# บทที่ 4
# ความแย้งกันของนาฬิกา

**วัตถุประสงค์**

1. ให้วิเคราะห์เหตุการณ์ที่นับเป็นความแย้งกันของนาฬิกาได้
2. ให้สามารถคำนวณหาอายุที่แท้จริงในเรื่องความแย้งกันของคู่แฝดได้
3. ให้สามารถคำนวณปรากฏการณ์ของดอปเพลอร์เชิงสัมพัทธภาพได้

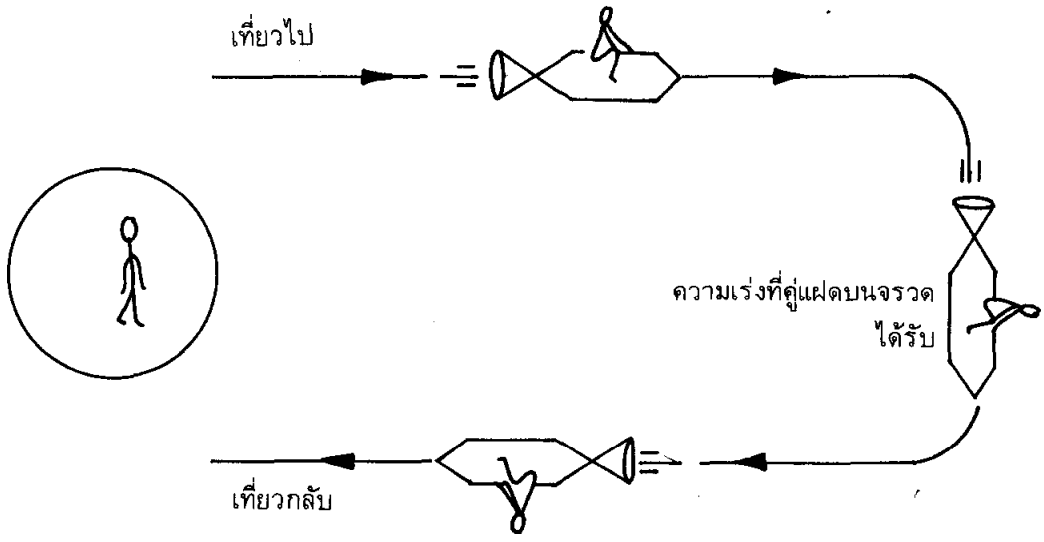
## 4.1 ข้อความของความขัดแย้ง

ผู้สังเกตการณ์บนผิวโลกผู้หนึ่ง "เห็น" นาฬิกาซึ่งติดไปกับจรวด วิ่งห่างจากเขาไปทุกขณะ เขากล่าวว่านาฬิกาซึ่งวิ่งห่างไปจากเขาเดินช้ากว่านาฬิกาซึ่งอยู่นิ่งเทียบกับตัวเขา ในขณะเดียวกันผู้สังเกตการณ์อีกคนหนึ่งซึ่งติดไปกับจรวด กลับกล่าวว่าเขาเห็นนาฬิกาบนผิวโลกวิ่งห่างจากเขา ดังนั้นนาฬิกาบนผิวโลกเดินช้ากว่านาฬิกาซึ่งอยู่นิ่งเทียบกับตัวเขา ปัญหาความขัดแย้งนี้เนื่องจากความแตกต่างกันของความพร้อมกันของแต่ละกรอบอ้างอิงซึ่งได้กล่าวถึงแล้วในเรื่องของความพร้อมกัน และปัญหานี้ก็สิ้นสุดลงแล้ว

แต่ยังมีปัญหาอีกชนิดหนึ่งซึ่งเรียกกันว่า ความแย้งกันของคู่แฝด ปัญหานี้มีอยู่ว่าคู่แฝดคู่หนึ่ง (อายุเท่ากัน ร่างกายเหมือนกัน) เดิมทั้งคู่อยู่นิ่ง ๆ บนผิวโลก ต่อมาคู่แฝดคนหนึ่งได้ออกเดินทางจากโลกด้วยจรวดที่มีความเร็วสูง เพื่อไปยังดาวเคราะห์ซึ่งอยู่ใกล้โลกดวงหนึ่ง ในขณะที่จรวดกำลังเคลื่อนไปนั้น คู่แฝดที่อยู่บนผิวโลกจะเห็นว่านาฬิกาซึ่งติดไปกับจรวดเดินช้าลง ขบวนการที่ใช้เป็นนาฬิกาได้ชนิดหนึ่งคือ ขบวนการทางชีววิทยา คู่แฝดที่อยู่บนโลก

