บทที่ 4
ความแย้งกันของนาฬิกา

วัตถุประสงค์

1. ให้วิเคราะห์เหตุการณ์ที่นับเป็นความแย้งกันของนาฬิกาได้
2. ให้สามารถคำนวณหาอายุที่แท้จริงในเรื่องความแย้งกันของคู่แฝดได้
3. ให้สามารถคำนวณปรากฏการณ์ของดอปเพลอร์เชิงสัมพัทธภาพได้

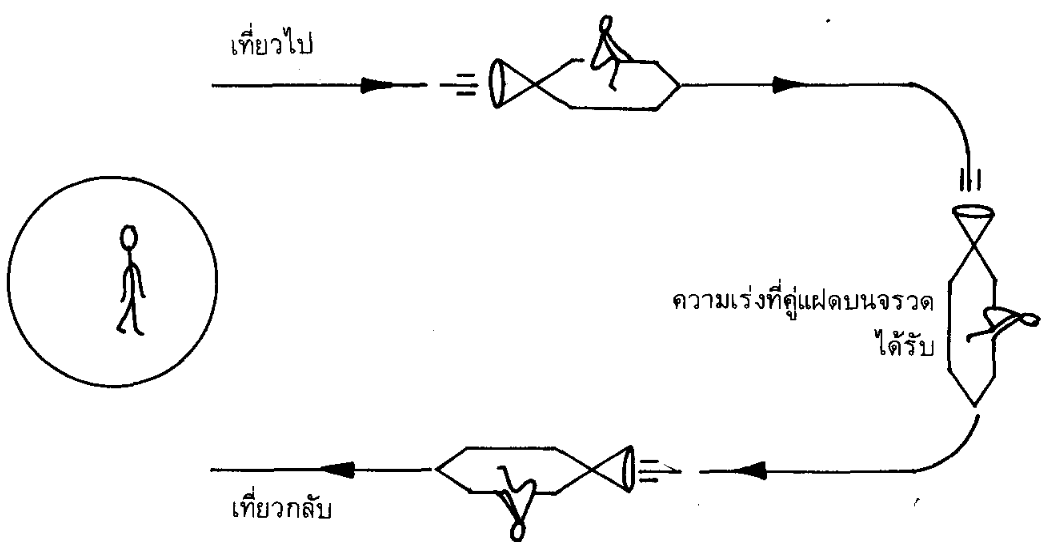
4.1 ข้อความของความขัดแย้ง

ผู้สังเกตการณ์บนผิวโลกผู้หนึ่ง "เห็น" นาฬิกาซึ่งติดไปกับจรวด วิ่งห่างจากเขาไปทุกขณะ เขากล่าวว่านาฬิกาซึ่งวิ่งห่างไปจากเขาเดินช้ากว่านาฬิกาซึ่งอยู่นิ่งเทียบกับตัวเขา ในขณะเดียวกันผู้สังเกตการณ์อีกคนหนึ่งซึ่งติดไปกับจรวด กลับกล่าวว่าเขาเห็นนาฬิกาบนผิวโลกวิ่งห่างจากเขา ดังนั้นนาฬิกาบนผิวโลกเดินช้ากว่านาฬิกาซึ่งอยู่นิ่งเทียบกับตัวเขา ปัญหาความขัดแย้งนี้เนื่องจากความแตกต่างกันของความพร้อมกันของแต่ละกรอบอ้างอิงซึ่งได้กล่าวถึงแล้วในเรื่องของความพร้อมกัน และปัญหานี้ก็สิ้นสุดลงแล้ว

แต่ยังมีปัญหาอีกชนิดหนึ่งซึ่งเรียกกันว่า ความแย้งกันของคู่แฝด ปัญหานี้มีอยู่ว่า คู่แฝดคู่หนึ่ง (อายุเท่ากัน ร่างกายเหมือนกัน) เดิมทั้งคู่อยู่นิ่ง ๆ บนผิวโลก ต่อมาคู่แฝดคนหนึ่งได้ออกเดินทางจากโลกด้วยจรวดที่มีความเร็วสูง เพื่อไปยังดาวเคราะห์ซึ่งอยู่ใกล้โลกดวงหนึ่ง ในขณะที่จรวดกำลังเคลื่อนไปนั้น คู่แฝดที่อยู่บนผิวโลกจะเห็นว่านาฬิกาซึ่งติดไปกับจรวดเดินช้าลง ขบวนการที่ใช้เป็นนาฬิกาได้ชนิดหนึ่งคือ ขบวนการทางชีววิทยา คู่แฝดที่อยู่บนโลก

