บทที่ 5
ความเร็ว โมเมนตัม และพลังงาน

วัตถุประสงค์

1. ให้สามารถคำนวณหาความเร็วในกรอบเฉื่อยที่ต่างกัน และให้สามารถคำนวณการแปลงความเร็วระหว่างกรอบเฉื่อยสองกรอบ
2. ให้สามารถคำนวณกฎอนุรักษ์โมเมนตัม และกฎอนุรักษ์พลังงานระหว่างกรอบเฉื่อยต่าง ๆ ได้
3. ให้สามารถคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างมวลกับพลังงานได้

5.1 ความเร็วเฉพาะ (Proper Velocity)

5.1.1 ความเร็วสองชนิด

เมื่อนักขี่จักรยานยนต์ต้องการจะหาอัตราเร็วเฉลี่ยระหว่างสองเมือง สมมุติว่าเมืองทั้งสองนั้นอยู่ห่างกัน 80 กิโลเมตร เขาจะหาอัตราเร็วได้โดยเอาระยะทางทั้งหมดหารด้วยเวลาที่เขาใช้ สมมุติว่าเขาใช้เวลาไป 2 ชั่วโมง ดังนั้นอัตราเร็วของเขาก็คือ 40 กิโลเมตรต่อ 1 ชั่วโมง แต่ปกติแล้วจะไม่มีใครคอยถามเขาว่าเขาวัดเวลาได้อย่างไร เขาอาจจะใช้เวลาของนาฬิกาแต่ละเมืองช่วยเขาในการวัดเวลา เช่นเมื่อเขาออกจากเมืองที่เขาเริ่มต้นการเดินทางเขาสังเกตเห็นว่านาฬิกาในเมืองนั้นเป็น 10.00 น. ต่อมาเขามาถึงเมืองปลายทางเขาสังเกตเห็นว่าเขาไปถึงเมื่อเวลาเที่ยงโดยดูเวลาที่นาฬิกาในเมืองนั้น เขาอาจจะทำอีกอย่างหนึ่งคืออ่านเวลาเอาจากนาฬิกาที่เขาเอาติดตัวไปด้วย ในกลศาสตร์แผนเดิมวิธีการทั้งสองนี้นับว่าให้เวลาถูกต้อง

เราจะเห็นว่านาฬิกาที่ติดตัวเขาไปบอกเวลาเฉพาะของการเดินทางนี้ ในขณะที่นาฬิกาประจำเมือง บอกเวลาไม่เฉพาะ แต่เมื่ออัตราเร็วสูงขึ้นนาฬิกาทั้งสองจะไม่ตรงกัน เวลาทั้งสองชนิดมีประโยชน์ในการคำนวณทางสัมพัทธภาพ วิธีเลือกตามธรรมชาติที่มักใช้กันอยู่ในการคำนวณความเร็วในกรอบเฉื่อยเฉพาะกรอบใดกรอบหนึ่งก็คือ ผู้สังเกตจะวัดระยะทางที่เขาต้องการทราบความเร็วของอนุภาค แล้วหารด้วยเวลาซึ่งอ่านจากนาฬิกาซึ่งอยู่นิ่งเทียบกับกรอบเฉื่อยนั้น ในกรณีนี้เราจะได้ความเร็วไม่เฉพาะ แต่เป็นวิธีการซึ่งนิยมใช้ในการหาความเร็ว

5.1.2 ความเร็วเฉพาะและความเร็วไม่เฉพาะ

ในระบบพิกัด s ซึ่งอยู่นิ่งเทียบกับผู้สังเกตการณ์ สมมุติให้อนุภาคตัวหนึ่งเคลื่อนที่ไปมีตำแหน่งเป็น $x = x(t)$, $y = y(t)$ และ $z = z(t)$ โดยที่ t เป็นเวลาของนาฬิกาซึ่งอยู่นิ่งเทียบกับ s ดังนั้นความเร็วไม่เฉพาะของอนุภาค จะเป็น

$$\bar{u} = (u_x, u_y, u_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \tag{5.1}$$

$$u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \tag{5.2}$$

เวลาเฉพาะสำหรับอนุภาค ก็คือ
$$\tau = t\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2} \tag{5.3}$$

ความเร็วเฉพาะของอนุภาคอาจจะคำนวณหาได้ดังนี้

$$U_x = \frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} \frac{dx}{dt} \tag{5.4}$$

$$U_y = \frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} \frac{dy}{dt} \tag{5.5}$$

$$U_z = \frac{dz}{d\tau} = \frac{1}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} \frac{dz}{dt} \tag{5.6}$$

$$\overline{U} = (U_x, U_y, U_z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} (u_x, u_y, u_z) \tag{5.7}$$

5.2 มวลและกฎการอนุรักษ์โมเมนตัม

5.2.1 กฎการอนุรักษ์โมเมนตัมในกลศาสตร์แผนเดิม

ให้ระบบพิกัด s' เคลื่อนที่ไปทางทิศ $+x$ ของระบบพิกัด s ด้วยความเร็วคงที่ v ให้อนุภาคซึ่งมีมวล m_a และ m_b มีความเร็ว $\bar{u}_a$ และ $\bar{u}_b$ ในระบบพิกัด s อนุภาคทั้งสองวิ่งเข้าชนกันทำให้เกิดอนุภาค m_c และ m_d มีความเร็ว $\bar{u}_c$ และ $\bar{u}_d$ ตามลำดับ ในกลศาสตร์แผนเดิมกฎการอนุรักษ์โมเมนตัมก็คือ

$$m_a\bar{u}_a + m_b\bar{u}_b = m_c\bar{u}_c + m_d\bar{u}_d \tag{5.8}$$

หากเราจะพิจารณากฎการอนุรักษ์โมเมนตัมนี้ในระบบพิกัด s' จะเห็นว่า จากสมการ (1.51)

$$\left.\begin{aligned} u'_{ax} &= u_{ax} - v \\ u'_{ay} &= u_{ay} \\ u'_{az} &= u_{az} \end{aligned}\right\} \quad \text{สมการชุดนี้เป็นจริงสำหรับอนุภาค b, c และ d ด้วย} \tag{5.9}$$

แทนสมการชุด (5.9) ลงในสมการ (5.8)

$$m_a u'_{ax} + m_b u'_{bx} + m_a v + m_b v = m_c u'_{cx} + m_d u'_{dx} + m_c v + m_d v \tag{5.10}$$

$$m_a u'_{ay} + m_b u'_{by} = m_c u'_{cy} + m_d u'_{dy} \tag{5.11}$$

$$m_a u'_{az} + m_b u'_{bz} = m_c u'_{cz} + m_d u'_{dz} \tag{5.12}$$

จากสมการ (5.10) ความเร็ว v เป็นความเร็วคงที่ใด ๆ แสดงให้เห็นว่า

$$m_a u'_{ax} + m_b u'_{bx} = m_c u'_{cx} + m_d u'_{dx} \tag{5.13}$$

$$m_a + m_b = m_c + m_d \tag{5.14}$$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า หากกฎการอนุรักษ์โมเมนตัมเป็นความจริงแล้วกฎการอนุรักษ์ของมวลต้องเป็นความจริงด้วย ผลบวกของมวลก่อนการกระทบกับผลบวกของมวลหลังการกระทบจะต้องเท่ากัน แต่การขยายกฎอันนี้ให้ครอบคลุมปรากฏการณ์สัมพัทธภาพเข้าด้วยนั้นหาได้เป็นงานที่ง่ายไม่ โมเมนตัมไม่ใช่มวลคูณด้วยความเร็วอีกต่อไป แต่เป็นฟังก์ชันของความเร็วคูณกับความเร็วเฉพาะซึ่งจะได้แสดงต่อไป

5.2.2 โมเมนตัมในทฤษฎีสัมพัทธภาพ

จากสมการ (3.33)

$$\Delta\bar{x}' = \Delta\bar{x} + \bar{v}\left\{\frac{\Delta\bar{x}.\bar{v}}{v^2}(\gamma - 1) - \Delta t\gamma\right\} \tag{5.15}$$

$$\Delta t' = \Delta t\gamma\left\{1 + \frac{\bar{v}}{c^2}\cdot\frac{\Delta\bar{x}}{\Delta t}\right\} \tag{5.16}$$

$$\lim_{\Delta t' \to 0} \frac{\Delta\bar{x}'}{\Delta t'} = \bar{u}' = \left[\frac{\bar{u}}{\gamma} + \bar{v}\left\{\frac{\bar{u}.\bar{v}}{v^2}\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) - 1\right\}\right]\frac{1}{\left(1 - \frac{\bar{v}.\bar{u}}{c^2}\right)} \tag{5.17}$$

โดยทำนองเดียวกันจากสมการ (3.33)′

$$\bar{u} = \left[\frac{\bar{u}'}{\gamma} + \bar{v}\left\{\frac{\bar{u}'.\bar{v}}{v^2}\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) + 1\right\}\right]\frac{1}{\left(1 + \frac{\bar{v}.\bar{u}'}{c^2}\right)} \tag{5.18}$$

จะเห็นว่า สมการ (5.17) อาจจะเขียนให้อยู่ในรูป (4.17) ได้ ถ้าหากให้ $\bar{v} = (v,0,0)$ ถ้าหากเราเลือกแกน z ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{u}'$ ตั้งฉากกับแกน z แล้ว เราอาจจะเขียนสมการ (4.17) เสียใหม่ได้ดังนี้

$$u'\cos\theta' = \frac{u\cos\theta - v}{1 - \frac{uv\cos\theta}{c^2}}, \quad u'\sin\theta' = \frac{u\sin\theta}{\gamma\left(1 - \frac{uv\cos\theta}{c^2}\right)} \tag{5.19}$$

