

# บทที่ 8

## ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปเบื้องต้น

### วัตถุประสงค์

1. ให้รู้โครงสร้างของทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป พอที่จะเขียนแสดงความคิดเห็นเปรียบเทียบกับทฤษฎีสัมพัทธภาพเฉพาะได้
2. ให้อธิบายความแตกต่างและความเหมือนกันของมวลเฉื่อยและมวลของแรงโน้มถ่วง
3. ให้สามารถคำนวณมวลของโฟตอน
4. ให้หาความถี่ที่เคลื่อนไปสู่สเปกตรัมสีแดงได้
5. ให้คำนวณหาการบี่ยงเบนของโฟตอนเมื่อโฟตอนนั้นผ่านบริเวณที่มีแรงโน้มถ่วงได้

### 8.1 บทนำ

ทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษเกิดจากรूपส์ของการแปลงออร์ทอกอนอลเชิงเส้น ของพิกัดทั้งสี่ คือ  $x_1, x_2, x_3$  และ  $x_4 = ict$  โดยสมมุติว่าปริภูมิและเวลาเป็นไอโซทรอปิก ถ้าหากเราขยายความสัมพันธ์ของการแปลงออกในรูป

$$x'_k = f_k(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad , \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (8.1)$$

ด้วยวิธีนี้กรอบอ้างอิงทุกกรอบกลายเป็นกรอบซึ่งใช้ในการแปลงได้ ไม่ใช่เฉพาะกรอบอ้างอิงซึ่งมีความเร็ว  $v < c$  เท่านั้น ทำให้ปริภูมิและเวลามีได้มีความหมายเป็นค่าสัมบูรณ์อีก

ต่อไปเหมือนเมื่อนิวตันได้สร้างสมมุติฐานขึ้น หากแต่ปริภูมิและเวลากลายเป็นเครื่องมือเพื่อแสดงกฎทางฟิสิกส์ ผู้ที่ในความเห็นนี้ก่อนผู้อื่นคือ เอิร์นส์ท์ มาค (Ernst Mach) ดังนั้นทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปจึงเป็นการแสดงทฤษฎีของปริมาณที่ไม่เปลี่ยนแปลง (invariant theory) และทฤษฎีการรักษารูปสมการ (covariant theory) ของกรุปส์ซึ่งเกิดจากการแปลงตามสมการชุด (8.1) นี้

## 8.2 มวลเฉื่อยและมวลของแรงโน้มถ่วง

(Inertial mass and gravitational mass)

จากกฎของแรงโน้มถ่วงของนิวตันเราทราบว่า

$$\vec{F} = - \frac{Gm_1m_2\vec{r}}{r^3} \quad (8.2)$$

เมื่อเทียบกับกฎข้อที่สองสำหรับการเคลื่อนที่ของนิวตัน

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} m\vec{v} = m\vec{\ddot{r}} \quad (8.3)$$

จะเห็นว่ามวลอยู่ 3 ชนิดด้วยกัน ถ้าหากสมมุติว่า มวลเหล่านี้เป็นจุด มวลที่ปรากฏในสมการที่ (8.3) จะมีลักษณะต่างจากมวลซึ่งปรากฏในสมการที่ (8.2) เราเรียกมวลในสมการที่ (8.3) ว่ามวลเฉื่อย (inertial mass) ซึ่งเราหมายถึงมันเป็นค่าคงที่เมื่อปรากฏในสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงและความเร่ง มันทำหน้าที่แสดงความเฉื่อยของวัตถุในขณะที่ยังสถานะของการเคลื่อนที่ได้เปลี่ยนไป ซึ่งมันมิได้เกี่ยวข้องกับแรงที่กระทำบนวัตถุเลย

ปัญหาที่เราจะพึงถามได้จากสมการที่ (8.2) ก็คือ แรงความโน้มถ่วงที่กระทำบนมวล  $m_2$  เนื่องจากมีมวล  $m_1$  วางอยู่ห่างมวล  $m_2$  เป็นระยะทาง  $\vec{r}$  เป็นเท่าไร? หากเราพิจารณาสมการที่ (8.2) จะเห็นว่า มีสนามแรงโน้มถ่วงที่  $\vec{r}$  เนื่องจากมวล  $m_1$  ขนาด

$$\vec{g} = \frac{Gm_1\vec{r}}{r^3} \quad (8.4)$$

สมการ (8.4) แสดงว่าสนามนี้เนื่องด้วยมวล  $m_1$  และเนื่องจาก  $m_1$  ทำให้เกิดสนามโน้มถ่วงนี้ จึงนิยมเรียก มวล  $m_1$  ว่า มวลของแรงโน้มถ่วงกัมมันต์ (active gravitational mass) เมื่อเรานำ

