

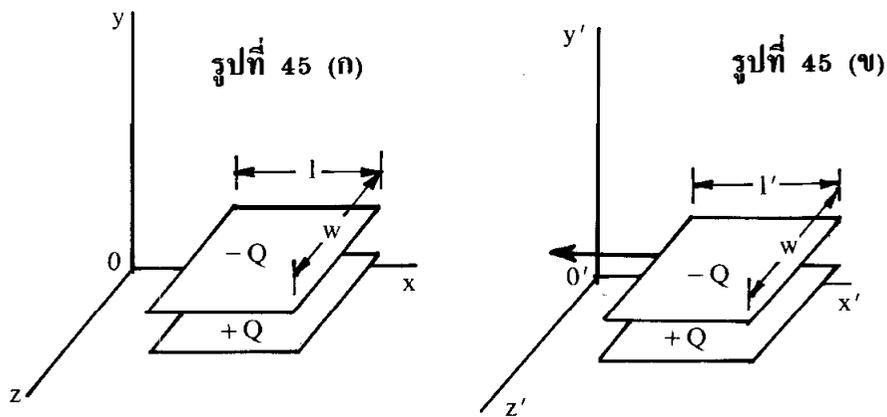
# บทที่ 7

## ทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้า

### วัตถุประสงค์

1. ให้สามารถคำนวณสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในกรอบเฉื่อยซึ่งเคลื่อนที่เทียบกับประจุ
2. ให้สามารถคำนวณทฤษฎีของเกาส์ในกรณีซึ่งประจุเคลื่อนที่ไปได้
3. ให้คำนวณแรงแม่เหล็กไฟฟ้าสำหรับสนามชุดหนึ่งได้
4. ให้สามารถแปลงแรงในทฤษฎีกลศาสตร์แบบเดิมเป็นแรงในทฤษฎีกลศาสตร์เชิงสัมพัทธภาพ

### 7.1 สนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าซึ่งเคลื่อนที่



รูปที่ 45 สนามของเครื่องควบแน่นชนิดแผ่นขนาน

เครื่องควบแน่นชนิดแผ่นขนานอันหนึ่ง มีระนาบอยู่ในระนาบ  $(x, z)$  มีด้านยาว  $l$  ขนานกับแกน  $x$  มีด้านกว้าง  $w$  ขนานกับแกน  $z$  (รูปที่ 44) เครื่องควบแน่นชนิดนี้อยู่หนึ่งเมื่อเทียบกับระบบพิกัด  $s$  ดังนั้น จากกฎของเกาส์

$$E_y = \frac{Q}{\epsilon_0 l w} \quad (7.1)$$

$E_y$  เป็นสนามไฟฟ้าทางแกน  $y$   $Q$  เป็นประจุทั้งหมด สมมุติว่า กรอบเฉื่อย  $s'$  เคลื่อนที่ไปทางทิศ  $+x$  ของระบบ  $s$  ด้วยความเร็ว  $v$  ประจุเคลื่อนที่ทำให้มีกระแส ในกรณีนี้ผู้สังเกตใน  $s'$  จะเห็นว่าประจุเคลื่อนที่ไปทางซ้ายมือด้วยความเร็ว  $v$  ทำให้มีสนามแม่เหล็กขึ้นระหว่างแผ่นขนานของเครื่องควบแน่นนั้น ดังนั้น สนามจะเป็นสนามไฟฟ้าล้วน ๆ หรือสนามแม่เหล็กบวกกับสนามไฟฟ้าขึ้นอยู่กับกรอบเฉื่อยซึ่งผู้สังเกตการณ์เห็นเหตุการณ์นั้น ๆ

สำหรับสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นระหว่างแผ่นเครื่องควบแน่น สมมุติว่าแต่ละแผ่นมีกระแสไหลผ่าน  $I$  ดังนั้น สนามแม่เหล็กจากกระแสของแต่ละแผ่นจะหาได้ตามกฎของแอมแปร์เท่ากับ  $\frac{\mu_0 I}{2w}$  ทำให้สนามทั้งหมดเป็น

$$B'_z = -\frac{\mu_0 I}{w} \quad (7.2)$$

เครื่องหมายลบมาจากความจริงที่ว่า สนามไปทางทิศ  $-z$  ในรูปที่ 45 (ข) เครื่องควบแน่นจะเคลื่อนที่ได้ช่วงความยาวของมันในเวลา  $\frac{l'}{v} = \frac{l}{\gamma v}$  ดังนั้นกระแสซึ่งไหลผ่านแต่ละแผ่นจะเป็น  $\frac{Q\gamma v}{l}$  แทนค่าลงในสมการที่ (7.2)

$$B'_z = -\frac{\mu_0}{w l} \gamma v Q = -\epsilon_0 \mu_0 \gamma v E_y \quad (7.3)$$