จากสมการ (5.19)

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma\left(\cos\theta - \frac{v}{u}\right)} \tag{5.20}$$

$$\begin{aligned} u'^2\cos^2\theta' + u'^2\sin^2\theta' &= u'^2 \\ &= \left(u^2\cos^2\theta + v^2 - 2uv\cos\theta + \frac{u^2}{\gamma^2}\sin^2\theta\right)\frac{1}{\left(1 - \frac{uv\cos\theta}{c^2}\right)^2} \end{aligned}$$

$$u' = \frac{u\left\{1 + \frac{v^2}{u^2} - \frac{2v}{u}\cos\theta - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right\}^{1/2}}{\left(1 - \frac{vu\cos\theta}{c^2}\right)} \tag{5.21}$$

จากสมการที่ (5.21) เราจะเห็นว่า

$$u'^2 = u^2\left\{1-\frac{2v}{u}\cos\theta+\frac{v^2}{u^2}-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right\}\frac{1}{\left(1-\frac{vu\cos\theta}{c^2}\right)^2}$$

$$= \left\{u^2-2vu_x+v^2-\frac{v^2u^2}{c^2}(1-\cos^2\theta)\right\}\frac{c^2}{\left(c^2-2vu\cos\theta+\frac{v^2u^2\cos^2\theta}{c^2}\right)}$$

$$= \left\{u^2c^2-2vu_xc^2+v^2c^2-v^2u^2+v^2u_x^2\right\}\frac{1}{\left(c^2-2vu_x+\frac{v^2u_x^2}{c^2}\right)}$$

$$= \frac{u^2c^2-2vu_xu^2+\frac{v^2u_x^2u^2}{c^2}+c^2v^2-2vu_xc^2+v^2u_x^2-u^2v^2+2vu_xu^2-\frac{v^2u_x^2u^2}{c^2}}{\left(c^2-2vu_x+\frac{v^2u_x^2}{c^2}\right)}$$

$$= u^2+(c^2-u^2)\frac{\left(v^2-2vu_x+\frac{v^2u_x^2}{c^2}\right)}{\left(c^2-2vu_x+\frac{v^2u_x^2}{c^2}\right)}$$

$$\frac{u'^2-u^2}{c^2-u^2} = \frac{v^2-2vu_x+\frac{v^2u_x^2}{c^2}}{c^2-2vu_x+\frac{v^2u_x^2}{c^2}}$$

$$\frac{u^2-u'^2}{c^2-u^2} = \frac{-v^2+2vu_x-\frac{v^2u_x^2}{c^2}}{c^2-2vu_x+\frac{v^2u_x^2}{c^2}}$$

$$\frac{c^2-u'^2-c^2+u^2}{c^2-u^2} = \frac{c^2-v^2-c^2+2vu_x-\frac{v^2u_x^2}{c^2}}{c^2-2vu_x+\frac{v^2u_x^2}{c^2}}$$

$$\therefore \quad \frac{c^2 - u'^2}{c^2 - u^2} = \frac{c^2 - v^2}{c^2 - 2vu_x + \frac{v^2u_x^2}{c^2}}$$

$$\frac{1 - \frac{u'^2}{c^2}}{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{2vu_x}{c^2} + \frac{v^2u_x^2}{c^4}\right)}$$

$$\therefore \quad \left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right) = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \qquad (5.22)$$

จาก (5.22) จะเห็นว่า

$$\left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{vu_y}{c^2}\right) = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

และถ้าหากเลือกแกนให้เหมาะสมสมการชนิดเดียวจะเป็นจริงสำหรับ u_z ด้วย เราอาจจะเขียนสมการ (5.22) เสียใหม่ดังนี้

$$\left(1 - \frac{\bar{v}.\bar{u}}{c^2}\right)\left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2} \qquad \mathbf{(5.23)}$$

ถ้าหาก $\bar{u}'$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ แล้ว สมการ (5.18) จะกลายเป็น

$$\bar{u} = \bar{v} + \frac{\bar{u}'}{\gamma} \qquad (5.24)$$

ในการขยายเรื่องของโมเมนตัมจากกลศาสตร์แผนเดิมไปสู่กลศาสตร์ในทฤษฎีสัมพัทธ-ภาพพิเศษ นิยมที่จะให้มวลเป็นฟังก์ชันของขนาดของความเร็ว[8] ดังนั้นถ้า S' เป็นระบบพิกัดซึ่งเคลื่อนที่ไปทางทิศ +x ของระบบพิกัด S ด้วยความเร็วคงที่ $\bar{V}$

$$\bar{p} = m\bar{u} \quad \text{ใน s และ} \qquad (5.25)$$

$$\bar{p}' = m'\bar{u}' \quad \text{ใน s}' \qquad (5.26)$$

---

8 การตีความหมายของมวลตามแนวนี้ทำให้เกิดปัญหามวลตามขวางและมวลตามยาว (ดูใน Goldstein, H., **Classical Mechanics**, Reading: Addison-Wesley, 1974 หน้า 205) แต่ปัญหานี้แก้ได้โดยการตีความหมายปรากฏ-การณ์สัมพัทธภาพใหม่ (ดูใน พิสิทฐ์ วรสิงห์, **ความหมายอีกนัยหนึ่งของทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ** วารสารวิจัย มหาวิทยาลัยรามคำแหง, 2, 96, ปีที่ 4)

โดยที่
$$m = m(u) = f(u) \quad (5.27)$$
$$m' = m'(u') = f(u') \quad (5.28)$$

ฟังก์ชัน $m'(u') = f(u')$ เป็นฟังก์ชันเดียวกับ $m(u) = f(u)$ ตามสัจพจน์ของทฤษฎีสัมพัทธภาพ

ในลำดับต่อไปเราจะหาฟังก์ชัน f โดยกำหนดให้กฎการอนุรักษ์โมเมนตัมเป็นจริงสำหรับทุก ๆ กรอบเฉื่อย ให้อนุภาคสองอนุภาคคือ อนุภาคที่ 1 และอนุภาคที่ 2 เป็นอนุภาคที่เหมือนกัน มีความเร็ว $\bar{u}_1$ และ $\bar{u}_2$ ตามลำดับในกรอบ s ดังนั้น ความเร็วของอนุภาคทั้งสองในกรอบเฉื่อย s' จะหาได้จากสมการที่ (5.17) ให้ความเร็วก่อนการชนกันของอนุภาคทั้งสองมีความสัมพันธ์กันดังนี้

$$\bar{u}_2' = -\bar{u}_1 \quad (5.29)$$

จากสมการ (5.17) (5.18) และ (5.29) จะเห็นว่า

$$\bar{u}_1' = -\bar{u}_2 \quad (5.30)$$

ความเร็ว $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_1'$ และ $\bar{u}_2'$ นี้เป็นความเร็วก่อนการชนกัน หลังการชนกันแล้วให้อนุภาคมีความเร็ว $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ ใน s และ $\underline{u}_1', \underline{u}_2'$ ใน s' เราจะพิจารณากรณีพิเศษ คือกรณีซึ่ง $\bar{u}_1$ และ $\underline{u}_1$ มีทิศตรงกันข้ามพอดี ให้

$$\underline{u}_1 = -\alpha\bar{u}_1 \quad (5.31)$$

α เป็นเลขบวกใด ๆ จากเหตุผลในเรื่องของสมมาตร จากสมการ (5.29)

$$\underline{u}_2' = -\alpha\bar{u}_2' \quad (5.32)$$

ทั้งนี้เนื่องจากความจริงที่ว่าความเร็วของอนุภาคที่ 2 เทียบกับ s' จะต้องเหมือนกับความเร็วของอนุภาคที่ 1 เทียบกับ s จากสมการที่ (5.32), (5.29) และ (5.31)

$$\underline{u}_2' = -\alpha\bar{u}_2' = \alpha\bar{u}_1 = -\underline{u}_1 \quad (5.33)$$

จากสมการที่ (5.17) เพื่อความง่าย พิจารณาเฉพาะ $\bar{v} = (v,0,0)$ และความเร็วตามแนวแกน x

$$u_{2x}' = \frac{u_{2x} - v}{1 - \frac{vu_{2x}}{c^2}} = -u_{1x}$$

$$u'_{1x} = \frac{u_{1x} - v}{1 - \frac{vu_{1x}}{c^2}} = \frac{-u'_{2x} - v}{1 + \frac{vu'_{2x}}{c^2}} = -u_{2x}$$

โดยที่ u_{1x} เป็นสมาชิกของ $\underline{u}_1$, u_{2x} เป็นสมาชิกของ $\underline{u}_2$, u'_{1x} เป็นสมาชิกของ $\underline{u}'_1$ และ u'_{2x} เป็นสมาชิกของ $\underline{u}'_2$ ตามลำดับ ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า

$$\underline{u}'_1 = -\underline{u}_2 \tag{5.34}$$

จากกฎการอนุรักษ์โมเมนตัมของอนุภาคในระบบพิกัด s เราอาจจะเขียนได้ว่า

$$f(u_1)\bar{u}_1 + f(u_2)\bar{u}_2 = f(|\underline{u}_1|)\underline{u}_1 + f(|\underline{u}_2|)\underline{u}_2 \tag{5.35}$$

