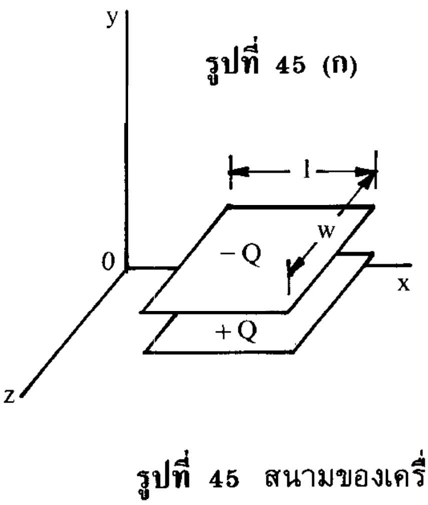
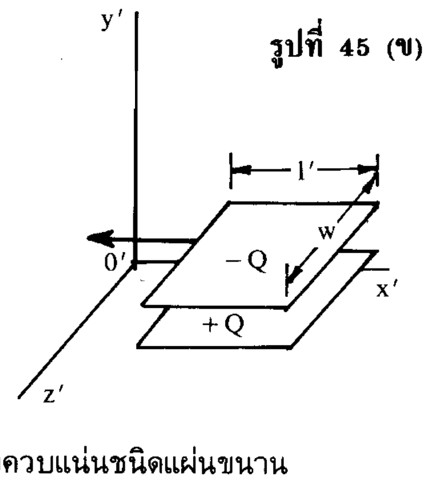
บทที่ 7
ทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้า

วัตถุประสงค์

1. ให้สามารถคำนวณสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในกรอบเฉื่อยซึ่งเคลื่อนที่เทียบกับประจุ
2. ให้สามารถคำนวณทฤษฎีของเกาส์ในกรณีซึ่งประจุเคลื่อนที่ไปได้
3. ให้คำนวณแรงแม่เหล็กไฟฟ้าสำหรับสนามชุดหนึ่งได้
4. ให้สามารถแปลงแรงในทฤษฎีกลศาสตร์แผนเดิมเป็นแรงในทฤษฎีกลศาสตร์เชิงสัมพัทธภาพ

7.1 สนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าซึ่งเคลื่อนที่





รูปที่ 45 สนามของเครื่องควบแน่นชนิดแผ่นขนาน

เครื่องควบแน่นชนิดแผ่นขนานอันหนึ่ง มีระนาบอยู่ในระนาบ (x,z) มีด้านยาว ℓ ขนานกับแกน x มีด้านกว้าง w ขนานกับแกน z (รูปที่ 44) เครื่องควบแน่นชนิดนี้อยู่นิ่งเมื่อเทียบกับระบบพิกัด s ดังนั้น จากกฎของเกาส์

$$E_y = \frac{Q}{\varepsilon_0 \ell w} \tag{7.1}$$

E_y เป็นสนามไฟฟ้าทางแกน y Q เป็นประจุทั้งหมด สมมุติว่า กรอบเฉื่อย s′ เคลื่อนที่ไปทางทิศ +x ของระบบ s ด้วยความเร็ว v ประจุเคลื่อนที่ทำให้มีกระแส ในกรณีนี้ผู้สังเกตใน s′ จะเห็นว่าประจุเคลื่อนที่ไปทางซ้ายมือด้วยความเร็ว v ทำให้มีสนามแม่เหล็กขึ้นระหว่างแผ่นขนานของเครื่องควบแน่นนั้น ดังนั้น สนามจะเป็นสนามไฟฟ้าล้วน ๆ หรือสนามแม่เหล็กบวกกับสนามไฟฟ้าขึ้นอยู่กับกรอบเฉื่อยซึ่งผู้สังเกตการณ์เห็นเหตุการณ์นั้น ๆ

สำหรับสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นระหว่างแผ่นเครื่องควบแน่น สมมุติว่าแต่ละแผ่นมีกระแสไหลผ่าน I ดังนั้น สนามแม่เหล็กจากกระแสของแต่ละแผ่นจะหาได้ตามกฎของแอมแปร์เท่ากับ $\frac{\mu_0 I}{2w}$ ทำให้สนามทั้งหมดเป็น

$$B'_z = -\frac{\mu_0 I}{w} \tag{7.2}$$

เครื่องหมายลบมาจากความจริงที่ว่า สนามไปทางทิศ −z ในรูปที่ 45 (ข) เครื่องควบแน่นจะเคลื่อนไปได้ช่วงความยาวของมันในเวลา $\frac{\ell'}{v} = \frac{\ell}{\gamma v}$ ดังนั้นกระแสซึ่งไหลผ่านแต่ละแผ่นจะเป็น $\frac{Q\gamma v}{\ell}$ แทนค่าลงในสมการที่ (7.2)

$$B'_z = -\frac{\mu_0}{w\ell}\gamma v Q = -\varepsilon_0\mu_0\gamma v E_y \tag{7.3}$$