จะเห็นว่าสนามแม่เหล็กในกรอบเฉื่อยที่เคลื่อนที่คือสนามไฟฟ้าในกรอบเฉื่อยซึ่งเครื่องควบแน่นอยู่นิ่ง นอกจากจะเกิดสนามแม่เหล็กในกรอบเฉื่อย  $s'$  แล้ว สนามไฟฟ้ายังมีค่าเพิ่มขึ้นเนื่องจากความยาวของแผ่นเครื่องควบแน่นสั้นลง แต่ประจุบนแผ่นยังคงเท่าเดิม

$$E_y = \frac{Q}{\epsilon_0 l' w} = \frac{\gamma Q}{\epsilon_0 l w} = \gamma E_y \quad (7.4)$$

สนามแม่เหล็กในทิศที่ตั้งฉากกับทิศของการเคลื่อนที่เพิ่มขึ้น  $\gamma$  เท่า

ถ้าหากกลับแผ่นเครื่องควมแน่นให้ขนานกับระนาบ (y,z) แผ่นทั้งสองของเครื่องควมแน่นจะใกล้กันเนื่องจากการเคลื่อนที่ แต่ขนาดของสนามจะไม่เปลี่ยนแปลงทำให้

$$E'_x = E_x \quad (7.5)$$

ในลำดับต่อมาสมมุติว่าเครื่องควมแน่นซึ่งเดิมอยู่นิ่งเทียบกับ s เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว u ไปทางทิศ +x เทียบกับ s และเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว u' ไปทางทิศ +x' เทียบกับ s' ตามลำดับ ดังนั้นสำหรับผู้สังเกตที่อยู่ใน s' จากสมการ (7.4)

$$E'_y = \frac{Q}{\epsilon_0 l w \left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}} \quad (7.6)$$

และจากสมการที่ (7.3)

$$B'_z = \frac{\mu_0 u' Q}{w l \left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}} \quad (7.7)$$

จากสมการที่ (4.17)

$$\begin{aligned} u' &= \frac{u-v}{1 - \frac{vu}{c^2}} \\ u'^2 &= \frac{u^2 + v^2 - 2uv}{\left(1 - \frac{vu}{c^2}\right)^2} \\ 1 - \frac{u'^2}{c^2} &= 1 - \frac{(u^2 + v^2 - 2uv)c^2}{(c^2 - vu)^2} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{vu}{c^2}\right)^2} \quad \text{แทนค่าลงในสมการ (7.6)} \\ E'_y &= \frac{Q \left(1 - \frac{vu}{c^2}\right)}{\epsilon_0 l w \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} \end{aligned}$$

$$= \gamma \left( \frac{Q}{\epsilon_0 \ell w \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} - \frac{v w Q}{c^2 \epsilon_0 \ell w \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \right)$$

เทียบกับสมการที่ (7.6) และ (7.7)

$$E'_y = \gamma \left( E_y - \frac{v}{c^2} \epsilon_0 \mu_0 B_z \right) \quad (7.8)$$

ถ้าให้  $\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2$  แล้ว

$$E'_y = \gamma (E_y - v B_z) \quad (7.9)$$

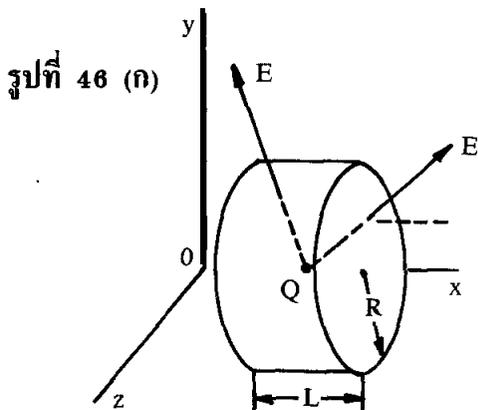
เราอาจจะใช้วิธีการเดียวกัน แสดงความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & B'_x &= B_x \\ E'_y &= \gamma (E_y - v B_z) & B'_y &= \gamma (B_y + v E_z) \\ E'_z &= \gamma (E_z + v B_y) & B'_z &= \gamma (B_z - v E_y) \end{aligned} \quad (7.10)$$

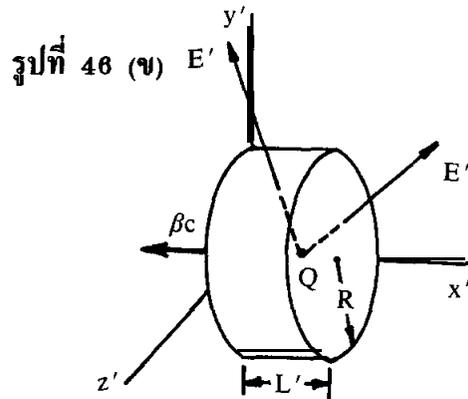
สมการชุดที่ (7.10) แสดงว่าสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าไม่ใช่สี่เวกเตอร์ แต่เป็นเทนเซอร์

