times10^{-15}\,eV\cdot s)(3.0\times10^{8}\,m/s)}{250\times10^{-9}\,m} - 4.5eV$$

$$= 0.46\ eV$$

ดังนั้น ศักย์หยุดเท่ากับ 0.46 โวลต์

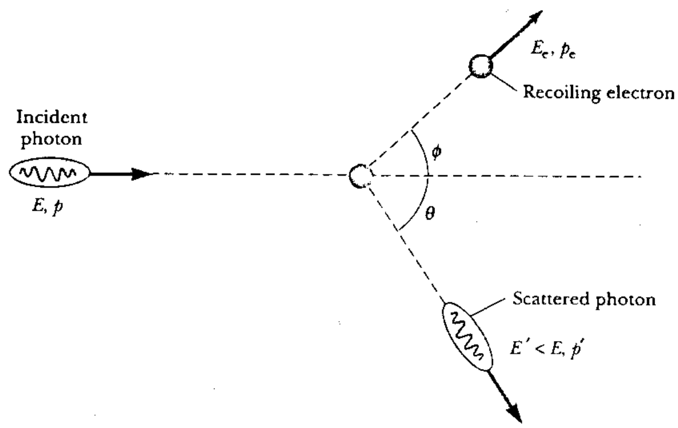
1.4 ปรากฏการณ์คอมป์ตัน



รูปที่ 1.6 ปรากฏการณ์คอมป์ตัน

จากทฤษฎีทางฟิสิกส์ดั้งเดิม เมื่อคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าชนกับอนุภาคที่มีประจุ เช่น อิเล็กตรอน คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่สะท้อนไปเป็นมุมต่างๆ จะมีความถี่คงเดิมไม่เปลี่ยนแปลง ในปี ค.ศ. 1922 คอมป์ตันพิสูจน์ว่า ถ้าอาศัยความรู้ทางควอนตัม คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่สะท้อนไป จะมีความถี่น้อยกว่าคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่ตกกระทบ และการเปลี่ยนแปลงความถี่ จะขึ้นกับมุมที่สะท้อนด้วย

คอมป์ตันอาศัยแนวความคิดที่ว่า โฟตอนเป็นอนุภาคที่มีพลังงาน $E = h\upsilon = hc/\lambda$ และโมเมนตัม $p = h/\lambda$ ดังรูปที่ 1.7



รูปที่ 1.7 การกระเจิงคอมป์ตันโดยคิดว่าโฟตอนเป็นอนุภาค

จากกฎการอนุรักษ์ของพลังงาน

$$\frac{hc}{\lambda} + m_0 c^2 = \frac{hc}{\lambda'} + mc^2$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง และจัดเทอมใหม่จะได้

$$\left(mc^2\right)^2 = \frac{h^2c^2}{\lambda^2\lambda'^2}\left(\lambda^2 + \lambda'^2\right) - \frac{2h^2c^2}{\lambda\lambda'} + \frac{2hm_0c^3}{\lambda\lambda'}\left(\lambda' - \lambda\right) + \left(m_0c^2\right)^2 \qquad (1.10)$$

จากกฎการอนุรักษ์ของโมเมนตัม

เนื่องจาก $\vec{p}_e = \vec{p} - \vec{p}'$

จะได้

$$\vec{p}_e . \vec{p}_e = p_e^2 = p^2 + p'^2 - 2\vec{p}.\vec{p}'$$

$$= \frac{h^2}{\lambda^2\lambda'^2}\left(\lambda'^2 + \lambda^2 - 2\lambda\lambda'\cos\theta\right) \qquad (1.11)$$

แทนค่าสมการ (1.10) และสมการ (1.11) ลงในสมการ

$$\left(mc^2\right)^2 = \left(p_0c\right)^2 + \left(m_0c^2\right)^2$$

จะได้ $$\frac{h^2c^2}{\lambda^2\lambda'^2}\left(\lambda^2 + \lambda'^2\right) - \frac{2h^2c^2}{\lambda\lambda'} + \frac{2hm_0c^3}{\lambda\lambda'}\left(\lambda' - \lambda\right) + \left(m_0c^2\right)^2$$

$$= \frac{h^2c^2}{\lambda^2\lambda'^2}\left(\lambda'^2 + \lambda^2 - 2\lambda\lambda'\cos\theta\right) + \left(m_0c^2\right)^2$$

แก้สมการ จะได้สมการแสดงความสัมพันธ์คอมป์ตัน

$$\lambda' - \lambda = \Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta)$$

เมื่อ h/m_0c มีชื่อเรียกว่า ความยาวคลื่นคอมป์ตัน ซึ่งถ้าอนุภาคที่ถูกชนเป็นอิเล็กตรอนจะมีค่าเท่ากับ 0.0243 อังสตรอม จะเห็นได้ว่าความยาวคลื่นที่เปลี่ยนไปขึ้นกับมุมที่สะท้อน θ และไม่ขึ้นกับพลังงานของโฟตอน

คอมป์ตันได้ทำการทดลองเพื่อพิสูจน์ทฤษฎีนี้ โดยใช้รังสีเอกซ์ ($\lambda = 0.7\,\mathring{A}$) พุ่งเข้าชนกราไฟต์ (graphite) ได้ผลตรงกับทฤษฎี เนื่องจากพลังงานของรังสีเอ็กซ์ (1.8×10^4 อิเล็กตรอนโวลต์) มีค่ามากกว่าพลังงานยึดเหนี่ยวของอิเล็กตรอนมาก จึงสามารถประมาณได้ว่าอิเล็กตรอนเป็นอิเล็กตรอนอิสระ

ตัวอย่างที่ 1.12 รังสีเอ็กซ์ พลังงาน 0.3 MeV ชนแบบ head-on กับอิเล็คตรอนที่หยุดนิ่ง อาศัยหลักการคงตัวของพลังงานและโมเมนตัม จงหาความเร็วของอิเล็คตรอนหลังชน

วิธีทำ จากกฎการเคลื่อนที่ของพลังงาน

$$E + m_o c^2 = E' + \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

หรือ 0.3 MeV + 0.511 MeV $= E' + \dfrac{0.511 MeV}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$

โมเมนตัมของโฟตอน คือ $h\upsilon / c = E/c$

จากกฎการคงตัวของโมเมนตัม (θ = 180 , $\varnothing$=0)

$$\frac{E}{c} = \frac{E'}{c} + \frac{m_o c}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

หรือ $$\frac{0.3MeV}{c} = \frac{E'}{c} + \frac{0.511}{\sqrt{1-\left(v^2/c^2\right)}}\frac{v}{c^2}$$

แก้สมการหาค่า v ได้ v = 0.65 C

ตัวอย่างที่ 1.13 จากตัวอย่างที่ 1.12 จงแสดงว่า ค่าความเร็วที่ได้ตรงกับที่คำนวณจากสมการคอมป์ตัน