สมมุติว่าความเร็วของอนุภาคที่ 1 ตั้งฉากกับความเร็วของ s′ นั่นคือ $\bar{u}_1 \perp \bar{v}$

$$\therefore \quad (\bar{u}_1.\bar{v}) = 0 \tag{5.36}$$

จาก (5.29) $$(\bar{u}'_2.\bar{v}) = 0 \tag{5.37}$$

จาก (5.31) $$(\underline{u}_1.\bar{v}) = 0 \tag{5.38}$$

จาก (5.33) $$(\underline{u}'_2.\bar{v}) = 0 \tag{5.39}$$

เราอาจจะแปลง ความเร็ว $\bar{u}_2$ และ $\bar{u}'_2$ โดยใช้สมการ (5.24) ได้ดังนี้ $(\bar{u}'_2 \perp \bar{v})$

$$\bar{u}_2 = \frac{\bar{u}'_2}{\gamma} + \bar{v} \tag{5.40}$$

แทน $\bar{u}'_2$ ด้วย $-\bar{u}_1$ $$\bar{u}_2 = \bar{v} - \frac{\bar{u}_1}{\gamma} \tag{5.41}$$

ดังนั้น $$u_2^2 = (\bar{u}_2.\bar{u}_2) = \frac{u_1^2}{\gamma^2} + v^2 \quad , \quad \bar{u}_1.\bar{v} = 0 \tag{5.42}$$

โดยทำนองเดียวกัน

$$\left.\begin{aligned} \underline{u}_2 &= \frac{\underline{u}'_2}{\gamma} + \bar{v} \\ \text{จาก (5.33)} \quad \underline{u}_2 &= \frac{-\underline{u}_1}{\gamma} + \bar{v} \end{aligned}\right\} \tag{5.43}$$

$$(\underline{u}_2.\underline{u}_2) = \frac{\underline{u}_1.\underline{u}_1}{\gamma^2} + v^2 \tag{5.44}$$

แทนค่า (5.41), (5.42), (5.43) และ (5.44) ลงในสมการ (5.35)

$$f(u_1)\bar{u}_1 + f\left(\left\{\frac{u_1^2}{\gamma^2} + v^2\right\}^{1/2}\right)\left(-\frac{\bar{u}_1}{\gamma} + \bar{v}\right) = f(|\underline{u}_1|)\underline{u}_1 + f\left(\left\{\frac{\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_1}{\gamma^2} + v^2\right\}^{1/2}\right)$$

$$\left(-\frac{\underline{u}_1}{\gamma} + \bar{v}\right)$$

$$\therefore \quad \left[f(u_1) - \frac{1}{\gamma} f\left(\left\{\frac{u_1^2}{\gamma^2} + v^2\right\}^{1/2}\right)\right]\bar{u}_1 + f\left(\left\{\frac{u_1^2}{\gamma^2} + v^2\right\}^{1/2}\right)\bar{v}$$

$$= \left[f(|\underline{u}_1|) - \frac{1}{\gamma} f\left(\left\{\frac{\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_1}{\gamma^2} + v^2\right\}^{1/2}\right)\right]\underline{u}_1 + f\left(\left\{\frac{\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_1}{\gamma^2} + v^2\right\}^{1/2}\right)\bar{v} \tag{5.45}$$

เอา $\bar{v}$ ทำการคูณแบบสเกลาร์ (dot product) กับสมการ (5.45) ได้

$$f\left(\left\{\frac{u_1^2}{\gamma^2} + v^2\right\}^{1/2}\right) = f\left(\left\{\frac{\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_1}{\gamma^2} + v^2\right\}^{1/2}\right) \tag{5.46}$$

ถ้าฟังก์ชันในสมการ (5.46) เป็นฟังก์ชันที่ราบเรียบ (monotonic function) แล้ว

$$|\underline{u}_1| = u_1 \tag{5.47}$$

และจากสมการที่ (5.31) $\alpha = 1$ ย้อนกลับไปดูสมการที่ (5.45) ใหม่ จะเห็นว่าสมการที่ (5.47) ทำให้

$$\left[f(u_1) - \frac{1}{\gamma} f\left(\left\{\frac{u_1^2}{\gamma^2} + v^2\right\}^{1/2}\right)\right](\bar{u}_1 - \underline{u}_1) = 0 \tag{5.48}$$

และจากสมการที่ (5.31) และ (5.47) $\bar{u}_1 - \underline{u}_1 = 2\bar{u}_1 \neq 0$ แสดงว่า

$$f(u_1) = \frac{1}{\gamma} f\left(\left\{\frac{u_1^2}{\gamma^2} + v^2\right\}^{1/2}\right) \tag{5.49}$$

ดังนั้นกฎการอนุรักษ์โมเมนตัมของอนุภาคจะเป็นจริงได้ $f(u_1)$ จะต้องเป็นไปตามสมการ (5.49) ทุก ๆ ค่าของ u และ v หาลิมิต $u_1 \rightarrow 0$

$$f(v) = \frac{f(0)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \tag{5.50}$$

ซึ่งมักจะนิยมเขียนสมการ (5.50) ในรูปมวลสัมพัทธ์ m ดังนี้

$$m = \frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \tag{5.51}$$

โดยที่ $m_0 = f(0)$ คือมวลเมื่ออนุภาคอยู่นิ่ง ๆ เรียกสั้น ๆ ว่า มวลนิ่งหรือมวลเฉพาะของอนุภาค ซึ่งเท่ากับมวลในกลศาสตร์ของนิวตัน และ โมเมนตัมเชิงสัมพัทธภาพ อาจจะนิยามได้ดังนี้

$$\bar{p} = \frac{m_0\bar{u}}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} \tag{5.52}$$

กฎการอนุรักษ์โมเมนตัม ในสมการ (5.35) อาจจะเขียนได้ว่า

$$\frac{m_{10}}{\left(1-\frac{u_1^2}{c^2}\right)^{1/2}}\bar{u}_1 + \frac{m_{20}}{\left(1-\frac{u_2^2}{c^2}\right)^{1/2}}\bar{u}_2 = \frac{\underline{m}_{10}}{\left(1-\frac{u_1.u_1}{c^2}\right)^{1/2}}\underline{u}_1 + \frac{\underline{m}_{20}}{\left(1-\frac{u_2.u_2}{c^2}\right)^{2}}{}^{1/2}\,\underline{u}_2 \tag{5.53}$$

$\underline{m}$: มวลหลังจากการชนกัน

5.3 กฎการอนุรักษ์พลังงาน

5.3.1 ผลอันเนื่องมาจากกฎการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงสัมพัทธภาพ

สมมุติว่า s′ เคลื่อนที่ผ่าน s ไปด้วยความเร็ว $\bar{v} = (v,0,0)$ ดังนั้นกฎการอนุรักษ์โมเมนตัม (5.53) ในแนวแกน x อาจจะเขียนได้ว่า

$$\frac{m_{10}}{\left(1-\frac{u_1^2}{c^2}\right)^{1/2}}u_{1x} + \frac{m_{20}}{\left(1-\frac{u_2^2}{c^2}\right)^{1/2}}u_{2x} = \frac{\underline{m}_{10}}{\left(1-\frac{\underline{u}_1\cdot\underline{u}_1}{c^2}\right)^{1/2}}|\underline{u}_{1x}| + \frac{\underline{m}_{20}}{\left(1-\frac{\underline{u}_2\cdot\underline{u}_2}{c^2}\right)^{1/2}}|\underline{u}_{2x}| \tag{5.54}$$

เราต้องการจะเปลี่ยนสมการ (5.54) ให้อยู่ในรูปที่ผู้สังเกตการณ์ใน s′ จะสังเกตเห็น จากสมการที่ (4.17) จะเห็นว่า

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1-\frac{vu_x}{c^2}} \quad , \quad u_y' = \frac{u_y}{\gamma\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)} \quad , \quad u_z' = \frac{u_z}{\gamma\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)}$$

ทำให้ $u_x'^2 = \dfrac{u_x^2+v^2-2u_xv}{\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)^2}$, $u_y^2 = \dfrac{u_y^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)^2}$

$$u_z'^2 = \frac{u_z^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)^2} \tag{5.55}$$

$$\therefore \quad u'^2 = u_x'^2+u_y'^2+u_z'^2 = \frac{u_x^2+u_y^2+u_z^2+v^2-2u_xv-u_y^2\frac{v^2}{c^2}-u_z^2\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)^2}$$

$$\therefore \quad \frac{u'^2}{c^2} = \frac{\frac{u^2}{c^2}+\frac{v^2}{c^2}-2\frac{u_xv}{c^2}-\frac{u_y^2}{c^4}v^2-\frac{u_z^2v^2}{c^4}}{\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)^2}$$

$$1-\frac{u'^2}{c^2} = \left(1-2\frac{vu_x}{c^2}+\frac{v^2u_x^2}{c^4}-\frac{u^2}{c^2}-\frac{v^2}{c^2}+2\frac{u_xv}{c^2}+\frac{u_y^2v^2}{c^4}+\frac{u_z^2v^2}{c^4}\right)\frac{1}{\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)^2}$$

$$= \frac{1-\frac{u^2}{c^2}-\frac{v^2}{c^2}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)^2}$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \frac{1-\frac{vu_x}{c^2}}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \tag{5.56}$$

$$\frac{u_x'}{\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \frac{(u_x-v)}{\left(1-\frac{vu_x}{c}\right)} \times \frac{\left(1-\frac{vu_x}{c}\right)}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \left(\frac{u_x}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} - \frac{v}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} \right) \tag{5.57}$$

$$\frac{u_y'}{\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \frac{u_y}{\gamma\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)} \times \frac{\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{u_y}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} \tag{5.58}$$