จึงเห็นว่าคู่แฝดที่อยู่บนจรวด "แก่" ช้ากว่าเขา ในขณะที่คู่แฝดบนจรวดเดินทางกลับก็เช่นเดียวกัน นาฬิกาหรือขบวนการทางชีววิทยาของวิวัฒนาการของร่างกายจะเป็นไปได้ช้ากว่าปกติ เพราะการยืดของเวลาแปรผันกับกำลังสองของความเร็ว ดังนั้นเมื่อการเดินทางสิ้นสุดลง คู่แฝดทั้งสองมาพบกันอีกครั้งหนึ่ง จะปรากฏว่าคู่แฝดบนจรวดหนุ่มกว่าคู่แฝดซึ่งอยู่นิ่งบนผิวโลก คำสรุปนี้น่าประหลาด แต่นักฟิสิกส์ส่วนใหญ่เชื่อว่าปรากฏการณ์นี้เป็นความจริงสำหรับทฤษฎีสัมพัทธภาพ ความแย้งกันมีอยู่ว่า คู่แฝดซึ่งไปกับจรวด เขาควรจะเห็นคู่แฝดของเขาซึ่งอยู่บนโลกลอยห่างออกไป ดังนั้น คู่แฝดบนโลกควรจะมีวิวัฒนาการทางชีววิทยาในร่างกายของเขาช้าลงด้วย และเมื่อเขากลับมาถึงโลกอีกครั้งหนึ่งเขาก็คิดว่า คู่แฝดบนโลกจะมีอายุน้อยกว่าเขา เราจะอธิบายต่อไปว่า เหตุใดข้อสรุปอันนี้จึงมีความผิดพลาด

4.2 คำอธิบายถึงความแย้งกัน



รูปที่ 39 แสดงความแตกต่างระหว่างเหตุการณ์ของคู่แฝด คู่แฝดที่ไปกับจรวดต้องผ่านความเร่ง ทำให้เขามีประสบการณ์ต่างจากคู่แฝดที่อยู่นิ่งบนผิวโลก

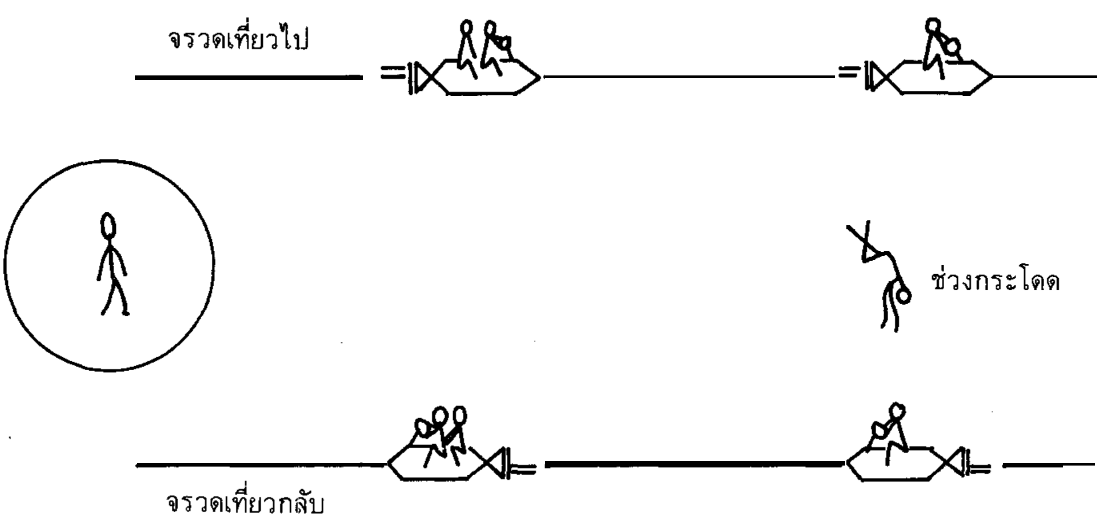
อันที่จริงคู่แฝดทั้งสองคนหาได้มีประสบการณ์เหมือนกันไม่ ความแตกต่างทางกายภาพเกิดขึ้นเมื่อคู่แฝดซึ่งไปกับจรวดต้องผ่านความเร่งเมื่อเปลี่ยนทิศการเคลื่อนที่กลับมายังโลก ดังแสดงในรูปที่ 39 แต่คู่แฝดที่อยู่บนผิวโลกยังคงอยู่ในกรอบเฉื่อยติดต่อกันไป ความเร่งเป็น

