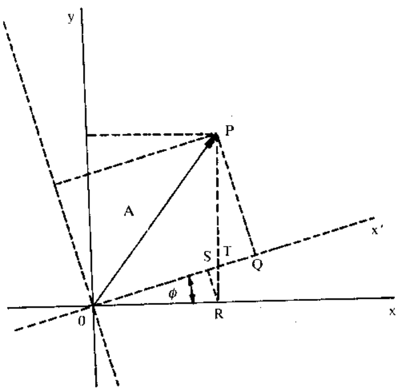
บทที่ 6
สี่เวกเตอร์

วัตถุประสงค์

1. เพื่อหาสี่เวกเตอร์ของพิกัด ของความเร็ว และของโมเมนตัม
2. ให้สามารถคำนวณการชนกันโดยใช้สี่เวกเตอร์
3. ให้หาสี่เวกเตอร์ที่สำคัญทางฟิสิกส์อื่น ๆ เช่น สี่เวกเตอร์ของความหนาแน่นกระแสสี่เวกเตอร์ของศักดาทางไฟฟ้า
4. ให้หาสี่สเกลาร์ และปริมาณที่เป็นความไม่เปลี่ยนแปลงของโลเรนตซ์

6.1 สี่เวกเตอร์ของพิกัด

6.1.1 การแปลงแบบของโลเรนตซ์กับการหมุนของพิกัด



รูปที่ 42 เวกเตอร์ในระบบพิกัดซึ่งหมุนทำมุมกับเวกเตอร์ต่างกัน

เชื่อกันว่า ปริภูมิ (space) เป็นไอโซทรอปปิก[9] ดังนั้นการใช้กรอบอ้างอิงใด ๆ เพื่อแสดงสมาชิกของเวกเตอร์ตัวเดียวกันจึงมีความหมายเท่าเทียมกันในเชิงคณิตศาสตร์ ดังแสดงในรูปที่ 42 เวกเตอร์ $\overline{A}$ มีสมาชิก A_x และ A_y ในระบบพิกัด (x,y) และสมาชิก A_x' และ A_y' ในระบบพิกัด (x′,y′) $A_x\hat{i} = \overline{OR}$, $A_x'\hat{i}' = \overline{OQ}$

แต่เนื่องจาก

$$\begin{aligned} OQ &= OS+ST+TQ \\ OS &= OR\cos\phi = A_x\cos\phi \\ ST &= RT\sin\phi \\ TQ &= TP\sin\phi \\ \therefore\ OQ &= \cos\phi A_x + \sin\phi(RT+TP) \\ A_x' &= \cos\phi A_x + \sin\phi A_y \qquad (6.1) \end{aligned}$$

โดยทำนองเดียวกัน $A_y' = -\sin\phi A_x + \cos\phi A_y$ (6.2)

เราอาจจะเขียน (6.1) และ (6.2) ให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ว่า

$$\begin{pmatrix} A_x' \\ A_y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} \qquad (6.3)$$

ถ้าให้ $A_x' = A_1'$, $A_y' = A_2'$, $A_x = A_1$, $A_y = A_2$, $\alpha_{11} = \cos\phi$, $\alpha_{12} = \sin\phi$, $\alpha_{21} = -\sin\phi$ และ $\alpha_{22} = \cos\phi$ แล้ว

$$\begin{pmatrix} A_1' \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \qquad (6.4)$$

หรือ $$A_i' = \sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij}A_j \ , \qquad (i = 1,2) \qquad (6.5)$$

หรือ $\overline{A}' = \underline{\underline{\alpha}}.\overline{A}$ เมื่อ $\overline{A}' = (A_x',A_y')$, $\overline{A} = (A_x,A_y)$

$$\underline{\underline{\alpha}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \qquad (6.6)$$

---

9 ข้าพเจ้าคัดค้านในเรื่องนี้ ดู พิสิทฐ์ วรสิงห์, **ความหมายอีกนัยหนึ่งของทฤษฎีสัมพัทธภาพ**, Ibid.

สมการตั้งแต่ (6.3) ถึง (6.6) แสดงความสัมพันธ์ของสมาชิกของเวกเตอร์ในระบบพิกัด (x',y') และระบบพิกัด (x,y) โดยที่ระบบพิกัด (x',y') หมุนไปเป็นมุม ϕ เทียบกับระบบพิกัด (x,y) จากสมการ (3.32) ถ้าหากเราให้

$$x' = x_1' \ , \qquad x = x_1$$
$$ict' = x_4' \ , \qquad ict = x_4$$

เราอาจจะเขียนสมการ (3.32) เสียใหม่ได้ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \gamma\left(x_1 + \frac{iv}{c}x_4\right) \\ x_4' &= \gamma\left(x_4 - \frac{iv}{c}x_1\right) \end{aligned}\right\} \quad \gamma = \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \tag{6.7}$$

ถ้าให้ $\cos\phi = \gamma, \sin\phi = \frac{iv}{c}\gamma$ จะเห็นว่า

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \frac{iv}{c}\gamma \\ -\frac{iv}{c}\gamma & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} \tag{6.8}$$

สมการ (6.8) คล้ายกับการหมุนของพิกัดในสมการ (6.3)

6.1.2 การทำพิกัดและเวลาให้เป็นสี่เวกเตอร์

จากสมการที่ (3.32) จะเห็นว่าถ้าหากเรากำหนดให้ $x_1' = x'$, $x_2' = y'$, $x_3' = z'$, $x_4' = ict'$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ และ $x_4 = ict$ แล้ว เราอาจจะเขียนสมการที่ (3.32) เสียใหม่ได้ว่า

$$\begin{vmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma & 0 & 0 & \frac{iv}{c}\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{iv}{c}\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} \tag{6.9}$$

ถ้า $i = j = 1,2,3,4$ สมการ (6.9) อาจจะเขียนในรูปของสมาชิกได้ว่า

$$x_i' = \sum_{j=1}^{4} \alpha_{ij} x_j \tag{6.10}$$

สมการ (6.10) อาจจะเขียนในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้ :

$$\overline{\overline{x}}\,' = \underline{\underline{\alpha}} \cdot \overline{\overline{x}} \tag{6.11}$$

โดยที่ $\overline{\overline{x}}\,' = (x_1', x_2', x_3', x_4')$ และ $\overline{\overline{x}} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ $\overline{\overline{x}}\,'$ และ $\overline{\overline{x}}$ เป็นการแปลงของเวกเตอร์ในสี่มิติตัวเดียวกันจากกรอบเฉื่อยอันหนึ่งไปยังกรอบเฉื่อยอีกอันหนึ่ง ดังนั้นเราอาจจะนิยามความหมายของสี่เวกเตอร์ได้ดังนี้ :

"ปริมาณใด ๆ ซึ่งสามารถแปลงจากกรอบเฉื่อยกรอบหนึ่งไปยังกรอบเฉื่อยอีกกรอบหนึ่งได้ด้วยการแปลงแบบโลเรนตซ์ เรียกว่าสี่เวกเตอร์"

จะเห็นว่าชุดของพิกัดและเวลา $\overline{\overline{x}} = (x_1, x_2, x_3, x_4 = ict)$ เป็นสี่เวกเตอร์ของพิกัด และเราจะยังสามารถดัดแปลง ชุดของตัวแปรพลวัตอีกหลายชนิดให้เป็นสี่เวกเตอร์ได้ดังเราจะแสดงต่อไปนี้

6.2 สี่เวกเตอร์ของความเร็ว

ถ้าหากระบบพิกัด s' เคลื่อนที่ไปตามทิศ $+x$ ของระบบพิกัด s ด้วยความเร็ว $\bar{v} = (v,0,0)$ อนุภาคตัวหนึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\bar{u}$ ใน s จะเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\bar{u}'$ ใน s' โดยความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{u}'$ เป็นไปตามสมการ (5.57), (5.58) และ (5.59) ดังนี้

$$\frac{u_x'}{\left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \gamma \left(\frac{u_x}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} - \frac{v}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)} \right) \tag{6.12}$$

$$\frac{u_y'}{\left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \frac{u_y}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} \tag{6.13}$$

$$\frac{u_z'}{\left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \frac{u_z}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} \tag{6.14}$$

กำหนดให้ $\dfrac{u_x'}{\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}} = U_1'$, $\dfrac{u_y'}{\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}} = U_2'$, $\dfrac{u_z'}{\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}} = U_3'$