## 7.2 ทฤษฎีของเกาส์สำหรับประจุเคลื่อนที่

เนื่องจากประจุ  $Q$  เป็นสี่สเกลาร์ ดังนั้น  $Q$  จึงเป็นปริมาณที่ไม่เปลี่ยนแปลงในสัมพัทธภาพ ซึ่งตามกฎของเกาส์ ฟลักซ์ของสนามไฟฟ้าเนื่องจากประจุจะต้องเป็นปริมาณไม่เปลี่ยนแปลงด้วย



รูปที่ 46 (ก)



รูปที่ 46 (ข)

รูปที่ 46 ผิวของเกาส์ชนิดทรงกระบอก เคลื่อนที่ขนานกับรูปทรงกระบอกนั้น

ให้ประจุ  $Q$  อยู่นิ่งภายในผิวของเกาส์รูปทรงกระบอกซึ่งอยู่นิ่งในกรอบเฉื่อย  $s$  ให้ฟลักซ์บนผิวราบทั้งสองข้างเป็น  $\phi_f$  รูปทรงกระบอกขนานกับแกน  $x$  ฟลักซ์ทั้งหมดบนผิวโค้งให้เป็น  $\phi_c$  ดังนั้นตามกฎของเกาส์

$$\phi_f + \phi_c = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (7.11)$$

เนื่องจากทางด้านขวามือของสมการ (7.11) เป็นสี่สเกลาร์ ดังนั้น ฟลักซ์ทางซ้ายมือของสมการ (7.11) จึงมีค่าคงที่ (เป็นค่าที่ไม่เปลี่ยนแปลงของลอเรนตซ์ชนิดหนึ่ง)

สมมติว่า  $s'$  เป็นกรอบเฉื่อยอีกกรอบหนึ่ง เคลื่อนที่ไปทางขวาของกรอบเฉื่อย  $s$  ขนานกับแกน  $ox$  มีความเร็ว  $v$  จะเห็นว่า (รูปที่ 46 (ข)) ความยาวของทรงกระบอกซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของผิวของเกาส์หดสั้นลง ให้  $\phi'_f$  และ  $\phi'_c$  เป็นฟลักซ์ที่ผ่านผิวของเกาส์ทางด้านราบและด้านโค้งตามลำดับ ในกรอบเฉื่อย  $s'$  ดังนั้น

$$\phi'_f + \phi'_c = \frac{Q}{\epsilon_0} = \phi_f + \phi_c \quad (7.12)$$

แต่เนื่องจากว่า  $E_x = E'_x$  พื้นที่ด้านราบของผิวของเกาส์มีค่าคงที่ดังนั้น  $\phi'_f = \phi_f$  ทำให้  $\phi'_c = \phi_c$  ด้วย แต่เนื่องจากความยาวตามแนวแกน  $x$  สั้นลงเท่ากับ  $\gamma$  ทำให้  $E'_y = \gamma E_y$  และ  $E'_z = \gamma E_z$  ทำให้สมการ (7.12) เป็นจริงอยู่ตลอดเวลา ปัญหาอีกปัญหาหนึ่งซึ่งเราจะต้องทำความเข้าใจคือ เนื่องจาก  $s'$  เคลื่อนที่ ผู้สังเกตใน  $s'$  จะต้องเห็นสนามแม่เหล็กเนื่องจากการเคลื่อนที่ประจุนั้น ปัญหาที่ตามมาคือ อะไรเกิดขึ้นกับสนามแม่เหล็กนั้น

เพื่อตอบปัญหานี้เราจะขยายปัญหาเพิ่มขึ้น โดยให้  $s'$  เคลื่อนที่ไปทาง  $+x$  ของ  $s$  ด้วยความเร็วคงที่  $v$  เหมือนเดิม ให้  $s''$  เป็นกรอบเฉื่อยอีกกรอบหนึ่งซึ่งเคลื่อนที่ไปทางทิศ  $+x'$  ด้วยความเร็ว  $u$  เทียบกับกรอบเฉื่อย  $s'$  ดังนั้น จากสมการซุด (4.17) ความเร็วของ  $s''$  เทียบกับ  $s$  คือ

$$\Omega = \frac{u+v}{1 + \frac{uv}{c^2}} \quad (7.13)$$

พิจารณาจากรูปที่ 45 จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}
E'_y &= \frac{E_y}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \\
E''_y &= \frac{E_y}{\left(1 - \frac{\Omega^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \frac{E_y}{\left(1 - \left(\frac{u+v}{1 + \frac{uv}{c^2}}\right)^2 \frac{1}{c^2}\right)^{1/2}} \\
&= \frac{E_y}{\left\{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \frac{1}{\left(1 + \frac{uv}{c^2}\right)^2}\right\}^{1/2}} \\
&= \frac{\left(1 + \frac{uv}{c^2}\right) E_y}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} \\
&= \left\{ \frac{E_y}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{\frac{uv}{c^2} E_y}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \right\} \frac{1}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}
\end{aligned}$$