จะเห็นว่าสนามแม่เหล็กในกรอบเฉื่อยที่เคลื่อนที่คือสนามไฟฟ้าในกรอบเฉื่อยซึ่งเครื่องควบแน่นอยู่นิ่ง นอกจากจะเกิดสนามแม่เหล็กในกรอบเฉื่อย s′ แล้ว สนามไฟฟ้ายังมีค่าเพิ่มขึ้นเนื่องจากความยาวของแผ่นเครื่องควบแน่นสั้นลง แต่ประจุบนแผ่นยังคงเท่าเดิม

$$E_y = \frac{Q}{\varepsilon_0 \ell' w} = \frac{\gamma Q}{\varepsilon_0 \ell w} = \gamma E_y \tag{7.4}$$

สนามแม่เหล็กในทิศที่ตั้งฉากกับทิศของการเคลื่อนที่เพิ่มขึ้น γ เท่า

ถ้าหากกลับแผ่นเครื่องควบแน่นให้ขนานกับระนาบ (y,z) แผ่นทั้งสองของเครื่องควบแน่นจะใกล้กันเนื่องจากการเคลื่อนที่ แต่ขนาดของสนามจะไม่เปลี่ยนแปลงทำให้

$$E_x' = E_x \tag{7.5}$$

ในลำดับต่อมาสมมุติว่าเครื่องควบแน่นซึ่งเดิมอยู่นิ่งเทียบกับ s เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว u ไปทางทิศ +x เทียบกับ s และเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว u′ ไปทางทิศ +x′ เทียบกับ s′ ตามลำดับ ดังนั้นสำหรับผู้สังเกตที่อยู่ใน s′ จากสมการ (7.4)

$$E_y' = \frac{Q}{\varepsilon_0 \ell w \left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}} \tag{7.6}$$

และจากสมการที่ (7.3)

$$B_z' = \frac{\mu_0 u' Q}{w\ell\left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}} \tag{7.7}$$

จากสมการที่ (4.17)

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{vu}{c^2}}$$

$$u'^2 = \frac{u^2 + v^2 - 2uv}{\left(1 - \frac{vu}{c^2}\right)^2}$$

$$1 - \frac{u'^2}{c^2} = 1 - \frac{(u^2 + v^2 - 2uv)c^2}{(c^2 - vu)^2}$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{vu}{c^2}\right)^2}$$ แทนค่าลงในสมการ (7.6)

$$E; = \frac{Q\left(1 - \frac{vu}{c^2}\right)}{\varepsilon_0 \ell w \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

$$= \gamma \left(\frac{Q}{\varepsilon_0 \ell w \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} - \frac{vuQ}{c^2\, \varepsilon_0 \ell w \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} \right)$$

เทียบกับสมการที่ (7.6) และ (7.7)

$$E_y' = \gamma \left(E_y - \frac{v}{c^2\, \varepsilon_0 \mu_0} B_z\right) \tag{7.8}$$

ถ้าให้ $\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} = c^2$ แล้ว

$$E_y' = \gamma (E_y - vB_z) \tag{7.9}$$

เราอาจจะใช้วิธีการเดียวกัน แสดงความสัมพันธ์ต่อไปนี้

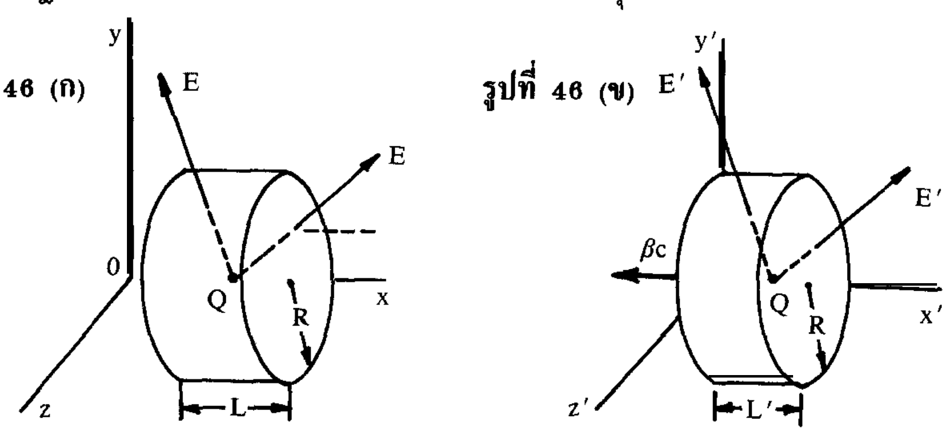
$$\begin{aligned} E_x' &= E_x & B_x' &= B_x \\ E_y' &= \gamma (E_y - vB_z) & B_y' &= \gamma (B_y + vE_z) \\ E_z' &= \gamma (E_z + vB_y) & B_z' &= \gamma (B_z - vE_y) \end{aligned} \tag{7.10}$$