โดยทำนองเดียวกัน

$$\frac{u_z'}{\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \frac{u_z}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} \tag{5.59}$$

สำหรับการแปลงกลับ ให้ $v = -v$ แล้วสลับที่ u_i กับ u_i' $(i = x,y,z)$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{u_x}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} &= \gamma\left\{\frac{u_x'}{\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{v}{\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}}\right\} \\
\frac{u_y}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} &= \frac{u_y'}{\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}} \\
\frac{u_z}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} &= \frac{u_z'}{\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}}
\end{aligned}\right\} \tag{5.60}$$

$$\frac{\bar{u}}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} = (\hat{i}\gamma u_x' + \hat{j}u_y' + \hat{k}u_z')\frac{1}{\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{\hat{i}\gamma v}{\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}} \tag{5.61}$$

แทนสมการ (5.60) ลงในสมการ (5.54)

$$\gamma\left\{\frac{m_{10}u_{1x}'}{\left(1-\frac{u_1'^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{m_{20}u_{2x}'}{\left(1-\frac{u_2'^2}{c^2}\right)^{1/2}}\right\} + \gamma v\left\{\frac{m_{10}}{\left(1-\frac{u_1'^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{m_{20}}{\left(1-\frac{u_2'^2}{c^2}\right)^{1/2}}\right\}$$

$$= \gamma \left\{ \frac{m_{10}|\underline{u}_{1x}'|}{\left(1-\frac{\underline{u}_1'\cdot\underline{u}_1'}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{m_{20}|\underline{u}_{2x}'|}{\left(1-\frac{\underline{u}_2'\cdot\underline{u}_2'}{c^2}\right)^{1/2}} \right\} + \gamma v \left\{ \frac{m_{10}}{\left(1-\frac{\underline{u}_1'\cdot\underline{u}_1'}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{m_{20}}{\left(1-\frac{\underline{u}_2'\cdot\underline{u}_2'}{c^2}\right)^{1/2}} \right\} \tag{5.62}$$

สมการที่ (5.62) อาจจะเขียนได้เป็นสองสมการ เนื่องจาก v เป็นค่าใด ๆ

$$\frac{m_{10}u_{1x}'}{\left(1-\frac{u_1'^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{m_{20}u_{2x}'}{\left(1-\frac{u_2'^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \frac{m_{10}|\underline{u}_{1x}'|}{\left(1-\frac{\underline{u}_1'\cdot\underline{u}_1'}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{m_{20}|\underline{u}_{2x}'|}{\left(1-\frac{\underline{u}_2'\cdot\underline{u}_2'}{c^2}\right)^{1/2}} \tag{5.62 ก}$$

$$\frac{m_{10}}{\left(1-\frac{u_1'^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{m_{20}}{\left(1-\frac{u_2'^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \frac{m_{10}}{\left(1-\frac{\underline{u}_1'\cdot\underline{u}_1'}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{m_{20}}{\left(1-\frac{\underline{u}_2'\cdot\underline{u}_2'}{c^2}\right)^{1/2}} \tag{5.62 ข}$$

สมการที่ (5.62 ก) เป็นกฎการอนุรักษ์โมเมนตัมตามแนวแกน x' ในระบบ s' ส่วนในสมการที่ (5.62 ข) จะสังเกตเห็นว่า ในลิมิตที่ $u' \to 0$ สมการนี้คือ กฎการอนุรักษ์มวล ด้วยเหตุนี้ $\frac{m_0}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}$ จึงนิยมเรียกว่า มวลสัมพัทธ์ ปริมาณนี้เป็นสเกลาร์ ถ้าหากคูณด้วย c^2 แล้วกระจายจะได้ว่า

$$\frac{m_0c^2}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} = m_0c^2\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{u^2}{c^2}\right) + \ldots\right)$$

$$= m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0u^2 + \ldots \tag{5.63}$$

จะเห็นว่าเทอมที่สองทางด้านขวาของสมการ (5.63) คือพลังงานจลน์ ในกลศาสตร์แผนเดิม เทอม m_0c^2 ซึ่งมีขึ้นมาเพิ่มเป็นเพียงค่าคงที่อันหนึ่ง ไม่ได้เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่ และการคำนวณ เพราะการคำนวณเกี่ยวกับพลังงานจะพูดถึงความแตกต่างของพลังงานเท่านั้น ทำให้เทอมซึ่งเป็นค่าคงที่ไม่มีความหมายอะไร

ให้ $m = \frac{m_0}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}$ และคูณสมการ (5.62 ข) ด้วย c^2

$$m_1c^2 + m_2c^2 = \underline{m}_1c^2 + \underline{m}_2c^2 \tag{5.64}$$

สมการ (5.64) แสดงว่า ปริมาณ mc^2 ในการชนกันของอนุภาคเป็นปริมาณอนุรักษ์ ซึ่งเป็นจริงสำหรับการชนกันทั้งแบบยืดหยุ่นและไม่ยืดหยุ่น ซึ่งต่างจากพลังงานจลน์ในกลศาสตร์แผนเดิม ซึ่งไม่เป็นไปตามกฎอนุรักษ์พลังงานหากมีการชนกันแบบไม่ยืดหยุ่นหรือมีการระเบิดขึ้นในการชนกันนั้น สมการที่ (5.64) จึงเป็นกฎการอนุรักษ์พลังงาน

การอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน y และแนวแกน z คล้ายคลึงกับในกลศาสตร์แผนเดิม

5.3.2 แรง งาน และพลังงานจลน์เชิงสัมพัทธภาพ

นอกจากวิธีในตอนที่ 5.3.1 แล้วยังมีวิธีอื่นซึ่งสามารถหากฎการอนุรักษ์พลังงานในทฤษฎีสัมพัทธภาพได้ จากคำจำกัดความของโมเมนตัมในสมการที่ (5.52) เราอาจจะนิยามเรื่องแรงขึ้นมาได้ดังนี้

$\bar{F}$: แรงในทฤษฎีสัมพัทธภาพ

$$\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt} \tag{5.65}$$

$$\bar{p} = \frac{m_0\bar{u}}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

ถ้าหาก $\bar{u}$ มีค่าน้อย จะเห็นว่าแรงในสมการที่ (5.65) คือแรงของนิวตันนั่นเอง และเช่นเดียวกับในกลศาสตร์แผนเดิม เราอาจจะหางานได้โดยกำหนดให้

W : งานต่อหนึ่งหน่วยเวลา

$$W = \bar{F}.\bar{u} \tag{5.66}$$

$\bar{u}$ เป็นความเร็วของอนุภาค ทำให้เราสามารถหาพลังงานจลน์ของอนุภาคได้โดยกำหนดให้

T : พลังงานจลน์เชิงสัมพัทธภาพ

$$\frac{d}{dt}T = W = \bar{F}.\bar{u} \tag{5.67}$$

อัตราการเปลี่ยนของพลังงานจลน์ต่อหนึ่งหน่วยเวลาคือ อัตราการทำงานต่อหนึ่งหน่วยเวลา

แทนค่า $\bar{F}$ ในข้างขวาของสมการ (5.67)

$$W = \left(\bar{u}\,.\,\frac{d}{dt}\,\frac{m_0\bar{u}}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}\right) = \frac{m_0}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}\left(\bar{u}.\,\frac{d\bar{u}}{dt}\right) + \frac{m_0u^2}{c^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}\;u\,\frac{du}{dt}$$

กำหนดให้ $\bar{u}.\frac{d\bar{u}}{dt} = u\frac{du}{dt}$

$$W = \frac{m_0 u}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c^2}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}\right) \tag{5.68}$$

แทนค่า W ในสมการ (5.68) ลงในสมการ (5.67) แล้วอินทีเกรต

$$T = \frac{m_0c^2}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} + C \tag{5.69}$$

แต่เนื่องจากว่าพลังงานจลน์จะเป็นศูนย์เมื่อความเร็วเข้าสู่ศูนย์ทำให้เห็นว่า

$$C = -m_0c^2$$

ดังนั้นพลังงานจลน์เชิงสัมพัทธภาพคือ

$$T = \frac{m_0c^2}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} - m_0c^2 \tag{5.70}$$

ถ้ากระจายสมการ (5.70) ตามแบบที่ทำไว้ในสมการ (5.63) จะเห็นว่า พลังงานจลน์เชิงสัมพัทธภาพคล้ายกับพลังงานจลน์ในกลศาสตร์แบบฉบับ และถ้า $\bar{u}$ มีค่าน้อย เทอมที่เหนือกว่า u^2 ตัดทิ้งได้ พลังงานจลน์เชิงสัมพัทธภาพก็คือพลังงานจลน์ในกลศาสตร์แผนเดิมนั่นเอง

5.3.3 สมการการแปลงโมเมนตัม พลังงาน และแรง

ให้ระบบพิกัด s' เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ $\bar{v} = (v,0,0)$ ไปทางทิศ $+x$ ของระบบพิกัด s จากสมการที่ (5.70) เรานิยามพลังงานเชิงสัมพัทธภาพเป็น

$$E = T + m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} \tag{5.71}$$

E นับเป็นพลังงานของอนุภาคอิสระ ใน s'

$$E' = T' + m_0c^2$$

จากสมการ (5.60)

$$p_x = \frac{m_0 u_x}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \gamma m_0 \frac{(u_x' + v)}{\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

$$= \gamma\left(p_x' + \frac{v}{c^2}E'\right) \qquad (5.72)$$

$$p_y = p_y' \qquad (5.73)$$

$$p_z = p_z' \qquad (5.74)$$

จากสมการที่ (5.56)

$$\frac{1}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \frac{1+\frac{vu_x'}{c^2}}{\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