จากสมการที่ (7.3) และ (7.4)

$$E''_y = \frac{1}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} \{E'_y - uB'_z\} \quad (7.14)$$

ซึ่งเทียบได้กับสมการชุด (7.10) จะเห็นว่าพจน์  $\phi''_r + \phi''_c = \phi'_r + \phi'_c = \phi_r + \phi_c$  ดังนั้น เราย่อมมีพจน์ของสนามแม่เหล็ก ถ้าคิด  $\phi''$  ในเทอมของ  $\phi'$  แต่เนื่องจากกฎของเกาส์สำหรับสนามแม่เหล็กแสดงว่าไม่มีขั้วแม่เหล็กอิสระ พจน์ของสนามแม่เหล็กจึงเป็นศูนย์ตลอดเวลา

### 7.3 แรงแม่เหล็กไฟฟ้า

สมมุติว่ากรอบเฉื่อย  $s'$  เคลื่อนไปทางทิศ  $+x$  ของกรอบเฉื่อย  $s$  ด้วยความเร็ว  $\vec{v} = (v, 0, 0)$  ซึ่งเป็นความเร็วสูง ประจุ  $q$  อยู่นิ่งในกรอบเฉื่อย  $s'$  เมื่อเวลา  $t' = 0$  มันเคลื่อนผ่านสนามไฟฟ้า  $\vec{E}$  และสนามแม่เหล็ก  $\vec{B}$  ดังนั้น ในเวลาระหว่าง  $t' = 0$  ถึง  $t' = \Delta t'$  แรงที่กระทำบน  $q$  จึง

เป็นแรงแม่เหล็กไฟฟ้าตามทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้าแผนเดิม ประจุ  $q$  จะอยู่ที่เวลา  $t' = 0$  เมื่อเวลา  $t' = \Delta t'$  อนุภาคจะถูกเร่งจากเดิมโมเมนตัม  $p' = 0$  เป็น  $p'_x = \Delta p'_x = qE'_x \Delta t'$ ,  $p'_y = \Delta p'_y = qE'_y \Delta t'$  และ  $p'_z = \Delta p'_z = qE'_z \Delta t'$  ดังนั้น เราจึงหวังว่า สมการของแรงจะเป็นแบบเดียวกันกับแรงในทฤษฎีแผนเดิม ให้  $E' = m_0 c^2$  โดยถือว่า พลังงานจลน์มีขนาดน้อยมากจนละไว้เสียได้

ใน  $s$  เมื่อเวลา  $t = 0$  จากสมการที่ (6.23)

$$p_x = \gamma \left( p'_x + \frac{v}{c^2} E' \right) = \gamma \frac{v}{c^2} m_0 c^2 = \gamma v m_0$$

ซึ่งเท่ากับโมเมนตัมของมวล  $m_0$  เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว  $v$

$$p_y = p'_y = 0 = p_z = p'_z$$

หลังจากการเร่งเมื่อเวลา  $t = \Delta t$

$$p_x = \gamma \left( qE'_x \Delta t' + \frac{vE'}{c^2} \right), \text{ พลังงานจลน์ที่เพิ่มขึ้นน้อยมากจนอาจจะละเสียได้}$$

$$= \gamma (qE'_x \Delta t' + v m_0)$$

$$p_y = qE'_y \Delta t'$$

$$p_z = qE'_z \Delta t'$$

$$\Delta p_x = \gamma qE'_x \Delta t'$$

$$\Delta p_y = qE'_y \Delta t' \tag{7.15}$$

$$\Delta p_z = qE'_z \Delta t'$$

$\Delta t'$  เป็นเวลาเฉพาะ ดังนั้น ช่วงเวลาเดียวกันใน  $s$  คือ  $\Delta t = \gamma \Delta t'$  จากสมการชุด (7.10) และ (7.15)

$$\frac{\Delta p_x}{\Delta t} = qE'_x = qE_x$$

$$\frac{\Delta p_y}{\Delta t} = \frac{1}{\gamma} qE'_y = q(E_y - vB_z)$$

$$\frac{\Delta p_z}{\Delta t} = \frac{1}{\gamma} qE'_z = q(E_z + vB_y)$$

ซึ่งอาจจะเขียนในรูปของเวกเตอร์ได้ว่า

$$\begin{aligned}\bar{F} &= \frac{d}{dt} \bar{p} = q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}) \\ &= \text{แรงในทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้าแผนเดิม}\end{aligned}\tag{7.16}$$