เอามวล  $m_2$  วางลงที่จุด  $\bar{r}$  มวล  $m_2$  ตอบสนองต่อสนามแรงโน้มถ่วงเนื่องจากมวล  $m_1$  ซึ่งมีอยู่ก่อนแล้ว จึงเรียกมวล  $m_2$  ว่า มวลของแรงโน้มถ่วงกสาคณิต (passive gravitational mass) จะเห็นว่า

$$\bar{F}_1 = -\bar{F}_2 \quad (8.5)$$

นั่นคือ  $Gm_{1a}m_{2p} = Gm_{2a}m_{1p}$

$$\frac{m_{1a}}{m_{2a}} = \frac{m_{1p}}{m_{2p}} \quad (8.6)$$

สมการ (8.5) มาจาก กฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 3 ของนิวตัน อักษรย่อ a และ p แทนสถานะกัมมันต์และสถานะกสาคณิตของมวลตามลำดับ และเนื่องจากอัตราส่วนระหว่างมวลกัมมันต์กับมวลกสาคณิตเป็นอย่างเดียวกัน ทำให้อาจจะเลือกค่าคงที่ซึ่งทำให้มวลกัมมันต์กับมวลกสาคณิตเป็นเอกลักษณะ โดยการเลือกหน่วยให้ถูกต้อง

ความเท่ากันของมวลของแรงโน้มถ่วงกสาคณิตและมวลของแรงโน้มถ่วงกัมมันต์ ทำให้มักจะเรียกรวม ๆ ว่า มวลของแรงโน้มถ่วง ความเท่ากันระหว่างมวลของแรงโน้มถ่วงกับมวลเฉื่อย นับเป็นเรื่องที่สลับซับซ้อนกว่า ความเท่ากันของมวลของแรงโน้มถ่วงกสาคณิตและมวลของแรงโน้มถ่วงกัมมันต์ มวลของแรงโน้มถ่วงเมื่อเทียบกับมวลเฉื่อยแล้ว นับว่าคล้ายกับกรณีของประจุไฟฟ้าสถิตกับมวลเฉื่อย เราทราบว่ามีความแตกต่างระหว่างประจุไฟฟ้าของอนุภาคและมวลเฉื่อยของอนุภาค เราอาจจะเรียกมวลของแรงโน้มถ่วงว่า ประจุโน้มถ่วงซึ่งตามทฤษฎีแรงโน้มถ่วงของนิวตันแล้วมันมีค่าเหมือนกับมวลเฉื่อยทุกประการ

นิวตันได้แสดงความเท่ากันของมวลทั้งสองคือมวลของแรงโน้มถ่วง และมวลเฉื่อย เมื่อเขาวิเคราะห์ทางเดินของดาวเคราะห์รอบดวงอาทิตย์ มวลเฉื่อยซึ่งอยู่ในสมการการเคลื่อนที่ภายใต้แรงเข้าสู่ศูนย์กลางมีค่าเท่ากับมวลของแรงโน้มถ่วงในสมการนั้น ความแน่นอนของความเท่ากันมีการทดสอบให้แม่นยำขึ้นตามลำดับในผลงานของ Eotvos (1880), Dicke (1964) และ Braginskii (1971) ในปัจจุบัน อัตราส่วนระหว่างมวลของแรงโน้มถ่วงของโลกกับมวลเฉื่อยมีความแม่นยำถึง หนึ่งใน  $10^{12}$  ซึ่งความแม่นยำนี้จะเอียงพอที่จะทำให้เชื่อว่ามวลเฉื่อยซึ่งเนื่องด้วยพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูงพอที่จะทำให้เกิดปรากฏการณ์สัมพัทธภาพในอะตอม  $m = \frac{E}{c^2}$  จะมีคุณสมบัติเหมือนมวลของแรงโน้มถ่วงขนาดเดียวกันทุกประการ

คุณสมบัติของแรงโน้มถ่วงนี้ทำให้ไอน์สไตน์เห็นว่ามีความสัมพันธ์ระหว่างปรากฏการณ์แรงโน้มถ่วงและปรากฏการณ์จลน์ซึ่งปรากฏในกฎข้อ 2 ของนิวตัน ความสมมูล (equivalence)

ของปรากฏการณ์ทั้งสอง ทำให้ไอน์สไตน์ตั้งกฎเบื้องต้นทางฟิสิกส์ขึ้นมีชื่อว่า หลักการของความสมมูล (principle of equivalence) ซึ่งมีใจความดังนี้

<sup>13</sup>ห้องทดลองซึ่งไม่หมุนสามารถทำได้ทุกอย่างอิสระในปริภูมิแคบ ๆ จะให้ผลการทดลองต่าง ๆ ทางฟิสิกส์เป็นอย่างเดียวกัน : All local, freely falling, non-rotating laboratories are fully equivalent for the performance of all physical experiments.