จึงเห็นว่าคู่แฝดที่อยู่บนจรวด "แก่" ช้ากว่าเขา ในขณะที่คู่แฝดบนจรวดเดินทางกลับก็เช่นเดียวกัน นาฬิกาหรือขบวนการทางชีววิทยาของวิวัฒนาการของร่างกายจะเป็นไปได้ช้ากว่าปกติ เพราะการยืดของเวลาแปรผันกับกำลังสองของความเร็ว ดังนั้นเมื่อการเดินทางสิ้นสุดลง คู่แฝดทั้งสองมาพบกันอีกครั้งหนึ่ง จะปรากฏว่าคู่แฝดบนจรวดหนุ่มกว่าคู่แฝดซึ่งอยู่นิ่งบนผิวโลก คำสรุปนี้น่าประหลาด แต่นักฟิสิกส์ส่วนใหญ่เชื่อว่าปรากฏการณ์นี้เป็นความจริงสำหรับทฤษฎีสัมพัทธภาพ ความแย้งกันมีอยู่ว่า คู่แฝดซึ่งไปกับจรวด เขาควรจะเห็นคู่แฝดของเขาซึ่งอยู่บนโลกลอยห่างออกไป ดังนั้น คู่แฝดบนโลกควรจะมีวิวัฒนาการทางชีววิทยาในร่างกายของเขาช้าลงด้วย และเมื่อเขากลับมาถึงโลกอีกครั้งหนึ่งเขาก็คิดว่า คู่แฝดบนโลกจะมีอายุน้อยกว่าเขา เราจะอธิบายต่อไปว่า เหตุใดข้อสรุปอันนี้จึงมีความผิดพลาด

## 4.2 คำอธิบายถึงความแย้งกัน




**รูปที่ 39** แสดงความแตกต่างระหว่างเหตุการณ์ของคู่แฝด คู่แฝดที่ไปกับจรวดต้องผ่านความเร่ง ทำให้เขามีประสบการณ์ต่างจากคู่แฝดที่อยู่นิ่งบนผิวโลก

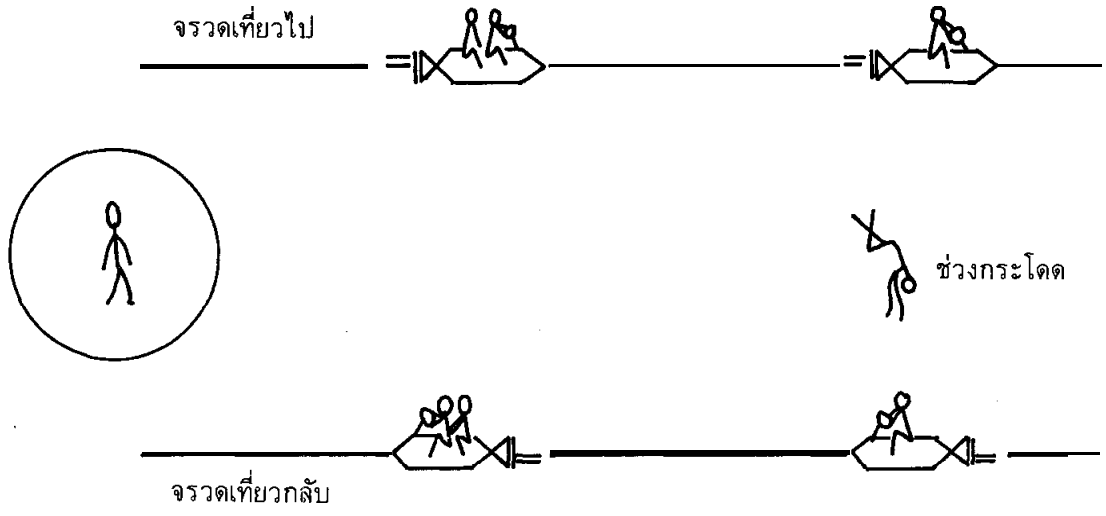
อันที่จริงคู่แฝดทั้งสองคนหาได้มีประสบการณ์เหมือนกันไม่ ความแตกต่างทางกายภาพเกิดขึ้นเมื่อคู่แฝดซึ่งไปกับจรวดต้องผ่านความเร่งเมื่อเปลี่ยนทิศการเคลื่อนที่กลับมายังโลก ดังแสดงในรูปที่ 39 แต่คู่แฝดที่อยู่บนผิวโลกยังคงอยู่ในกรอบเฉื่อยติดต่อกันไป ความเร่งเป็น

สิ่งที่อาจจะสังเกตได้โดยตรง ดังนั้น ความเร่งจึงเป็นเหตุการณ์ทางกายภาพอันหนึ่งสำหรับคู่แฝดที่ไปกับจรวด การเดินทางด้วยจรวดจึงประกอบขึ้นด้วยเหตุการณ์ 3 ตอนคือ เที่ยวไป เที่ยวกลับ และ ความเร่งในตอนกลาง คู่แฝดบนผิวโลกจะเห็นเหตุการณ์เพียงสองเหตุการณ์ คือ [6]จรวดเที่ยวไปและจรวดเที่ยวกลับ คู่แฝดบนจรวดจะเห็นเหตุการณ์ทั้งสามเหตุการณ์ ดังนั้นเหตุการณ์ซึ่งคู่แฝดได้ประสบทั้งคู่จึงไม่เหมือนกันทีเดียว ทำให้คู่แฝดทั้งคู่เห็นพ้องต้องกันว่าคู่แฝดซึ่งเคลื่อนไปกับจรวดจะเป็นผู้ซึ่งอ่อนวัยกว่า

การแก้ข้อขัดแย้ง จำต้องมีความเร่งเข้ามาเกี่ยวข้องด้วย ถ้าจะอธิบายให้ถูกต้องตามกระบวนความทั้งหมด จำต้องใช้ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป ซึ่งเกินขอบเขตที่จะกล่าวถึงในตอนนี้ แต่ก็มีคำอธิบายชุดหนึ่งซึ่งใช้ได้ดี สำหรับในระดับนี้ ซึ่งจะได้กล่าวถึงในตอนต่อไป