ดังนั้น $$E = \frac{m_0 c^2}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \frac{m_0 c^2\left(1+\frac{vu_x'}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

$$\therefore \quad E = \gamma(E' + vp_x') \qquad (5.75)$$

แสดงว่า ปริมาณ $p_x, p_y, p_z, \frac{E}{c}$ มีการแปลงตามการแปลงแบบโลเรนตซ์ในสมการ (3.32)′ เช่นเดียวกับ x,y,z,t ดังนั้นปริมาณที่ไม่เปลี่ยนแปลงที่หวังได้คือ

$$p^2 - \frac{E^2}{c^2} = p'^2 - \frac{E'^2}{c^2} = -m_0^2c^2 \qquad (5.76)$$

$$\therefore \quad E = c(m_0^2c^2 + p^2)^{1/2} \qquad (5.77)$$

ทำให้สามารถคำนวณความเร็วของอนุภาคได้ดังนี้

$$dE = \frac{cp\,dp}{(m_0^2c^2+p^2)^{1/2}} = \frac{c^2p}{E}dp$$

$$\frac{dE}{dp} = \frac{pc^2}{E} = \frac{m_0 u}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}\;\frac{c^2}{m_0c^2}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

$$= u \qquad (5.78)$$

จากสมการ (3.33)′ แทน x,y,z,t ด้วย $p_x, p_y, p_z, \frac{E}{c^2}$ ใน s และแทน x′,y′,z′,t′ ด้วย $p'_x, p'_y, p'_z, \frac{E'}{c^2}$ ใน s′

$$\left.\begin{aligned} \bar{p} &= \bar{p}' + \frac{\bar{v}}{v^2}\left[(\bar{v}.\bar{p}')\{\gamma - 1\} + \gamma E' \frac{v^2}{c^2}\right] \\ E &= \gamma(E' + \bar{v}.\bar{p}') \end{aligned}\right\} \tag{5.79}$$

เราอาจจะดัดแปลงสมการ (5.72), (5.73), (5.74), (5.75) และ (5.79) ไปใช้สำหรับกลุ่มอนุภาคอิสระได้ ถ้าหากเรามีอนุภาคอิสระ n ตัว ให้อนุภาคที่ i มีโมเมนตัม $\bar{p}^{(i)}$ มีพลังงานเชิงสัมพัทธภาพ $E^{(i)} = T^{(i)} + m_0^{(i)}c^2$ $T^{(i)}$ เป็นพลังงานจลน์เชิงสัมพัทธภาพ และ $m_0^{(i)}$ เป็นมวลนิ่ง เราอาจจะนิยามพลังงานทั้งหมดและโมเมนตัมทั้งหมดได้ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} \bar{p} &= \sum_{i=1}^{n} \bar{p}^{(i)} & E &= \sum_i E^i = T + m_0c^2 \\ T &= \sum_i T^{(i)} & m_0 &= \sum_i m_0^{(i)} \end{aligned}\right\} \tag{5.80}$$

พลังงานทั้งหมดและโมเมนตัมทั้งหมด นำไปใช้ได้ในสมการชุด (5.72), (5.73), (5.74), (5.75) และ (5.79)

สำหรับแรงที่กระทำบนอนุภาคอิสระ ถ้าเราพิจารณาสมการ (5.65) และ (5.67) เราจะเห็นว่า

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{F} \quad , \quad \frac{dT}{dt} = \frac{dE}{dt} = \bar{F}.\bar{u} \tag{5.81}$$

สมการเหล่านี้เป็นจริงสำหรับกรอบเฉื่อยทุกกรณี จากสมการที่ (3.33)′ เราพบว่า

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1 + \frac{\bar{v}.\bar{u}'}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \tag{5.82}$$

จากสมการ (5.79)

$$\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt'}\frac{dt'}{dt} = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}\bar{F}' + \frac{\bar{v}}{v^2}\left[(\bar{v}.\bar{F}')\left\{1 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}\right\} + \bar{F}'.\bar{u}'\frac{v^2}{c^2}\right]}{\left(1 + \frac{\bar{v}.\bar{u}'}{c^2}\right)} \tag{5.83}$$

ถ้าหากเราดัดแปลงการหาอนุพันธ์อีกเล็กน้อย คือ แทนที่จะหาอนุพันธ์เทียบกับเวลา t เรากลับหาอนุพันธ์เทียบกับเวลาเฉพาะ τ ให้

$$\overline{F}_M = \frac{\overline{F}}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} \tag{5.84}$$

แทนที่จะใช้สมการ (5.81) ตรง ๆ เรากลับใช้

$$\left.\begin{aligned}\dot{\overline{p}} &= \frac{d\overline{p}}{d\tau} = \frac{1}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}\frac{d}{dt}\overline{p} = \overline{F}_M \\ \dot{E} &= \frac{dE}{d\tau} = \frac{1}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}\frac{dE}{dt} = \overline{F}_M.\overline{u}\end{aligned}\right\} \tag{5.85}$$

ปริมาณ $\left(\dot{\overline{p}}, \frac{\dot{E}}{c^2}\right)$ มีการแปลงคล้าย $(\overline{x},t)$

5.4 ตัวอย่างการคำนวณ

ตัวอย่างที่ 1 การเคลื่อนที่ไฮเปอร์โบลิก (Hyperbolic Motion)

ให้ s' เป็นกรอบเฉื่อย ซึ่งมีความเร็ว $+\overline{v}$ เทียบกับกรอบเฉื่อย s สมมุติว่า แรง $\overline{F}$ ในสมการ (5.83) อยู่ใน s ให้อนุภาคซึ่งถูกแรง $\overline{F}$ กระทำมีความเร็ว $\overline{u}$ เทียบกับ s ถ้าหาก s' เป็นกรอบนิ่ง s° ซึ่งความเร็วของอนุภาคเป็นศูนย์ $(\overline{u}'=0)$ ดังนั้น $\overline{v} = \overline{u}$ ให้ $\overline{F}^\circ$ เป็นแรงที่วัดได้ในกรอบ s° ดังนั้นเราอาจจะเขียนสมการ (5.83) เสียใหม่ว่า

$$\overline{F} = \overline{F}^\circ\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2} + \overline{u}\,\frac{\overline{u}.\overline{F}^\circ}{u^2}\left\{1-\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}\right\} \tag{5.86}$$

$\overline{F}^\circ$ เป็นแรงของนิวตัน เราอาจจะกระจายแรงในสมการ (5.86) ออกเป็นแรงซึ่งขนานกับ $\overline{u}$ และแรงซึ่งตั้งฉากกับ $\overline{u}$ ดังนี้

$$\overline{F} = \overline{F}_{\parallel} + \overline{F}_{\perp} \quad , \quad \overline{F}^\circ = \overline{F}^\circ_{\parallel} + \overline{F}^\circ_{\perp}$$

ดังนั้นสมการ (5.86) อาจจะเขียนเสียใหม่ได้ว่า

$$\overline{F}_{11} = \overline{F}^{\circ}_{11} \qquad \overline{F}_{\perp} = \overline{F}^{\circ}_{\perp}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2} \tag{5.87}$$

พิจารณาแรงโลเรนตซ์ ในกรอบเฉื่อย s

$$\overline{F} = e\left\{\overline{E} + \tfrac{1}{c}\bar{u}\times\overline{B}\right\} \tag{5.88}$$

e เป็นประจุของอนุภาค จะเห็นว่าอาจจะแตกเป็น $\overline{F}_{\perp}$ และ $\overline{F}_{11}$ ได้ จากสมการ (5.81)

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{p}}{dt} &= \frac{d}{dt}(m\bar{u}) = \frac{md\bar{u}}{dt} + \frac{dm}{dt}\bar{u} \\ &= \frac{md\bar{u}}{dt} + \frac{1}{c^2}\frac{dE}{dt}\bar{u} = \frac{md\bar{u}}{dt} + \left(\frac{\overline{F}.\bar{u}}{c^2}\right)\bar{u} \end{aligned} \tag{5.89}$$

ใน (5.89) เราได้ใช้ความสัมพันธ์ $m = \frac{E}{c^2}$: มวลสัมพัทธ์ จะเห็นว่าจากความสัมพันธ์ใน สมการ (5.89) และ (5.65)

$$\frac{md\bar{u}}{dt} = \overline{F} - \frac{\overline{F}.\bar{u}}{c^2}\bar{u} \tag{5.90}$$

สมการที่ (5.90) แสดงว่า ในกรณีทั่วไปแล้ว ความเร่งของอนุภาคมีทิศที่แตกต่างจากทิศของแรง เราจะพิจารณากรณีของการเคลื่อนที่ไฮเปอร์โบลิก

สมมุติว่า F = แรงคงที่ = m_0g มีความเร็วต้นในทิศของแรง (เช่นในกรณีของไฟฟ้าสถิต) จากสมการที่ (5.90) จะเห็นว่าอนุภาคเคลื่อนไปตามทิศของแรง ดังนั้นทางเดินของอนุภาคจะเป็นเส้นตรง เราอาจจะเลือกเส้นตรงนี้เป็นแนวแกน x จากสมการ (5.81)

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{u}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}\right\} = \frac{F}{m_0} = g \quad , \quad u = \frac{dx}{dt}$$

ถ้าความเร็วเป็นศูนย์เมื่อเวลาเป็นศูนย์ เราอาจจะอินทีเกรตได้

$$\frac{u}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} = gt \tag{5.91}$$

$$\therefore \quad u^2\left(1+\frac{g^2t^2}{c^2}\right) = g^2t^2 \quad \text{หรือ}$$