สิ่งที่อาจจะสังเกตได้โดยตรง ดังนั้น ความเร่งจึงเป็นเหตุการณ์ทางกายภาพอันหนึ่งสำหรับคู่แฝดที่ไปกับจรวด การเดินทางด้วยจรวดจึงประกอบขึ้นด้วยเหตุการณ์ 3 ตอนคือ เที่ยวไป เที่ยวกลับ และ ความเร่งในตอนกลาง คู่แฝดบนผิวโลกจะเห็นเหตุการณ์เพียงสองเหตุการณ์ คือ [6]จรวดเที่ยวไปและจรวดเที่ยวกลับ คู่แฝดบนจรวดจะเห็นเหตุการณ์ทั้งสามเหตุการณ์ ดังนั้น เหตุการณ์ซึ่งคู่แฝดได้ประสบทั้งคู่จึงไม่เหมือนกันทีเดียว ทำให้คู่แฝดทั้งคู่เห็นพ้องต้องกันว่า คู่แฝดซึ่งเคลื่อนไปกับจรวดจะเป็นผู้ซึ่งอ่อนวัยกว่า

การแก้ข้อขัดแย้ง จำต้องมีความเร่งเข้ามาเกี่ยวข้องด้วย ถ้าจะอธิบายให้ถูกต้องตามกระบวนความทั้งหมด จำต้องใช้ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป ซึ่งเกินขอบเขตที่จะกล่าวถึงในตอนนี้ แต่ก็มีคำอธิบายชุดหนึ่งซึ่งใช้ได้ดี สำหรับในระดับนี้ ซึ่งจะได้กล่าวถึงในตอนต่อไป

4.3 การทดลองที่สนับสนุนความแย้งกัน

4.3.1 การทดลองเกี่ยวกับเวลาของคู่แฝด



รูปที่ 40 การทดลองทางความคิดซึ่งเป็นความแตกต่างของประสบการณ์ระหว่างคู่แฝด คู่แฝดที่ไปกับจรวดต้องกระโดดจากจรวดเที่ยวไป ไปยังจรวดเที่ยวกลับ

---

6 คำอธิบายนี้เป็นของ Smith, J.H., **Introduction to Special Relativity**, 1965 หน้า 94 ข้าพเจ้าไม่เห็นพ้องด้วย แต่เป็นคำอธิบายซึ่งเป็นที่ยอมรับกันในปัจจุบัน

การทดลองที่จะกล่าวถึงนี้เป็นการทดลองทางความคิด โดยดัดแปลงเหตุการณ์ที่กล่าวถึงในรูปที่ 39 เล็กน้อย ในการทดลองนี้ให้มีจรวดสองทางเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วคงที่ v จรวดลำหนึ่งเป็นจรวดเที่ยวไป อีกลำหนึ่งเป็นจรวดเที่ยวกลับ คู่แฝดที่จะเดินทางด้วยจรวดจะติดไปกับจรวดเที่ยวไป พอจรวดสองลำสวนกัน เขาจะกระโดดมาอยู่ที่จรวดเที่ยวกลับ เมื่อจรวดเที่ยวกลับผ่านโลกคู่แฝดบนจรวดกลับบนผิวโลกตามเดิม ดังนั้นจะมีผู้สังเกตการณ์สามคนซึ่งอยู่ในกรอบเฉื่อยเสมอ คู่แฝดที่อยู่บนโลกและผู้ขับจรวดอีกสองคน