## 4.3 การทดลองที่สนับสนุนความแย้งกัน

### 4.3.1 การทดลองเกี่ยวกับเวลาของคู่แฝด




**รูปที่ 40** การทดลองทางความคิดซึ่งเป็นความแตกต่างของประสบการณ์ระหว่างคู่แฝด คู่แฝดที่ไปกับจรวดต้องกระโดดจากจรวดเที่ยวไป ไปยังจรวดเที่ยวกลับ

---

6 คำอธิบายนี้เป็นของ Smith, J.H., **Introduction to Special Relativity**, 1965 หน้า 94 ข้าพเจ้าไม่เห็นพ้องด้วย แต่เป็นคำอธิบายซึ่งเป็นที่ยอมรับกันในปัจจุบัน

การทดลองที่จะกล่าวถึงนี้เป็นการทดลองทางความคิด โดยดัดแปลงเหตุการณ์ที่กล่าวถึงในรูปที่ 39 เล็กน้อย ในการทดลองนี้ให้มีจรวดสองทางเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วคงที่ v จรวดลำหนึ่งเป็นจรวดเที่ยวไป อีกลำหนึ่งเป็นจรวดเที่ยวกลับ คู่แฝดที่จะเดินทางด้วยจรวดจะติดไปกับจรวดเที่ยวไป พอจรวดสองลำสวนกัน เขาจะกระโดดมาอยู่ที่จรวดเที่ยวกลับ เมื่อจรวดเที่ยวกลับผ่านโลกคู่แฝดบนจรวดกลับบนผิวโลกตามเดิม ดังนั้นจะมีผู้สังเกตการณ์สามคนซึ่งอยู่ในกรอบเฉื่อยเสมอ คู่แฝดที่อยู่บนโลกและผู้ขับจรวดอีกสองคน

| ผู้สังเกตการณ์ | เที่ยวไป | เที่ยวกลับ | เวลาทั้งหมด |
|---|---|---|---|
| คู่แฝดบนผิวโลก | $\frac{T}{2}$ | $\frac{T}{2}$ | T |
| ผู้ขับจรวดเที่ยวไป | $\frac{T}{2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ | $\left(\frac{T}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-\frac{T}{2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)$ | $\frac{T}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ |
| ผู้ขับจรวดเที่ยวกลับ | $\left(\frac{T}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-\frac{T}{2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)$ | $\frac{T}{2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ | $\frac{T}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ |

**ตารางที่ 1** เวลาในการเดินทาง

สำหรับผู้สังเกตการณ์ซึ่งเป็นคู่แฝดบนผิวโลก สมมุติว่าเวลาทั้งหมดในการเดินทางเป็น T เขาจะเห็นจรวดเที่ยวไปใช้เวลา $\frac{T}{2}$ และจรวดเที่ยวกลับใช้เวลา $\frac{T}{2}$ (ตามตารางที่ 1) แต่สำหรับผู้ขับจรวดเที่ยวไป จะเห็นว่าเวลา $\frac{T}{2}$ คือเวลาที่คู่แฝดซึ่งจะเดินทางกระโดดขึ้นจรวดของเขาถึงเวลาที่คู่แฝดคนเดียวกันเปลี่ยนจรวด เป็นเวลาไม่เฉพาะของนาฬิกาที่อยู่บนผิวโลก เวลาเฉพาะสำหรับผู้ขับจรวดเที่ยวไปก็คือ $\frac{T}{2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ ซึ่งหมายถึงว่าผู้ขับ

จรวดเที่ยวไปจะเห็นว่าช่วงเวลาทั้งหมดที่คู่แฝดมาอยู่กับเขาคือ $\frac{T}{2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ สำหรับคู่แฝดที่อยู่บนผิวโลกเขาเห็นว่าเวลาทั้งหมดที่คู่แฝดบนจรวดใช้ไปในการเดินทางคือ T ซึ่งเป็นเวลาเฉพาะ ดังนั้นช่วงเวลาเดียวกันนี้จึงเป็นเวลาไม่เฉพาะของผู้ขับจรวด ผู้ขับจรวดจึงเห็นว่าเวลาทั้งหมดที่คู่แฝดบนจรวดใช้ควรจะเป็น $\frac{T}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ (โปรดสังเกตการจำแนกชนิดของเวลา) ซึ่งใส่ไว้ในช่องท้ายของตารางที่ 1 เวลาเที่ยวกลับของคู่แฝดบนจรวดซึ่งผู้ขับจรวดเที่ยวไปสังเกตเห็นก็คือ $\frac{T}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-\frac{T}{2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ ซึ่งปรากฏในช่องที่สองของตารางที่ 1

อาจจะใช้การให้เหตุผลเดียวกันสำหรับผู้ขับจรวดเที่ยวกลับ จะเห็นว่าเวลาทั้งหมดที่เขาเห็นคู่แฝดบนจรวดในการเดินทางคือ $\frac{T}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ แต่เวลาที่เขาเห็นในการเดินทางแต่ละเที่ยวจะกลับกันกับผู้ขับจรวดเที่ยวไปดังปรากฏในตารางที่ 1