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{gt}{\left(1+\frac{g^2t^2}{c^2}\right)^{1/2}} \tag{5.92}$$

ถ้า $x = 0$ เมื่อ $t = 0$ จากการอินทีเกรต

$$x = \frac{c^2}{g}\left[\left\{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2\right\}^{1/2}-1\right]$$

$$\frac{x^2g}{c^2}+2x = gt^2$$

$$\left(x+\frac{c^2}{g}\right)^2-c^2t^2 = \frac{c^4}{g^2} \tag{5.93}$$

สมการที่ (5.93) เป็นรูปไฮเปอร์โบลาในระนาบ (x,t) มีจุดศูนย์กลางที่จุด $\left(-\frac{c^2}{g},0\right)$ ในลิมิต $\frac{g^2t^2}{c^2}\to 0$ $x = \frac{1}{2}gt^2$ แสดงว่าอนุภาคได้รับความเร่งสม่ำเสมอ

ในลิมิต $t\to\infty$

$$u = \frac{gt}{\frac{gt}{c}} \times \frac{1}{\left(\frac{c^2}{g^2t^2}+1\right)^{1/2}} = c \tag{5.94}$$

แสดงว่าแม้แรงจะมีมากสักเท่าใด อนุภาคจะไม่มีเวลาซึ่งมีความเร็วเกินความเร็วของแสงไปได้เลย ในกรณีของสนามไฟฟ้าสถิตเราอาจจะใช้ $\overline{F} = e\overline{E}$ เมื่อ e เป็นประจุ และ $\overline{E}$ เป็นสนามสม่ำเสมอ $\bar{u}||\overline{E}$ จะให้การเคลื่อนที่ไฮเปอร์โบลิกนี้

ตัวอย่างที่ 2 การเคลื่อนที่ของประจุไฟฟ้าในสนามแม่เหล็กคงที่สม่ำเสมอ

ให้ $\overline{B}$ เป็นสนามแม่เหล็กซึ่งมีค่าคงที่ จากสมการที่ (5.88)

$$\overline{F} = \frac{e}{c}\bar{u}\times\overline{B} \tag{5.95}$$

แสดงว่า $\overline{F}.\bar{u} = 0$ ทำให้เราเขียนสมการ (5.90) เสียใหม่ได้ว่า

$$\frac{md\bar{u}}{dt} = \overline{F} = \frac{e}{c}(\bar{u}\times\overline{B}) \tag{5.96}$$

m เป็นมวลสัมพัทธ์ แต่เนื่องจาก $\frac{dE}{dt} = \overline{F}.\bar{u} = 0$ แสดงว่า $m = m_0$ และ $|\bar{u}| = u$ เป็นค่าคงที่ ทำให้ทางเดินของอนุภาคเป็นรูปขดลวดหรือวงกลม (helix) มีทิศของแกนที่มันหมุนรอบไปตามทิศของสนาม รัศมีของวงกลม (ρ)

$$\frac{mu_\perp^2}{\rho} = \frac{e}{c}u_\perp B \qquad (u_\perp = |\bar{u}_\perp|$$

เมื่อ $\bar{u}_\perp$ เป็นความเร็วในทิศ $\perp$ กับ $\overline{B}$)

ทำให้

$$p_\perp = mu_\perp = \frac{e}{c}\rho B \tag{5.97}$$

ตัวอย่างที่ 3 การระเบิด

มวลขนาด m_0 2 มวลติดกันอยู่นิ่งในกรอบเฉื่อย s' ต่อมามันระเบิดทำให้มวลแยกจากกันไปทาง $+x'$ และ $-x'$ ด้วยความเร็ว $+u'$ และ $-u'$ ตามลำดับ กรอบเฉื่อย s' เคลื่อนที่ไปทาง $+x$ ของกรอบเฉื่อย s ด้วยความเร็ว v จงหาความเร็ว โมเมนตัม และพลังงานของมวลทั้งสองในกรอบเฉื่อย s

วิธีทำ จากสมการที่ (4.17)

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{vu_x'}{c^2}}$$

ให้มวล $m_1 = m_0$ เคลื่อนไปทาง $+x'$ ใน s'

$m_2 = m_0$ เคลื่อนไปทาง $-x'$ ใน s'

$$u_1 = \frac{u' + v}{1 + \frac{vu'}{c^2}} \qquad : \text{ ความเร็วของมวล } m_1 \text{ ไปทาง } +x \text{ ใน s}$$

$$u_2 = \frac{-u' + v}{1 - \frac{vu'}{c^2}} \qquad : \text{ ความเร็วของมวล } m_2 \text{ ไปทาง } -x \text{ ใน s}$$

ความเร็วของมวลทั้งหมดคือ v ใน s

โมเมนตัมใน s′ หลังจากการระเบิดคือ

p_1' : โมเมนตัมของมวล m_1 ใน s' $= \dfrac{m_0 u'}{\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}}$

p_2' : โมเมนตัมของมวล m_2 ใน s' $= -\dfrac{m_0 u'}{\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}}$

$\therefore$ p_1 : โมเมนตัมของมวล m_1 ใน s คือ

$$\frac{m_0\left(\dfrac{u'+v}{1+\frac{vu'}{c^2}}\right)}{\left\{1-\dfrac{1}{c^2}\left(\dfrac{u'+v}{1+\frac{vu'}{c^2}}\right)^2\right\}^{1/2}}$$

$$= \frac{m_0(u'+v)}{\left\{1+2\frac{vu'}{c^2}+\frac{v^2u'^2}{c^4}-\frac{u'^2}{c^2}-\frac{v^2}{c^2}-2\frac{u'v}{c^2}\right\}^{1/2}}$$

$$p_1 = \frac{m_0(u'+v)}{\left\{\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}\right\}}$$

p_2 = โมเมนตัมของมวล m_2 ใน s คือ

$$\frac{m_0\left(\dfrac{-u'+v}{1-\frac{vu'}{c^2}}\right)}{\left\{1-\dfrac{1}{c^2}\left(\dfrac{-u'+v}{1-\frac{vu'}{c^2}}\right)^2\right\}^{1/2}}$$

$$p_2 = \frac{m_0(-u'+v)}{\left\{\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}\right\}}$$

ดังนั้นโมเมนตัมทั้งหมดหลังการระเบิดใน $s : P = p_1 + p_2$

$$= \frac{2m_0 v}{\left\{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}\right\}}$$

ซึ่งอาจจะเขียนได้ในเทอมของมวลสัมพัทธ์ดังนี้ $P = \dfrac{Mv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$

$$M = \frac{2m_0}{\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)^{1/2}} \quad : \text{ มวลสัมพัทธ์}$$

ดังนั้นพลังงานของระบบคือ Mc^2 : พลังงานก่อนชน = พลังงานหลังชน

แสดงว่าถ้าหากโมเมนตัมก่อนชนเท่ากับโมเมนตัมหลังชน ทั้งสองกรอบเฉื่อย s และ s' มวลจะไม่คงที่ในการชนนั้น

5.5 สรุป

5.5.1 ความเร็วเฉพาะ คือ ความเร็วซึ่งหาได้จากระยะทางหารด้วยเวลาของนาฬิกาที่ติดไปกับผู้วัดระยะทางนั้น นั่นคือ

$$\text{ความเร็วเฉพาะ} = \frac{\text{ระยะทาง}}{\text{เวลาเฉพาะ}}$$

5.5.2 โมเมนตัมของอนุภาคที่มีความเร็ว $\underline{u}$ คือ

$$\bar{p} = \frac{m_0\bar{u}}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} \tag{5.52}$$

เมื่อ $\underline{u}$ เป็นความเร็วของอนุภาค และ m_0 เป็นมวลนิ่งของอนุภาคนั้น ถ้าหาก s' เคลื่อนที่ผ่าน s ด้วยความเร็ว $\bar{v} = (v,0,0)$ แล้ว กฎการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x ใน s จะเขียนได้ว่า

$$\frac{m_{10}u_{1x}}{\left(1-\frac{u_1^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{m_{20}u_{2x}}{\left(1-\frac{u_2^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \frac{\underline{m}_{10}|\underline{u}_{1x}|}{\left(1-\frac{\underline{u}_1\cdot\underline{u}_1}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{\underline{m}_{20}|\underline{u}_{2x}|}{\left(1-\frac{\underline{u}_2\underline{u}_2}{c^2}\right)^{1/2}} \tag{5.54}$$

แต่เมื่อแปลงสมการ (5.54) ให้อยู่ในกรอบเฉื่อย s' จะพบว่า

$$\frac{m_{10}u'_{1x}}{\left(1-\frac{u_1'^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{m_{20}u'_{2x}}{\left(1-\frac{u_2'^2}{c^2}\right)^{1/2}} + v\left\{\frac{m_{10}}{\left(1-\frac{u_1'^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{m_{20}}{\left(1-\frac{u_2'^2}{c^2}\right)^{1/2}}\right\}$$

$$= \frac{\underline{m}_{10}|\underline{u}_{1x}'|}{\left(1-\frac{\underline{u}_1'\cdot\underline{u}_1'}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{m_{20}|\underline{u}_{2x}'|}{\left(1-\frac{\underline{u}_2'\cdot\underline{u}_2'}{c^2}\right)^{1/2}} + v\left\{\frac{\underline{m}_{10}}{\left(1-\frac{\underline{u}_1'\cdot\underline{u}_1'}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{\underline{m}_{20}}{\left(1-\frac{\underline{u}_2'\cdot\underline{u}_2'}{c^2}\right)^{1/2}}\right\} \tag{5.62}$$

5.5.3 กฎการอนุรักษ์พลังงาน

ถ้า $m = \frac{m_0}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}$ ในกรอบเฉื่อย s, $\underline{u}$ เป็นความเร็วของอนุภาค กฎการอนุรักษ์พลังงานของอนุภาคอิสระคือ

$$m_1c^2 + m_2c^2 \quad : \text{ พลังงานก่อนชน}$$
$$= \underline{m}_1c^2 + \underline{m}_2c^2$$
$$: \text{ พลังงานหลังชน} \tag{5.64}$$

5.6 คำถามท้ายบท

จงเติมคำในช่องว่างให้ได้ความสัมบูรณ์

5.6.1 ความเร็วมีสองชนิดคือ ....