วิธีทำ

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_o c}(1-\cos\theta)$$

$$= \frac{h}{m_o c}\left(1-\cos 180\right)$$

$$= \frac{2h}{m_o c}$$

หรือ $$\lambda' = \lambda + \frac{2h}{m_o c}$$

คูณด้วย 1/hc จะได้

$$\frac{\lambda'}{hc} = \frac{\lambda}{hc} + \frac{2}{m_o c^2} = \frac{1}{h\nu} + \frac{2}{m_o c^2}$$

$$= \frac{1}{0.3MeV} + \frac{2}{0.511MeV}$$

$$= 7.24 \quad \frac{1}{MeV}$$

แทนค่า E' = (1/7.24) MeV ลงในสมการของพลังงานในตัวอย่างที่ผ่านมา แล้วแก้สมการหาค่า v จะได้ค่า v = 0.65 C

ตัวอย่างที่ 1.14 จงคำนวณการเปลี่ยนแปลงของความยาวคลื่นของรังสีเอ็กซ์ ความยาวคลื่น 0.400 Å ที่สะท้อนไปเป็นมุม 90 องศา เมื่อชนกับอิเล็คตรอน

วิธีทำ

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_o c}(1 - \cos\theta)$$

$$= (0.0243 \text{ Å})(1 - \cos 90^\circ)$$

$$= 0.0243 \text{ Å}$$

$$\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \frac{0.0243 \text{ Å}}{0.400 \text{ Å}}$$

$$= 0.0608$$

ตัวอย่างที่ 1.15 รังสีเอ็กซ์พลังงาน 0.3 MeV ชนแบบประสานงา (head-on) กับอิเล็กตรอนซึ่งหยุดนิ่ง จงคำนวณความเร็วของอิเล็กตรอนหลังการชน โดยอาศัยกฎการคงตัวของพลังงานและโมเมนตัม

วิธีทำ

จากกฎการคงตัวของพลังงาน

$$E + m_0 c^2 = E' + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

หรือ

$$0.3MeV + 0.511MeV = E' + \frac{0.511MeV}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \qquad (1.12)$$

โมเมนตัมของโฟตอนมีค่าเท่ากับ $h\upsilon$ = E/c

กฎการคงตัวของโมเมนตัม เมื่อ $\theta = 180^o, \phi = 0$

$$\frac{E}{c}+0=\frac{E'}{c}+\frac{m_0 c}{\sqrt{1-\left(v^2/c^2\right)}}$$

หรือ

$$\frac{0.3MeV}{c}=\frac{-E'}{c}+\frac{0.511MeV}{\sqrt{1-\left(v^2/c^2\right)}}\frac{v}{c^2} \tag{1.13}$$

แก้สมการ (1.12) และสมการ (1.13) จะได้

$$v = 0.56\ c$$

ตัวอย่างที่ 1.16 รังสีเอ็กซ์ความยาวคลื่น 0.300 Å ชนกับอิเล็กตรอน ทำให้รังสีเอ็กซ์สะท้อนไปเป็นมุม 60° จงคำนวณหาความยาวคลื่นของโฟตอนที่สะท้อนไป และจงหาพลังงานของอิเล็กตรอนหลังการเกิดปรากฏการณ์คอมป์ตัน

วิธีทำ

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_0 c}\left(1-\cos\theta\right)$$

$$= 0.30\,\text{Å} + (0.0243\,\text{Å})(1-\cos 60^\circ)$$

$$= 0.312\,\text{Å}$$

จากกฎการอนุรักษ์พลังงาน

$$\frac{hc}{\lambda}+m_0c^2=\frac{hc}{\lambda'}+k_e+m_0c^2$$

หรือ

$$\frac{12.4keV.\text{Å}}{0.3\,\text{Å}}=\frac{12.4keV\cdot\text{Å}}{0.312\,\text{Å}}+k_e$$

แก้สมการจะได้

$$k_e = 1.59\ keV$$

ตัวอย่างที่ 1.17 ในการทดลองปรากฏการณ์คอมป์ตัน เมื่อรังสีเอ็กซ์พลังงาน 0.500 MeV ชนกับอิเล็กตรอนมีพลังงานจลน์ 0.100 MeV จงหาความยาวคลื่นของรังสีเอ็กซ์ที่สะท้อนออกมาถ้าเริ่มต้นอิเล็กตรอนหยุดนิ่ง

วิธีทำ จากกฎการอนุรักษ์ของพลังงาน

$$E_{\text{ก่อนชน}} = E_{\text{หลังชน}}$$

$$E + m_0c^2 = E' + \left(k_e + m_0c^2\right)$$

$$0.500MeV = E' + 0.100MeV$$

$$E' = 0.400MeV$$

ดังนั้น

$$\lambda' = \frac{hc}{E'} = \frac{12.4\times10^{-3}MeV.\text{Å}}{0.400MeV} = 31\times10^{-3}\ \text{Å}$$

ตัวอย่างที่ 1.18 จากตัวอย่างที่ 1.17 จงหามุมที่รังสีเอ็กซ์สะท้อนไป เทียบกับทิศทางที่รังสีชนกับอิเล็กตรอน

วิธีทำ ความยาวคลื่นของรังสีเอ็กซ์ก่อนชน

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{12.4\times10^{-3}MeV\cdot\text{Å}}{0.500MeV} = 24.8\times10^{-3}\ \text{Å}$$

จากสมการของคอมป์ตัน

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta)$$

$$31\times10^{-3}\ \text{Å} - 24.8\times10^{-3}\ \text{Å} = (24.3\times10^{-3}\ \text{Å})(1-\cos\theta)$$

แก้สมการได้ $\theta = 42^o$

ตัวอย่างที่ 1.19 หลังจากเกิดปรากฏการณ์คอมป์ตัน ถ้าอิเล็กตรอนได้รับพลังงานมากที่สุดเท่ากับ 45 keV จงหาความยาวคลื่นของโฟตอนที่ตกกระทบ

วิธีทำ อิเล็กตรอนจะได้รับพลังงานมากที่สุดเมื่อ โฟตอนสะท้อนกลับสวนทิศทางที่ตกกระทบ(back – scattering) จากหลักการอนุรักษ์ของพลังงาน

$$E + m_0c^2 = E' + 45keV + m_0c^2 \tag{1.14}$$

หรือ $E - E' = 45\ keV$

จากหลักการอนุรักษ์ของโมเมนตัม

$$\frac{E}{c} = \frac{E'}{c} + p_e \tag{1.15}$$

เนื่องจาก $E_e^2 = (p_e c)^2 + E_0$

จะได้ $(0.511\text{MeV}+0.045\text{Mev})^2 = (p_e c)^2 + (0.511Mev)^2$

หรือ $p_e = 0.219\ Mev/c$

แทนค่าลงในสมการ (1.15) จะได้

$$E + E' = 219\ keV \tag{1.16}$$

แก้สมการ (1.14) และ (1.16) จะได้ $E = 132\ keV$

ดังนั้น

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{12.4\,keV \cdot \mathring{A}}{132\ keV}$$

$$= 9.39 \times 10^{-2}\ \mathring{A}$$

ตัวอย่างที่ 1.20 เมื่อเกิดปรากฏการณ์คอมป์ตัน อิเล็กตรอนสะท้อนไปเป็นมุม ϕ เทียบกับโฟตอนตกกระทบ จงหาพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอน

วิธีทำ จากหลักการอนุรักษ์ของพลังงาน

$$h\upsilon + m_0c^2 = h\upsilon' + k_e + m_0c^2$$

เนื่องจาก $$h\upsilon = pc$$

จะได้ $$pc = p'c + k_e \tag{1.17}$$

จากรูป $$\vec{p}' = \vec{p} - \vec{p}_e$$

ดังนั้น $$\vec{p}'.\vec{p}' = p'^2 = p^2 + p_e^2 - 2pp_e\cos\phi \tag{1.18}$$

จากสมการ (1.17) และความสัมพันธ์

$$\begin{aligned} p_e^2 &= \frac{E_e^2 - (m_0c^2)^2}{c^2} \\ &= \frac{1}{c^2}\left[\left(m_0c^2 + k_e\right)^2 - \left(m_0c^2\right)\right] \\ &= \frac{1}{c^2}(k_e^2 + 2k_em_0c^2) \end{aligned} \tag{1.19}$$

แทนค่าลงในสมการ (1.18) จะได้

$$k_e(m_0 + \frac{p}{c}) = pp_e\cos\phi \tag{1.20}$$

ยกกำลังสองสมการ (1.20) และอาศัยสมการ (1.19) จะได้

$$k_e^2(m_0 + \frac{p}{c})^2 = \frac{p^2}{c^2}(k_e^2 + 2k_em_0c^2)\cos^2\phi$$

แก้สมการหาค่า k_e และแทน p ด้วยจะได้ $h\upsilon/c$

$$k_e = h\upsilon\frac{2(\frac{h\upsilon}{m_0c^2})\cos^2\phi}{(\frac{h\upsilon}{m_0c^2}+1)^2 - (\frac{h\upsilon}{m_0c^2})^2\cos^2\phi}$$

จะเห็นได้ว่า k_e มีค่ามากที่สุดเมื่อ $\phi = 0$

1.5 อะตอมตามแบบของโบร์

ในปี ค.ศ. 1913 นีล โบร์ ได้พัฒนาทฤษฎีเกี่ยวกับเส้นสเปคตรัมจากอะตอมไฮโดรเจนโดยคิดว่า อะตอมไฮโดรเจนประกอบด้วยนิวเคลียสที่มีประจุบวกอยู่ตรงกลางและมีอิเล็กตรอนซึ่งมีประจุลบโคจรอยู่โดยรอบ แรงที่ดึงดูดอิเล็กตรอนไว้ ก็คือ แรงคูลอมบ์

$$F = k\frac{Ze^2}{r^2}, k = 9.0\times 10^9\, N.m^2/C^2$$

ซึ่ง $Z = 1$ สำหรับอะตอมไฮโดรเจน ความเร็วตามแนวเส้นรอบวงของอิเล็กตรอน สัมพันธ์กับรัศมีของวงโคจร ตามสมการ

$$v^2 = \frac{kZe^2}{mr} \qquad (1.21)$$

เมื่อ m เป็นมวลของอิเล็กตรอน และอิเล็กตรอนมีพลังงานรวม (พลังงานจลน์+พลังงานศักย์) ดังนี้

$$E = -\frac{kZe^2}{2r} \qquad (1.22)$$

ขณะที่อิเล็กตรอนเคลื่อนที่ภายในวงโคจรโดยมีโมเมนตัมเชิงเส้น mv อิเล็กตรอนจะมีความยาวคลื่นเดอเบรย

$$\lambda = h/mv$$

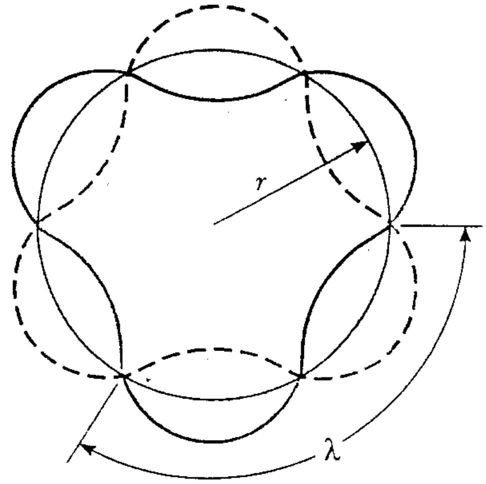
คลื่นนี้จะสามารถอยู่ภายในวงโคจรได้ เฉพาะที่ความยาวของเส้นรอบวงเป็นจำนวนเท่าของความยาวคลื่นเท่านั้น ดังรูป 1.8 ดังนั้น อิเล็กตรอนจะสามารถโคจรอยู่ภายในวงโคจรที่เป็นไปตามความสัมพันธ์ข้างล่างนี้เท่านั้น

$$n\lambda = \frac{nh}{mv} = 2\pi r$$

หรือ

$$mvr = nh/2\pi \qquad (1.23)$$

เมื่อ $n = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots\ldots$



รูปที่ 1.8 คลื่นนิ่งรอบเส้นรอบวง ของวงกลม

ค่า $L = mvr$ ก็คือโมเมนตัมเชิงมุมของอิเล็กตรอนซึ่งเคลื่อนที่เป็นวงกลม ดังนั้น จากทฤษฎีของโบร์ โมเมนตัมเชิงมุมของอิเล็กตรอนจะมีค่าจำเพาะเท่านั้น ไม่ได้มีค่าทุกค่า ตัวเลขจำนวนเต็ม n มีชื่อเรียกว่า เลขควอนตัมหลัก (principal quantum number)

แก้สมการ (1.21) , (1.22) และ (1.23) จะได้

$$r_n = \frac{n^2 r_1^0}{Z}, r_1^0 = \frac{h^2}{4\pi^2 kme^2}$$

$$E_n = -\frac{Z^2 E_1^0}{n^2}, E_1^0 = \frac{2\pi^2 k^2 e^4 m}{h^2}$$

$$v_n = \frac{Zv_1^0}{n}, v_1^0 = \frac{2\pi ke^2}{h}$$

ในสภาวะเสถียร อิเล็กตรอนจะไม่ให้พลังงานออกมา สถานะที่มีพลังงานน้อยที่สุด ($n = 1$) เรียกว่า **สถานะพื้น** (ground state)