สำหรับคู่แฝดซึ่งไปกับจรวด เราต้องสมมุติว่าเขาไม่ได้ผูกนาฬิกาติดไปด้วย ตอนเที่ยวไปก่อนที่เขาจะกระโดดเขาได้ดูนาฬิกาในจรวดเที่ยวไปเห็นว่าเขาได้ใช้เวลาไป $\frac{T}{2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ เขากระโดดออกจากจรวดเที่ยวไป ไปอยู่บนจรวดเที่ยวกลับเห็นว่าเขาได้ใช้เวลาเพิ่มขึ้นอีก $\frac{T}{2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ วินาที ดังนั้นเขาจึงสรุปว่าเขาได้ใช้เวลาไปทั้งหมด $T\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ ในขณะที่คู่แฝดบนโลกเห็นว่าเวลาที่ผ่านไปทั้งหมด T ดังนั้นนาฬิกาของคู่แฝดที่เดินทางไปกับจรวดจะช้าไป $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ เท่าของนาฬิกาบนผิวโลก คู่แฝดทั้งสองจะเห็นพ้องกันในจุดนี้

### 4.3.2 ปรากฏการณ์ดอปเพลอร์เชิงสัมพัทธภาพ

ในตอนที่ 1.5 เราได้แสดงให้เห็นว่าเฟสของคลื่นเป็นปริมาณที่ไม่เปลี่ยนแปลงไปตามพิกัด พบว่า

$$F = \text{เฟส} = \nu'\left(t'-\frac{x'\cos\alpha'+y'\sin\alpha'}{c'}\right) = \nu\left(t-\frac{x\cos\alpha+y\sin\alpha}{c}\right) \qquad (4.1)$$

แต่ในตอนที่ 1.5 เราให้การแปลงแบบกาลิเลโอในการแปลงระหว่างระบบพิกัด s กับ s′ ในตอนนี้

เราจะใช้การแปลงแบบโลเรนตซ์ ตามชุดสมการ (3.32)′ กำจัดค่า x, y และ t ในสมการ (4.1) ดังนี้

$$\nu'\left(t'-\frac{x'\cos\alpha'+y'\sin\alpha'}{c}\right) = \nu\left\{\gamma\left(t'+\frac{vx'}{c^2}\right)-\frac{\gamma(x'+vt')\cos\alpha+y'\sin\alpha}{c}\right\} \quad (4.2)$$

$$c' = c$$

เทียบสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตามลำดับได้ดังนี้

$$t' : \nu' = \nu\gamma\left(1-\frac{v}{c}\cos\alpha\right) \quad (4.3)$$

$$x' : \frac{\nu'\cos\alpha'}{c} = \nu\gamma\left(\frac{\cos\alpha}{c}-\frac{v}{c^2}\right) \quad (4.4)$$

$$y' : \frac{\nu'\sin\alpha'}{c} = \frac{\nu\sin\alpha}{c} \quad (4.5)$$

ถ้า s เป็นระบบอ้างอิงซึ่งผู้สังเกตการณ์อยู่นิ่ง s′ เป็นระบบอ้างอิงซึ่งจุดกำเนิดแสงสว่างอยู่นิ่ง ความถี่ $\nu$ จึงเป็นความถี่ซึ่งผู้สังเกตการณ์ใน s จะสังเกตเห็น ความถี่ $\nu'$ เป็นของกำเนิดแสงซึ่งปรากฏแก่ผู้สังเกตที่อยู่นิ่งเทียบกับกำเนิดแสงนั้น ให้ $\nu' = \nu^\circ$ ทิศของรังสีของแสงจะเป็นทิศเดียวกับแนวตั้งฉากกับคลื่นในสุญญากาศ ดังนั้นเราอาจจะเขียนสมการ (4.3) เสียใหม่ได้ว่า

$$\nu^\circ = \nu\gamma\left(1-\frac{\bar{v}.\hat{e}}{c}\right) \quad (4.6)$$

$\bar{v}$ เป็นความเร็วของจุดกำเนิดแสงเทียบกับผู้สังเกตการณ์ใน s $\hat{e}$ เป็นเวกเตอร์ขนาดหนึ่งหน่วย $\hat{e} = \hat{n}$ แสดงทิศของแสงในกรอบเฉื่อยของผู้สังเกตการณ์ ถ้า $\bar{v}.\hat{e} = 0$ แสดงว่าทิศการเคลื่อนที่ของแสงตั้งฉากกับทิศการเคลื่อนที่ของจุดกำเนิดแสง ในกรณีนี้เราจะได้ปรากฏการณ์ดอปเพลอร์ในทิศตามขวาง

$$\nu^\circ = \gamma\nu \quad (4.7)$$

แต่ถ้าหาก $\bar{v}.\hat{e} = v$

$$\nu^\circ = \nu\frac{1-\frac{v}{c}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \nu\left(\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}\right)^{1/2} \quad (4.8)$$

เป็นปรากฏการณ์ดอปเพลอร์ในทิศตามยาว

### 4.3.3 การทดลองเกี่ยวกับกระบวนการทางชีววิทยาของคู่แฝด

เพื่อแสดงความเกี่ยวเนื่องของขบวนการทางชีววิทยากับการยืดออกของเวลา ให้คู่แฝดมีโอกาสนับการเต้นของหัวใจของคู่แฝดอีกคนหนึ่งเราจะให้คู่แฝดแต่ละคนมีเครื่องมือฟังการเต้นของหัวใจติดกับตัว แต่ละครั้งที่มีการเต้นของหัวใจให้มีแสงสว่างพุ่งออกจากศีรษะของเขา เราจะสมมุติว่าคู่แฝดแต่ละคนมีหัวใจเต้น 1 ครั้งต่อวินาที