สมการชุดที่ (7.10) แสดงว่าสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าไม่ใช่สี่เวกเตอร์ แต่เป็นเทนซอร์

7.2 ทฤษฎีของเกาส์สำหรับประจุเคลื่อนที่

เนื่องจากประจุ Q เป็นสี่สเกลาร์ ดังนั้น Q จึงเป็นปริมาณที่ไม่เปลี่ยนแปลงในสี่มิติ ซึ่งตามกฎของเกาส์ ฟลักซ์ของสนามไฟฟ้าเนื่องจากประจุจะต้องเป็นปริมาณไม่เปลี่ยนด้วย

รูปที่ 46 (ก) รูปที่ 46 (ข)



รูปที่ 46 ผิวของเกาส์ชนิดทรงกระบอก เคลื่อนที่ขนานกับรูปทรงกระบอกนั้น

ให้ประจุ Q อยู่นิ่งภายในผิวของเกาส์รูปทรงกระบอกซึ่งอยู่นิ่งในกรอบเฉื่อย s ให้ฟลักซ์บนผิวราบทั้งสองข้างเป็น ϕ_f รูปทรงกระบอกขนานกับแกน x ฟลักซ์ทั้งหมดบนผิวโค้งให้เป็น ϕ_c ดังนั้นตามกฎของเกาส์

$$\phi_f + \phi_c = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{7.11}$$

เนื่องจากทางด้านขวามือของสมการ (7.11) เป็นสี่สเกลาร์ ดังนั้น ฟลักซ์ทางซ้ายมือของสมการ (7.11) จึงมีค่าคงที่ (เป็นค่าที่ไม่เปลี่ยนของโลเรนตซ์ชนิดหนึ่ง)

สมมุติว่า s′ เป็นกรอบเฉื่อยอีกกรอบหนึ่ง เคลื่อนที่ไปทางขวาของกรอบเฉื่อย s ขนานกับแกน ox มีความเร็ว v จะเห็นว่า (รูปที่ 46 (ข)) ความยาวของทรงกระบอกซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของผิวของเกาส์หดสั้นลง ให้ ϕ_f' และ ϕ_c' เป็นฟลักซ์ที่ผ่านผิวของเกาส์ทางด้านราบและด้านโค้งตามลำดับ ในกรอบเฉื่อย s′ ดังนั้น

$$\phi_f' + \phi_c' = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \phi_f + \phi_c \tag{7.12}$$

แต่เนื่องจากว่า $E_x = E_x'$ พื้นที่ด้านราบของผิวของเกาส์มีค่าคงที่ดังนั้น $\phi_f' = \phi_f$ ทำให้ $\phi_c' = \phi_c$ ด้วย แต่เนื่องจากความยาวตามแนวแกน x สั้นลงเท่ากับ γ ทำให้ $E_y' = \gamma E_y$ และ $E_z' = \gamma E_z$ ทำให้สมการ (7.12) เป็นจริงอยู่ตลอดเวลา ปัญหาอีกปัญหาหนึ่งซึ่งเราจะต้องทำความเข้าใจ คือ เนื่องจาก s′ เคลื่อนที่ ผู้สังเกตใน s′ จะต้องเห็นสนามแม่เหล็กเนื่องจากการเคลื่อนที่ประจุนั้น ปัญหาที่ตามมาคือ อะไรเกิดขึ้นกับสนามแม่เหล็กนั้น