ปริมาณ r_1^0 , E_1^0 และ v_1^0 มีค่าคงที่ดังนี้

$$r_1^0 = 0.529 \ \mathring{A} , E_1^0 = 13.58 \ eV$$

$$v_1^0 = \frac{c}{137.0}$$

โบร์ตั้งสมมุติฐานว่า อะตอมจะส่งพลังงานออกมา เมื่ออิเล็กตรอนเคลื่อนที่จากวงโคจรชั้นนอกเข้าสู่วงโคจรชั้นใน โดยที่พลังงานที่ส่งของออกมานี้ จะมีค่าเท่ากับผลต่างระหว่างพลังงานของทั้งสองระดับ ความยาวคลื่นของโฟตอนที่ส่งออกมาจะหาได้จาก

$$E_r = h\upsilon = \frac{hc}{\lambda} = E_i - E_f$$

หรือ

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{hc}\left(E_i - E_f\right)$$

แทนค่า พลังงาน E_i และ E_f จะได้

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{2\pi^2 e^4 m Z^2}{h^3 c}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

$$= R_\infty Z^2\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

เมื่อ

$$R_\infty = \frac{2\pi^2 \left(ke^2\right)^2 (mc^2)}{(hc)^3}$$

$$= 1.09737 \times 10^{-3} \ \mathring{A}$$

สูตรนี้ได้มาจากการคิดว่า นิวเคลียสมีมวลมากกว่าอิเล็กตรอนมาก จนไม่ต้องนำมาใช้ในการคำนวณ แต่ถ้าจะคิดมวลลดทอน (reduced mass, μ) ของระบบที่ประกอบด้วยอิเล็กตรอนมวล m และนิวเคลียสมวล M อยู่ห่างกันเป็นระยะทาง r

$$\mu = \frac{m}{1+\frac{m}{M}} = \frac{M}{1+\frac{M}{m}}$$

สำหรับอะตอมไฮโดรเจน $m/M = 1/1836$

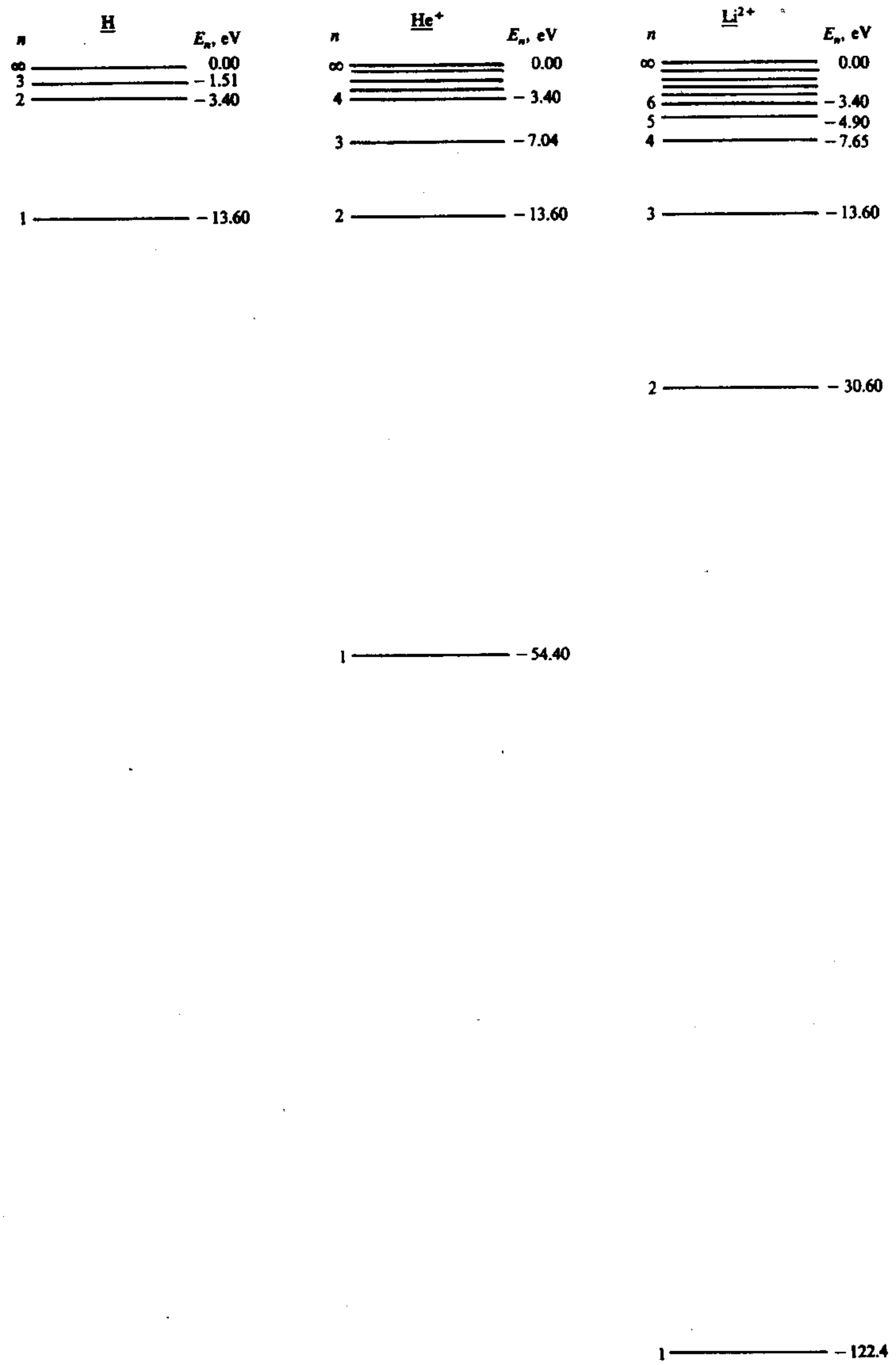
ดังนั้น ค่าคงที่ของไรด์เบริก คือ

$$R_H = \frac{R_\infty}{1+\frac{m}{M}} = \frac{1.09737 \times 10^{-3}\ \mathring{A}^{-1}}{1+(1/1836)}$$

$$= 1.0968 \times 10^{-3}\ \mathring{A}^{-1}$$

ซึ่งมีค่าตรงกับที่ได้จากการทดลอง

อะตอมตามแบบของโบร์ใช้ได้กับอะตอมที่มีอิเล็กตรอนเพียงตัวเดียว เช่น อะตอมไฮโดรเจน อะตอมฮีเลียมซึ่งอิเล็กตรอนหลุดออกไป 1 ตัว (He^{+}) หรืออะตอมลิเธียมซึ่งอิเล็กตรอนหลุดไป 2 ตัว (Li^{2++}) รูปที่ 1.9 แสดงระดับพลังงานของ H , He^{+} , Li^{2+}



รูปที่ 1.9 ระดับพลังงานของ H , He^{+} , Li^{2+}

ตัวอย่างที่ 1.21 จงหาความยาวคลื่นที่สั้นที่สุดและยาวที่สุดของเส้นสเปคตรัม ในอนุกรมไลแมน (Lyman series) ของอะตอมไฮโดรเจน