ในตอนแรกเราจะศึกษาประสบการณ์ของคู่แฝดที่อยู่บนโลกก่อน เขาจะคิดว่าเวลาทั้งหมดที่ใช้ในการเดินทางของคู่แฝดอีกคนหนึ่งคือ T วินาที ดังนั้นจะมีแสงออกจากศีรษะของเขา T ครั้ง เขาจะเห็นว่าคู่แฝดบนจรวดมีแสงสว่างออกมาเป็นสองตอนคือตอนเที่ยวไปกับตอนเที่ยวกลับ ในตอนเที่ยวไป $v = -v$ ของสมการ (4.8) ดังนั้น

$$\nu = \left( \frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}} \right)^{1/2} , \qquad \nu_0 = 1 \tag{4.9}$$

ในตอนเที่ยวกลับเขาจะเห็นว่า ความถี่ที่เขาสังเกตได้คือ

$$\nu = \left( \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}} \right)^{1/2} , \qquad \nu_0 = 1 \tag{4.10}$$

ยิ่งไปกว่านี้คู่แฝดบนโลกไม่ได้เห็นจำนวนครั้งของแสงสว่างตอนละ $\frac{T}{2}$ วินาที แต่เขาจะสังเกตเห็นว่าตอนเที่ยวไป คู่แฝดบนจรวดจะใช้เวลา $\frac{T}{2}$ วินาที + เวลาที่แสงเดินทางจากจุดที่เขากระโดดออกจากจรวดลำแรกไปยังจรวดลำที่สองกลับมายังพื้นโลก นอกจากนี้คู่แฝดบนโลกยังทราบว่าคู่แฝดบนจรวดใช้เวลา $\frac{T}{2}$ วินาที แต่ละเที่ยวและมีอัตราเร็ว v ทั้งสองเที่ยว ดังนั้นเวลาที่แสงใช้ในการเดินทางคราวนี้จึงเป็น $\frac{vT}{c2}$ เขาจะเห็นความถี่ตามสมการ (4.9) อยู่ $\left(\frac{T}{2} + \frac{vT}{c2}\right)$ วินาที และจะเห็นความถี่ตามสมการ (4.10) อยู่เพียง $\frac{T}{2} - \frac{vT}{c2}$ วินาที ดังนั้นจำนวนครั้งทั้งหมดของแสงสว่างที่เขาจะนับได้ก็คือ

$$\left( \frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}} \right)^{1/2} \times \left(\frac{T}{2}\right)\left(1 + \frac{v}{c}\right) + \left( \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}} \right)^{1/2} \times \frac{T}{2}\left(1 - \frac{v}{c}\right) = T\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \text{ ครั้ง}$$

ดังนั้นคู่แฝดบนโลกจึงสรุปว่า หัวใจของเขาเต้น T ครั้ง ในขณะที่หัวใจของคู่แฝดบนจรวดเต้น $T\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$ ครั้ง

สำหรับคู่แฝดที่ไปกับจรวด เขาเห็นว่าเวลาทั้งหมดที่เขาใช้ในการเดินทางคือ $T\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$ ดังนั้นหัวใจของเขาจะเต้น $T\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$ ครั้ง ในขณะที่เขาอยู่บนจรวดเที่ยวไป เขาจะเห็นความถี่ดอปเพลอร์มาจากคู่แฝดบนโลกเป็น $\left(\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}\right)^{1/2}$ ตลอดระยะเวลาครึ่งแรกคือ $\frac{T}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$ วินาที ดังนั้นจำนวนครั้งที่เขาเห็นหัวใจเต้นจะเป็น $\frac{T}{2}\left\{\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{1+\frac{v}{c}}\right\}$ ตอนเที่ยวกลับเขาจะเห็นความถี่ดอปเพลอร์จากคู่แฝดบนโลกเป็น $\left\{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}\right\}^{1/2}$ ตลอดระยะเวลาครึ่งหลังคือ $\frac{T}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$ วินาที ดังนั้นจำนวนครั้งที่เขาเห็นหัวใจคู่แฝดบนโลกเต้น จะเป็น $\frac{T}{2}\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{v}{c}\right)}$ จำนวนครั้งที่เขาเห็นหัวใจเต้นทั้งหมดจะเป็น

$$\frac{T}{2}\left\{\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{v}{c}\right)}+\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{v}{c}\right)}\right\} = T \qquad (4.11)$$

(4.11) ให้จำนวนครั้งที่หัวใจของคู่แฝดบนโลกเต้น และคู่แฝดซึ่งเดินทางไปกับจรวดนับได้ จะเห็นว่าความขัดแย้งกันนั้นหมดไป คู่แฝดซึ่งไปกับจรวดจะเห็นเช่นเดียวกับคู่แฝดซึ่งอยู่บนโลกคือ จำนวนครั้งที่หัวใจของคู่แฝดบนโลกเต้นคือ T และจำนวนครั้งที่หัวใจของเขาเต้นคือ $T\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$

## 4.4 ตัวอย่างการคำนวณ

**ตัวอย่างที่ 1 การแปลงของความเร็วของอนุภาค**

ให้ระบบพิกัด s และ s′ เชื่อมโยงกันดังรูปที่ 33 พิกัดและเวลาของระบบทั้งสองสัมพันธ์กันตามความสัมพันธ์ที่ (3.32) และ (3.32)′ การเคลื่อนที่ของอนุภาค ๆ หนึ่งใน s ให้ได้ด้วยชุดของฟังก์ชัน