หลักการของความสมมูลนี้สอดคล้องกับสมมุติฐานของทฤษฎีสัมพัทธภาพ นอกจากนี้ห้องทดลองที่ตกลงอย่างอิสระยังแสดงว่าเหตุการณ์สองเหตุการณ์ซึ่งอยู่ใกล้เคียงกัน อาจจะเขียนในรูปของ “เมตริกซ์มาตรฐาน” (standard metric) หรือบางทีเรียกว่า เมตริกซ์ของมินโกวสกี (Minkowski metric) ดังนี้

$$(ds)^2 = (dt)^2 - \frac{1}{c^2} (d\vec{r})^2 \quad (8.7)$$

ความหมายของหลักการของความสมมูลยังครอบคลุมไปถึงว่า ภายในห้องทดลองซึ่งปล่อยให้ตกลงโดยอิสระ เราจะไม่ได้รับสนามแรงโน้มถ่วงเลย การอยู่ในห้องทดลองซึ่งตกลงโดยอิสระนั้นทำให้เราแทนความโน้มถ่วงด้วยความเร่ง หลักการของความสมมูล ซึ่งว่ากฎต่าง ๆ ทางฟิสิกส์ทุกกฎจะเป็นอย่างเดียวกันในห้องทดลองซึ่งเคลื่อนที่ได้โดยอิสระ

### 8.3 มวลของโฟตอน (Gravitational mass of photon)

โฟตอนซึ่งมีพลังงาน  $h\nu$  โดยที่  $\nu$  เป็นความถี่จะมีมวลเฉื่อย เท่ากับ  $\frac{h\nu}{c^2}$  ซึ่งแสดงว่า มวลของแรงโน้มถ่วงของมันมีขนาดเดียวกัน สมมุติว่าโฟตอนตัวนี้อยู่ที่ความสูง  $L$  เหนือผิวโลก เมื่อมันตกลงมายังผิวโลกจะทำให้มันมีพลังงานเพิ่มขึ้นเป็น  $mgL$  พลังงานของโฟตอนจะกลายเป็น

$$h\nu' \cong h\nu + \frac{h\nu}{c^2} gL \quad (8.8)$$

---

<sup>13</sup> Einstein, A., The Principle of Relativity, London: Methuen & Co., 1923, p 111

ถ้าสมมุติว่า ระยะ  $L$  ไม่นิโกลนั้ก ทำให้ประมาณได้ว่่า  $\frac{hv}{c^2}$  เป็นค่าคองที่ ดั้งนั้น ความถี่ของ โฟตอนหลังจากที่มันตกลงมาคือ

$$v' \cong v \left( 1 + \frac{gL}{c^2} \right) \quad (8.9)$$

ถ้า  $L = 20$  เมตร

$$\frac{v' - v}{v} = \frac{\Delta v}{v} \cong \frac{gL}{c^2} = \frac{10 \times 20}{(3 \times 10^8)^2} \approx 2 \times 10^{-15} \quad (8.10)$$

<sup>14</sup>Pound และ Rebka ได้ทำการทดลองตรวจสอบสมการ (8.10) โดยใช้รังสีแกมมา เขาพบว่า

$$\frac{\Delta v \text{ การทดลอง}}{\Delta v \text{ การคำนวณ}} = 1.05 \pm 0.10 \quad (8.11)$$

ถ้าหากโฟตอนมีความถี่  $v$  อยู่ที่ระยะอนันต์จากโลก มันจะมีความถี่  $v'$  เมื่อมันมาถึงผิวโลก ทำให้มันมีพลังงาน

$$hv' \cong hv + \frac{hv}{c^2} \frac{GM_E}{R_E} \quad (8.12)$$

เมื่อ  $M_E$  เป็นมวลของโลก  $R_E$  เป็นรัศมีของโลก

$$\therefore v' \cong v \left( 1 + \frac{GM_E}{c^2} \frac{1}{R_E} \right) \quad (8.13)$$

$\frac{GM_E}{c^2}$  มีชื่อเรียกว่า ความยาวความโน้มถ่วง (Gravitational length) สมการ (8.12) และ (8.13)

เป็นสมการโดยประมาณ

## 8.4 การเคลื่อนของแสงสเปกตรัมสีแดง (Gravitational redshift)

จากสมการที่ (8.10) ถ้าหากเรากำหนดให้

---

<sup>14</sup> Pound, R.V. and Rebka, Jr., CA., Phys. Rev. Letters 4, 337, 1960

$$\begin{aligned}\bar{g} &= -\nabla\phi \\ \bar{g}\cdot d\bar{r} &= -d\phi = gL\end{aligned}\quad (8.14)$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dv}{v} &= -\int \frac{d\phi}{c^2} \\ v &= v_0 \exp\left(-\frac{\Delta\phi}{c^2}\right)\end{aligned}\quad (8.15)$$