$\dfrac{ic}{\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}} = U_4'$ โดยที่ $\bar{\bar{U}}' = (U_1',U_2',U_3',U_4')$ และโดยทำนองเดียวกันเราอาจจะหา

$\bar{\bar{U}} = (U_1,U_2,U_3,U_4)$ ขึ้นได้จะเห็นว่า เราอาจจะเขียน (6.12), (6.13) และ (6.14) เสียใหม่ดังนี้

$$U_1' = \gamma\left(U_1 + \frac{iv}{c}U_4\right) \tag{6.15}$$

$$U_2' = U_2 \tag{6.16}$$

$$U_3' = U_3 \tag{6.17}$$

และอาจจะเขียนสมการเพิ่มเติมจากสมการ (5.23) ได้ดังนี้

$$U_4' = \frac{1}{\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}}\frac{d}{dt'}x_4' = \frac{ic}{\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

$$= \gamma\frac{ic}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)$$

$$= \gamma\left(U_4 - \frac{iv}{c}U_1\right) \tag{6.18}$$

สมการ (6.15), (6.16), (6.17) และ (6.18) อาจจะเขียนรวมกันได้ดังนี้

$$\begin{vmatrix} U_1' \\ U_2' \\ U_3' \\ U_4' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma & 0 & 0 & \frac{iv}{c}\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{iv}{c}\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix}\begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{vmatrix} \tag{6.19}$$

หรือ $$U_i' = \sum_{j=1}^{4}\alpha_{ij}U_j \tag{6.20}$$

หรือ $$\bar{\bar{U}}' = \underline{\underline{\alpha}}.\bar{\bar{U}} \tag{6.21}$$

โดยที่
$$\underline{\underline{\alpha}} = \begin{vmatrix} \gamma & 0 & 0 & \frac{iv}{c}\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{iv}{c}\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix} \qquad (6.22)$$

จะเห็นว่าสมการชุด (6.19), (6.20) และ (6.21) เป็นสมการชุดเดียวกับ (6.9), (6.10) และ (6.11) แสดงว่า $\underline{\underline{u}}$ หรือ ความเร็วเฉพาะเป็นสี่เวกเตอร์

6.3 สี่เวกเตอร์ของโมเมนตัม

จากสมการที่ (5.72), (5.73), (5.74) และ (5.75) ถ้าให้ $\frac{iE}{c} = p_4$, $p_x = p_1$, $p_y = p_2$ และ $p_z = p_3$ แล้ว

$$\left.\begin{aligned} p_1' &= \gamma\left(p_1 + \frac{iv}{c}p_4\right) \\ p_2' &= p_2 \\ p_3' &= p_3 \\ p_4' &= \gamma\left(p_4 - \frac{iv}{c}p_1\right) \end{aligned}\right\} \qquad (6.23)$$

ซึ่งเขียนเป็นเมทริกซ์ได้ว่า

$$\begin{vmatrix} p_1' \\ p_2' \\ p_3' \\ p_4' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma & 0 & 0 & \frac{iv}{c}\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{iv}{c}\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{vmatrix} \qquad (6.24)$$

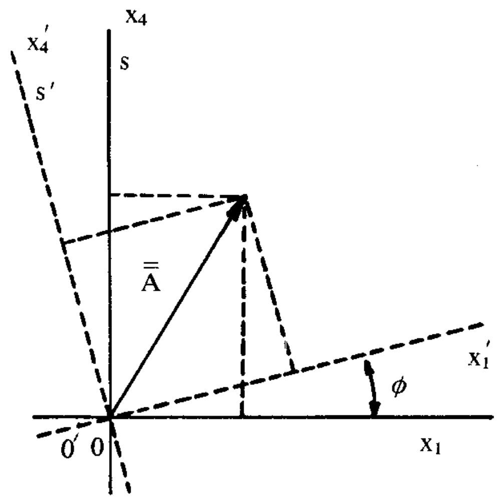
หรือเขียนเป็นสมาชิกของสี่เวกเตอร์ได้ว่า

$$p_i' = \sum_{j=1}^{4} \alpha_{ij} p_j \qquad (6.25)$$

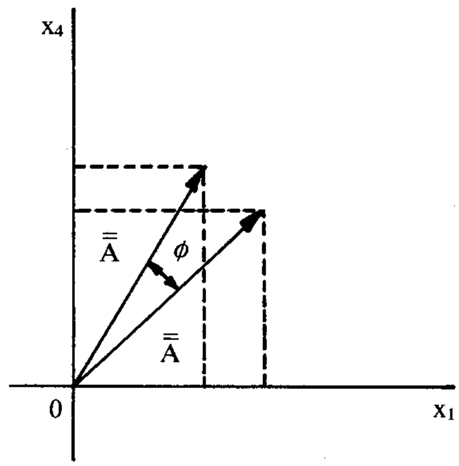
หรือ $$\bar{\bar{p}}\,' = \underline{\underline{\alpha}} \cdot \bar{\bar{p}} \qquad (6.25)$$

แสดงว่า $\bar{\bar{p}}$ เป็นสี่เวกเตอร์ของโมเมนตัม

6.4 การหมุนของสี่เวกเตอร์



รูปที่ 43 (ก) แสดงการหมุนของระบบพิกัด



รูปที่ 43 (ข) แสดงการหมุนของเวกเตอร์

ในตอนที่ 6.1.1 เราได้แสดงการหมุนของเวกเตอร์ $\bar{A}$ ในระนาบ (x,y) ในรูปที่ 42 $\bar{\bar{A}}$ เป็นสี่เวกเตอร์ แต่เราเขียนเฉพาะระนาบ (x_1,x_4) ถ้า s และ s′ เป็นระบบพิกัดสองระบบซึ่งมีระบบพิกัด s′ เคลื่อนที่ไปตามแนวแกน +x ของ s ด้วยความเร็ว $\bar{v} = (v,0,0)$ ให้ 0′ ทับ 0 เมื่อ $t = t' = 0$

$$\bar{\bar{A}}' = \underline{\underline{\alpha}}.\bar{\bar{A}} \tag{6.26}$$

$\underline{\underline{\alpha}}$ อาจจะถือได้ว่าเป็นตัวดำเนินการซึ่งทำการหมุนแกนในระบบ s ให้เป็นแกนในระบบ s′ แต่ในการพัฒนาเวกเตอร์เชิงเส้น เราจะไม่ตีความหมายสมการ (6.26) ดังที่ได้กล่าวมาแล้ว เป็นข้อตกลงเรื่องเวกเตอร์สเปซเชิงเส้นใน n มิติว่าแกนของระบบพิกัดจะถือว่าอยู่นิ่ง เวกเตอร์จะถูกลากจากจุดกำเนิดเพียงอย่างเดียว และสมการในตระกูลของสมการ (6.26) ถือว่าเวกเตอร์เป็นตัวหมุนไป ถ้าหากปริภูมิมีคุณสมบัติเป็นเชิงเส้นเอกพันธ์ และไอโซทรอปปิก[10]

---

10 คำไอโซทรอปปิก หมายความว่า ทิศใด ๆ ในปริภูมิมีค่าเหมือนกัน จะเลือกทิศใดเป็นแกนใดในระบบพิกัดก็ได้

(isotropic) (ดูรูปที่ 43ข) และถือกันว่าการตีความหมายทั้งสองประการนี้ไม่แตกต่างกัน การหมุนของเวกเตอร์ในปริภูมิและเวลาสี่มิติ ทำให้ปรากฏการณ์การหดของความยาว และการขยายออกของเวลา เกิดขึ้นที่ความยาวและนาฬิกาโดยตรง แต่การหมุนของพิกัดในปริภูมิและเวลาสี่มิติ ทำให้ปรากฏการณ์การหดของความยาว และการขยายออกของเวลา มีต้นกำเนิดมาจากปริภูมิ และเนื้อหาของเวลาที่แวดล้อมความยาวและนาฬิกานั้น[11] การตีความหมายในแบบหลังนี้ให้ความหมายทำให้ปรากฏการณ์สัมพัทธภาพสอดคล้องกับความเป็นจริงมากกว่า