## 7.4 แรงในทฤษฎีสัมพัทธภาพ

แรงในทฤษฎีแผนเดิม คือ มวล×ความเร่ง ความเร่งแสดงให้เห็นถึงความเปลี่ยนแปลงของการเคลื่อนที่สม่ำเสมอ เนื่องจากว่ามวลเป็นค่าคงที่ในกลศาสตร์แผนเดิม ทำให้

$$F = ma = m \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(mv) = \frac{dp}{dt}$$

ดังนั้น มวลคูณด้วยความเร่ง และอัตราการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัม เป็นคำจำกัดความที่มีความหมายเหมือนกันในกลศาสตร์ยุคเก่า

ก่อนที่จะมีความแตกต่างกันระหว่าง เวลาเฉพาะกับเวลาไม่เฉพาะ ในทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ มีวิธีการนิยามแรงอยู่หลายวิธีด้วยกัน ถ้า  $t$  เป็นเวลาของผู้สังเกตการณ์ซึ่งอยู่นิ่งอยู่ในกรอบเฉื่อยหนึ่ง และ  $\tau$  เป็นเวลาเฉพาะซึ่งเกิดจากนาฬิกาที่ติดไปกับอนุภาค เราอาจจะนิยามแรงได้สามวิธี

1.  $F_x = m \frac{d^2}{dt^2} x$
2.  $F_x = m \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{d\tau} x \right) = \frac{d}{dt} p_x$
3.  $F_x = m \frac{d^2}{d\tau^2} x = \frac{d}{d\tau} p_x$

วิธีที่ 1 ได้ใช้กันมาเมื่อมีการพัฒนาทฤษฎีสัมพัทธภาพขึ้นใหม่ ๆ เนื่องจากเห็นว่ามีความใกล้เคียงกับกลศาสตร์แผนเดิม แต่การนิยามแรงในรูปนี้ทำให้ดัดแปลงให้เข้ากับทฤษฎีสัมพัทธภาพได้ยาก วิธีที่ 3 นั้นเป็นนิยามที่เป็นธรรมชาติมากที่สุดในการนิยามแรง แรงในวิธีที่ 3 มีชื่อเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า แรงของมินโกวสกี (Minkowski force) นับเป็นสี่เวกเตอร์ชนิดหนึ่ง เพราะ  $\bar{p}$  และ  $\Delta \bar{p}$  เป็นสี่เวกเตอร์ (ส่วนหนึ่งของสี่เวกเตอร์)  $\Delta \tau$  เป็นเวลาเฉพาะ เป็น

สี่สเกลาร์ เวกเตอร์หารด้วยสเกลาร์เป็นเวกเตอร์ ด้วยคุณสมบัติอันนี้ทำให้ คำจำกัดความนี้เป็นที่นิยมในทฤษฎีวิชาฟิสิกส์

วิธีที่ 2 เป็นวิธีผสมระหว่างเวลาเฉพาะกับเวลาไม่เฉพาะ ทำให้ดูไม่น่าจะเป็นวิธีนิยามที่ดีสำหรับแรงแต่กลับเป็นวิธีซึ่งได้รับความนิยมมากที่สุด เพราะเป็นวิธีที่เหมาะสมในการสอนกลศาสตร์ของนิวตันก็อาจจะเขียนได้ในรูปเดียวกันนี้ ทำให้การดัดแปลงจากกลศาสตร์ของนิวตันไปสู่กลศาสตร์ของทฤษฎีสัมพัทธภาพเป็นไปได้ง่ายขึ้น ปัญหาทางฟิสิกส์หลายปัญหาอาจจะดัดแปลงจากกลศาสตร์แผนเดิมเป็นกลศาสตร์ของทฤษฎีสัมพัทธภาพได้ โดยแทน  $p$  ด้วย  $\frac{mv}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2}}$  ทำให้สามารถแทนแรงในสมการ (7.16) ให้เป็นแรงในทฤษฎีสัมพัทธภาพ

ได้โดยง่าย อันที่จริงแล้ว แรงในรูปที่เรานิยามขึ้นนี้ใช้มากในทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้าเท่านั้น แรงโน้มถ่วงต้องใช้ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปให้คำนิยาม แรงในวิชานิวเคลียร์ฟิสิกส์ก็ใช้เฉพาะในทฤษฎีควอนตัม ทำให้วิธีที่ 2 เป็นคำนิยามที่ดีที่สุดในการปฏิบัติ

## 7.5 สรุป

### 7.5.1 สนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าซึ่งเคลื่อนที่

ถ้ากรอบเฉื่อย  $s'$  เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว  $v$  ในทิศ  $+x$  ของกรอบเฉื่อย  $s$  แล้ว ความสัมพันธ์ระหว่างสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าในกรอบเฉื่อยทั้งสองจะมีดังนี้