$\Delta\phi$  คือ ความแตกต่างของโพเทนเชียลระหว่างจุดซึ่งปล่อยคลื่นออกมากับจุดซึ่งดูดกลืนการแผ่รังสีนั้นเข้าไป

สำหรับโฟตอนซึ่งมีความถี่  $v_0$  ที่ผิวของดวงดาวดวงหนึ่งมันจะไปสู่ระยะอนันต์ซึ่งมีความแตกต่างโพเทนเชียล  $\Delta\phi = \frac{GM_s}{R_s}$  ด้วยความถี่ (สมมุติว่าสนามความโน้มถ่วงจากดวงดาวบนผิวโลกเป็นศูนย์)

$$\begin{aligned}v &= v_0 \exp\left(-\frac{GM_s}{R_s c^2}\right) \\ &\cong v_0 \left(1 - \frac{GM_s}{R_s c^2}\right)\end{aligned}\quad (8.16)$$

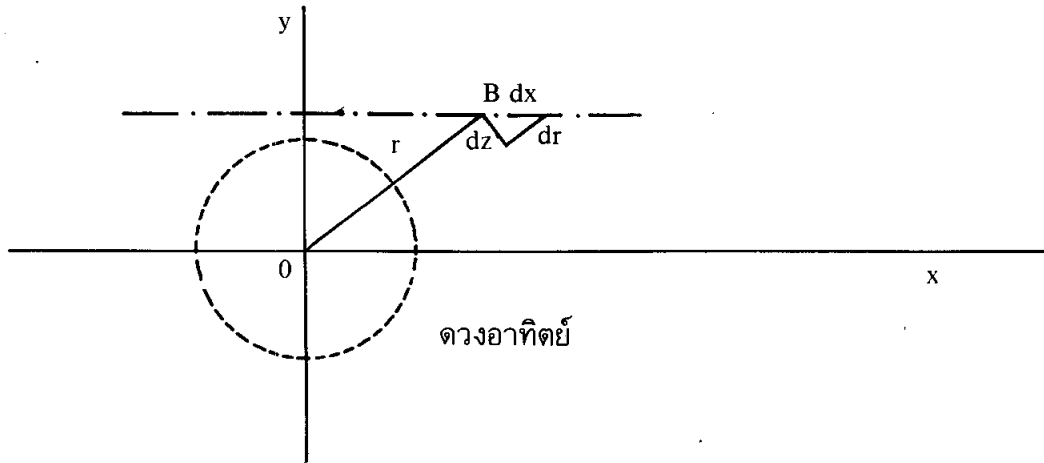
เมื่อ  $M_s$  เป็นมวลของดวงดาว และ  $R_s$  เป็นรัศมีของดวงดาวนั้น โฟตอนจากแถบสีน้ำเงินจะเคลื่อนไปทางแถบสีแดง ด้วยเหตุนี้จึงมีการให้ชื่อปรากฏการณ์นี้ว่า การเคลื่อนที่ของสเปกตรัมสีแดง

สำหรับดาวแคระขาว (white dwarf) มีค่า  $\frac{M_s}{R_s}$  ใหญ่มาก เช่น ดาวซิริอุสบี (sirius B) มีค่าการเคลื่อนที่สัมพัทธ์จากการคำนวณประมาณ

$$\frac{\Delta v}{v} \cong -5.9 \times 10^{-5} \quad (8.17)$$

แต่ค่าที่สังเกตได้ประมาณ  $-6.6 \times 10^{-5}$  ความคลาดเคลื่อนอยู่ภายในความไม่แน่นอนของ  $M_s$  และ  $R_s$