6.5 สเกลาร์และสี่เวกเตอร์

6.5.1 สเกลาร์ใน 3 มิติ

ก่อนที่จะขยายความคิดเรื่องสเกลาร์และเวกเตอร์เข้าไปในสี่มิติขอให้เรามาทบทวนสเกลาร์ในสามมิติก่อน สเกลาร์ในสามมิติคือ ปริมาณฟิสิกส์ซึ่งแทนด้วยค่าตัวเลขมีสมาชิกตัวเดียว ซึ่งค่านี้จะไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อมีการหมุนแกนในระบบพิกัด อุณหภูมิที่จุดใดจุดหนึ่งเป็นตัวอย่างของสเกลาร์ มวลของอนุภาคก็เป็นอีกตัวอย่างหนึ่งของสเกลาร์ ค่าทางแกน x ของเวกเตอร์ไม่ใช่สเกลาร์ แม้ว่าจะเป็นค่าตัวเลขตัวเดียว แต่ค่าทางแกน x นี้เปลี่ยนไปเมื่อระบบพิกัดหมุนไป สเกลาร์อีกชนิดหนึ่งคือ ความยาวของเวกเตอร์ ในรูปที่ 42 จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}
\overline{A}.\overline{A} &= A^2 = A_x'^2 + A_y'^2 = (\cos\phi A_x + \sin\phi A_y)^2 \\
&\quad + (-\sin\phi A_x + \cos\phi A_y)^2 \\
&= (\cos^2\phi + \sin^2\phi)A_x^2 + (\sin^2\phi + \cos^2\phi)A_y^2 \\
&\quad + (2\cos\phi\sin\phi - 2\cos\phi\sin\phi)A_xA_y \\
&= A_x^2 + A_y^2 \qquad (6.27)
\end{aligned}$$

ดังนั้น A^2 เป็นปริมาณที่ไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อมีการหมุนแกนของระบบพิกัด ทำให้ A : ขนาดความยาวของเวกเตอร์ ไม่เปลี่ยนแปลงด้วย

6.5.2 สี่สเกลาร์ในการแปลงแบบของโลเรนตซ์

ในระบบพิกัด s ซึ่งเป็นกรอบเฉื่อย เหตุการณ์อันหนึ่งเกิดขึ้นที่พิกัดและเวลา (x,y,z,t) ในอีกระบบพิกัดคือ กรอบเฉื่อย s′ เหตุการณ์อันเดียวกันนี้เกิดขึ้นที่พิกัดและเวลา (x′,y′,z′,t′)

---

11 ดู พิสิทธิ์ วรสิงห์, ความหมายอีกนัยหนึ่งของทฤษฎีสัมพัทธภาพ, op.cit.

สมมุติว่าจุดกำเนิดของระบบพิกัด s กับ s′ ทับกันพอดีที่เวลา $t = t' = 0$ ทำให้การแปลงไปมาระหว่างระบบพิกัดทั้งสองนี้เป็นการแปลงแบบโลเรนตซ์เอกพันธ์ ในตอนที่แล้วมาในบทนี้เราหยิบยกการแปลงนี้มาใช้โดยการสังเกต ในตอนนี้เราจะวิเคราะห์การแปลงนี้ตามขบวนการทางคณิตศาสตร์ตามลำดับ

ในเหตุการณ์ที่ปรากฏที่ (x,y,z,t) ทำให้เราสามารถหาสี่สเกลาร์ หรือปริมาณที่ไม่เปลี่ยนแปลงของโลเรนตซ์ (Lorentz-invariant) ได้ปริมาณหนึ่งคือ

$$s^2 = x^2+y^2+z^2-c^2t^2 = x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2 = s'^2 \tag{6.28}$$

ถ้าหากเราจะเปลี่ยนพิกัดให้อยู่ในรูปของสมาชิกของสี่เวกเตอร์จะเห็นว่า ถ้า

$$x_1 = x \ , \ x_2 = y \ , \ x_3 = z \ , \ x_4 = ict$$

$$x_1' = x' \ , \ x_2' = y' \ , \ x_3' = z' \ , \ x_4' = ict' \quad \text{แล้ว}$$

$$x_i' = \sum_{k=1}^{4} \alpha_{ik} x_k \qquad (i = 1,2,3,4) \tag{6.29}$$

ทำให้

$$s^2 = \sum_i x_i^2 = \sum_i x_i'^2 \tag{6.30}$$

สัมประสิทธิ์ α_{ik} (ซึ่งเราเอามาใช้โดยการสังเกตในตอนก่อน) จะขึ้นอยู่กับมุมระหว่างแกนและความเร็วสัมพัทธ์ของระบบพิกัด s′ กับ s เนื่องจาก x_1, x_2 และ x_3 เป็นตัวเลขจริง ในขณะที่ x_4 เป็นค่าจินตภาพ ทำให้

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{11}, \ldots \alpha_{33} \text{ และ } \alpha_{44} \text{ เป็นเลขจริง} \\ \alpha_{14}, \alpha_{24}, \alpha_{34}, \alpha_{41}, \alpha_{42} \text{ และ } \alpha_{43} \text{ เป็นเลขจินตภาพ} \end{array}\right\} \tag{6.31}$$

เนื่องจาก x_4 และ x_4' ไม่ใช่เลขจริง ทำให้เรขาคณิตในปริภูมิและเวลาสี่มิติ เป็นเรขาคณิตของยูคลิดเทียม (pseudo-Eucledean geometry) การแปลงแบบของโลเรนตซ์ยังนับว่าเป็นการหมุนในปริภูมิและเวลาสี่มิติ ตามระบบของเรขาคณิตยูคลิดเทียมนี้ และมีระยะ s^2 เป็นปริมาณที่ไม่เปลี่ยนแปลงของโลเรนตซ์ ทุก ๆ จุดซึ่งระยะจากจุดนั้นถึงจุดกำเนิดทำให้มีผิวขึ้นจากสมการ

$$s^2 = \sum_i x_i^2 = x^2+y^2+z^2-c^2t^2 = 0 \tag{6.32}$$

$$s^2 = x^2+y^2+z^2-c^2t^2 < 0 \qquad (6.33)$$

$$s^2 = x^2+y^2+z^2-c^2t^2 > 0 \qquad (6.34)$$

ปกติอนุภาคซึ่งเคลื่อนที่ในสามมิติเมื่อเขียนเส้นการเคลื่อนที่ในสี่มิตินี้แล้ว จะอยู่ในบริเวณเหมือนเวลา เส้นแสดงการเคลื่อนที่ของอนุภาคในสี่มิตินี้เรียกว่า เส้นภพ (world line) การเคลื่อนที่ใด ๆ ของอนุภาคอาจจะแทนได้ด้วยสมการ

$$x_i = x_i(x_4) \quad , \quad i = 1,2,3 \qquad (6.35)$$

ซึ่ง x_i เป็นฟังก์ชันของ x_4 สำหรับในกรณีซึ่งอนุภาคเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงตัว ฟังก์ชัน $x_i(x_4)$ นี้เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นและเส้นภพจะเป็นเส้นตรง ในกรณีที่มันผ่านจุดกำเนิด เราอาจจะแปลงพิกัดหา x_4' ให้ทับกับเส้นภพซึ่งเป็นเส้นตรงนี้พอดี กรณีนี้หมายความว่า เราอาจจะหากรอบเฉื่อยให้เคลื่อนไปกับอนุภาคนี้ได้ในสามมิติ

สมมุติว่า เหตุการณ์สองเหตุการณ์ แทนได้ด้วยชุดพิกัด (x_i) และ $(\underline{x}_i)$ ในระบบพิกัด s เราจะแปลงชุดพิกัดทั้งสองด้วยการแปลงตามสมการ (6.29) ให้เป็นชุดพิกัดใน s′ ดังนั้นระยะระหว่างจุดพิกัดทั้งสอง คือ $(x_i-\underline{x}_i)$ จะสร้างเป็นปริมาณที่ไม่เปลี่ยนแปลงของโลเรนตซ์ได้ดังนี้

$$\sum_i (x_i-\underline{x}_i)^2 = \sum_i (x_i'-\underline{x}_i')^2 \qquad (6.36)$$

แต่เนื่องจาก $\sum_i x_i^2$ และ $\sum_i \underline{x}_i^2$ ต่างก็เป็นปริมาณที่ไม่เปลี่ยนแปลง ดังนั้นจากสมการ (6.36)

$$\sum_i x_i \underline{x}_i = \sum_i x_i' \underline{x}_i' \quad : \text{ ปริมาณที่ไม่เปลี่ยนแปลง} \tag{6.37}$$

จากสมการที่ (6.29) $\quad \sum_i (\sum_\ell \alpha_{i\ell} x_\ell)(\sum_m \alpha_{im} \underline{x}_m) = \text{R.H.S. ของ (6.37)}$

$$= \sum_{\ell,m} (\sum_i \alpha_{i\ell}\alpha_{im}) x_\ell \underline{x}_m$$

$$= \sum_\ell x_\ell \underline{x}_\ell = \text{L.H.S. ของ (6.37)}$$

ดังนั้น $\quad \sum_i \alpha_{i\ell}\alpha_{im} = \delta_{\ell m}$ (6.38)