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & B'_x &= B_x \\ E'_y &= \gamma (E_y - vB_z) & B'_y &= \gamma (B_y + vE_z) \\ E'_z &= \gamma (E_z + vB_y) & B'_z &= \gamma (B_z - vE_y) \end{aligned} \quad (7.10)$$

### 7.5.2 กฎของเกาส์สำหรับประจุเคลื่อนที่

ประจุ  $Q$  เป็นปริมาณไม่เปลี่ยนแปลง หรือเป็นสี่สเกลาร์ ฟลักซ์ซึ่งออกจากผิวของเกาส์เดียวกันในกรอบเฉื่อยสองกรอบเฉื่อยมีค่าเดียวกัน

### 7.5.3 แรงแม่เหล็กไฟฟ้า

$$\bar{F} = \frac{d}{dt} \bar{p} = q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}) \quad (7.16)$$

#### 7.5.4 แรงในทฤษฎีสัมพัทธภาพ

แรงที่ใช้ในทฤษฎีสัมพัทธภาพมี 3 แบบคือ

$$1. F_x = m \frac{d^2}{dt^2} x$$

$$2. F_x = m \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} x \right) = \frac{d}{dt} p_x$$

$$3. F_x = m \frac{d^2}{dt^2} x = \frac{d}{dt} p_x$$

แบบที่ 2 เป็นแบบที่นิยมใช้มากที่สุด เนื่องจากตัดแปลงไปมาในระหว่างทฤษฎีสัมพัทธภาพ และทฤษฎียุคเก่าได้ง่าย

## 7.6 คำถามท้ายบท

จงเติมคำในช่องว่างให้ได้ความสมบูรณ์

7.6.1 ถ้าหากกรอบเฉื่อย  $s'$  เคลื่อนที่ไปทางทิศ  $+x$  ของกรอบเฉื่อย  $s$  ด้วยความเร็ว  $v$  ให้  $E_y$  เป็นสนามทางแนวแกน  $y$  ของเครื่องควบแน่น (รูปที่ 45) เครื่องหนึ่ง ดังนั้น  $B'_z$  ในกรอบเฉื่อย  $s'$  คือ.....

ตอบ :  $\epsilon_0\mu_0\gamma vE_z$

7.6.2 ถ้าหากกรอบเฉื่อย  $s'$  เคลื่อนที่ไปทางทิศ  $+x$  ของกรอบเฉื่อย  $s$  ด้วยความเร็ว  $v$  แล้ว  $E'_x =$  .....

ตอบ :  $E_x$

7.6.3 ถ้าหากกรอบเฉื่อย  $s'$  เคลื่อนที่ไปทางทิศ  $+x$  ของกรอบเฉื่อย  $s$  ด้วยความเร็ว  $v$  แล้ว

$$B'_x = \dots\dots\dots$$

$$E'_y = \dots\dots\dots \quad B_y = \dots\dots\dots$$

$$E'_z = \dots\dots\dots \quad B'_z = \dots\dots\dots$$

ตอบ :

$$B'_x = B_x$$

$$E_y = \gamma (E_y - vB_z) \quad B'_y = \gamma (B_y + vE_z)$$

$$E'_z = \gamma (E_z + vB_y) \quad B'_z = \gamma (B_z - vE_y)$$

7.6.4 ฟลักซ์ของสนามไฟฟ้าเป็น.....

ตอบ : ซีสเกลาร์

7.6.5 เมื่อพิจารณาเครื่องควบแน่นซึ่งเคลื่อนที่ จะปรากฏว่ามีสนามแม่เหล็ก แต่เหตุที่สนามแม่เหล็กไม่เกี่ยวข้องกับความเร็วไม่เปลี่ยนแปลงของฟลักซ์สนามไฟฟ้าเพราะ.....

ตอบ : ฟลักซ์ของสนามแม่เหล็กที่ผ่านผิวของเกาส์เป็นศูนย์

7.6.6 สนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าไม่เป็นสี่เวกเตอร์ แต่เป็น.....

ตอบ : เทนเซอร์

7.6.7 แรงแม่เหล็กไฟฟ้า  $\vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{p} =$  .....

ตอบ :  $q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B})$

7.6.8 แรงที่นิยมใช้กันในทฤษฎีสัมพัทธภาพเชิงปฏิบัติคือ

ตอบ :  $m \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} x \right) = \frac{d}{dt} p_x$

## แบบฝึกหัดบทที่ 7

1. ประจุ  $Q$  อยู่หนึ่ง ๆ ที่จุดกำเนิดของกรอบเฉื่อย  $S$  ให้กรอบเฉื่อย  $S'$  เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว  $\vec{v} = (v, 0, 0)$  เมื่อเวลา  $t' = 0$ ,  $x' = y' = z' = 0$  เมื่อ  $x', y', z'$  เป็นพิกัดของประจุ  $Q$  ใน  $S'$  จงหาสนามในกรอบเฉื่อย  $S'$  นี้ที่  $x' = X, y' = Y$  และ  $z' = Z$  เมื่อเวลา  $t'$