เพื่อตอบปัญหานี้เราจะขยายปัญหาเพิ่มขึ้น โดยให้ s′ เคลื่อนที่ไปทาง +x ของ s ด้วยความเร็วคงที่ v เหมือนเดิม ให้ s″ เป็นกรอบเฉื่อยอีกกรอบเฉื่อยหนึ่งซึ่งเคลื่อนที่ไปทางทิศ +x′ ด้วยความเร็ว u เทียบกับกรอบเฉื่อย s′ ดังนั้น จากสมการชุด (4.17) ความเร็วของ s″ เทียบกับ s คือ

$$\Omega = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} \tag{7.13}$$

พิจารณาจากรูปที่ 45 จะเห็นว่า

$$E'_y = \frac{E_y}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

$$E''_y = \frac{E_y}{\left(1-\frac{\Omega^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \frac{E_y}{\left(1-\left(\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}\right)^2\frac{1}{c^2}\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{E_y}{\left\{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\frac{1}{\left(1+\frac{uv}{c^2}\right)^2}\right\}^{1/2}}$$

$$= \frac{\left(1+\frac{uv}{c^2}\right)E_y}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

$$= \left\{\frac{E_y}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{\frac{uv}{c^2}E_y}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}\right\}\frac{1}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

จากสมการที่ (7.3) และ (7.4)

$$E''_y = \frac{1}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}\{E'_y - uB'_z\} \qquad (7.14)$$

ซึ่งเทียบได้กับสมการชุด (7.10) จะเห็นว่าฟลักซ์ $\phi''_f + \phi''_c = \phi'_f + \phi'_c = \phi_f + \phi_c$ ดังนั้น เราย่อมมีฟลักซ์ของสนามแม่เหล็ก ถ้าคิด ϕ'' ในเทอมของ ϕ' แต่เนื่องจากกฎของเกาส์สำหรับสนามแม่เหล็กแสดงว่าไม่มีขั้วแม่เหล็กอิสระ ฟลักซ์ของสนามแม่เหล็กจึงเป็นศูนย์ตลอดเวลา

7.3 แรงแม่เหล็กไฟฟ้า

สมมุติว่ากรอบเฉื่อย s′ เคลื่อนไปทางทิศ +x ของกรอบเฉื่อย s ด้วยความเร็ว $\bar{v} = (v,0,0)$ ซึ่งเป็นความเร็วสูง ประจุ q อยู่นิ่งในกรอบเฉื่อย s′ เมื่อเวลา $t' = 0$ มันเคลื่อนผ่านสนามไฟฟ้า $\bar{E}$ และสนามแม่เหล็ก $\bar{B}$ ดังนั้น ในเวลาระหว่าง $t' = 0$ ถึง $t' = \Delta t'$ แรงที่กระทำบน q จึง

เป็นแรงแม่เหล็กไฟฟ้าตามทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้าแผนเดิม ประจุ q จะอยู่นิ่งที่เวลา $t' = 0$ เมื่อเวลา $t' = \Delta t'$ อนุภาคจะถูกเร่งจากเดิมโมเมนตัม $p' = 0$ เป็น $p'_x = \Delta p'_x = qE'_x\Delta t'$, $p'_y = \Delta p'_y = qE'_y\Delta t'$ และ $p'_z = \Delta p'_z = qE'_z\Delta t'$ ดังนั้น เราจึงหวังว่า สมการของแรงจะเป็นแบบเดียวกันกับแรงในทฤษฎีแผนเดิม ให้ $E' = m_0c^2$ โดยถือว่า พลังงานจลน์มีขนาดน้อยมากจนละไว้เสียได้

ใน s เมื่อเวลา $t = 0$ จากสมการที่ (6.23)

$$p_x = \gamma\left(p'_x + \frac{v}{c^2}E'\right) = \gamma\frac{v}{c^2}m_0c^2 = \gamma v m_0$$

ซึ่งเท่ากับโมเมนตัมของมวล m_0 เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v

$$p_y = p'_y = 0 = p_z = p'_z$$

หลังจากการเร่งเมื่อเวลา $t = \Delta t$

$$p_x = \gamma\left(qE'_x\Delta t' + \frac{vE'}{c^2}\right),$$ พลังงานจลน์ที่เพิ่มขึ้นน้อยมากจนอาจจะละเสียได้

$$= \gamma\,(qE'_x\Delta t' + vm_0)$$

$$p_y = qE'_y\Delta t'$$

$$p_z = qE'_z\,At'$$

$$\Delta p_x = \gamma qE'_x\Delta t'$$

$$\Delta p_y = qE'_y\Delta t' \qquad (7.15)$$

$$A\ p\ , = qE'_z\Delta t'$$

$\Delta t'$ เป็นเวลาเฉพาะ ดังนั้น ช่วงเวลาเดียวกันใน s คือ **at =** $\gamma\Delta t'$ จากสมการชุด **(7.10)** และ **(7.15)**

$$\frac{\Delta p_x}{At} = qE'_x = qE_x$$

$$\frac{\Delta p_y}{At} = \frac{1}{\gamma}qE'_y = q(E_y - vB_z)$$

$$\frac{\Delta p_z}{At} = \frac{1}{\gamma}qE'_z = q(E_z + vB_y)$$

ซึ่งอาจจะเขียนในรูปของเวกเตอร์ได้ว่า

$$\bar{F} = \frac{d}{dt}\bar{p} = q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}) \tag{7.16}$$

= แรงในทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้าแผนเดิม

7.4 แรงในทฤษฎีสัมพัทธภาพ

แรงในทฤษฎีแผนเดิม คือ มวล×ความเร่ง ความเร่งแสดงให้เห็นถึงความเปลี่ยนแปลงของการเคลื่อนที่สม่ำเสมอ เนื่องจากว่ามวลเป็นค่าคงที่ในกลศาสตร์แผนเดิม ทำให้

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(mv) = \frac{dp}{dt}$$

ดังนั้น มวลคูณด้วยความเร่ง และอัตราการเปลี่ยนของโมเมนตัม เป็นคำจำกัดความที่มีความหมายเหมือนกันในกลศาสตร์ยุคเก่า

ก่อนที่จะมีความแตกต่างกันระหว่าง เวลาเฉพาะกับเวลาไม่เฉพาะ ในทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ มีวิธีการนิยามแรงอยู่หลายวิธีด้วยกัน ถ้า t เป็นเวลาของผู้สังเกตการณ์ซึ่งอยู่นิ่งอยู่ในกรอบเฉื่อยหนึ่ง และ τ เป็นเวลาเฉพาะซึ่งเกิดจากนาฬิกาที่ติดไปกับอนุภาค เราอาจจะนิยามแรงได้สามวิธี

1. $F_x = m\dfrac{d^2}{dt^2}x$

2. $F_x = m\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d}{d\tau}x\right) = \dfrac{d}{dt}p_x$

3. $F_x = m\dfrac{d^2}{d\tau^2}x = \dfrac{d}{d\tau}p_x$

วิธีที่ 1 ได้ใช้กันมาเมื่อมีการพัฒนาทฤษฎีสัมพัทธภาพขึ้นใหม่ ๆ เนื่องจากเห็นว่ามีความใกล้เคียงกับกลศาสตร์แผนเดิม แต่การนิยามแรงในรูปนี้ทำให้ดัดแปลงให้เข้ากับทฤษฎีสัมพัทธภาพได้ยาก วิธีที่ 3 นั้นเป็นนิยามที่เป็นธรรมชาติมากที่สุดในการนิยามแรง แรงในวิธีที่ 3 มีชื่อเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า แรงของมินโกวสกี (Minkowski force) นับเป็นสี่เวกเตอร์ชนิดหนึ่ง เพราะ $\bar{p}$ และ $\Delta\bar{p}$ เป็นสี่เวกเตอร์ (ส่วนหนึ่งของสี่เวกเตอร์) $\Delta\tau$ เป็นเวลาเฉพาะ เป็น

สี่สเกลาร์ เวกเตอร์หารด้วยสเกลาร์เป็นเวกเตอร์ ด้วยคุณสมบัติอันนี้ทำให้ คำจำกัดความนี้เป็นที่นิยมในทฤษฎีวิชาฟิสิกส์

วิธีที่ 2 เป็นวิธีผสมระหว่างเวลาเฉพาะกับเวลาไม่เฉพาะ ทำให้ดูไม่น่าจะเป็นวิธีนิยามที่ดีสำหรับแรงแต่กลับเป็นวิธีซึ่งได้รับความนิยมมากที่สุด เพราะเป็นวิธีที่เหมาะในการสอนกลศาสตร์ของนิวตันก็อาจจะเขียนได้ในรูปเดียวกันนี้ ทำให้การดัดแปลงจากกลศาสตร์ของนิวตันไปสู่กลศาสตร์ของทฤษฎีสัมพัทธภาพเป็นไปได้ง่ายขึ้น ปัญหาทางฟิสิกส์หลายปัญหาอาจจะดัดแปลงจากกลศาสตร์แผนเดิมเป็นกลศาสตร์ของทฤษฎีสัมพัทธภาพได้ โดยแทน p ด้วย $\dfrac{mv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$ ทำให้สามารถแทนแรงในสมการ (7.16) ให้เป็นแรงในทฤษฎีสัมพัทธภาพได้โดยง่าย อันที่จริงแล้ว แรงในรูปที่เรานิยามขึ้นนี้ใช้มากในทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้าเท่านั้น แรงโน้มถ่วงต้องใช้ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปให้คำนิยาม แรงในวิชานิวเคลียร์ฟิสิกส์ก็ใช้เฉพาะในทฤษฎีควอนตัม ทำให้วิธีที่ 2 เป็นคำนิยามที่ดีที่สุดในเชิงปฏิบัติ