ผู้สังเกตการณ์	**เที่ยวไป**	**เที่ยวกลับ**	**เวลาทั้งหมด**
คู่แฝดบนผิวโลก	$\frac{T}{2}$	$\frac{T}{2}$	T
ผู้ขับจรวดเที่ยวไป	$\frac{T}{2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$	$\left(\frac{T}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{T}{2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)$	$\frac{T}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$
ผู้ขับจรวดเที่ยวกลับ	$\left(\frac{T}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{T}{2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)$	$\frac{T}{2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$	$\frac{T}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

ตารางที่ 1 เวลาในการเดินทาง

สำหรับผู้สังเกตการณ์ซึ่งเป็นคู่แฝดบนผิวโลก สมมุติว่าเวลาทั้งหมดในการเดินทางเป็น T เขาจะเห็นจรวดเที่ยวไปใช้เวลา $\frac{T}{2}$ และจรวดเที่ยวกลับใช้เวลา $\frac{T}{2}$ (ตามตารางที่ 1) แต่สำหรับผู้ขับจรวดเที่ยวไป จะเห็นว่าเวลา $\frac{T}{2}$ คือเวลาที่คู่แฝดซึ่งจะเดินทางกระโดดขึ้นจรวดของเขาถึงเวลาที่คู่แฝดคนเดียวกันเปลี่ยนจรวด เป็นเวลาไม่เฉพาะของนาฬิกาที่อยู่บนผิวโลก เวลาเฉพาะสำหรับผู้ขับจรวดเที่ยวไปก็คือ $\frac{T}{2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ ซึ่งหมายถึงว่าผู้ขับ

จรวดเที่ยวไปจะเห็นว่าช่วงเวลาทั้งหมดที่คู่แฝดมาอยู่กับเขาคือ $\frac{T}{2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ สำหรับคู่แฝดที่อยู่บนผิวโลกเขาเห็นว่าเวลาทั้งหมดที่คู่แฝดบนจรวดใช้ไปในการเดินทางคือ T ซึ่งเป็นเวลาเฉพาะ ดังนั้นช่วงเวลาเดียวกันนี้จึงเป็นเวลาไม่เฉพาะของผู้ขับจรวด ผู้ขับจรวดจึงเห็นว่าเวลาทั้งหมดที่คู่แฝดบนจรวดใช้ควรจะเป็น $\frac{T}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ (โปรดสังเกตการจำแนกชนิดของเวลา) ซึ่งใส่ไว้ในช่องท้ายของตารางที่ 1 เวลาเที่ยวกลับของคู่แฝดบนจรวดซึ่งผู้ขับจรวดเที่ยวไปสังเกตเห็นก็คือ $\frac{T}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{T}{2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ ซึ่งปรากฏในช่องที่สองของตารางที่ 1

อาจจะใช้การให้เหตุผลเดียวกันสำหรับผู้ขับจรวดเที่ยวกลับ จะเห็นว่าเวลาทั้งหมดที่เขาเห็นคู่แฝดบนจรวดในการเดินทางคือ $\frac{T}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ แต่เวลาที่เขาเห็นในการเดินทางแต่ละเที่ยวจะกลับกันกับผู้ขับจรวดเที่ยวไปดังปรากฏในตารางที่ 1

สำหรับคู่แฝดซึ่งไปกับจรวด เราต้องสมมุติว่าเขาไม่ได้ผูกนาฬิกาติดไปด้วย ตอนเที่ยวไปก่อนที่เขาจะกระโดดเขาได้ดูนาฬิกาในจรวดเที่ยวไปเห็นว่าเขาได้ใช้เวลาไป $\frac{T}{2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ เขากระโดดออกจากจรวดเที่ยวไป ไปอยู่บนจรวดเที่ยวกลับเห็นว่าเขาได้ใช้เวลาเพิ่มขึ้นอีก $\frac{T}{2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ วินาที ดังนั้นเขาจึงสรุปว่าเขาได้ใช้เวลาไปทั้งหมด $T\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ ในขณะที่คู่แฝดบนโลกเห็นว่าเวลาที่ผ่านไปทั้งหมด T ดังนั้นนาฬิกาของคู่แฝดที่เดินทางไปกับจรวดจะช้าไป $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ เท่าของนาฬิกาบนผิวโลก คู่แฝดทั้งสองจะเห็นพ้องกันในจุดนี้