คำแนะนำ : หา  $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z)$  แล้วแปลงเป็น  $E(X, Y, Z)$  แล้วจึงหา  $\vec{E}$  จากสมการ (7.10)  
หา  $B'_x, B'_y, B'_z$  จากสมการ (7.10) ด้วย

$$\text{ตอบ : } \vec{E}' = \frac{\gamma Q}{4\pi\epsilon_0(\gamma^2 X^2 + Y^2 + Z^2)} (\hat{i}X + \hat{j}Y + \hat{k}Z)$$

2. การแปลงของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า

สมการชุด (7.10) นอกจากจะได้โดยการพิจารณาเครื่องควบแน่นแผ่นขนานแล้ว ยังอาจจะหาได้จากการพิจารณาสีแวกเตอร์ของโพเทนเชียล

ให้  $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3, A_4 = i \frac{\phi}{c})$  เป็นสี่แวกเตอร์ของโพเทนเชียล จงหา

สมการชุด (7.10) ด้วยการแปลง  $\vec{A}$  ด้วยการแปลงแบบของโลเรนตซ์

คำแนะนำ : ให้  $\cos\Psi = \gamma$ ,  $\sin\Psi = \frac{iv}{c} \gamma$

$$A'_1 = \cos\Psi A_1 + \sin\Psi A_4$$

$$A'_2 = A_2$$

$$A'_3 = A_3$$

$$A'_4 = -\sin\Psi A_1 + \cos\Psi A_4$$

จากสมการของแมกซ์เวลล์

$$E_x = -\frac{\partial}{\partial x} \phi - \frac{\partial}{\partial t} A_x = ic \left( \frac{\partial}{\partial x_1} A_4 - \frac{\partial}{\partial x_4} A_1 \right)$$

$$E_y = \quad \quad \quad = \left( \frac{\partial}{\partial x_2} A_4 - \frac{\partial}{\partial x_4} A_2 \right)$$

$$E_z = \quad \quad \quad = ic \left( \frac{\partial}{\partial x_3} A_4 - \frac{\partial}{\partial x_4} A_3 \right)$$

$$B_x = \frac{\partial}{\partial y} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_y = \frac{\partial}{\partial x_2} A_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} A_2$$

$$B_y = \frac{\partial}{\partial z} A_x - \frac{\partial}{\partial x} A_z = \frac{\partial}{\partial x_3} A_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} A_3$$

$$B_z = \frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x = \frac{\partial}{\partial x_1} A_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} A_1$$

จะเห็นว่าเราอาจจะคำนวณสมาชิกตัวใดตัวหนึ่งของสนามได้ทันที เช่น

$$\frac{\partial}{\partial x_2'} A_4' - \frac{\partial}{\partial x_4'} A_2' = -\frac{i}{c} E_y'$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2'} A_4' = \frac{\partial}{\partial x_2} A_4' = -\sin\Psi \frac{\partial}{\partial x_2} A_1 + \cos\Psi \frac{\partial}{\partial x_2} A_4$$

$$\frac{\partial}{\partial x_4'} A_2' = \frac{\partial}{\partial x_1} A_2 \frac{\partial}{\partial x_4'} x_1 + \frac{\partial}{\partial x_4} A_2 \frac{\partial}{\partial x_4'} x_4$$

$$\text{เนื่องจาก } x_1 = \cos\Psi x_1' - \sin\Psi x_4'$$

$$x_4 = \sin\Psi x_1' + \cos\Psi x_4'$$

$$\frac{\partial}{\partial x_4'} A_2' = -\sin\Psi \frac{\partial}{\partial x_1} A_2 + \cos\Psi \frac{\partial}{\partial x_4} A_2$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2'} A_4' - \frac{\partial}{\partial x_4'} A_2' = \cos\Psi \left( \frac{\partial}{\partial x_2} A_4 - \frac{\partial}{\partial x_4} A_2 \right) + \sin\Psi \left( \frac{\partial}{\partial x_1} A_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} A_1 \right)$$

$$\frac{i}{c} E_y' = \cos\Psi \left( -\frac{i E_y}{c} \right) + \sin\Psi B_z$$

$$-\frac{i}{c} E_y' = -\frac{i}{c} \gamma E_y + \frac{i v}{c} \gamma B_z$$

$$\text{หรือ } E_y' = \gamma(E_y - v B_z)$$

จงหาสมการอื่น ๆ โดยวิธีที่คล้ายคลึงกัน

### 3. จงเขียนแรงแม่เหล็กไฟฟ้าจากสมการชุด (7.10)

คำแนะนำ : ถ้าให้ความเร็ว  $\vec{v}$  เป็นความเร็วในทิศใด ๆ เราอาจจะแบ่งสนามออกเป็นสองประเภทคือ ประเภทที่ขนานกับ  $\vec{v}$  และประเภทที่ตั้งฉากกับ  $\vec{v}$