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad \text{และ} \quad z = z(t) \tag{4.12}$$

สำหรับใน s′ การเคลื่อนที่เดียวกันให้ได้ด้วยชุดของฟังก์ชัน

$$x' = x'(t') \quad , \quad y' = y'(t') \quad \text{และ} \quad z' = z'(t') \tag{4.13}$$

ดังนั้น ความเร็วของอนุภาคเทียบกับระบบของ s คือ

$$\left.\begin{aligned} \bar{u} &= (u_x, u_y, u_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \\ u &= (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2} \end{aligned}\right\} \tag{4.14}$$

ความเร็วของอนุภาคเดียวกันเทียบกับระบบของ s′ คือ

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}' &= (u_x', u_y', u_z') = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'}\right) \\ u' &= (u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2)^{1/2} \end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

จงหาการแปลงระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{u}'$

วิธีทำ จากสมการชุด (3.32)

$$\left.\begin{aligned} dx' &= \gamma(dx - vdt) \qquad \gamma = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}, \; dy' = dy, \; dz' = dz \\ dt' &= \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right) \end{aligned}\right\} \tag{4.16}$$

ดังนั้น

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \quad , \quad u_y' = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right.} \qquad u_z' = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right.} \tag{4.17}$$

**ตัวอย่างที่ 2** จงคำนวณหาจำนวนครั้งของการเต้นของหัวใจของคู่แฝดซึ่งผู้ขับจรวดเที่ยวไปเป็นผู้สังเกตได้

วิธีทำ (ดูหัวข้อ 4.3.3 ประกอบ)

ให้ผู้สังเกตการณ์ที่เป็นผู้ขับจรวดเที่ยวไปสังเกตเห็นว่าระยะเวลาทั้งหมดนับตั้งแต่คู่แฝดขึ้นเดินทางไปกับเขา จนถึงเวลาที่สัญญาณสุดจากคู่แฝดซึ่งได้เดินทางกลับไปถึงโลกส่งไปบอกเขาเป็นเวลา Z ดังนั้น

Z = เวลาที่คู่แฝดออกเดินทางจนกลับถึงโลก + เวลาที่สัญญาณแสงเดินทางจากโลกไปถึงผู้ขับจรวดเที่ยวไป (4.18)

เวลาที่ผู้ขับจรวดเที่ยวไปสังเกตเห็นว่าเป็นเวลาของการเดินทางของคู่แฝดที่ไปกับจรวดทั้งหมด (จากตารางที่ 1) คือ $\frac{T}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$ ดังนั้นระยะที่แสงต้องเดินทางจากโลกไปยังผู้ขับจรวดเที่ยวไปคือ $\frac{vT}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$ ดังนั้นเวลาที่แสงใช้ในการเดินทางจากโลกไปยังผู้ขับจรวดเที่ยวไปคือ $\frac{vT}{c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$

ดังนั้น
$$Z = \frac{T}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{vT}{c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \frac{1+\frac{v}{c}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} T \qquad (4.19)$$

ตลอดระยะเวลานี้ เขาเดินทางออกจากโลก เขาสังเกตเห็นความถี่ซึ่งเกิดจากการเต้นของหัวใจของคู่แฝดบนโลกเป็น $\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}{\left(1+\frac{v}{c}\right)}$ ดังนั้นจำนวนครั้งทั้งหมดที่หัวใจคู่แฝดบนโลกเต้นได้คือ

$$\text{ความถี่} \times \text{เวลา} = \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}{\left(1+\frac{v}{c}\right)} \times Z = \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}{\left(1+\frac{v}{c}\right)} \times \frac{\left(1+\frac{v}{c}\right)}{\left(,\ \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} T = T \qquad (4.20)$$

สำหรับคู่แฝดที่ได้เดินทางออกจากโลกไปกับเขา ตอนเที่ยวไปเขาสังเกตเห็นแสงแสดงการเต้นของหัวใจ $\frac{T}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$ ครั้ง เพราะเขานั่งอยู่กับคู่แฝดผู้นั้น สำหรับเวลาเที่ยวกลับ เนื่องจากคู่แฝดที่เดินทางกระโดดจากเขาไปเมื่อเวลาผ่านไป $\frac{T}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$ ดังนั้น เวลาที่เหลือคือ

$$Z-\frac{T}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} = \frac{\left(1+\frac{v}{c}\right)T}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} - \frac{T}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

$$= \frac{\left(1+\frac{v}{c}\right)}{\left(1-\frac{v}{c}\right)}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}\frac{T}{2}$$

= จำนวนครั้งของแสงที่ผู้ขับจรวดเที่ยวไปสังเกตเห็นได้จากการเดินทางกลับของคู่แฝด (4.21)

ผู้ขับจรวดเที่ยวไปจะสังเกตเห็นว่าคู่แฝดซึ่งเดินทางมากับเขาได้เดินทางจากเขาไปด้วยความเร็วคิดได้จากสมการ (4.17) ในกรอบ s ซึ่งคู่แฝดบนโลกอยู่นิ่งเขาจะเห็นว่า จรวดเที่ยวไปเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v และเที่ยวกลับเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $-v$ สมมุติว่าจรวดเคลื่อนไปทางแนวแกน x กรอบอ้างอิงของผู้ขับจรวดเที่ยวไปจะเป็นกรอบอ้างอิง $s'$ เทียบกับคู่แฝดบนโลก