นอกจากนี้เรายังอาจจะหาความสัมพันธ์ผกผันได้ดังนี้ จากความสัมพันธ์ผกผันของ (6.29)

$$x_k = \sum_i x_i' \alpha_{ik} \tag{6.39}$$

แทนค่า x_i' : $\quad x_k = \sum_{i,\ell} \alpha_{i\ell} x_\ell \alpha_{ik} = \sum_\ell x_\ell \sum_i \alpha_{i\ell}\alpha_{ik} = \sum x_\ell \delta_{\ell k}$

ซึ่งหมายความว่า ถ้าเราแทนค่า (6.39) ในข้างซ้ายของสมการ (6.37) เราจะได้ความสัมพันธ์

$$\sum_i \alpha_{\ell i}\alpha_{mi} = \delta_{\ell m} \tag{6.40}$$

ความสัมพันธ์ที่ (6.38) และ (6.40) คือ ความสัมพันธ์ ออร์ทอกอนอลลิตี้ จาก (6.40)

$$\alpha^2 = |\alpha_{ik}|^2 = |\sum_\ell \alpha_{i\ell}\alpha_{k\ell}| = |\delta_{ik}|$$

$$\alpha^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{6.41}$$

แสดงว่า $\quad \alpha = |\alpha_{ik}| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix} = \pm 1$ (6.42)

เกิดกฎการอนุรักษ์โมเมนตัม การพิจารณาการเคลื่อนที่ในช่วงเวลา ทำให้เกิดกฎการอนุรักษ์พลังงาน ดังนั้น เวลาจึงเป็นมิติอีกมิติหนึ่งเพิ่มขึ้นจากมิติสามมิติในปริภูมิ และการพิจารณาสมมาตรในสามมิติของปริภูมินั่นเอง ทำให้เกิดการอนุรักษ์ในมิติที่สี่นี้ แกนของพิกัดสามแกนและแกนของเวลาเป็นสมาชิกของสี่เวกเตอร์ฉันใด แกนของโมเมนตัมและแกนของพลังงานก็เป็นสมาชิกของสี่เวกเตอร์ของโมเมนตัมและพลังงานฉันนั้น

ตัวอย่างที่ 1 การคำนวณที่จุดศูนย์กลางของมวล

ในการคำนวณเรื่องการชนกันของอนุภาค มีกรอบอ้างอิงกรอบหนึ่งซึ่งนิยมใช้ในการคำนวณคือกรอบอ้างอิงซึ่งเป็นศูนย์กลางของมวล ความหมายของกรอบอ้างอิงนี้คลุมเคลือในทฤษฎีสัมพัทธภาพ เพราะมวลอาจจะเปลี่ยนแปลงเป็นพลังงานได้ จึงนิยมนิยามว่า กรอบอ้างอิงซึ่งโมเมนตัมรวมของระบบเป็นศูนย์

ให้ $E^c, \overline{p}^c = 0$ เป็นพลังงานและโมเมนตัมของกรอบศูนย์กลางมวล $E, \overline{p}$ เป็นพลังงานและโมเมนตัมในกรอบอ้างอิงของห้องทดลอง ให้ความเร็วของกรอบเฉื่อยของศูนย์กลางมวลไปทางทิศ $+x$ ของกรอบเฉื่อยของห้องทดลอง จากสมการที่ (6.23)

$$p_1^c = p_x^c = 0 = \gamma\left(p_1 + \frac{iv}{c}p_4\right) = \gamma\left(p_x - \frac{v}{c^2}E\right) \tag{6.43}$$

$$p_2^c = p_y^c = 0 = p_y \tag{6.44}$$

$$p_3^c = p_z^c = 0 = p_z \tag{6.45}$$

$$p_4^c = \frac{iE^c}{c} = \gamma\left(p_4 - \frac{i}{c}vp_1\right) = \gamma\left(\frac{iE}{c} - \frac{i}{c}vp_x\right)$$

$$E^c = \gamma(E - vp_x) \tag{6.46}$$

จาก (6.43) $\frac{v}{c^2} = \frac{p_x}{E}$, E : พลังงานทั้งหมดในกรอบเฉื่อยของห้องทดลอง (6.47)

แทนค่า (6.47) ใน (6.46) $E^c = \gamma\left(E - \frac{v^2}{c^2}E\right) = \gamma E\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$

$$E^c = \frac{E}{\gamma}, \quad E = \gamma E^c \tag{6.48}$$

$$\therefore \; p_x = \frac{v}{c^2}E = \gamma\frac{v}{c^2}E^c \tag{6.49}$$

จากสภาพไม่เปลี่ยนแปลงของโลเรนตซ์

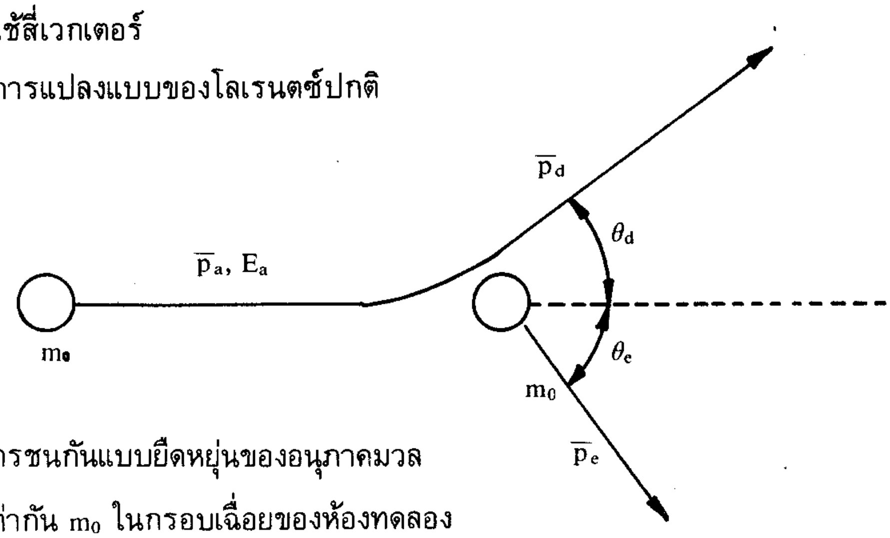
$$-\frac{E^2}{c^2}+p^2 = -m_0^2c^2 = -\frac{(E^c)^2}{c^2} \tag{6.50}$$

ตัวอย่างที่ 2 การชนกันแบบยืดหยุ่นระหว่างอนุภาคซึ่งมีมวลเท่ากันสองอนุภาค

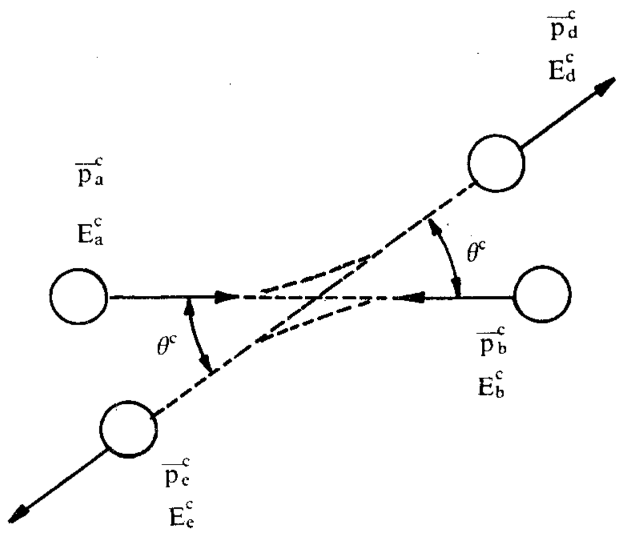
อนุภาคสองอนุภาคชนกันแบบยืดหยุ่น จงคำนวณหา พลังงาน โมเมนตัม และมุมที่อนุภาคทำต่อกัน

วิธีทำ เราจะแบ่งการคำนวณเป็นสองแบบคือ แบบการใช้การแปลงแบบของโลเรนตซ์ปกติกับแบบของการใช้สี่เวกเตอร์

การใช้การแปลงแบบของโลเรนตซ์ปกติ



รูปที่ 44 (ก) การชนกันแบบยืดหยุ่นของอนุภาคมวลเท่ากัน m_0 ในกรอบเฉื่อยของห้องทดลอง