4.3.2 ปรากฏการณ์ดอปเพลอร์เชิงสัมพัทธภาพ

ในตอนที่ 1.5 เราได้แสดงให้เห็นว่าเฟสของคลื่นเป็นปริมาณที่ไม่เปลี่ยนแปลงไปตามพิกัด พบว่า

$$F \;=\; \text{เฟส} \;=\; \nu'\left(t' - \frac{x'\cos\alpha' + y'\sin\alpha'}{c'}\right) \;=\; \nu\left(t - \frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{c}\right) \qquad (4.1)$$

แต่ในตอนที่ 1.5 เราให้การแปลงแบบกาลิเลโอในการแปลงระหว่างระบบพิกัด s กับ s′ ในตอนนี้

เราจะใช้การแปลงแบบโลเรนตซ์ ตามชุดสมการ (3.32)′ กำจัดค่า x, y และ t ในสมการ (4.1) ดังนี้

$$\nu' \left(t' - \frac{x'\cos\alpha' + y'\sin\alpha'}{c}\right) = \nu \left\{\gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) - \frac{\gamma(x' + vt')\cos\alpha + y'\sin\alpha}{c}\right\} \quad (4.2)$$

$$c' = c$$

เทียบสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตามลำดับได้ดังนี้

$$t' \quad : \quad \nu' = \nu\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\cos\alpha\right) \quad (4.3)$$

$$x' \quad : \quad \frac{\nu'\cos\alpha'}{c} = \nu\gamma\left(\frac{\cos\alpha}{c} - \frac{v}{c^2}\right) \quad (4.4)$$

$$y' \quad : \quad \frac{\nu'\sin\alpha'}{c} = \frac{\nu\sin\alpha}{c} \quad (4.5)$$

ถ้า s เป็นระบบอ้างอิงซึ่งผู้สังเกตการณ์อยู่นิ่ง s′ เป็นระบบอ้างอิงซึ่งจุดกำเนิดแสงสว่างอยู่นิ่ง ความถี่ ν จึงเป็นความถี่ซึ่งผู้สังเกตการณ์ใน s จะสังเกตเห็น ความถี่ ν' เป็นของกำเนิดแสงซึ่งปรากฏแก่ผู้สังเกตที่อยู่นิ่งเทียบกับกำเนิดแสงนั้น ให้ $\nu' = \nu^\circ$ ทิศของรังสีของแสงจะเป็นทิศเดียวกับแนวตั้งฉากกับคลื่นในสุญญากาศ ดังนั้นเราอาจจะเขียนสมการ (4.3) เสียใหม่ได้ว่า

$$\nu^\circ = \nu\gamma\left(1 - \frac{\bar{v}.\hat{e}}{c}\right) \quad (4.6)$$

$\bar{v}$ เป็นความเร็วของจุดกำเนิดแสงเทียบกับผู้สังเกตการณ์ใน s $\hat{e}$ เป็นเวกเตอร์ขนาดหนึ่งหน่วย $\hat{e} = \hat{n}$ แสดงทิศของแสงในกรอบเฉื่อยของผู้สังเกตการณ์ ถ้า $\bar{v}.\hat{e} = 0$ แสดงว่าทิศการเคลื่อนที่ของแสงตั้งฉากกับทิศการเคลื่อนที่ของจุดกำเนิดแสง ในกรณีนี้เราจะได้ปรากฏการณ์ดอปเพลอร์ในทิศตามขวาง

$$\nu^\circ = \gamma\nu \quad (4.7)$$

แต่ถ้าหาก $\bar{v}.\hat{e} = v$

$$\nu^\circ = \nu\frac{1 - \frac{v}{c}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \nu\left(\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}\right)^{1/2} \quad (4.8)$$