วิธีทำ อนุกรมไลแมน $n_f = 1$

$$\frac{1}{\lambda} = \left(1.097 \times 10^{-3} \overset{o}{A}{}^{-1}\right)\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

เมื่อ $n_i = 2 , 3 , 4 ,.........$

ความยาวคลื่นมากที่สุด $n_i = 2$

$$\frac{1}{\lambda_{max}} = \left(1.097 \times 10^{-3} \overset{o}{A}{}^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)$$

หรือ $\lambda_{max} = 1215 \quad \overset{o}{A}$

ความยาวคลื่นสั้นที่สุด $n_i = \infty$

$$\frac{1}{\lambda_{min}} = 1.097 \times 10^{-3} \overset{o}{A}{}^{-1}\left(1 - \frac{1}{\infty}\right)$$

หรือ $\lambda_{min} = 912 \quad \overset{o}{A}$

ตัวอย่างที่ 1.22 ยิงอิเล็กตรอนพลังงาน 12.2 eV เข้าชนอะตอมไฮโดรเจนซึ่งอยู่ภายในหลอดปล่อยประจุ (dischange tube) จงหาความยาวคลื่นของเส้นสเปคตรัมที่ส่งออกมา

วิธีทำ พลังงานสูงสุดที่สามารถดูดกลืนโดยอะตอมไฮโดรเจนจะมีค่าเท่ากับพลังงานของอิเล็กตรอน 12.2 eV การดูดกลืนพลังงานจำนวนมากนี้ จะทำให้อะตอมที่อยู่ในสภาวะพื้นถูกกระตุ้นไปอยู่ในระดับพลังงาน E_i เมื่อ

$$E_i = E_1 + 12.2eV$$

$$= -13.6eV + 12.2eV$$

$$= -1.4\, eV$$

ค่า n ของระดับ พลังงานนี้จะหาได้จาก.

$$E_n = -\frac{E_1^0}{n^2}$$

ดังนั้น $$-1.4eV = -\frac{13.6eV}{n^2}$$

หรือ $$n = 3.12$$

เนื่องจาก n ต้องเป็นเลขจำนวนเต็ม ระดับพลังงานสูงสุดที่เป็นไปได้คือ n = 3 ดังนั้น เมื่ออะตอมกลับสู่สภาวะพื้น จะให้โฟตอนที่มีความยาวคลื่น 3 ค่า ซึ่งได้จากการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนจาก $3 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 1$ และ $3 \rightarrow 1$ ความยาวคลื่นที่ได้ คือ

$$\frac{1}{\lambda} = \left(1.097 \times 10^{-3}\ \mathring{A}^{-1}\right)\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)$$

หรือ $$\lambda = 6563\ \mathring{A}$$

$$\frac{1}{\lambda} = \left(1.097 \times 10^{-3}\ \mathring{A}^{-1}\right)\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right)$$

หรือ $$\lambda = 1215\ \mathring{A}$$

$$\frac{1}{\lambda} = \left(1.097 \times 10^{-3}\ \mathring{A}^{-1}\right)\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2}\right)$$

หรือ $$\lambda = 1026\ \mathring{A}$$

1.6 ควอนไทซ์เซชั่นของโบร์และซอมเมอร์เฟลด์

จากความสำเร็จของทฤษฎีของโบร์เมื่อนำไปใช้กับอะตอมที่มีอิเล็กตรอนตัวเดียว ทำให้มีความพยายามในการศึกษาทฤษฎีของโบร์มากยิ่งขึ้น อย่างไรก็ตามโบร์ไม่ได้อธิบายว่า เมื่อไรที่อิเล็กตรอนจะเกิดการเคลื่อนที่จากวงโคจรหนึ่งไปอีกวงโคจรหนึ่ง และกฎของการควอนไทซ์ก็ใช้ได้กับระบบที่เป็นระเบียบ เช่น อะตอมไฮโดรเจนเท่านั้น ซึ่งซอมเมอร์เฟลด์และวิลสัน (Sommerfeld and Wilson) ได้เสนอกฎที่ใช้ได้กับระบบทั่วไปมากกว่า คือ

$$\oint p\,dq = nh$$

เมื่อ p เป็นโมเมนตัม
q เป็นพิกัด (coordinate)

จากทฤษฎีของโบร์ ทำให้เกิด

1. หลักการสมนัย (correspondence principle) ซึ่งกล่าวว่า ฟิสิกส์ดั้งเดิมเป็นกรณีพิเศษของฟิสิกส์ควอนตัม เมื่อเลขควอนตัมมีค่ามาก เช่น เมื่อ n ของอะตอมตามแบบของโบร์มีค่ามาก

2. ระบบอื่นก็มีการควอนไทซ์ของโมเมนตัมเชิงมุมด้วย เช่น ระบบที่มีการเคลื่อนที่เป็นรูปวงรี

ตัวอย่างที่ 1.23 จงหาระดับพลังงานสำหรับแรงดึงดูด

$$F = \begin{cases} -\alpha & \text{เมื่อ } x>0 \\ +\alpha & \text{เมื่อ } x<0 \end{cases}$$

โดยใช้ควอนไทซ์เซชั่นของโบร์และซอมเมอร์เฟลด์ และจงหาว่า เมื่อแรงมีขนาดเพิ่มขึ้น ช่องว่างระหว่างระดับพลังงานเป็นอย่างไร

วิธีทำ พลังงานศักย์

$$P.E. = -\int F dx = \alpha x \quad \text{เมื่อ } x>0 \quad = |x| \quad \text{ทุก ๆ } x$$
$$\alpha x \quad \text{เมื่อ} \quad x<0$$

พลังงานรวม $E = \frac{P^2}{2m} + \alpha|x|$

$$p^2 = 2m(E - \alpha|x|)$$

จากควอนไทซ์เซชั่นของโบร์และซอมเมอร์เฟลด์

$$\oint p\,dq = nh$$

$$2\int_{-E/\alpha}^{E/\alpha} [2m(E - \alpha|x|)]^{1/2} dx = nh$$

$$4(2m)^{1/2} \int_0^{E/\alpha} (E - \alpha x)^{1/2} dx = nh$$

จากคณิตศาสตร์

$$\int \sqrt{ax+b}\ dx = \frac{2\sqrt{(ax+b)^3}}{3a}$$

$$4(2m)^{1/2} \cdot \frac{2}{3(-\alpha)} \sqrt{(E-\alpha x)^3}\Big|_0^{E/\alpha} = nh$$

$$4(2m)^{1/2} \cdot \frac{2}{3(-\alpha)} (-E)^{3/2} = nh$$

$$En = \left[\frac{3nh\alpha}{8(2m)^{1/2}}\right]^{2/3}$$

ช่องว่างระหว่างระดับพลังงาน

$$\Delta E = E_{n+1} - En = \left[\frac{3h\alpha}{8(2m)^{1/2}}\right]^{2/3} \left[\left(n+1^{2/3} - n^{2/3}\right)\right]$$