รูปที่ 44 (ข) การชนกันแบบยืดหยุ่นของอนุภาคมวลเท่ากัน m_0 ในกรอบเฉื่อยของศูนย์กลางมวล

อนุภาคตกกระทบ a มีมวลนิ่ง m_0 พลังงาน E_a โมเมนตัม $\overline{p}_a$ ตกกระทบมวล m_0 อีกอนุภาคหนึ่งซึ่งอยู่นิ่งในห้องทดลอง มวลหักเหจากมวลตกกระทบ a ทำมุม θ_d กับแนวตกกระทบ มวลสะท้อนจากมวลนิ่ง b ทำมุม θ_e กับแนวตกกระทบ มวลหักเหมีพลังงาน E_d และโมเมนตัม $\overline{p}_d$ ส่วนมวลสะท้อนมีพลังงาน E_e และโมเมนตัม $\overline{p}_e$ ตามลำดับ ให้การชนกันอยู่ในระนาบ (x,y) ดังนั้น

ก่อนกระทบ

โมเมนตัมทั้งหมดของระบบคือ $\overline{p}_a + \overline{p}_b = \overline{p}_a$ (6.51)

พลังงานทั้งหมดของระบบคือ $E_a + m_0c^2$ (6.52)

จากสมการที่ (6.47) สมมุติว่าศูนย์กลางมวลเคลื่อนไปทางทิศ +x ของห้องทดลอง

ด้วยความเร็ว $\bar{v}$

$$v = \frac{p_{ax}c^2}{E} = \frac{p_{ax}c^2}{E_a + m_0c^2} \tag{6.53}$$

เราจะแปลงสมการต่าง ๆ ให้อยู่ในกรอบของศูนย์กลางมวล ตัวแปรพลวัตทั้งหมดในกรอบเฉื่อยนี้จะมีตัว c อยู่ที่ทางขวาด้านบน จะเห็นว่า

$$\left.\begin{aligned} \overline{p}_a^c &= -\overline{p}_b^c, \quad & E_a^c &= E_b^c \\ \overline{p}_d^c &= -\overline{p}_e^c, \quad & E_d^c &= E_e^c \end{aligned}\right\} \tag{6.54}$$

จากสมการที่ (6.23)

$$p_{a1}^c = \gamma\left(p_{a1} + \frac{iv}{c}p_{a4}\right) \quad : \quad p_{ax}^c = \gamma\left(p_{ax} - \frac{v}{c^2}E_a\right) \tag{6.55}$$

จาก (6.53) $\quad v = \dfrac{p_{ax}c^2}{E_a + m_0c^2}$

$$p_{ax}^c = \frac{1}{\left(1 - \dfrac{p_{ax}^2c^2}{(E_a + m_0c^2)^2}\right)^{1/2}}\left(p_{ax} - \frac{p_{ax}E_a}{E_a + m_0c^2}\right)$$

$$= \left\{\frac{E_a + m_0c^2}{(E_a^2 - p_{ax}^2c^2 + 2m_0c^2E_a + m_0^2c^4)^{1/2}}\right\}\frac{m_0c^2p_{ax}}{E_a + m_0c^2}$$

$$= \frac{m_0c^2p_{ax}}{(2m_0c^2(E_a + m_0c^2))^{1/2}}$$

$$= \left(\frac{m_0c^2}{2(E_a + m_0c^2)}\right)^{1/2} p_{ax} \quad , \quad p_{ax} = \frac{1}{c}(E_a^2 - m_0^2c^4)^{1/2}$$

$$\therefore \quad p_{ax}^c = \left(\frac{m_0(E_a - m_0c^2)}{2}\right)^{1/2} \tag{6.56}$$

จากสมการ (6.54) จะเห็นว่า

$$p_{ax}^c = -p_{bx}^c$$

ดังนั้น

$$p_{bx}^c = -\left(\frac{m_0(E_a - m_0c^2)}{2}\right)^{1/2} \tag{6.57}$$

ในการคำนวณ p_{bx}^c อาจจะใช้วิธีเดียวกับ p_{ax}^c ก็ได้

เราอาจจะคำนวณพลังงานในระบบศูนย์กลางมวลได้ดังนี้ จากสมการที่ (6.46)

$$\begin{aligned}
E_a^c &= \gamma\,(E_a - vp_{ax}) \\
&= \frac{E_a + m_0c^2}{(2m_0c^2(E_a + m_0c^2))^{1/2}} \left\{ E_a - \frac{p_{ax}^2c^2}{E_a + m_0c^2} \right\} \\
&= \frac{E_a^2 - p_{ax}^2c^2 + E_am_0c^2}{\{2m_0c^2(E_a + m_0c^2)\}^{1/2}} \\
&= \frac{m_0c^2(E_a + m_0c^2)}{\{2m_0c^2(E_a + m_0c^2)\}^{1/2}} \\
&= \left\{ \frac{m_0c^2(E_a + m_0c^2)}{2} \right\}^{1/2}
\end{aligned}$$

จากสมการที่ (6.54) $E_a^c = E_b^c$

$$\therefore \quad E^c = E_a^c + E_b^c = \{2m_0c^2(E_a + m_0c^2)\}^{1/2} \tag{6.58}$$

สมการที่ (6.58) อาจจะคำนวณมาจากสมการที่ (6.50) โดยตรงก็ได้

$$-\frac{(E^c)^2}{c^2} = -m_0^2c^2 = -\frac{E^2}{c^2} + p^2 = -\frac{(E_a + m_0c^2)^2}{c^2} + p^2 \tag{6.59}$$

จากสมมาตรของปัญหาจะเห็นว่า (รูปที่ 44 (ข)) อนุภาค a และอนุภาค b วิ่งเข้าหากันในระบบศูนย์-กลางมวลด้วยอัตราเร็วที่เท่ากัน โมเมนตัมมีขนาดเท่ากันแต่ทิศตรงกันข้าม หลังจากชนกันแล้วอนุภาค

ทั้งสองจะเบนออกจากทางเดิมเป็นมุมเท่ากัน ทั้งโมเมนตัม พลังงาน และมวล เป็นไปตามกฎการอนุรักษ์ เนื่องจากการชนกันเป็นการชนกันแบบยืดหยุ่นได้ ดังนั้น

$$\left.\begin{aligned}
p_{dx}^{c} &= p_{ax}^{c}\cos\theta^{c} = \left(\frac{m_0(E_a - m_0c^2)}{2}\right)^{1/2}\cos\theta^{c} \\
p_{ex}^{c} &= -p_{ax}^{c}\cos\theta^{c} = -\left(\frac{m_0(E_a - m_0c^2)}{2}\right)^{1/2}\cos\theta^{c} \\
p_{dy}^{c} &= p_{ax}^{c}\sin\theta^{c} = \left(\frac{m_0(E_a - m_0c^2)}{2}\right)^{1/2}\sin\theta^{c} \\
p_{ey}^{c} &= -p_{ax}^{c}\sin\theta^{c} = -\left(\frac{m_0(E_a - m_0c^2)}{2}\right)^{1/2}\sin\theta^{c} \\
E_d^{c} &= E_e^{c} = \left\{\frac{m_0c^2(E_a + m_0c^2)}{2}\right\}^{1/2}
\end{aligned}\right\} \tag{6.60}$$

เมื่อเราได้ค่าของโมเมนตัม พลังงาน ในระบบศูนย์กลางมวลแล้ว เราอาจจะหาค่าต่าง ๆ ของโมเมนตัม พลังงานหลังการกระทบ ในระบบของห้องทดลองโดยใช้การแปลงแบบของโลเรนตซ์ผกผัน จากสมการชุด (6.23)

$$p_1 = \gamma\left(p_1' - \frac{iv}{c}p_4'\right)$$

$$\therefore\ p_{dx} = \gamma\left(p_{dx}^{c} - \frac{iv}{c}\frac{iE_d^{c}}{c}\right), \quad \text{จากสมการ (6.53)}$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \dfrac{p_{ax}^2c^2}{(E_a + m_0c^2)^2}\right)^{1/2}}\left(p_{dx}^{c} + \frac{v}{c^2}E_d^{c}\right)$$