## 8.5 การบ่่ายเบนของโฟตอนเนื่องจากแรงโน้มถ่วง<sup>14</sup>



รูปที่ 47 การเคลื่อนที่ของโฟตอนผ่านดวงอาทิตย์

สมมุติว่ามีแสงกลุ่มหนึ่งเคลื่อนผ่านขอบดวงอาทิตย์มาอยู่ที่จุด B (ในรูป 47) ไปทางทิศ  $+x$  ผู้สังเกตการณ์ A อยู่บนผิวโลกซึ่งเราจะละความเร็วและความโน้มถ่วงของโลกเทียบกับดวงอาทิตย์เสีย ผู้สังเกตการณ์ท่านนี้จะเขียนทางเดินของแสงโดยใช้หลักการฮอยเกน สมมุติว่าผู้สังเกตการณ์ B อยู่ที่ตำแหน่งของกลุ่มแสงในขณะที่เราพิจารณาปัญหานี้ ให้ B' และ B'' เป็นผู้สังเกตการณ์อีกสองคน ผู้สังเกตการณ์ทั้งสองคือ ผู้สังเกตการณ์ที่ B' และ B'' พ้นจากอำนาจแรงโน้มถ่วงของดวงอาทิตย์แต่อยู่ที่บริเวณเดียวกัน B' มีความเร่งเท่ากับความเร่งของแรงโน้มถ่วงที่ B, B'' อยู่หนึ่ง ทั้ง B, B' และ B'' ไม่มีความเร็วสัมพัทธ์ระหว่างกันและกันด้วยหลักการของความสมมูล ผู้สังเกตการณ์ที่ B และ B' จะทำการวัดทุกประเภทได้ผลลัพธ์เหมือนกันในขณะที่ทำการสังเกตการณ์ และในขณะเดียวกันนี้ ความเร่งของ B' เทียบกับ B'' ก็ยังไม่ทำให้การวัดเวลาและระยะผิดกัน (เพราะความเร็วสัมพัทธ์ยังเป็นศูนย์อยู่) ผู้สังเกตการณ์ทั้งสามท่านจะวัดความเร็วของแสงได้เป็นความเร็วเดียวกัน เนื่องจาก B'' เป็นกรอบเฉื่อย ทำให้ความเร็วของแสงในกรอบนี้เป็น  $c$  ดังนั้น ผู้สังเกตการณ์อื่นก็จะพบว่าแสงมีความเร็ว  $c$  ด้วยให้ผู้สังเกตการณ์บนผิวโลก A สังเกตเห็นว่าแสงมีความเร็ว  $c'$

14 Schiff, L.I., On Experimental Tests of the General Theory of Relativity, Am.J.Phys., 28, 340, 1961

จากสมการที่ (8.15) ให้  $v$  คือ ความถี่ของแสงที่จุด B ดังนั้นคาบเวลา  $\Delta t = \frac{1}{v}$ ,  $v'$  เป็นความถี่ของแสงที่สังเกตได้บนผิวโลก ดังนั้น  $\Delta t' = \frac{1}{v'}$  เป็นคาบเวลาของแสงนั้น

$$\Delta t' = \frac{1}{v'}$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta t'} = \exp\left(-\frac{\Delta\phi}{c^2}\right)$$

$$dt' = dt \exp\left(\frac{\Delta\phi}{c^2}\right) \cong dt \left(1 + \frac{GM}{rc^2}\right) \quad (8.18)$$

และเนื่องจากระยะที่วัดได้เป็นสัดส่วนโดยตรงกับความถี่ในแต่ละสถานที่

$$dr \propto v$$

$$dr' \propto v'$$

ทำให้

$$\frac{dr'}{dr} = \frac{v'}{v} = \exp\left(-\frac{\Delta\phi}{c^2}\right)$$

$$dr' \cong dr \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right) \quad (8.19)$$

ในขณะที่ทิศทาง  $z$  ไม่ขึ้นกับความโน้มถ่วงของโลกเลยทำให้  $dz' = dz$  (รูปที่ 47) ที่ตำแหน่ง B ความเร็วของแสงคือ  $\frac{dx}{dt} = c$  ทำให้ที่ตำแหน่ง A มีความเร็วของแสงเป็น  $\frac{dx'}{dt'} = c'$  โดยที่เราจะหาความบ่ายเบนของแสงต่อหน่วยความยาวทางแกน  $x$  คือ  $\frac{1}{c'} \frac{\partial c'}{\partial y}$  และมุมความบ่ายเบนก็จะเป็น

$$\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{c'} \frac{\partial c'}{\partial y} \right]_{y=R} dx \quad (8.20)$$

$$\begin{aligned} dx' &= [(dr')^2 + (dz')^2]^{1/2} \\ &= \left[ (dr)^2 \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^2 + (dz)^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (8.21)$$



แต่เนื่องจาก  $(dx)^2 = (dr)^2 + (dz)^2$  และ  $\frac{dr}{dx} = \frac{x}{r}$  ทำให้

$$\begin{aligned} dx' &= \left[ (dr)^2 \left( 1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) + (dz)^2 \right]^{1/2} \\ &= dx \left[ 1 - \frac{2GM}{rc^2} \left( \frac{dr}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} \\ &\cong dx \left[ 1 - \frac{GMx^2}{r^3c^2} \right] \end{aligned} \quad (8.22)$$

เนื่องจาก  $c' = \frac{dx'}{dt'}$ ; จาก (8.18) และ (8.22)

$$\begin{aligned} c' &= \frac{dx}{dt} \frac{\left[ 1 - \frac{GMx^2}{c^2r^3} \right]}{\left[ 1 + \frac{GM}{rc^2} \right]} \\ &\approx c \left[ 1 - \frac{GMx^2}{c^2r^3} \right] \left[ 1 - \frac{GM}{c^2r} \right] \\ c' &= c \left[ 1 - \frac{GM}{c^2} \frac{x^2}{r^3} - \frac{GM}{c^2r} \right] \end{aligned} \quad (8.23)$$