เมื่อแรงเพิ่มมากขึ้น α ก็จะเพิ่มขึ้น ดังนั้นช่องว่างระหว่างระดับพลังงานก็จะเพิ่มขึ้น

ตัวอย่างที่ 1.24 สำหรับฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ 2 มิติ

$$V = \frac{1}{2}k_x x^2 + \frac{1}{2}k_y y^2$$

อาศัย ควอนไทซ์เซชั่นของโบร์และซอมเมอร์เฟลด์

ก) จงหาระดับพลังงานในเทอมของเลขควันตัม n_x, n_y

ข) ภายใต้ภาวะเช่นไร ซึ่งคู่เลขควันตัมที่ต่างกันจะให้ระดับพลังงานเดียวกัน (degenerate)

วิธีทำ

$$V = \frac{1}{2}k_x x^2 + \frac{1}{2}k_y y^2 = V_1(x) + V_2(y)$$

สำหรับแกน x

$$F = -k_x x$$

$$\ddot{x} + \omega^2{}_1 x = 0 \qquad \text{เมื่อ} \quad \omega^2{}_1 = \frac{kx}{m}$$

$$x = A\sin(\omega_1 t + \phi)$$

$$\dot{x} = A\omega_1 \cos\omega_1 t$$

จาก

$$\oint P_i dq_i = nh$$

$$\oint m\dot{x}\,dx = n_x h$$

$$m\int_0^{\pi}(A\omega_1\cos\omega_1 t)(A\omega_1\cos\omega_1 t dt) = n_x h$$

$$mA^2\omega_1\int^{2\pi}{}_o \cos^2\omega_1 t\, d(\omega_1 t) = n_x h$$

$$mA^2\omega_1(\pi) = n_x h$$

$$A^2 = \frac{n_x h}{\pi m \omega_1}$$

$$E_x = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$= \frac{1}{2}mA^2\omega_1^{\ 2}\cos^2\omega_1 t + \frac{1}{2}k_x A^2\sin^2\omega_1 t$$

$$= \frac{1}{2}mA^2\omega_1^{\ 2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{n_x h}{\pi}\right)\omega_1$$

$$= n_x h \upsilon_1$$

ในทำนองเดียวกัน

$$E_y = n_y h \upsilon_2$$

$$\therefore E_n = n_x h \upsilon_1 + n_y h \upsilon_2$$

ข) ภายใต้ภาวะซึ่ง $k_x = k_y$ (เป็น isotropic harmonic oscillator)

$\omega_1 = \omega_2$ หรือ $\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon$

$$E_n = (n_x + n_y)h\upsilon$$

ตัวอย่างเช่น

$$n_x = 1, n_y = 2$$
$$n_y = 2, n_x = 1$$

จะได้ระดับพลังงานเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 1.25 จาก ควอนไทซ์เซชั่นของโบร์และซอมเมอร์เฟลด์ จงคำนวณหาระดับพลังงานของอะตอมไฮโดรเจน

วิธีทำ

$$H = \frac{1}{2\mu}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^{\,2}}{r^2}\right) - \frac{Ze^2}{r}$$

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{\mu}, \qquad \dot{p}_r = \frac{-\partial H}{\partial r} = \frac{-p_\theta^{\,2}}{\mu r^3} + \frac{Ze^2}{r^2}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{\mu^2} \qquad \dot{p}_\theta = \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$$

ที่ $r = a, p_r = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{p}_r = 0 \therefore \frac{-p_\theta^{\,2}}{\mu a^3} + \frac{Ze^2}{a^2} = 0$

หรือ $p_\theta = \sqrt{\mu a Z e^2}$

$$J = \oint p_\theta d\,\theta$$

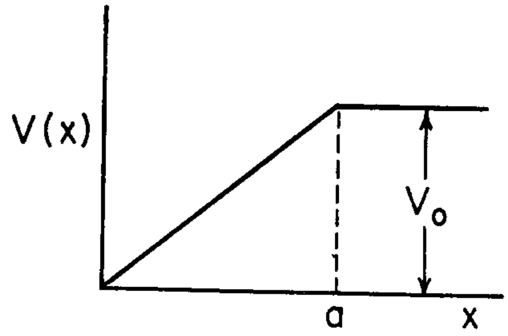
$$= \int_0^\pi \sqrt{\mu a Z e^2}\, d\theta = 2\pi\sqrt{\mu a Z e^2} = nh$$

$$\rightarrow \quad a = \frac{n^2\hbar^2}{\mu Z e^2}$$

$$\therefore E = \frac{1}{2\mu}\left(p^2{}_r + \frac{p_\theta^{\,2}}{r^2}\right) - \frac{Ze^2}{r}$$

$$= \frac{-Ze^2}{2a} = \frac{-\mu Z^2 e^4}{2n^2\hbar^2}$$

ตัวอย่าง 1.26 อนุภาค m เคลื่อนที่ภายใต้ศักย์ดังรูป จงหาระดับพลังงาน E เมื่อ $E < V_0$ โดยอาศัยหลักการควอนไทซ์ของวิลสัน และซอมเมอร์เฟลด์



วิธีทำ

$$V(x) = (V_0 / a)x; \quad 0 \le x \le a$$

$$V(x) = V_0; a < x$$

พลังงานรวมเมื่อ $0 \le x \le x$ คือ

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{V_0}{a} x$$

และขนาดของโมเมนตัมเชิงเส้น คือ

$$p = \sqrt{2m\left[E - (V_0/a)x\right]}$$

เมื่อ $p = 0, x_{max} = aE/V_0$

จาก $\oint p dq = nh$

จะได้

$$2\int_0^{aE/V_0} \sqrt{2m}\sqrt{E - (V_0/a)x}\, dx = nh$$

จากคณิตศาสตร์

$$\int \sqrt{a + bx}\; dx = \frac{2}{3b}\sqrt{(a + bx)^3}$$

ดังนั้น

$$\frac{4}{3}\frac{aE^{3/2}}{V_0}\sqrt{2m} = nh$$

$$E = \left(\frac{3}{4}\frac{nhV_0}{a\sqrt{2m}}\right)^{2/3}$$

<u>หมายเหตุ</u>

ในกรณีของลูกบอลตกกระทบพื้น ภายใต้ศักย์ $V = +mgx$ โดยที่ g เป็นความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วง และ x เป็นความสูงของลูกบอล จะได้ระดับพลังงานเป็น