จาก (6.60), (6.53)
$$p_{dx} = \left\{\frac{E_a + m_0c^2}{(E_a^2 - p_{ax}^2c^2 + 2m_0c^2E_a + m_0^2c^4)^{1/2}}\right\}$$

$$\left\{\left(\frac{m_0(E_a - m_0c^2)}{2}\right)^{1/2}\cos\theta^{c} + \left(\frac{m_0c^2(E_a + m_0c^2)}{2}\right)^{1/2}\right.$$

$$\left.\frac{p_{ax}}{(E_a + m_0c^2)}\right\}$$

ใช้ความสัมพันธ์ $-\frac{E_a^2}{c^2} + p_{ax}^2 = -m_0^2c^2$: ปริมาณไม่เปลี่ยนแปลงของโลเรนตซ์

$$p_{dx} = \left\{ \frac{E_a + m_0c^2}{(2m_0c^2(E_a + m_0c^2))^{1/2}} \right\} \left\{ \left(\frac{m_0(E_a - m_0c^2)}{2} \right)^{1/2} \cos\theta^c \right.$$

$$\left. + \left(\frac{m_0c^2(E_a + m_0c^2)}{2} \right)^{1/2} \frac{(E_a^2 - m_0^2c^4)^{1/2}}{c(E_a + m_0c^2)} \right\}$$

$$= \left(\frac{E_a + m_0c^2}{2m_0c^2} \right)^{1/2} \left\{ \left(\frac{m_0(E_a - m_0c^2)}{2} \right)^{1/2} \cos\theta^c + \left(\frac{m_0(E_a - m_0c^2)}{2} \right)^{1/2} \right\}$$

$$p_{dx} = \frac{(E_a^2 - m_0^2c^4)^{1/2}}{2c} (1 + \cos\theta^c) \tag{6.61}$$

จาก (6.60) $p_{dy} = p_{dy}^c = \left(\frac{m_0(E_a - m_0c^2)}{2} \right)^{1/2} \sin\theta^c$

จากรูปที่ 43 (ก) $\tan\theta_d = \frac{p_{dy}}{p_{dx}} = \dfrac{\left(\frac{m_0}{2} (E_a - m_0c^2) \right)^{1/2} \sin\theta^c}{\frac{(E_a^2 - m_0^2c^4)^{1/2}}{2c} (1 + \cos\theta^c)}$

$$= \frac{(2m_0)^{1/2} c}{(E_a + m_0c^2)^{1/2}} \tan\frac{\theta^c}{2} \tag{6.62}$$

โดยวิธีการที่คล้ายคลึงกัน $\tan\theta_e = \frac{p_{ey}}{p_{ax}}$

$$= \left(\frac{2m_0}{E_a + m_0c^2} \right)^{1/2} c \tan\left(\frac{\pi - \theta^c}{2} \right) \tag{6.63}$$

ลิมิต : อนุภาคเคลื่อนที่ช้า $\left(\frac{2m_0}{E_a + m_0c^2} \right)^{1/2} c \to 1$

$E_a \to m_0c^2$

$$\tan\theta_d = \tan\frac{\theta^c}{2} \quad : \quad \theta_d = \frac{\theta^c}{2}$$

$$\tan\theta_e = \tan\left(\frac{\pi - \theta^c}{2} \right) \quad : \quad \theta_e = \frac{\pi - \theta^c}{2}$$

ทำให้ $\theta_d + \theta_e = \frac{\pi}{2}$ ซึ่งควรจะเป็นในกลศาสตร์แผนเดิม

ลิมิต : อนุภาคเคลื่อนที่เร็วมาก $\left(\frac{2m_0}{E_a + m_0c^2}\right)^{1/2} c \to 0$

$E_a >> m_0c^2$ $\quad \tan\theta_d \to 0 \quad : \quad \theta_d \approx 0$

$\tan\theta_e \to 0 \quad : \quad \theta_e \approx 0$

ซึ่งควรจะเป็นในปรากฏการณ์เชิงสัมพัทธภาพของการชนกันของมวลชนิดเดียวกัน

การใช้สี่เวกเตอร์

ในกรอบเฉื่อยของห้องทดลองสี่เวกเตอร์ก่อนกระทบคือ

$$p_{a1} = p_{ax} = \left(\frac{E_a^2}{c^2} - m_0^2c^2\right)^{1/2} \qquad p_{b1} = p_{bx} = 0$$

$$p_{a2} = p_{ay} = 0 \qquad p_{b2} = p_{by} = 0$$

$$p_{a3} = p_{az} = 0 \qquad p_{b3} = p_{bz} = 0$$

$$p_{a4} = \frac{iE_a}{c} \qquad p_{b4} = im_0c$$

ในกรอบเฉื่อยของห้องทดลองสี่เวกเตอร์หลังกระทบคือ

$$p_{d1} = p_{dx} = \cos\theta_d|\overline{p}_d| = \cos\theta_d\left(\frac{Ed^2}{c^2} - m_0^2c^2\right)^{1/2} \qquad p_{e1} = p_{ex} = \cos\theta_e|\overline{p}_e| = \cos\theta_e\left(\frac{E_e^2}{c^2} - m_0^2c^2\right)^{1/2}$$

$$p_{d2} = p_{dy} = \sin\theta_d\left(\frac{E_d^2}{c^2} - m_0^2c^2\right)^{1/2} \qquad p_{ez} = p_{ey} = -\sin\theta_e\left(\frac{E_e^2}{c^2} - m_0^2c^2\right)^{1/2}$$

$$p_{d3} = p_{dz} = 0 \qquad p_{e3} = p_{ez} = 0$$

$$p_{d4} = \frac{iE_d}{c} \qquad p_{e4} = \frac{iE_e}{c}$$

ในกรอบเฉื่อยของศูนย์กลางมวลอนุภาคทั้งสองมีโมเมนตัมเท่ากัน มีพลังงานเท่ากัน ดังนั้น

$$p_{a1}^c = p_{ax}^c = \left(\frac{E^2}{c^2} - m_0^2c^2\right)^{1/2} = -p_{b1}^c = -p_{bx}^c \quad , \quad E = E_a = E_b = E_d = E_e$$

$$p_{a2}^c = p_{ay}^c = 0 = p_{b2}^c = p_{by}^c$$

$$p_{a3}^c = p_{az}^c = 0 = p_{b3}^c = p_{bz}^c$$

$$p_{a4}^c = \frac{iE}{c} = p_{b4}^c$$

$$p_{d1}^c = \cos\theta^c \left(\frac{E^2}{c^2} - m_0^2c^2\right)^{1/2} = -p_{e1}^c$$

$$p_{d2}^c = \sin\theta^c \left(\frac{E^2}{c^2} - m_0^2c^2\right)^{1/2} = -p_{e2}^c$$

$$p_{d3}^c = 0 = p_{e3}^c$$

$$p_{d4}^c = \frac{iE}{c} = p_{e4}^c$$

พึงสังเกตว่าค่าเหล่านี้ได้จากสมมาตรในสี่มิติ ค่าต่าง ๆ ในระบบศูนย์กลางของมวลทราบหมดแล้ว เหลือแต่การแปลงให้อยู่ในระบบห้องทดลอง

หา E ในเทอมของ E_a ให้ $\bar{\bar{P}}_a = (p_{a1}, p_{a2}, p_{a3}, p_{a4})$, $\bar{\bar{P}}_b = (p_{b1}, p_{b2}, p_{b3}, p_{b4})$ ตามลำดับ โดยที่ $\bar{\bar{P}}_a^c$ และ $\bar{\bar{P}}_b^c$ เป็นเวกเตอร์ชุดเดียวกันในระบบศูนย์กลางของมวล

$$\bar{\bar{P}}_a \cdot \bar{\bar{P}}_b = -E_a m_0 = \bar{\bar{P}}_a^c \cdot \bar{\bar{P}}_b^c \quad : \text{ ค่าที่ไม่เปลี่ยนแปลง}$$

$$= -\left(\frac{E^2}{c^2} - m_0^2c^2\right) - \frac{E^2}{c^2} \quad ; E = E^c{}_a$$

$$2\frac{E^2}{c^2} = E_a m_0 + m_0^2 c^2$$

$$\frac{E^2}{c^2} = \frac{m_0}{2}(E_a + m_0c^2)$$

$$E = \left(\frac{m_0c^2}{2}(E_a + m_0c^2)\right)^{1/2} = E^c{}_a \tag{6.58}$$

การหาความสัมพันธ์ระหว่างมุมการกระเจิงในกรอบเฉื่อยของห้องทดลองกับกรอบเฉื่อยของศูนย์กลางมวลอาจจะหาได้โดย สเกลาร์โปรดักของสี่เวกเตอร์ $P_a = (p_{a1}, p_{a2}, p_{a3}, p_{a4})$ และ $\bar{\bar{P}}_e = (p_{e1}, p_{e2}, p_{e3}, p_{e4})$ แต่การหาความสัมพันธ์นี้ตามสมการ (6.62) จะสะดวกกว่า