ตอบ : ความเร็วเฉพาะและความเร็วไม่เฉพาะ

5.6.2 ถ้าความเร็วไม่เฉพาะสำหรับอนุภาคคือ $\bar{u} = (u_x, u_y, u_z)$ ความเร็วเฉพาะของอนุภาค คือ $\overline{U}$ = ...

ตอบ : $\dfrac{1}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}(u_x, u_y, u_z)$

5.6.3 ในกลศาสตร์แผนเดิมหากกฎการอนุรักษ์โมเมนตัมเป็นจริงแล้ว กฎการอนุรักษ์มวล ....

ตอบ : ต้องเป็นจริงด้วย

5.6.4 ในทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ ถ้าหากกฎการอนุรักษ์โมเมนตัมเป็นจริงแล้ว.................. ....ต้องเป็นจริงด้วย

ตอบ : กฎการอนุรักษ์พลังงาน

5.6.5 ถ้า $\overline{F}$ เป็นแรงในทฤษฎีสัมพัทธภาพ และ $\bar{p} = \dfrac{m_0\bar{u}}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}$ แล้ว

$\overline{F}$ = ...

ตอบ : $\dfrac{d\bar{p}}{dt}$

5.6.6 ถ้า $\overline{F}.\bar{u}$ คืองานต่อหนึ่งหน่วยเวลา T คือพลังงานจลน์เชิงสัมพัทธภาพแล้ว

$\dfrac{dT}{dt}$ = ...

ตอบ : $\overline{F}.\bar{u}$

5.6.7 ถ้า ระบบพิกัด s' เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\bar{v} = (v,0,0)$ เทียบกับกรอบเฉื่อย s แล้ว

$\bar{u}'$ = ...

$\bar{u}$ = ...

ตอบ : $\bar{u}' = \left[\frac{\bar{u}}{\gamma} + \bar{v}\left\{\frac{\bar{u}.\bar{v}}{v^2}\left(1-\frac{1}{\gamma}\right) - 1\right\}\right] \frac{1}{\left(1-\frac{\bar{v}.\bar{u}}{c^2}\right)}$

$$\bar{u} = \left[\frac{\bar{u}'}{\gamma} + \bar{v}\left\{\frac{\bar{u}'.\bar{v}}{v^2}\left(1-\frac{1}{\gamma}\right) + 1\right\}\right] \frac{1}{\left(1+\frac{\bar{v}.\bar{u}'}{c^2}\right)}$$

5.6.8 ถ้าระบบพิกัด s′ เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\bar{v} = (v,0,0)$ เทียบกับกรอบเฉื่อย s แล้ว

$u_x' =$ ....

$u_y' =$ ....

$u_z' =$ ....

ตอบ : $u_x' = \frac{u_x - v}{\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)}$

$$u_y' = \frac{u_y}{\gamma\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)}$$

$$u_z' = \frac{u_z}{\gamma\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)}$$

5.6.9 ถ้าหากระบบพิกัด s′ เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\bar{v} = (v,0,0)$ เทียบกับกรอบเฉื่อย s แล้ว

$p_x' =$ ....

$p_y' =$ ....

$p_z' =$ ....

$E' =$ ....

ตอบ : $p_x' = \gamma\left(p_x - \frac{v}{c^2}E\right)$

$$p_y' = p_y$$

$$p_z' = p_z$$

$$E' = \gamma(E - vp_x)$$

5.6.10 สำหรับพิกัดและเวลา (x,y,z,t) มีปริมาณที่ไม่เปลี่ยนแปลงคือ $\bar{x}.\bar{x}-c^2t^2$

ปริมาณที่ไม่เปลี่ยนแปลงของ $(p_x,p_y,p_z,\frac{E}{c^2}$ คือ...

ตอบ : $\bar{p}.\bar{p}-\frac{E^2}{c^2}$

แบบฝึกหัดบทที่ 5

1. การหมุนควงของโทมัส (Thomas precession)

ให้กรอบเฉื่อย (x,y) เป็นกรอบเฉื่อยซึ่งนิวเคลียสอยู่นิ่ง อีเล็กตรอนอยู่นิ่งชั่วคราวในกรอบเฉื่อย (x_1,y_1) เมื่อเวลา t_1 อยู่นิ่งชั่วคราวในกรอบเฉื่อย (x_2,y_2) เมื่อเวลา t_2 แม้ว่าแกนของ (x,y) และ (x_2,y_2) จะขนานกับแกนของ (x_1,y_1) จากการสังเกตเห็นของผู้สังเกต-การณ์ซึ่งอยู่นิ่งเทียบกับอีเล็กตรอน จงแสดงให้เห็นว่าผู้สังเกตการณ์ที่นิวเคลียส สังเกตเห็นว่า ระบบพิกัดของผู้สังเกตการณ์บนอีเล็กตรอนหมุนควงด้วยความถี่ $\bar{w}_T = -\frac{1}{2c^2}\bar{v}\times\bar{a}$ เมื่อ $\bar{v}$ เป็นความเร็วของอีเล็กตรอนเทียบกับนิวเคลียส และ $\bar{a}$ เป็นความเร่งของอีเล็กตรอนในทิศเข้าหานิวเคลียส

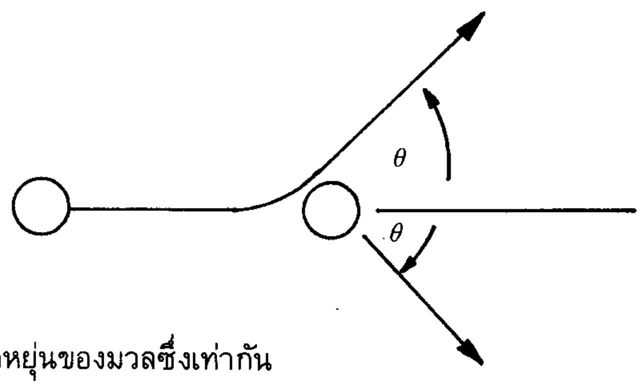
คำแนะนำ : Eisberg, R.M., **Fundamental of Modern Physics,** New York: John Wiley & Sons, 1961 หน้า 340-343 หรือ

Møller,C.,**The Theory of Relativity,** 2nd ed., Delhi: Oxford University Press, 1982, หน้า 52-54

2. การชนกันแบบยืดหยุ่นของมวลเท่ากันสองมวล

มวลเท่ากันสองมวล ๆ หนึ่งอยู่นิ่งมีมวลนิ่ง m_0 อีกมวลหนึ่งเคลื่อนที่มีโมเมนตัม p_0 มีพลังงาน E_0 มวลทั้งสองชนแบบยืดหยุ่นได้ จงแสดงว่า ถ้าหลังการชนกันมวลทั้งสองมีพลังงานเท่ากัน จงแสดงว่ามุมระหว่างทางเดินก่อนชนกับทางเดินหลังชนของอนุภาคจะเข้าสู่ศูนย์ ถ้า $E_0 >> m_0c^2$ และจะเข้าสู่ $\frac{\pi}{4}$ ถ้า $E_0 \approx m_0c^2$

คำแนะนำ : ให้ โมเมนตัมของอนุภาคหลังชนเป็น p, พลังงานเป็น E



รูปที่ 41 การชนกันแบบยืดหยุ่นของมวลซึ่งเท่ากัน

จากกฎการอนุรักษ์โมเมนตัม $p_0 = 2p\cos\theta$

จากกฎการอนุรักษ์พลังงาน $E_0 + m_0c^2 = 2E$

จากความไม่เปลี่ยนแปลงของ $\left(p_0, \frac{E^2}{c^2}\right)$: $p_0^2 - \frac{E_0^2}{c^2} = -m_0^2c^2$

$$p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2c^2$$

$$\left(\frac{E_0^2}{c^2} - m_0^2c^2\right)^{1/2} = 2\left(\frac{E^2}{c^2} - m_0^2c^2\right)^{1/2}\cos\theta$$

แทนค่า E แล้วหา $\cos\theta$

3. ความสัมพันธ์ของพลังงานและมวล

1 Mev คือ พลังงานซึ่งอีเล็กตรอนได้รับเมื่อมันเคลื่อนผ่านความต่างศักดา 1 ล้านโวลท์ จงหาพลังงานของมวลของโปรตอน

คำแนะนำ : มวลของโปรตอน $= 1.673 \times 10^{-27}$ กิโลกรัม , $E = mc^2$

$$\text{กิโลกรัม} \times \left(\frac{\text{เมตร}}{\text{วินาที}}\right) = \text{joule} \quad , \quad \text{joule} = \text{coulomb} \times \text{volt}$$

$$1 \text{ Mev} = 1.602 \times 10^{-13} \text{ joule}$$

ตอบ : 938 Mev.