ถ้าเราให้  $c'$  เป็น  $c'(x,y)$  แทน  $c'(r,x)$  เราอาจจะหา  $\frac{\partial}{\partial y} c'$  จากสมการ (8.23)

$$\begin{aligned} \frac{1}{c'} \frac{\partial}{\partial y} c' &\approx \frac{3GM}{c^2} \frac{x^2}{r^5} y + \frac{GM}{c^2} \frac{y}{r^3} \\ &= \frac{GM}{c^2} \left[ \frac{3x^2y}{r^5} + \frac{y}{r^3} \right] \end{aligned} \quad (8.23)$$

$$\therefore \theta = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{c'} \frac{\partial c'}{\partial y} \right]_{y=R} J_x ; \text{ ใช้ (8.23)}$$

$$= \frac{4GM}{c^2R} \quad (8.24)$$

ถ้า  $R$  เป็นรัศมีของดวงอาทิตย์แล้ว  $\theta \approx 1.7''$

## 8.6 สรุป

### 8.6.1

ในทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป ปริภูมิและเวลาเป็นเครื่องมือแสดงกฎทางฟิสิกส์

### 8.6.2 มวลเฉื่อยและมวลของแรงโน้มถ่วง

มวลมีสองชนิดใหญ่ ๆ คือ มวลของแรงโน้มถ่วง กับมวลเฉื่อย มวลของแรงโน้มถ่วงแสดงให้เห็นจากการดึงดูดกันของมวลสองมวลซึ่งมีระยะห่างกัน  $r$  ส่วนมวลเฉื่อย ทำหน้าที่แสดงความเฉื่อยของวัตถุ ในขณะที่สถานะของการเคลื่อนที่ได้เปลี่ยนไป มันเป็นค่าคงที่เมื่อปรากฏในสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงและความเร่ง จากการทดลองปรากฏว่า มวลทั้งสองชนิดมีค่าเท่ากันพอดี จากการทดลองซึ่งมีความแม่นยำถึง หนึ่งใน  $10^{12}$

หลักการของความสมมูล แสดงได้ว่า : ห้องทดลองซึ่งไม่หมุน สามารถตกได้อย่างอิสระในปริภูมิแคบ ๆ จะให้ผลการทดลองทางฟิสิกส์เป็นอย่างเดียวกัน

### 8.6.3 มวลของโฟตอน

โฟตอนซึ่งมีความถี่  $\nu$  จะมีมวล  $\frac{h\nu}{c^2}$  โฟตอนซึ่งอยู่ที่ความสูง  $L$  เหนือผิวโลก เมื่อมันตกลงมาถึงผิวโลกมันจะมีพลังงาน

$$h\nu' \cong h\nu + \frac{h\nu}{c^2} gL \quad (8.8)$$

ถ้าโฟตอนมีความถี่  $\nu$  อยู่ที่อนันต์ มันจะมีความถี่  $\nu'$  เมื่อมันมาถึงผิวโลก โดยที่

$$\nu' \cong \nu \left( 1 + \frac{GM_E}{c^2} \frac{1}{R_E} \right) \quad (8.9)$$

$\frac{GM_E}{c^2}$  คือ ความยาวความโน้มถ่วงของโลก

### 8.6.4 การเคลื่อนที่ของสเปกตรัมสีแดง

ถ้า  $\vec{g} = -\vec{\nabla}\phi$   $\nu_0$  เป็นความถี่ของโฟตอนที่จุดกำเนิดแสง ถ้า  $\nu$  เป็นความถี่ของโฟตอนที่ผู้สังเกตการณ์ และ  $\Delta\phi$  คือ ความแตกต่างระหว่างโพเทนเชียลของจุดกำเนิดแสงและผู้สังเกตการณ์แล้ว

$$v = v_0 \exp\left(-\frac{\Delta\phi}{c^2}\right) \quad (8.15)$$

สำหรับโฟตอนซึ่งมีความถี่  $\nu_0$  ที่ผิวของดวงดาวดวงหนึ่ง ถ้าดาวดวงนั้นมีมวล  $M_s$  มีรัศมี  $R_s$  โฟตอนจากผิวดาวนั้นจะเคลื่อนเข้าสู่ระยะอนันต์ด้วยความถี่

$$\begin{aligned} \nu &= \nu_0 \exp\left(-\frac{GM_s}{R_s c^2}\right) \\ &\equiv \nu_0 \left(1 - \frac{GM_s}{R_s c^2}\right) \end{aligned} \quad (8.16)$$

โฟตอนจากแถบสีน้ำเงินจะเคลื่อนไปทางแถบสีแดง

### 8.6.5 การบ่ายเบนของโฟตอนเนื่องจากแรงโน้มถ่วง

ถ้า  $M$  เป็นมวลของดวงอาทิตย์  $R$  เป็นรัศมีของดวงอาทิตย์ โฟตอนซึ่งวิ่งผ่านเฉียดผิวของดวงอาทิตย์จะบ่ายเบนเป็นมุม

$$\theta = \frac{4GM}{c^2 R} \quad (8.24)$$

## 8.7 คำถามท้ายบท

จงเติมคำในช่องว่างให้ได้ความสมบูรณ์

8.7.1 ในทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป  $x'_k =$  .....