6.6 สรุป

6.6.1 สี่เวกเตอร์ของพิกัด

ถ้าพิกัดเฉื่อย s′ เคลื่อนไปทางทิศ +x ของพิกัดเฉื่อย s ด้วยความเร็ว $\bar{v} = (v,0,0)$ โดยที่จุดกำเนิดของ s′ ทับกับจุดกำเนิดของ s ที่เวลา $t' = t = 0$ ถ้าให้ $x_1' = x'$, $x_2' = y'$, $x_3' = z'$, $x_4' = ict'$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$ ตามลำดับแล้ว

$$\begin{vmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma & 0 & 0 & \frac{iv}{c}\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{iv}{c}\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} \qquad (6.9)$$

$\bar{\bar{X}} = (x_1,x_2,x_3,x_4)$ และ $\bar{\bar{X}}' = (x_1,x_2,x_3,x_4)$ เป็นสี่เวกเตอร์ของพิกัด

6.6.2 สี่เวกเตอร์ของความเร็ว

ถ้า $\bar{u}$ เป็นความเร็วของอนุภาคใน s, $\bar{u}'$ เป็นความเร็วของอนุภาคเดียวกันใน s′ s และ s′ เป็นกรอบเฉื่อยซึ่งนิยามไว้ในหัวข้อ 6.6.1 แล้ว

$\bar{\bar{U}} = (U_1,U_2,U_3,U_4)$, $\bar{\bar{U}}' = (U_1',U_2',U_3',U_4')$ เป็นสี่เวกเตอร์โดยที่

$$U_1 = \frac{u_x}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}, \quad U_2 = \frac{u_y}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}, \quad U_3 = \frac{u_z}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

และ $$U_4 = \frac{ic}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

U_1', U_2', U_3' และ U_4' ก็กำหนดโดยทำนองเดียวกัน

6.6.3 สี่เวกเตอร์ของโมเมนตัม

ถ้า $$p_1 = \frac{m_0u_x}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}, \quad p_2 = \frac{m_0u_y}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}, \quad p_3 = \frac{m_0u_z}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

และ $$p_4 = \frac{m_0ic}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \frac{iE}{c}$$ แล้ว

$\bar{\bar{p}} = (p_1,p_2,p_3,p_4)$ เป็นสี่เวกเตอร์

6.6.4 การหมุนของสี่เวกเตอร์

จากสมการการแปลงของสี่เวกเตอร์

$$\bar{\bar{A}}' = \underline{\underline{\alpha}}.\bar{\bar{A}} \tag{6.26}$$

เราอาจจะให้

$$\underline{\underline{\alpha}} = \begin{vmatrix} \gamma & 0 & 0 & \frac{iv}{c}\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{iv}{c}\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & 0 & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & 0 & \cos\phi \end{vmatrix}$$

ซึ่งแสดงการหมุนของสี่เวกเตอร์นั้น

6.6.5 สเกลาร์และสี่เวกเตอร์

ถ้าเหตุการณ์อันหนึ่งปรากฏที่ (x,y,z,t) เราอาจจะหาสี่สเกลาร์ได้ดังนี้

$$s^2 = x^2+y^2+z^2-c^2t^2 = x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2 = s'^2 \tag{6.28}$$

ผิวที่เกิดจากสมการ (6.28) เรียกว่ากรวยแสง (light cone) ซึ่งแบ่งปริมาตรในปริภูมิและเวลาสี่มิติออกเป็นสองส่วน คือ

$s^2 = x^2+y^2+z^2-c^2t^2 < 0$: บริเวณเหมือนเวลา (time-like)

และ $s^2 = x^2+y^2+z^2-c^2t^2 > 0$: บริเวณเหมือนปริภูมิ (space-like)

6.7 คำถามท้ายบท

จงเติมคำในช่องว่างให้ได้ความสมบูรณ์

6.7.1 ถ้า

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \gamma\left(x_1 + \frac{iv}{c}x_4\right) \\ x_4' &= \gamma\left(x_4 - \frac{iv}{c}x_1\right) \end{aligned}\right\} \qquad (6.7)$$

ให้ $\cos\phi = \gamma$, $\sin\phi = \frac{iv}{c}\gamma$ สมการชุด (6.7) แสดง...

ตอบ : การหมุนไปเป็นมุม ϕ ในระนาบ (x_1, x_4)

6.7.2 สี่เวกเตอร์ คือ..

....

ตอบ : ปริมาณใด ๆ ซึ่งสามารถแปลงจากกรอบเฉื่อยหนึ่งไปยังอีกกรอบเฉื่อยหนึ่งได้ด้วยการแปลงแบบของโลเรนตซ์

6.7.3 อนุภาคตัวหนึ่งอยู่ที่ตำแหน่ง (x,y,z,t) สี่เวกเตอร์ของพิกัดของอนุภาคนั้นคือ

x_1 = ...

x_2 = ...

x_3 = ...

x_4 = ...

ตอบ : $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$

6.7.4 ถ้าอนุภาคตัวหนึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\underline{u}$ เทียบกับกรอบเฉื่อย s ดังนั้น สี่เวกเตอร์ของความเร็วของอนุภาคคือ

U_1 = ...

U_2 = ...

U_3 = ...

U_4 = ...

ตอบ : $U_1 = \dfrac{u_x}{\left(1-\dfrac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}$, $U_2 = \dfrac{u_y}{\left(1-\dfrac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}$, $U_3 = \dfrac{u_z}{\left(1-\dfrac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}$

$U_4 = \dfrac{ic}{\left(1-\dfrac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}$

6.7.5 ถ้าอนุภาคตัวหนึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\bar{u}$ เทียบกับกรอบเฉื่อย s ดังนั้น สี่เวกเตอร์ของโมเมนตัมของอนุภาคคือ

p_1 = ...

p_2 = ...

p_3 = ...

p_4 = ...

ตอบ : $p_1 = m_0U_1$, $p_2 = m_0U_2$, $p_3 = m_0U_3$ และ $p_4 = m_0U_4$

6.7.6 การหมุนของสี่เวกเตอร์ตีความหมายได้ 2 อย่างคือ..

....

ตอบ : เวกเตอร์หมุนไปจริง ๆ และแกนของพิกัดหมุนไป

6.7.7 ถ้า $\bar{\bar{p}}$ เป็นสี่เวกเตอร์ p_4 เป็น..

ตอบ : สเกลาร์ในสามมิติ

6.7.8 สี่เวกเตอร์ต่างจากเวกเตอร์ในสามมิติประการหนึ่งคือ ความยาวของสี่เวกเตอร์อาจจะเป็นศูนย์แต่สมาชิกของมัน...

ตอบ : ไม่จำเป็นต้องเป็นศูนย์

6.7.9 เรขาคณิตในปริภูมิและเวลาสี่มิติเป็น...

ตอบ : เรขาคณิตของยูคลิดเทียม

6.7.10 กรวยแสงคือ..

ตอบ : ผิวซึ่งเกิดจากสมการ $s^2 = x^2+y^2+z^2-c^2t^2$

6.7.11 บริเวณเหมือนเวลาคือ...

ตอบ : บริเวณของปริภูมิและเวลาที่แทนด้วยสมการ $s^2 = x^2+y^2+z^2-c^2t^2 < 0$

6.7.12 บริเวณเหมือนปริภูมิคือ..