เป็นปรากฏการณ์ดอปเพลอร์ในทิศตามยาว

4.3.3 การทดลองเกี่ยวกับกระบวนการทางชีววิทยาของคู่แฝด

เพื่อแสดงความเกี่ยวเนื่องของขบวนการทางชีววิทยากับการยืดออกของเวลา ให้คู่แฝดมีโอกาสนับการเต้นของหัวใจของคู่แฝดอีกคนหนึ่งเราจะให้คู่แฝดแต่ละคนมีเครื่องมือฟังการเต้นของหัวใจติดกับตัว แต่ละครั้งที่มีการเต้นของหัวใจให้มีแสงสว่างพุ่งออกจากศีรษะของเขา เราจะสมมุติว่าคู่แฝดแต่ละคนมีหัวใจเต้น 1 ครั้งต่อวินาที

ในตอนแรกเราจะศึกษาประสบการณ์ของคู่แฝดที่อยู่บนโลกก่อน เขาจะคิดว่าเวลาทั้งหมดที่ใช้ในการเดินทางของคู่แฝดอีกคนหนึ่งคือ T วินาที ดังนั้นจะมีแสงออกจากศีรษะของเขา T ครั้ง เขาจะเห็นว่าคู่แฝดบนจรวดมีแสงสว่างออกมาเป็นสองตอนคือตอนเที่ยวไปกับตอนเที่ยวกลับ ในตอนเที่ยวไป $v = -v$ ของสมการ (4.8) ดังนั้น

$$\nu = \left(\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}} \right)^{1/2} , \qquad \nu_0 = 1 \tag{4.9}$$

ในตอนเที่ยวกลับเขาจะเห็นว่า ความถี่ที่เขาสังเกตได้คือ

$$\nu = \left(\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}} \right)^{1/2} , \qquad \nu_0 = 1 \tag{4.10}$$

ยิ่งไปกว่านี้คู่แฝดบนโลกไม่ได้เห็นจำนวนครั้งของแสงสว่างตอนละ $\frac{T}{2}$ วินาที แต่เขาจะสังเกตเห็นว่าตอนเที่ยวไป คู่แฝดบนจรวดจะใช้เวลา $\frac{T}{2}$ วินาที + เวลาที่แสงเดินทางจากจุดที่เขากระโดดออกจากจรวดลำแรกไปยังจรวดลำที่สองกลับมายังพื้นโลก นอกจากนี้คู่แฝดบนโลกยังทราบว่าคู่แฝดบนจรวดใช้เวลา $\frac{T}{2}$ วินาที แต่ละเที่ยวและมีอัตราเร็ว v ทั้งสองเที่ยว ดังนั้นเวลาที่แสงใช้ในการเดินทางคราวนี้จึงเป็น $\frac{vT}{c2}$ เขาจะเห็นความถี่ตามสมการ (4.9) อยู่ $\left(\frac{T}{2} + \frac{vT}{c2}\right)$ วินาที และจะเห็นความถี่ตามสมการ (4.10) อยู่เพียง $\frac{T}{2} - \frac{vT}{c2}$ วินาที ดังนั้นจำนวนครั้งทั้งหมดของแสงสว่างที่เขาจะนับได้ก็คือ

$$\left(\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}} \right)^{1/2} \times \left(\frac{T}{2}\right)\left(1+\frac{v}{c}\right) + \left(\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}} \right)^{1/2} \times \frac{T}{2}\left(1-\frac{v}{c}\right) = T\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \text{ ครั้ง}$$

ดังนั้นคู่แฝดบนโลกจึงสรุปว่า หัวใจของเขาเต้น T ครั้ง ในขณะที่หัวใจของคู่แฝดบนจรวดเต้น $T\ (1-\frac{v^2}{c^2})^{1/2}$ ครั้ง