$u_x = -v$ เป็นความเร็วของจรวดเที่ยวกลับใน s ดังนั้นใน $s'$

$$u_x' = \frac{u_x - v}{\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)} = \frac{-2v}{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)} = -U \qquad (4.22)$$

U คือ ความเร็วที่ผู้สังเกตบนจรวดเที่ยวไป เห็นเป็นความเร็วของจรวดเที่ยวกลับไปทางทิศ $-x$ จากสมการที่ (4.8) ความถี่ที่ผู้สังเกตบนจรวดเที่ยวไปจะสังเกตเห็นคือ

$$\nu = \nu_0 \frac{\left(1-\frac{U^2}{c^2}\right)^{1/2}}{1+\frac{U}{c}} \quad , \nu_0 = 1$$

$$= \frac{\left\{1 - \frac{2v}{c\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)}\right)^2\}^{1/2}}{1+\frac{2v}{c\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

$$= \frac{\left(1-\frac{2v^2}{c^2}+\frac{v^4}{c^4}\right)^{1/2}}{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)} \times \frac{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)}{1+\frac{2v}{c}+\frac{v^2}{c^2}}$$

$$= \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}} \qquad (4.23)$$

จากสมการ (4.21) และ (4.23)

จำนวนครั้งของการเปล่งแสงสว่าง = ความถี่ x เวลา

$$= \left(\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}\right) \times \left(\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \frac{T}{2}$$

$$= \frac{T}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

ดังนั้นจำนวนครั้งทั้งหมดของการเต้นของหัวใจของคู่แฝดซึ่งเดินทางไปกับจรวดที่ผู้ขับจรวดเที่ยวไปสังเกตเห็นคือ $T\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$ ซึ่งตรงกันกับการเห็นของคู่แฝด

## 4.5 สรุป

4.5.1 ความแย้งกันของคู่แฝด ใจความของความแย้งกันมีว่า คู่แฝดคู่หนึ่งเดิมอยู่นิ่งบนผิวโลก ต่อมาคู่แฝดคนหนึ่งได้เดินทางไปกับจรวดซึ่งมีความเร็ว v ออกจากโลกไปยังดาวเคราะห์ซึ่งอยู่ใกล้เคียง เมื่อเขากลับถึงโลกคู่แฝดบนโลกควรจะเห็นว่าเขาหนุ่มกว่า เพราะนาฬิกา

ที่เคลื่อนที่ช้ากว่านาฬิกาที่อยู่นิ่ง ขบวนการทางชีววิทยาเป็นนาฬิกาชนิดหนึ่ง ดังนั้นคู่แฝดที่เคลื่อนที่ไปควรจะอ่อนวัยกว่า แต่ในทางที่กลับกันคู่แฝดซึ่งเคลื่อนไปกับจรวดกลับเห็นว่าคู่แฝดบนโลกเคลื่อนห่างจากเขาไปในทิศตรงกันข้าม ในลักษณะเดียวกับที่เขาเคลื่อนห่างจากคู่แฝดบนโลก เขาจึงสรุปว่าเมื่อพบกันใหม่ คู่แฝดบนโลกควรจะอ่อนวัยกว่าเขา

4.5.2 คำอธิบายถึงความแย้งกันมีว่า คู่แฝดทั้งสองไม่ได้มีประสบการณ์เหมือนกัน คู่แฝดที่ไปกับจรวดจะผ่านประสบการณ์ 3 ประสบการณ์ คือ การเดินทางเที่ยวไป ความเร่งในตอนกลางและการเดินทางเที่ยวกลับ คู่แฝดที่อยู่บนโลกจะมีประสบการณ์เพียง 2 ประสบการณ์ คือ การเดินทางเที่ยวไป และการเดินทางเที่ยวกลับ ทำให้สรุปได้ว่า คู่แฝดที่เดินทางไปกับจรวดอ่อนวัยกว่า คู่แฝดที่อยู่บนผิวโลก

## 4.6 คำถามท้ายบท

**จงเติมคำในช่องว่างให้ได้ความสมบูรณ์**

4.6.1 ชายคนหนึ่งมีนาฬิกาติดอยู่กับตัวเขาเคลื่อนที่ไปด้วยความเร็ว v ผ่านชายสองคนซึ่งอยู่นิ่ง ๆ ชายที่อยู่นิ่งทั้งสองคนอยู่ห่างกัน L นาฬิกาของ.....เดินช้าที่สุด

**ตอบ** : นาฬิกาที่ติดตัวของผู้เคลื่อนที่

4.6.2 ปัญหาความขัดแย้งกันระหว่างเวลาของนาฬิกาที่เคลื่อนที่กับนาฬิกาที่อยู่นิ่งไม่มีเพราะ .....

**ตอบ** : เรารู้ว่า เวลาเฉพาะเป็นเวลาที่สั้นที่สุด

4.6.3 ความขัดแย้งกันของคู่แฝดไม่มีเพราะ.....