ตอบ :  $f_k(x_1, x_2, x_3, x_4)$

8.7.2 เราสมมุติว่าปริภูมิและเวลาเป็น.....ในทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป

ตอบ : ไอโซทรอปิก

8.7.3 มวลเฉื่อยคือ.....

ตอบ : ค่าคงที่ในสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงและความเร่ง

8.7.4 มวลเฉื่อยกับมวลนิ่ง คือ.....

ตอบ : มวลเฉื่อยซึ่งให้สนามแรงโน้มถ่วง

8.7.5 หลักการของความสมมูลแสดงไว้ว่า.....

ตอบ : ห้องทดลองซึ่งไม่หมุนสามารถตกได้อย่างอิสระในปริภูมิแคบ ๆ จะให้ผลการทดลองต่าง ๆ ทางฟิสิกส์เป็นอย่างเดียวกัน

8.7.6 เมทริกซ์ของมินโกวสกี แสดงไว้ว่า  $(ds)^2 =$  .....

ตอบ :  $(dt)^2 - \frac{1}{c^2} (d\vec{r})^2$

8.7.7 ถ้าโฟตอนมีความถี่  $\nu$  มวลของมันมีค่า.....

ตอบ :  $\frac{h\nu}{c^2}$

8.7.8  $\frac{GM}{c^2}$  คือ.....

ตอบ : ความยาวความโน้มถ่วง

8.7.9 ถ้า  $\nu_0$  เป็นความถี่ของโฟตอนที่จุดกำเนิด  $\Delta\phi$  เป็นความแตกต่างระหว่างโพเทนเชียลของความโน้มถ่วงระหว่างจุดกำเนิดกับจุดสังเกตการณ์  $\nu$  เป็นความถี่ที่จุดสังเกตการณ์แล้ว

$$v = v_0 \dots\dots\dots$$

ตอบ :  $\exp\left(-\frac{\Delta\phi}{c^2}\right)$

8.7.10 ถ้า  $M$  เป็นมวลของดวงอาทิตย์  $R$  เป็นรัศมีของดวงอาทิตย์ โฟตอนซึ่งวิ่งผ่านเฉียดผิวของดวงอาทิตย์จะบ่ายเบนเป็นมุม

$$\theta = \dots\dots\dots$$

ตอบ :  $\frac{4GM}{c^2R}$

## แบบฝึกหัดบทที่ 8

1. การคำนวณความบ่่ายเบนของโฟตอนเนื่องจากดวงอาทิตย์ โดยใช้แรงของนิวตัน สมมุติว่าโฟตอนมีมวล  $M_L$  ผ่านดวงอาทิตย์ มีระยะใกล้ที่สุดที่ผิวดวงอาทิตย์เป็นระยะ  $r_0$  จงหามุมบ่่ายเบนของโฟตอน เนื่องจากแรงของนิวตัน

คำแนะนำ : อ่าน Kittel, C. and Others, **Mechanics, Berkeley Physics Course Volume I**,  
New York: McGraw-Hill, 1965 หน้า 434

ตอบ :  $\theta \approx 0.87''$

2. จงแสดงว่าความถี่ของลูกตุ้มนาฬิกาซึ่งมีความยาว  $L$  มีมวลเฉื่อยและมวลของแรงโน้มถ่วงเป็น  $M_i$  และ  $M_g$  ตามลำดับ มีความถี่

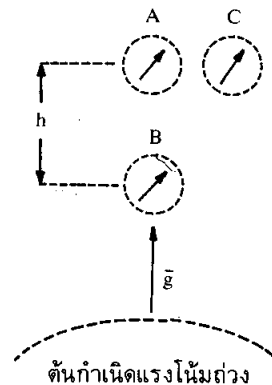
$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{M_g}{M_i} \frac{g}{L} \right)^{1/2}$$

คำแนะนำ :  $M_i L \frac{d^2 \theta}{dt^2} \equiv M_g g \theta$

3. จงคำนวณการเคลื่อนที่ของสเปกตรัมสีแดง เมื่อแสงมีจุดกำเนิดที่จุดศูนย์กลางของทางช้างเผือก สมมุติว่ามวลของกาแลกซีนี้สม่ำเสมอภายในทรงกลมซึ่งมีขนาด 10,000 parsec (1 parsec =  $3.084 \times 10^{16}$  เมตร : ระยะซึ่งทำให้เส้นปิดมุมมีขนาด 1 หน่วยดาราศาสตร์ (A.U. = Astronomical Unit) ปิดมุมขนาด 1 ฟลิปดา) ให้มวลของกาแลกซีนี้มีขนาด  $\approx 8 \times 10^{41}$  กิโลกรัม

ตอบ :  $\frac{\Delta \nu}{\nu} \approx -3 \times 10^{-6}$

- 4.