สำหรับคู่แฝดที่ไปกับจรวด เขาเห็นว่าเวลาทั้งหมดที่เขาใช้ในการเดินทางคือ $T\ (1-\frac{v^2}{c^2})^{1/2}$ ดังนั้นหัวใจของเขาจะเต้น $T\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$ ครั้ง ในขณะที่เขาอยู่บนจรวดเที่ยวไป เขาจะเห็นความถี่ดอปเพลอร์มาจากคู่แฝดบนโลกเป็น $\left(\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}\right)^{1/2}$ ตลอดระยะเวลาครึ่งแรกคือ $\frac{T}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$ วินาที ดังนั้นจำนวนครั้งที่เขาเห็นหัวใจเต้นจะเป็น $\frac{T}{2}\left\{\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{1+\frac{v}{c}}\right\}$ ตอนเที่ยวกลับเขาจะเห็นความถี่ดอปเพลอร์จากคู่แฝดบนโลกเป็น $\left\{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}\right\}^{1/2}$ ตลอดระยะเวลาครึ่งหลังคือ $\frac{T}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$ วินาที ดังนั้นจำนวนครั้งที่เขาเห็นหัวใจคู่แฝดบนโลกเต้น จะเป็น $\frac{T}{2}\ \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{v}{c}\right)}$ จำนวนครั้งที่เขาเห็นหัวใจเต้นทั้งหมดจะเป็น

$$\frac{T}{2}\left\{\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{v}{c}\right)}+\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{v}{c}\right)}\right\} = T \tag{4.11}$$

(4.11) ให้จำนวนครั้งที่หัวใจของคู่แฝดบนโลกเต้น และคู่แฝดซึ่งเดินทางไปกับจรวดนับได้ จะเห็นว่าความขัดแย้งกันนั้นหมดไป คู่แฝดซึ่งไปกับจรวดจะเห็นเช่นเดียวกับคู่แฝดซึ่งอยู่บนโลกคือ จำนวนครั้งที่หัวใจของคู่แฝดบนโลกเต้นคือ T และจำนวนครั้งที่หัวใจของเขาเต้นคือ $T\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$

4.4 ตัวอย่างการคำนวณ

ตัวอย่างที่ 1 การแปลงของความเร็วของอนุภาค

ให้ระบบพิกัด s และ s′ เชื่อมโยงกันดังรูปที่ 33 พิกัดและเวลาของระบบทั้งสองสัมพันธ์กันตามความสัมพันธ์ที่ (3.32) และ (3.32)′ การเคลื่อนที่ของอนุภาค ๆ หนึ่งใน s ให้ได้ด้วยชุดของฟังก์ชัน

$$x = x(t) \ , \ y = y(t) \ \text{และ} \ z = z(t) \tag{4.12}$$

สำหรับใน s′ การเคลื่อนที่เดียวกันให้ได้ด้วยชุดของฟังก์ชัน

$$x' = x'(t') \ , \ y' = y'(t') \ \text{และ} \ z' = z'(t') \tag{4.13}$$

ดังนั้น ความเร็วของอนุภาคเทียบกับระบบของ s คือ

$$\left.\begin{aligned} \bar{u} &= (u_x, u_y, u_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \\ u &= (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2} \end{aligned}\right\} \tag{4.14}$$

ความเร็วของอนุภาคเดียวกันเทียบกับระบบของ s′ คือ

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}' &= (u_x', u_y', u_z') = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'}\right) \\ u' &= (u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2)^{1/2} \end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

จงหาการแปลงระหว่าง ū และ ū′

วิธีทำ จากสมการชุด (3.32)

$$\left.\begin{aligned} dx' &= \gamma(dx - vdt) \qquad \gamma = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}, \ dy' = dy, \ dz' = dz \\ dt' &= \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right) \end{aligned}\right\} \tag{4.16}$$

ดังนั้น $$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \ , \ u_y' = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)} \qquad u_z' = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)} \tag{4.17}$$

ของคู่แฝดบนโลกเป็น $\dfrac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}{\left(1+\frac{v}{c}\right)}$ ดังนั้นจำนวนครั้งทั้งหมดที่หัวใจคู่แฝดบนโลกเต้นได้

คือ

$$\text{ความถี่} \times \text{เวลา} = \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}{\left(1+\frac{v}{c}\right)} \times Z = \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}{\left(1+\frac{v}{c}\right)} \times \frac{\left(1+\frac{v}{c}\right)}{\left(,\ \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} T = T \qquad (4.20)$$