$$E = \left[\frac{9n^2}{16}\left(\frac{h^2mg^2}{2}\right)\right]^{2/3}$$

$$= 2.81\left(\frac{n^2m\hbar^2g^2}{2}\right)^{1/3}$$

1.7 คลื่นอิเล็กตรอนและทฤษฎีควอนตัม

ในปี ค.ศ. 1924 นักศึกษาชาวฝรั่งเศส ชื่อ **เดอ เบรย** กล่าวไว้ในวิทยานิพนธ์ของเขาว่า อิเล็กตรอนอาจจะมีคุณสมบัติเป็นคลื่น โดยอาศัยเหตุผลของการสมมาตร (symmetry) ของธรรมชาติ เนื่องจากแสงมีคุณสมบัติของคลื่นและ อนุภาค ดังนั้นสสารก็ควรจะมีคุณสมบัติของคลื่นและอนุภาคด้วย คำกล่าวของเขายังไม่เป็นที่ยอมรับในช่วงเวลานั้น เพราะว่า ยังไม่มีการทดลองใดๆ ที่แสดงถึงความเป็นคลื่นของอิเล็กตรอน เดอ เบรย ใช้สมการต่อไปนี้ ในการหาความถี่และความยาวคลื่นของคลื่นอิเล็กตรอน

$$f = \frac{E}{h} \tag{1.24}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{1.25}$$

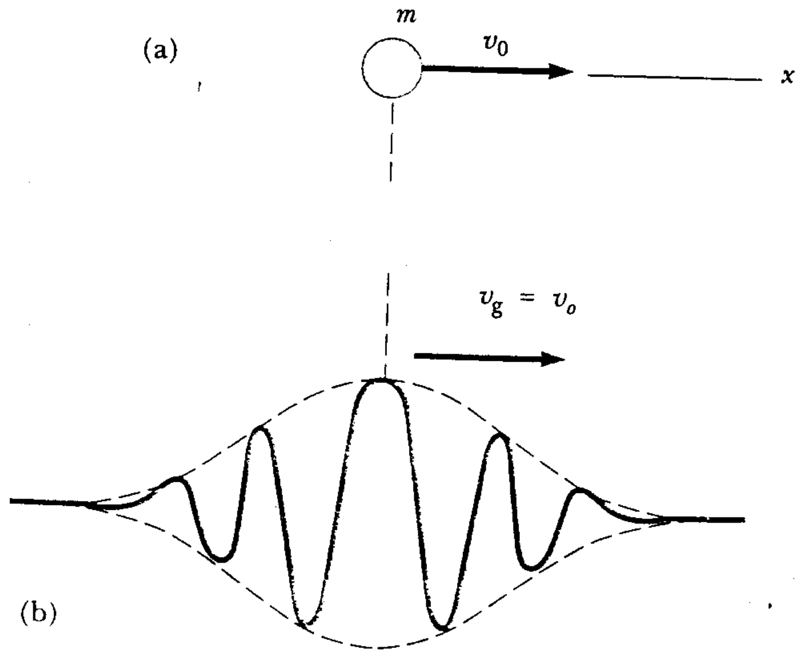
เมื่อ p เป็นโมเมนตัม และ E เป็นพลังงานของอิเล็กตรอน ซึ่งสมการ (1.24) จะเหมือนกับสมการของพลังค์ – ไอน์สไตน์ ที่ใช้คำนวณพลังงานของโฟตอน สมการ (1.25) ก็สามารถนำมาใช้กับโฟตอนได้ โดยที่

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{hc}{hf} = \frac{hc}{E}$$

เนื่องจากโมเมนตัมของโฟตอนสัมพันธ์กับพลังงานตามสมการ $E = pc$ จะได้

$$\lambda = \frac{hc}{pc} = \frac{h}{p}$$

สมการของเดอ เบรย ใช้ได้กับสสารทุกชนิดเพียงแต่ว่า ถ้าสสารมีขนาดใหญ่ ความยาวคลื่นที่คำนวณจากสมการ (1.25) จะน้อยมาก จนไม่สามารถสังเกต เห็นคุณสมบัติของคลื่น เช่น การแทรกสอด หรือ การกระเจิง



รูปที่ 1.10 เปรียบเทียบอนุภาคกับคลื่นสสาร

ตัวอย่างที่ 1.27 จงคำนวณความยาวคลื่น เดอ เบรย ของอนุภาคมวล 10^{-6} กรัม ที่เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว 10^{-6} เมตร / วินาที

วิธีทำ

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\upsilon} = \frac{6.63 \times 10^{-34}\ J.s}{(10^{-9}\ kg)(10^{-6}\ m/s)}$$

$$= 6.63 \times 10^{-19}\ m$$

เนื่องจากความยาวคลื่น จากตัวอย่างข้างบนนี้มีค่าน้อยมาก จนไม่สามารถหาช่องเปิดใดๆ ที่มีขนาดเล็กกว่าหรือขนาดใกล้เคียงกันได้ (เส้นผ่าศูนย์กลางของนิวเคลียส ประมาณ $10^{-15} m$ ซึ่งมีค่าประมาณ 10,000 เท่า ของความยาวคลื่นนี้) จึงไม่สามารถทำให้เกิดการแทรกสอดหรือการกระเจิงขึ้น ในฟิสิกส์ดั้งเดิมจึงไม่สามารถแยกคลื่นที่มีความยาวคลื่นน้อยออกจากอนุภาคได้ เราจึงไม่สามารถสังเกตความเป็นคลื่นของลูกบอล หรือ ลูกกอล์ฟได้

ตัวอย่างที่ 1.28 ลูกเบสบอลมวล 140 กรัม เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว 60 mph ($27\,m/s$)
จงหาความยาวคลื่นของลูกเบสบอลนี้

วิธีทำ

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.63 \times 10^{-34}\ J.s}{(0.14\ kg)(27\ m/s)}$$

$$= 1.7 \times 10^{-34}\ m$$

ตัวอย่างที่ 1.29 อนุภาคประจุ q มวล m ถูกเร่งจากหยุดนิ่งด้วยความต่างศักย์ V

ก) จงหาความยาวคลื่นเดอ เบรย

ข)จงหาความยาวคลื่น ถ้าอนุภาคเป็นอิเล็กตรอน และความต่างศักย์ = 50 โวลต์

วิธีทำ ก) เมื่ออนุภาคถูกเร่งจากหยุดนิ่งด้วยความต่างศักย์ V อนุภาคจะมีพลังงานจลน์ $\frac{1}{2}mv^2$ ซึ่งมีค่าเท่ากับพลังงานศักย์ที่สูญเสีย qV ดังนั้น