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} \qquad \vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})_{\perp}$$

แต่เนื่องจาก  $(\vec{v} \times \vec{B})_{\parallel} = 0$  ทำให้

$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} + (\vec{v} \times \vec{B})_{\parallel}$  และแรงเกิดจากประจุคูณด้วยสนามในแนวขนานนี้

4. จากการวิเคราะห์ สมการ (5.85) และสมการ (7.16) จงหาสี่เวกเตอร์ของแรงแม่เหล็กไฟฟ้า

คำแนะนำ : (7.16)  $\frac{d}{dt} \bar{p} = q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B})$

$$\therefore \dot{\bar{p}} = \frac{d}{dt} \bar{p} = \gamma q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}) \sim \bar{F}_M$$

$$\bar{F}_M \cdot \bar{v} = \gamma q \bar{v} \cdot \bar{E}$$

ดังนั้น สี่เวกเตอร์ควรจะเป็น  $(\dot{\bar{p}}, \frac{i\gamma q \bar{v} \cdot \bar{E}}{c})$

$\bar{v} \cdot \bar{E}$  คือ กำลังต่อ 1 หน่วยประจุ

5. จากสมการชุด (7.10) จงหา  $\bar{E}$  ในเทอมของ  $\bar{E}'$

ตอบ :

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x & B_x &= B'_x \\ E_y &= \gamma(E'_y + vB'_z) & B_y &= \gamma(B'_y - vE'_z) \\ E_z &= \gamma(E'_z - vB'_y) & B_z &= \gamma(B'_z + vE'_y) \end{aligned}$$

6. จงแสดงว่า  $E^2 - c^2 B^2$  เป็นค่าที่ไม่เปลี่ยนแปลง

คำแนะนำ : จงแสดงว่า  $E^2 - c^2 B^2 = E'^2 - c^2 B'^2$

7. พิจารณารูปที่ 45 เครื่องควบแน่นในลักษณะเดียวกัน เคลื่อนไปทางขวาด้วยความเร็ว  $u$  ในขณะที่เดียวกันก็มี เครื่องควบแน่นอีกเครื่องหนึ่ง รูปร่างเหมือนกันแต่มีประจุตรงกันข้าม เคลื่อนที่มาจากซ้ายด้วยความเร็ว  $u$  เท่ากัน ในแนวเดียวกัน ทำให้แผ่นของเครื่องควบแน่นซ้อนกันสนิทพอดี ทำให้ไม่มีประจุ แต่มีกระแส และมีสนามแม่เหล็ก

(ก) จงหาสนามแม่เหล็กในระหว่างแผ่นทั้งสอง

(ข) ในอีกกรอบเฉื่อยหนึ่งซึ่งกรอบเฉื่อยเดิมเคลื่อนด้วยความเร็ว  $v$  ไปทางขวา

จงหาสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้า

คำแนะนำ : อ่านตอนที่ 7.1 และ 7.2

8. สมมุติว่าตอนหนึ่งของปริภูมิมีสนามไฟฟ้าอยู่ในแนวแกน  $y$ ,  $E_y = E$  และมีสนามแม่เหล็กอยู่ในแนวแกน  $z$ ,  $B_z = B$  เครื่องมือชนิดนี้ปกติประกอบด้วย เครื่องควบแน่นยาวใส่เข้าไประหว่างขั้วแม่เหล็ก ถ้าหากอนุภาคมีประจุ  $q$  เคลื่อนที่ระหว่างแผ่นของเครื่อง

ความแน่นนั้น ด้วยความเร็วขนาดหนึ่งในทิศ  $+x$  แล้วทำให้สนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้า  
หักล้างอำนาจกันหมดพอดี ทำให้เครื่องมือชนิดนี้สามารถเลือกความเร็วของอนุภาค  
และชนิดของอนุภาคได้

(ก) จงคำนวณหาความเร็วซึ่งทำให้อำนาจแรงแม่เหล็กและแรงไฟฟ้าหมด  
อำนาจลงพอดี

(ข) ถ้าหากผู้สังเกตคนหนึ่งอยู่ในกรอบเฉื่อย ซึ่งเคลื่อนที่ไปด้วยความเร็ว  $+v$   
ในทิศ  $+x$  จงหาสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าที่เขาจะสังเกตเห็นได้

(ค) จงหาความเร็วของอนุภาคในกรอบเฉื่อยใหม่นี้ซึ่งสามารถเคลื่อนไปได้โดยไม่  
ถูกเบี่ยงเบน

คำแนะนำ : อ่านตอนที่ 7.1 และ 7.2

---