**ตอบ** : คู่แฝดทั้งสองมีประสบการณ์ไม่เหมือนกัน

4.6.4 อันที่จริงแล้วคู่แฝดซึ่ง..... อ่อนวัยกว่า

**ตอบ** : เดินทาง

4.6.5 ถ้าเวลาที่ใช้ไปทั้งหมดในการเดินทางเป็น T สำหรับคู่แฝดบนโลก ให้คู่แฝดซึ่งไปกับจรวดมีความเร็ว v ดังนั้นเวลาเดินของคู่แฝดบนจรวดคือ.....

**ตอบ** : $T\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$

# แบบฝึกหัดบทที่ 4

1. จงคำนวณหาจำนวนครั้งของการเต้นของหัวใจของคู่แฝดซึ่งผู้ขับจรวดเที่ยวกลับสังเกตได้

คำแนะนำ : ให้ Z = เวลาทั้งหมดที่คู่แฝดใช้ในการเดินทาง สังเกตโดยผู้ขับจรวดเที่ยวกลับในตาราง 1 – เวลาที่แสงเดินทางจากโลกไปถึงผู้ขับจรวดเที่ยวกลับเมื่อเริ่มออกเดินทาง

$$= \frac{T}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} - \frac{vT}{c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

เวลาของคู่แฝดบนโลก = $Z \times \nu$

$\nu$ : ความถี่ซึ่งคำนวณได้จากสมการ (4.8) แต่คราวนี้จุดกำเนิดแสงเคลื่อนที่เข้าหาผู้สังเกตการณ์

สำหรับคู่แฝดซึ่งเดินทางไปกับจรวด เวลาเที่ยวกลับของเขาคือ $\frac{T}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$

เวลาเที่ยวไปคือ $Z - \frac{T}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$

จากสมการ (4.17) s′ เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $-v$ เทียบกับ s ซึ่งเป็นกรอบอ้างอิงของคู่แฝดบนโลก , $u_x = v$

$$u_x = \frac{u_x - v}{\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)} = \frac{2v}{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)} = U$$

$$\nu = \frac{\left(1-\frac{U^2}{c^2}\right)^{1/2}}{1+\frac{U}{c}}$$

จำนวนครั้งของการเปล่งแสง = ความถี่ × เวลา

**ตอบ** : เวลาของคู่แฝดบนโลก = T

เวลาของคู่แฝดบนจรวด = $T\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$

2. สมมุติว่า คู่แฝดเดินทางออกไปด้วยความเร็ว v แต่กลับด้วยความเร็ว $\frac{v}{2}$ จงหาว่าอายุของคู่แฝดผู้เดินทางเป็นเท่าไร โดยใช้การคำนวณการหดสั้นของเวลา ตรวจสอบการคำนวณโดยคำนวณเวลาใช้ปรากฏการณ์ดอปเพลอร์สังเกตโดยคู่แฝดบนโลก

คำแนะนำ : อ่าน 4.3.1 , 4.3.2 คาบเวลา = $\frac{1}{\text{ความถี่}}$

3. อนุภาคตัวหนึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ v จนถึงเวลา t = 0 อนุภาคได้รับความเร่งทำให้มันเคลื่อนที่ด้วยความเร็วไม่คงที่ v(t) จนถึงเวลา t = t มันกลับมาอยู่ตำแหน่งที่มันเคยอยู่เมื่อเวลา t = 0 จงหาเวลาเฉพาะของนาฬิกาซึ่งติดไปกับอนุภาค

คำแนะนำ : ถ้า $\tau$ เป็นเวลาเฉพาะ v เป็นความเร็วคงที่ตลอดเวลาจาก t = 0 ถึง t = t

(สมมุติว่าความเร่งไม่มี) $\tau = t\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$

เมื่อเกิดความเร่งขึ้น ณ เวลา t ใด ๆ

$\frac{d\tau}{dt} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$

**ตอบ** : $r(t) = \int_0^t \left(1 - \frac{v^2(t)}{c^2}\right)^{1/2} dt$[7]

4. นาฬิกาที่เคลื่อนที่เดินช้า (โดยใช้การแปลงแบบโลเรนตซ์)
สมมุติว่านาฬิกา C′ ซึ่งอยู่นิ่งในระบบ s′ บนจุด ๆ หนึ่งบนแกน x′ ซึ่งมีพิกัด $x' = x_1'$ (รูปที่ 33) พึงสังเกตว่านาฬิกาอยู่ที่จุด $x_1'$ ตลอดเวลา เมื่อเวลา $t' = t_1$ นาฬิกา C′ ผ่านนาฬิกาใน s เรือนหนึ่งซึ่งอ่านเวลา $t_1$ ต่อมาที่เวลา $t_2'$ นาฬิกา C′ ก็ผ่านนาฬิกาใน s อีกเรือนหนึ่งซึ่งอ่านเวลา $t_2$ จงแสดงโดยใช้การแปลงของโลเรนตซ์ว่า นาฬิกาที่เคลื่อนที่เดินช้า (s′ เคลื่อนไปด้วยความเร็ว v ทางทิศ +x เทียบกับ s)

---

7 Sherwin, C.W., Some Recent Experimental Tests of the "Clock Paradox", Phys. Rev., **120,** 17, 1960.

คำแนะนำ : จาก (3.32)′

$$t_1 = \gamma\left(t_1' + \frac{vx_1'}{c^2}\right)$$

$$t_2 = \gamma\left(t_2' + \frac{vx_1'}{c^2}\right)$$

**ตอบ** : $At = t_2 - t_1 = \gamma(t_2' - t_1') = \gamma\Delta\tau$

---