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV$$

เนื่องจาก $p = mv$ จะได้

$$\frac{p^2}{2m} = qV \text{ หรือ } p = \sqrt{2mqV}$$

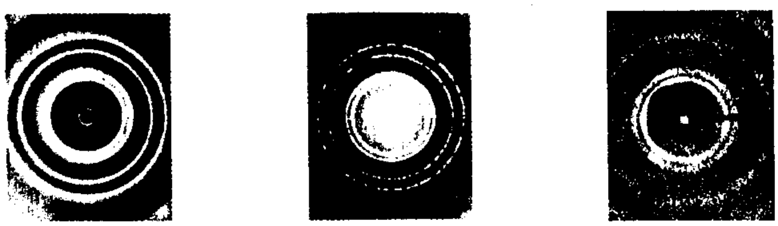
แทนค่า p ลงใน $\lambda = h/p$ จะได้

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mqV}}$$

ข) $$\lambda = \frac{6.63\times10^{-34}\,J.s}{\sqrt{2\left(9.11\times10^{-31}\,kg\right)\left(1.6\times10^{-19}\,C\right)\left(50V\right)}}$$

$$= 1.7\times10^{-10}\,m = 1.7\,\mathring{A}$$

ความยาวคลื่นนี้อยู่ในช่วงขนาดของอะตอม และช่องว่างระหว่างอะตอมในของแข็ง จึงสามารถใช้อิเล็กตรอนที่มีพลังงานต่ำขนาดนี้ ทำให้เกิดการกระเจิงของอิเล็กตรอนได้ ในปี ค. ศ. 1927 จี พี ทอมสัน (G.P.Thomson) สังเกตการกระเจิงของอิเล็กตรอน เมื่ออิเล็กตรอนเคลื่อนที่ผ่านแผ่นโลหะบาง ทำให้มีการค้นพบการกระเจิงของอนุภาคอื่น เช่น นิวตรอน โปรตอน ในเวลาต่อมา รูปที่ 1.11 แสดงการกระเจิงของรังสีเอกซ์ อิเล็กตรอน และนิวตรอนที่มีความยาวคลื่นเดียวกันเคลื่อนที่ผ่านโลหะบาง



ก) ข) ค)

รูปที่ 1.11 การกระเจิงของ ก) รังสีเอกซ์ ข) อิเล็กตรอนตกกระทบบนแผ่นอลูมิเนียม และ ค)นิวตรอนตกกระทบบนแผ่นทองแดง

ตัวอย่างที่ 1.30 จงหาความยาวคลื่นของ

ก) อิเล็กตรอนซึ่งมีพลังงานจลน์ 1 ev, 100 ev
ข) โปรตอนซึ่งมีพลังงานจลน์ 1 ev
ค) โมเลกุล UF_6 ซึ่งมีพลังงานจลน์ 1 ev
ง) ลูกเบสบอลความเร็ว 100 ไมล์/ชม. (มวล 0.14 กก.)

วิธีทำ

กรณี V << c

$$E = \frac{P^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} \rightarrow \lambda = h(2mE)^{-1/2}$$

$$\lambda = 1.170x10^{-24}\left[m(kg)\times E(e\upsilon)\right]^{-1/2}$$

ก) 1 eV $\lambda = 1.226x10^{-9}$ m

100 eV $\lambda = 3.878x10^{-10}$ m

ข) 1 eV โปรตอน $\lambda = 1.226x10^{-9}$ m

ค) 1 eV UF_6 (มวล 5.88x10^{25} kg /โมเลกุล)

$\lambda = 1.529x10^{-12}$ m

ง) 100 mph = 44.7 m/s

$$\lambda = \frac{h}{mv} = 1.059x10^{-34} \text{ m}$$

เดอ เบรย ชี้ให้เห็นว่า อะตอมตามแบบของโบร์ซึ่งโมเมนตัมเชิงมุมมีค่าเป็นจำนวนเท่าของ $\hbar$ มีลักษณะเหมือนกับคลื่นนิ่งในเส้นเชือก

จาก $$mvr = n\hbar = \frac{nh}{2\pi}$$

แทนค่า โมเมนตัม mv ด้วย h/λ

จะได้ $$\frac{h}{\lambda} = \frac{n\hbar}{2\pi}$$

หรือ $$n\lambda = 2\pi r = \mathbf{C}$$

เมื่อ C เป็นเส้นรอบวงของวงโคจรของอิเล็กตรอนตามแบบของโบร์ ดังนั้น เงื่อนไขของอะตอมของโบร์ ก็คือ จำนวนคลื่นอิเล็กตรอนที่อยู่บนเส้นรอบวงจะต้องเป็นเลขจำนวนเต็ม

ตัวอย่างที่ 1.31 พลังงานของอิเล็กตรอนในสภาวะพื้นของอะตอมไฮโดรเจน เท่ากับ –13.6 eV จงหาความยาวคลื่นของอิเล็กตรอนนี้

วิธีทำ $$\lambda = \frac{1\ .226}{\sqrt{13\ .6}}\, nm$$

$$= 0.332\ nm = 2\pi(0.0529\ nm)$$

ซึ่งก็คือ ความยาวของเส้นรอบวงของวงโคจรชั้นในสุดของอะตอมไฮโดรเจน

ความคิดเกี่ยวกับการอธิบาย ความไม่ต่อเนื่องของพลังงาน โดยอาศัยคลื่นนิ่งนำไปสู่พัฒนาทฤษฎีโดยใช้คณิตศาสตร์โดยชเรอดิงเงอร์ในปี 1928 ในทฤษฎีนี้ (ซึ่งภายหลังเรียกว่า ทฤษฎีควอนตัม กลศาสตร์ควอนตัม หรือ กลศาสตร์คลื่น) อธิบายอิเล็กตรอนด้วยฟังก์ชั่นคลื่น (wave function , ψ) โดยที่ฟังก์ชั่นคลื่นนี้จะได้จากสมการคลื่น เช่น เดียวกับคลื่นเสียงและแสง ซึ่งเป็นไปตามสมการคลื่นดั้งเดิม ความถี่และความยาวคลื่นของคลื่นอิเล็กตรอน จะสัมพันธ์กับพลังงานและโมเมนตัมของอิเล็คตรอน เหมือนกับที่ความถี่และความยาวคลื่นของแสงสัมพันธ์กับพลังงานและโมเมนตัมของโฟตอน ชเรอดิงเงอร์แก้ปัญหาคลื่นนิ่งของอะตอมไฮโดรเจน ฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์อย่างง่าย และระบบอื่น ๆ เขาพบว่าเมื่ออาศัย ความถี่ที่เป็นไปได้ และสมการ $E = hf$ จะทำให้ได้เซทของระดับพลังงานของอะตอมไฮโดรเจน เหมือนกับที่ได้จากทฤษฎีของโบร์ซึ่งแสดงว่า ทฤษฎีควอนตัมเป็นวิธีการทั่วไป ที่สามารถใช้ในการคำนวณระดับพลังงานของระบบต่างๆ ได้ ทฤษฎีควอนตัมเป็นรากฐานที่ช่วยให้เราเข้าใจเกี่ยวกับภายในนิวเคลียส ตลอดจนเส้นสเปคตรัมของรังสีที่มาจากกาแลคซี่ที่อยู่ห่างไกลได้