รูปที่ 47 แสดงผลของความโน้มถ่วงต่อคาบเวลา

นาฬิกา A และนาฬิกา B วางอยู่ในสนามแรงโน้มถ่วงสม่ำเสมอ  $g$  จงหาคาบเวลาของนาฬิกา A ( $T_A$ ) เทียบกับคาบเวลาของนาฬิกา B ( $T_B$ )

คำแนะนำ : ถ้านาฬิกา A และ B เคลื่อนที่ออกจากต้นกำเนิดแรงโน้มถ่วงด้วยความเร่ง  $g$  จากหลักการความสมมูล นาฬิกาทั้งสองจะพ้นจากความโน้มถ่วง ให้ความเร็วของนาฬิกา A เป็น  $v_A$  และความเร็วของนาฬิกา B เป็น  $v_B$  เมื่อมันผ่านนาฬิกาซึ่งอยู่นิ่ง C (สมมุติว่า C อยู่ในกรอบเฉื่อยอันหนึ่ง)

$$\text{ดังนั้น } T_A = T \left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right)^{1/2} \approx T \left(1 + \frac{v_A^2}{2c^2}\right), \quad v_A \ll c$$

$$T_B = T \left(1 - \frac{v_B^2}{c^2}\right)^{1/2} \approx T \left(1 + \frac{v_B^2}{2c^2}\right), \quad v_B \ll c$$

$$v_B^2 = v_A^2 + 2gh \quad \text{เมื่อ } T \text{ เป็นคาบเวลาบน } C \text{ เมื่อ } A \text{ และ } B \text{ ผ่าน } C$$

ตอบ : 
$$T_B \approx T_A \left(1 + \frac{gh}{c^2}\right)$$

5. จากโจทย์ในข้อ 4 ถ้ามวลของต้นกำเนิดแรงโน้มถ่วงเป็น  $M$ ,  $r_A$  และ  $r_B$  เป็นระยะของนาฬิกา A และ B จากจุดศูนย์กลางแรงโน้มถ่วงตามลำดับ จงแสดงว่า

$$T_B \approx T_A \left(1 + \frac{GM}{c^2 r_B} - \frac{GM}{c^2 r_A}\right)$$

6. จงใช้วิธีในข้อ 4 แสดงว่า

$$L_B \approx L_A \left(1 - \frac{GM}{c^2 r_B} + \frac{GM}{c^2 r_A}\right)$$

คำแนะนำ : 
$$L_A = L \left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

$$L_B = L \left(1 - \frac{v_B^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

7. ในปี 1962 ได้มีการตรวจพบเทห์ฟากฟ้าอันหนึ่งคล้ายกับดาว มีรัศมีราว  $\frac{1}{2}$  พิลิปดาจากโลก เดากันว่าคงเป็นดาวดวงหนึ่งในทางช้างเผือก ดาวดวงนี้ส่งคลื่นวิทยุที่มีความเข้มมากมายังผิวโลก พบว่าคลื่นเหล่านี้มีการเคลื่อนของสเปกตรัมสีแดง เช่น ความยาว

คลื่นของสเปกตรัมของออกซิเจนที่  $\lambda = 3.727 \times 10^{-7}$  เมตร จะกลายเป็น  $\lambda = 5.097 \times 10^{-7}$  เมตร ถ้าหากว่าระยะจากโลกถึงดาวดวงนี้น้อยกว่า  $10^{20}$  เมตร  
จงคำนวณหา มวลและความหนาแน่นเฉลี่ยของดาวดวงนี้ ถ้าหากระยะจากโลกถึงดาวดวงนี้เป็น  $10^{20}$  เมตร ลองกะดูว่าคำตอบนี้จะเป็นจริงไหม?

ตอบ : มวล  $\approx 8.7 \times 10^{40}$  กิโลกรัม ความหนาแน่นเฉลี่ย  $\approx 1.6 \times 10^{-9}$  กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร  
ซึ่งไม่น่าเป็นความจริงเพราะมวลของมันประมาณ 0.1 ของทางช้างเผือก คำตอบที่ถูกต้องคืออะไร ขอให้อ่าน Green, J.L., Quasi-stellar radio sources, Sci. American, 209, 54, 1963.

---