7.5 สรุป

7.5.1 สนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าซึ่งเคลื่อนที่

ถ้ากรอบเฉื่อย s' เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v ในทิศ $+x$ ของกรอบเฉื่อย s แล้ว ความสัมพันธ์ระหว่างสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าในกรอบเฉื่อยทั้งสองจะมีดังนี้

$$\begin{aligned} E_x' &= E_x & B_x' &= B_x \\ E_y' &= \gamma(E_y - vB_z) & B_y' &= \gamma(B_y + vE_z) \\ E_z' &= \gamma(E_z + vB_y) & B_z' &= \gamma(B_z - vE_y) \end{aligned} \tag{7.10}$$

7.5.2 กฎของเกาส์สำหรับประจุเคลื่อนที่

ประจุ Q เป็นปริมาณไม่เปลี่ยนแปลง หรือเป็นสี่สเกลาร์ ฟลักซ์ซึ่งออกจากผิวของเกาส์เดียวกันในกรอบเฉื่อยสองกรอบเฉื่อยมีค่าเดียวกัน

7.5.3 แรงแม่เหล็กไฟฟ้า

$$\overline{F} = \frac{d}{dt}\overline{p} = q(\overline{E} + \overline{v} \times \overline{B}) \tag{7.16}$$

7.5.4 แรงในทฤษฎีสัมพัทธภาพ

แรงที่ใช้ในทฤษฎีสัมพัทธภาพมี 3 แบบคือ

1. $F_x = m \frac{d^2}{dt^2} x$

2. $F_x = m \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{d\tau} x \right) = \frac{d}{dt} p_x$

3. $F_x = m \frac{d^2}{d\tau^2} x = \frac{d}{d\tau} p_x$

แบบที่ 2 เป็นแบบที่นิยมใช้มากที่สุด เนื่องจากดัดแปลงไปมาในระหว่างทฤษฎีสัมพัทธภาพและทฤษฎียุคเก่าได้ง่าย

7.6 คำถามท้ายบท

จงเติมคำในช่องว่างให้ได้ความสมบูรณ์

7.6.1 ถ้าหากกรอบเฉื่อย s' เคลื่อนที่ไปทางทิศ +x ของกรอบเฉื่อย s ด้วยความเร็ว v ให้ E_y เป็นสนามทางแนวแกน y ของเครื่องควบแน่น (รูปที่ 45) เครื่องหนึ่ง ดังนั้น B_z' ในกรอบเฉื่อย s' คือ.....................

ตอบ : $\varepsilon_0\mu_0\gamma v E_z$

7.6.2 ถ้าหากกรอบเฉื่อย s' เคลื่อนที่ไปทางทิศ + x ของกรอบเฉื่อย s ด้วยความเร็ว v แล้ว E_x' = ...

ตอบ : E_x

7.6.3 ถ้าหากกรอบเฉื่อย s' เคลื่อนที่ไปทางทิศ +x ของกรอบเฉื่อย s ด้วยความเร็ว v แล้ว

	B_x' = ...
E_y' = ...	B_y' = ...
E_z' = ...	B_z' = ...

ตอบ :

	$B_x' = B_x$
$E_y' = \gamma\ (E_y - vB_z)$	$B_y' = \gamma\ (B_y + vE_z)$
$E_z' = \gamma\ (E_z + vB_y)$	$B_z' = \gamma\ (B_z - vE_y)$

7.6.4 ฟลักซ์ของสนามไฟฟ้าเป็น.....................

ตอบ : สี่สเกลาร์

7.6.5 เมื่อพิจารณาเครื่องควบแน่นซึ่งเคลื่อนที่ จะปรากฏว่ามีสนามแม่เหล็ก แต่เหตุที่สนามแม่เหล็กไม่เกี่ยวข้องกับความไม่เปลี่ยนแปลงของฟลักซ์สนามไฟฟ้าเพราะ.....................

....

ตอบ : ฟลักซ์ของสนามแม่เหล็กที่ผ่านผิวของเกาส์เป็นศูนย์

7.6.6 สนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าไม่เป็นสี่เวกเตอร์ แต่เป็น.....................

ตอบ : เทนซอร์

7.6.7 แรงแม่เหล็กไฟฟ้า $\overline{F} = \frac{d}{dt}\overline{p}$ = ...