ตอบ : บริเวณของปริภูมิและเวลาที่แทนได้ด้วยสมการ $s^2 = x^2+y^2+z^2-c^2t^2 > 0$

แบบฝึกหัดบทที่ 6

1. จงพิสูจน์สมการ (6.63)

$$\tan\theta_e = \left(\frac{2m_0}{E_a + m_0c^2}\right)^{1/2} c \tan\left(\frac{\pi - \theta^c}{2}\right)$$

คำแนะนำ : อ่านตัวอย่างที่ 2 บทที่ 6

2. ให้ $\bar{\bar{A}}$ และ $\bar{\bar{B}}$ เป็นสี่เวกเตอร์ จงแสดงว่า $\bar{\bar{A}}.\bar{\bar{B}}$ เป็นปริมาณที่ไม่เปลี่ยนแปลงของโลเรนตซ์

คำแนะนำ : อ่าน 6.5.2

3. สี่เวกเตอร์ของเลขจำนวนคลื่น (The wave number four-vector)

คลื่นในระนาบมีทิศตั้งฉากกับหน้าคลื่นเป็นเวกเตอร์ ขนาด 1 หน่วย $\hat{n}$ อยู่ในระนาบ (x,y) ของระบบพิกัด s คลื่นมีความถี่ ν มีค่าความเร็วเฟสในทิศตั้งฉากกับหน้าคลื่น w ให้คลื่นนั้นแทนด้วยฟังก์ชัน

$$\Psi = A\cos 2\pi\nu\left(t - \frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{w}\right)$$

โดย α เป็นมุมระหว่าง $\hat{n}$ กับแกน x ให้ระบบพิกัด s' เคลื่อนไปทางทิศ +x ของระบบพิกัด ด้วยความเร็ว v เทียบกับ s ให้คลื่นเดียวกันนี้แทนด้วยฟังก์ชันใน s' เป็น

$$A'\cos 2\pi\nu'\left(t' - \frac{x'\cos\alpha' + y'\sin\alpha'}{w'}\right)$$

จากความไม่เปลี่ยนแปลงเฟสของคลื่นระนาบทำให้

$$F = \nu\left(t - \frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{w}\right) = \nu'\left(t' - \frac{x'\cos\alpha' + y'\sin\alpha'}{w'}\right) \quad (6.59)$$

ถ้าเรากำหนดให้ $\bar{\bar{\sigma}} = \left(\frac{\nu}{w}\hat{n}, \frac{i\nu}{c}\right) = \left(\frac{\nu}{w}\cos\hat{i}, \frac{\nu}{w}\sin\alpha\hat{j}, 0\hat{k}, \frac{i\nu}{c}\right)$ หรือ

$= \left(\frac{\nu}{w}\cos\alpha, \frac{\nu}{w}\sin\alpha, 0, \frac{i\nu}{c}\right)$ จงแสดงว่า $\bar{\bar{\sigma}}$ เป็นสี่เวกเตอร์

คำแนะนำ : $$-F = \sum_{i=1}^{4} \sigma_i x_i = \sum_{j=1}^{4} \sigma_j' x_j'$$

แทนค่า x_j' จากสมการที่ (6.10) ได้ความสัมพันธ์ของ σ_i และ σ_j' ในรูปของสี่เวกเตอร์

4. สี่เวกเตอร์ของความหนาแน่นกระแส (The current density four-vector)

ถ้า ρ_0 เป็นความหนาแน่นประจุในกรอบเฉื่อยซึ่งประจุนั้นอยู่นิ่ง ๆ จงแสดงว่า $\rho_0 U_i$ เป็นสี่เวกเตอร์เมื่อ U_i เป็นสมาชิกของสี่เวกเตอร์ของความเร็ว

คำแนะนำ : U_i เป็นสี่เวกเตอร์อยู่แล้ว

5. ถ้า $\bar{\bar{X}} = (x_1, x_2, x_3, x_4 = ict)$ และ $\bar{\bar{X}}' = (x_1', x_2', x_3', x_4' = ict')$ จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{\partial}{\partial x_i}$ และ $\frac{\partial}{\partial x_j'}$ และจงแสดงว่าถ้า $\bar{\bar{A}} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ เป็นสี่เวกเตอร์แล้ว $\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} A_i$ เป็นสี่สเกลาร์

คำแนะนำ : $$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial x_j'}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j'}$$

6. จงแสดงว่า $\bar{\bar{A}} = \left(A_x, A_y, A_z, \frac{i\phi}{c}\right)$ เป็นสี่เวกเตอร์

คำแนะนำ : $$\frac{\partial}{\partial t}\bar{B} = -\nabla \times \bar{E} \qquad (ก)$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\bar{E} + \mu_0 \bar{j} = \nabla \times \bar{B} \qquad (ข)$$

$$\nabla . \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (ค)$$

$$\nabla . \bar{B} = 0 \qquad (ง)$$

จาก (ง) $$\bar{B} = \nabla \times \bar{A}\ ,\quad \bar{A} = (A_x, A_y, A_z) \qquad (จ)$$

แทน (จ) ใน (ก) $$\bar{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\bar{A} \qquad (ฉ)$$

แทน (จ) และ (ฉ) ใน (ข)

$$-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{\nabla} + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi\right) + \mu_0 \bar{j} = \nabla \times \nabla \times \bar{A} = \nabla(\nabla . \bar{A}) - \Delta\bar{A} \qquad (ช)$$

สมการ (ช) อาจจะแยกเป็น

$$\Delta\bar{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{A} = -\mu_0 \bar{j} \qquad (ซ)$$

และ $$\nabla\left(\nabla . \bar{A} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{c^2}\phi\right) = 0 \qquad (ฌ)$$

แสดงว่า $\bar{\nabla}.\bar{A} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\phi\right) = 0$ ซึ่งอาจจะทำให้อยู่ในรูป

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} A_i = 0$$

7. ปรากฏการณ์ดอปเพลอร์เชิงสัมพัทธภาพโดยใช้สี่เวกเตอร์

จงหาปรากฏการณ์ดอปเพลอร์เชิงสัมพัทธภาพโดยใช้สี่เวกเตอร์ โดยกำหนดให้ $E = h\nu$, $p = \frac{h\nu}{c}$

คำแนะนำ : ให้ s' เป็นกรอบเฉื่อยซึ่งเคลื่อนที่ไปทางทิศ $+x$ ของกรอบเฉื่อย s จากสมการที่ (6.23)

$$p_4' = \gamma\left(p_4 - \frac{iv}{c}p_1\right)$$

$$\frac{ih\nu'}{c} = \gamma\left(\frac{ih\nu}{c} - \frac{iv}{c}\ \frac{h\nu}{c}\right)$$

จะเห็นว่า ถ้าเราจำกัดให้ $\bar{v}$ เป็น $(v,0,0)$ แล้ว

$$\frac{ih\nu'}{c} = \gamma\left(\frac{ih\nu}{c} - \frac{i\bar{v}}{c}.\hat{n}\ \frac{h\nu}{c}\right)$$ ซึ่งเท่ากับสมการที่ (4.6)

8. ในตัวอย่างที่ 2 จากความสัมพันธ์ $\bar{\bar{p}}_d.\bar{\bar{p}}_e = \bar{\bar{p}}_d^c.\bar{\bar{p}}_e^c$ และจงแสดงว่า ในกรณีซึ่งอนุภาคมีพลังงานน้อย $E \approx m_0c^2$ มุมระหว่างอนุภาคหลังกระทบเป็น 90°

9. อนุภาคมีมวล m_0 มีพลังงาน E_a กระทบกับมวลขนาดเท่ากันซึ่งอยู่นิ่งในห้องทดลองหลังกระทบแล้วมวลทั้งสองติดกัน ถ้าอนุภาคตกกระทบและอนุภาคอยู่นิ่งมีสี่โมเมนตัมเป็น $\bar{\bar{p}}_a$ และ $\bar{\bar{p}}_b$ ตามลำดับ มวลติดกันมีสี่โมเมนตัม $\bar{\bar{p}}_d$ จงพิจารณาในกรอบเฉื่อยของศูนย์-กลางมวล ซึ่งอนุภาคทั้งสองมีพลังงานเท่ากัน $= E^c$ หลังกระทบแล้วอนุภาคมีมวล $Mc^2 = 2E^c$ อยู่นิ่ง ๆ โดยการพิจารณา $\bar{\bar{p}}_a.\bar{\bar{p}}_b$ จงหา E^c ในเทอมของ E_a และจากการพิจารณา $\bar{\bar{p}}_b.\bar{\bar{p}}_d$ จงหาพลังงานของมวลที่ติดกันในกรอบเฉื่อยของศูนย์กลางมวล

คำแนะนำ : อ่านตัวอย่างที่ 2

10. จงแสดงว่า เวลาเฉพาะระหว่างเหตุการณ์สองเหตุการณ์ คือ ความยาวของสี่เวกเตอร์ระหว่างเหตุการณ์ทั้งสอง

11. π° เมซอน มีมวล m พลังงาน E สลายตัวในห้องทดลอง เป็นโฟตอนสองตัว ตัวหนึ่งทำมุม θ^c กับทิศทางเดิมของ π° เมซอน, θ^c เป็นมุมในระบบพิกัดศูนย์กลางมวล จงหามุมระหว่างโฟตอนทั้งสองในระบบพิกัดของห้องทดลอง โดยใช้สี่เวกเตอร์