4. 1 โมล (mole) มี 6.0255×10^{23} อะตอม 1 โมลของ ^7Li หนัก 7.01595 กรัม 1 โมลของไฮโดรเจนอะตอมหนัก 1.00782 กรัม 1 โมลของ ^4He หนัก 4.00260 กรัม จงหาพลังงานที่เกิดขึ้นในปฏิกิริยา

$$^1H + {}^7Li \longrightarrow 2\,{}^4He$$

ตอบ : พลังงานคายออก $\approx 2.771 \times 10^{-12}$ joule

5. ให้ Σ_1 เป็นระบบของอนุภาคอิสระ n อนุภาค ถ้า $(\overline{p},E)$ และ $(\overline{p}',E')$ เป็นโมเมนตัมและพลังงานของระบบในกรอบเฉื่อย s และ s′ ตามลำดับ โดยที่

$$\overline{P} = \overline{P}' + \frac{\bar{v}}{v^2}\;\frac{(\bar{v}.\overline{P}')\left\{1-\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}\right\} + E'\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

$$E = \frac{E' + (\bar{v}.\overline{P}')}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

จงหา $\bar{v}$ ในรูปของ $\overline{P}$ และ E และจงแสดงว่า $|\bar{v}|<c$

คำแนะนำ : เลือกให้ระบบพิกัด s′ มีโมเมนตัมทั้งหมด $\overline{P}'$ ของ Σ_1 เป็นศูนย์ใน s′

ดังนั้น $$\overline{P} = \frac{\bar{v}}{v_2}\;\frac{E'v^2}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \frac{vE'}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

$$E = \frac{E'}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

ตอบ : $\bar{v} = \frac{c^2}{E}\overline{P}$

6. ถ้า Σ_1 เป็นระบบพิกัดของอนุภาคอิสระ n ตัว s° เป็นระบบพิกัดซึ่งโมเมนตัมรวมของ $\Sigma_1(\overline{p}_0)$ เป็นศูนย์ s° เรียกว่าระบบจุดศูนย์กลางมวลของอนุภาคชุดนี้ ถ้า $\bar{u}$ เป็นความเร็วของ s° เทียบกับกรอบเฉื่อย s ให้ $(\overline{P}°,E°)$ และ $(\overline{P},\overline{E})$ เป็นโมเมนตัมและพลังงานของอนุภาค n อนุภาค ใน s° และ s ตามลำดับ ดังนั้น

$$\overline{P} = \frac{E°\bar{u}}{c^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}, \qquad E = \frac{E°}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

ให้ $$M = \frac{E°}{c^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \frac{E}{c^2} = \frac{M_0}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

M : มวล

M_0 : มวลนิ่งของระบบพิกัด $s°$

ถ้า $T°$ เป็นพลังงานจลน์ทั้งหมดของอนุภาคในระบบจุดศูนย์กลางมวล จงหา $T°$

คำแนะนำ : สังเกตจากอนุภาคเดี่ยว $E = T + m_0c^2$

ตอบ :

$$M_0 = \frac{E°}{c^2} = \frac{T°}{c^2} + m_0$$

เมื่อ m_0 เป็นผลบวกของมวลนิ่งของอนุภาคทุก ๆ อนุภาค ดังนั้น $\frac{T°}{c^2}$ จะเป็นส่วนหนึ่งของมวลนิ่งในระบบจุดศูนย์กลางมวลด้วย

7. จงวิเคราะห์การกระทบแบบไม่ยืดหยุ่นของก้อนดินเหนียวกลมซึ่งมีมวลนิ่ง m_0 เท่ากันสองก้อนแล้ว จงหาผลต่างระหว่างพลังงานจลน์ก่อนกระทบและพลังงานจลน์หลังการกระทบ

คำแนะนำ : ให้มวลทั้งสองเคลื่อนที่เข้าหากันด้วยความเร็วเท่ากันในระบบพิกัด $s°$ ทำให้

โมเมนตัมทั้งหมด : $\bar{p}° = 0$

พลังงาน : $E° = 2m_0c^2 + T°$, $T°$: พลังงานจลน์ทั้งหมดใน $s°$

ให้ s เป็นระบบพิกัดซึ่ง $s°$ เคลื่อนที่ไปด้วยความเร็ว $\bar{u}$ เทียบกับ s ดังนั้น

ใน s

$$\bar{p} = \frac{\left(2m_0 + \frac{T°}{c^2}\right)\bar{u}}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

$$E = \frac{2m_0c^2 + T°}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

หลังการกระทบลูกกลมดินเหนียวติดกันมีโมเมนตัมรวมเป็นศูนย์ใน $s°$ พลังงานจลน์เปลี่ยนเป็นพลังงานความร้อน

$$Q° = T°$$

ใน s โมเมนตัมทั้งหมดคงเดิมคือ

$$\overline{P} = \frac{\left(2m_0 + \frac{T^\circ}{c^2}\right)\bar{u}}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \frac{M_0\bar{u}}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

$$M_0 = 2m_0 + \frac{Q^\circ}{c^2}$$

$M_0 > 2m_0$ ความร้อนก็กลายเป็นมวลนิ่งของระบบด้วย พลังงานของระบบหลังการกระทบคือ

$$E = \frac{M_0c^2}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \frac{2m_0c^2 + T^\circ}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

ตอบ : พลังงานจลน์ก่อนกระทบ − พลังงานจลน์หลังกระทบ (ใน s)

$$= \left\{\frac{2m_0c^2 + T^\circ}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} - 2m_0c^2\right\} - M_0c^2\left\{\frac{1}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} - 1\right\} = Q^\circ$$

8. จงหาพลังงานยึดเหนี่ยวระหว่างอนุภาคของนิวเคลียส แรงจะเป็นแรงดึงดูด สมมุติให้อนุภาคในนิวเคลียสหนักจนอาจประมาณได้ว่าระบบในนิวเคลียสเป็นระบบของอนุภาคตามกลศาสตร์แผนเดิม เวลาเฉพาะของแต่ละอนุภาคจะเท่ากับเวลา t' ของระบบพิกัด s' และให้โพเทนเชียลเป็นโพเทนเชียลของระบบอนุรักษ์

คำแนะนำ : $T' + V' = H'$ = ผลบวกระหว่างพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ : ค่าคงที่ปรับ V' จนกระทั่ง $\lim_{r' \to \infty} V'(r') = 0$ เลือก $s' = s^\circ$ ซึ่งศูนย์กลางของมวลในระบบนี้เป็นศูนย์ ในระบบพิกัด s เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\bar{u} = (u,0,0)$ เทียบกับ s° ดังนั้น

$$p_x = \frac{\left(m_0 + \frac{T^\circ}{c^2}\right)u}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}, \quad p_y = p_z = 0 : \text{โมเมนตัมใน s}$$

m_0 เป็นผลบวกของมวลนิ่งทั้งหมดของอนุภาค, $\bar{p} = (p_x, p_y, p_z)$ ขึ้นกับเวลาโมเมนตัมทั้งหมดของ s อาจหาได้ดังนี้

$$P_x = p_x + \frac{V^\circ u}{c^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \frac{\left(m_0 + \frac{H^\circ}{c^2}\right)u}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

$$P_y = P_z = 0$$

$\overline{P} = (P_x, P_y, P_z)$: ค่าคงที่

$$\overline{P} = \frac{M_0 \bar{u}}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

$$M_0 = m_0 + \frac{H^\circ}{c^2}$$

ตอบ : $\Delta E = -H^\circ$: พลังงานยึดเหนี่ยวระหว่างอนุภาคของนิวเคลียสสำหรับนิวเคลียสที่เสถียร

Δm : มวลที่หายไปของนิวเคลียส

$$= m_0 - M_0 = \frac{\Delta E}{c^2}$$

9. π^+ เมซอน มีมวลนิ่ง = 139.6 Mev ถ้าหากเครื่องเร่งอนุภาคทำให้เกิด π^+ เมซอนซึ่งมีพลังงานทั้งหมด 174.5 Mev จงหาว่า π^+ เมซอนจะเคลื่อนที่ไปได้ไกลเท่าไรในช่วงเวลาครึ่งชีวกาลของมัน กำหนดให้ครึ่งชีวกาลของ π^+ ในกรอบอ้างอิงซึ่งมันอยู่นิ่งเป็น 1.77×10^{-8} วินาที

คำแนะนำ : ให้ s° เป็นกรอบอ้างอิงซึ่งศูนย์กลางมวลของ π^+ เมซอนอยู่นิ่ง $\bar{u}$ เป็นความเร็วของ π^+ เทียบกับ s°

E : พลังงานของ π^+ เมซอน : 174.5 Mev

$$= \frac{E^\circ}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}, \quad E_0 : 139.6 \text{ Mev}$$

τ : ครึ่งชีวกาลเมื่อ π^+ เมซอนอยู่นิ่ง

$$= \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2} t$$

$\therefore$ ระยะทางที่ π^+ เมซอนจะเคลื่อนที่ไปได้ $= t \times u$

10. ถ้าโปรตอนมีพลังงานจลน์ 437 Mev (พลังงานทั้งหมดเท่ากับพลังงานจลน์บวกด้วยมวลนิ่ง ชนกับโปรตอนซึ่งอยู่นิ่ง หลังชนโปรตอนทั้งสองมีพลังงานเท่ากัน) จงหามุมระหว่างโปรตอนทั้งสอง

คำแนะนำ : อ่านคำแนะนำในข้อ 2 หรือ Sutton, R.B., et.al., Phys. Rev. 97, 1955, 783