ตอบ : $q(\overline{E} + \overline{v} \times \overline{B})$

7.6.8 แรงที่นิยมใช้กันในทฤษฎีสัมพัทธภาพเชิงปฏิบัติคือ

ตอบ : $m\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}x\right) = \frac{d}{dt}p_x$

แบบฝึกหัดบทที่ 7

1. ประจุ Q อยู่นิ่ง ๆ ที่จุดกำเนิดของกรอบเฉื่อย s ให้กรอบเฉื่อย s′ เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\bar{v} = (v,0,0)$ เมื่อเวลา $t' = 0,\ x' = y' = z' = 0$ เมื่อ x', y', z' เป็นพิกัดของประจุ Q ใน s′ จงหาสนามในกรอบเฉื่อย s′ นี้ที่ $x' = X, y' = Y$ และ $z' = Z$ เมื่อเวลา t′

คำแนะนำ : หา $\bar{E} = \bar{E}(x,y,z)$ แล้วแปลงเป็น $E(X,Y,Z)$ แล้วจึงหา $\bar{E}$ จากสมการ (7.10) หา B_x', B_y', B_z' จากสมการ (7.10) ด้วย

ตอบ : $\bar{E}' \ = \ \dfrac{\gamma Q}{4\pi\varepsilon_0(\gamma^2X^2+Y^2+Z^2)}\ (\hat{i}X+\hat{j}Y+\hat{k}Z)$

2. การแปลงของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า

สมการชุด (7.10) นอกจากจะได้โดยการพิจารณาเครื่องควบแน่นแผ่นขนานแล้ว ยังอาจจะหาได้จากการพิจารณาสี่เวกเตอร์ของโพเทนเชียล

ให้ $\bar{\bar{A}} = (A_1, A_2, A_3, A_4 = i\frac{\phi}{c})$ เป็นสี่เวกเตอร์ของโพเทนเชียล จงหาสมการชุด (7.10) ด้วยการแปลง $\bar{A}$ ด้วยการแปลงแบบของโลเรนตซ์

คำแนะนำ : ให้ $\cos\Psi = \gamma\ ,\ \sin\Psi = \frac{iv}{c}\gamma$

$$A_1' = \cos\Psi A_1 + \sin\Psi A_4$$

$$A_2' = A_2$$

$$A_3' = A_3$$

$$A_4' = -\sin\Psi A_1 + \cos\Psi A_4$$

จากสมการของแมกซ์เวลล์

$$E_x = -\frac{\partial}{\partial x}\phi - \frac{\partial}{\partial t}A_x = ic\left(\frac{\partial}{\partial x_1}A_4 - \frac{\partial}{\partial x_4}A_1\right)$$

$$E_y = \left(\frac{\partial}{\partial x_2}A_4 - \frac{\partial}{\partial x_4}A_2\right)$$

$$E_z = ic\left(\frac{\partial}{\partial x_3}A_4 - \frac{\partial}{\partial x_4}A_3\right)$$

$$B_x = \frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y = \frac{\partial}{\partial x_2}A_3 - \frac{\partial}{\partial x_3}A_2$$

$$B_y = \frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial}{\partial x}A_z = \frac{\partial}{\partial x_3}A_1 - \frac{\partial}{\partial x_1}A_3$$

$$B_z = \frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x = \frac{\partial}{\partial x_1}A_z - \frac{\partial}{\partial x_2}A_1$$

จะเห็นว่าเราอาจจะคำนวณสมาชิกตัวใดตัวหนึ่งของสนามได้ทันที เช่น

$$\frac{\partial}{\partial x_2'}A_4' - \frac{\partial}{\partial x_4'}A_2' = -\frac{i}{c}E_y'$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2'}A_4' = \frac{\partial}{\partial x_2}A_4' = -\sin\Psi\frac{\partial}{\partial x_2}A_1 + \cos\Psi\frac{\partial}{\partial x_2}A_4$$

$$\frac{\partial}{\partial x_4'}A_2' = \frac{\partial}{\partial x_1}A_2\frac{\partial}{\partial x_4'}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_4}A_2\frac{\partial}{\partial x_4'}x_4$$

เนื่องจาก $x_1 = \cos\Psi x_1' \quad \sin\Psi x_4'$

$$x_4 = \sin\Psi x_1' + \cos\Psi x_4'$$

$$\frac{\partial}{ad'}A_2' = -\sin\Psi\frac{\partial}{\partial x_1}A_2 + \cos\Psi\frac{\partial}{\partial x_4}A_2$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2'}A_4' - \frac{\partial}{\partial x_4''}A_2' = \cos\gamma\left(\frac{\partial}{\partial x_2}A_4 - \frac{\partial}{\partial x_4}A_2\right) + \sin\Psi\left(\frac{\partial}{\partial x_1}A_2 - \frac{\partial}{\partial x_2}A_1\right)$$

$$\frac{i}{c}E_y' = \cos\Psi\left(-\frac{iE_y}{c}\right) + \sin\Psi\, B_z$$

$$-\frac{i}{c}E_y' = -\frac{i}{c}\gamma E_y + \frac{iv}{c}\gamma B_z$$

หรือ $E_y' = \gamma(E_y - vB_z)$

จงหาสมการอื่น ๆ โดยวิธีที่คล้ายคลึงกัน

3. จงเขียนแรงแม่เหล็กไฟฟ้าจากสมการชุด (7.10)

คำแนะนำ : ถ้าให้ความเร็ว $\bar{v}$ เป็นความเร็วในทิศใด ๆ เราอาจจะแบ่งสนามออกเป็นสอง ประเภทคือ ประเภทที่ขนานกับ $\bar{v}$ และประเภทที่ตั้งฉากกับ $\bar{v}$

$$\bar{E}_{11}' = \bar{E}_{11} \qquad \bar{E}_{\perp}' = \gamma(\bar{E} + \bar{v}\times\bar{B})_{\perp}$$

แต่เนื่องจาก $(\bar{v}\times\bar{B})_{11} = 0$ ทำให้

$\bar{E}_{11}' = \bar{E}_{11} + (\bar{v}\times\bar{B})_{11}$ และแรงเกิดจากประจุคูณด้วยสนามในแนวขนานนี้

คำแนะนำ : (7.16) $\frac{d}{dt}\overline{p} = q(E + v \times B)$

$$\therefore \quad \dot{\overline{p}} = \frac{d}{d\tau}\overline{p} = \gamma q(\overline{E} + \overline{v} \times \overline{B}) \sim \overline{F}_M$$

$$\overline{F}_M . \overline{v} = \gamma q \overline{v} . \overline{E}$$

ดังนั้น สี่เวกเตอร์ควรจะเป็น $\left(\dot{\overline{p}}, \frac{i\gamma q \overline{v}.\overline{E}}{c} \right)$

$\overline{v}.\overline{E}$ คือ กำลังต่อ 1 หน่วยประจุ

5. จากสมการชุด (7.10) จงหา $\overline{E}$ ในเทอมของ $\overline{E}'$

ตอบ :

$$E_x = E_x' \qquad B_x = B_x'$$

$$E_y = \gamma(E_y + vB_z) \qquad B_y = \gamma(B_y - vE_z)$$

$$E_z = \gamma(E_z - vB_y) \qquad B_z = \gamma(B_z + vE_y)$$

6. จงแสดงว่า $E^2 - c^2B^2$ เป็นค่าที่ไม่เปลี่ยนแปลง

คำแนะนำ : จงแสดงว่า $E^2 - c^2B^2 = E^{2\prime} - c^2B^{2\prime}$

7. พิจารณารูปที่ 45 เครื่องควบแน่นในลักษณะเดียวกัน เคลื่อนไปทางขวาด้วยความเร็ว u ในขณะเดียวกันก็มี เครื่องควบแน่นอีกเครื่องหนึ่ง รูปร่างเหมือนกันแต่มีประจุตรงกันข้ามเคลื่อนที่มาทางซ้ายด้วยความเร็ว u เท่ากัน ในแนวเดียวกัน ทำให้แผ่นของเครื่องควบแน่นซ้อนกันสนิทพอดี ทำให้ไม่มีประจุ แต่มีกระแส และมีสนามแม่เหล็ก

(ก) จงหาสนามแม่เหล็กในระหว่างแผ่นทั้งสอง

(ข) ในอีกกรอบเฉื่อยหนึ่งซึ่งกรอบเฉื่อยเดิมเคลื่อนด้วยความเร็ว v ไปทางขวา จงหาสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้า

คำแนะนำ : อ่านตอนที่ 7.1 และ 7.2

8. สมมุติว่าตอนหนึ่งของปริภูมิมีสนามไฟฟ้าอยู่ในแนวแกน y, $E_y = E$ และมีสนามแม่เหล็กอยู่ในแนวแกน z, $B_z = B$ เครื่องมือชนิดนี้ปกติประกอบด้วย เครื่องควบแน่นยาวใส่เข้าไปประหว่างขั้วแม่เหล็ก ถ้าหากอนุภาคมีประจุ q เคลื่อนที่ระหว่างแผ่นของเครื่อง