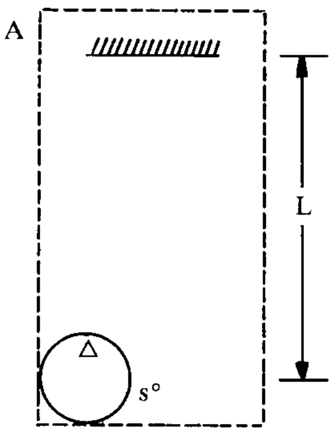
บทที่ 3
ทฤษฎีสำคัญก่อนทฤษฎีสัมพัทธภาพ

วัตถุประสงค์

1. ให้สามารถคำนวณเวลาเฉพาะและไม่เฉพาะได้ในระดับของแบบฝึกหัด ข้อ 1-4
2. ให้สามารถวิเคราะห์หาการหดสั้นของความยาวตามทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษได้
3. ให้หาการแปลงแบบโลเรนตซ์ได้
4. ให้หาความพร้อมกันและไม่พร้อมกันอันเนื่องมาจากปรากฏการณ์สัมพัทธภาพได้

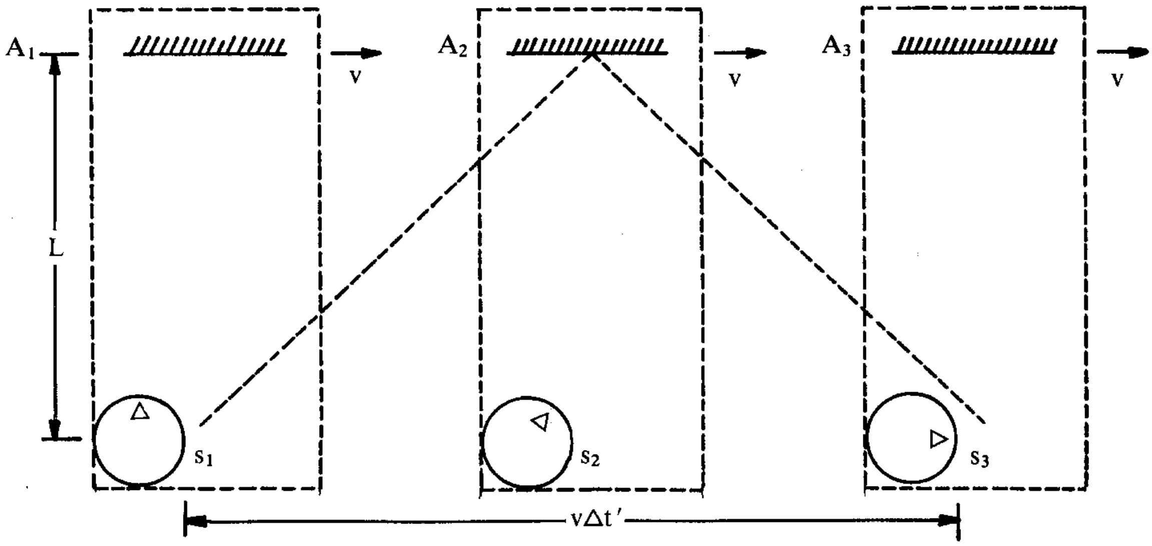
3.1 ความจำเป็นของเวลาเฉพาะ (Proper Time)



รูปที่ 28 แขนข้างหนึ่งของการทดลองของไมเคิลสัน-มอร์เลย์ ผู้สังเกตการณ์คนหนึ่ง ติดไปกับแขนนี้

ในรูปที่ 28 สมมุติว่าแขนข้างนี้ของการทดลองไมเคิลสัน-มอร์เลย์เคลื่อนไปตั้งฉากกับความยาวของมัน แขนนี้ประกอบด้วยโครงเกร็งซึ่งมีนาฬิกาและจุดกำเนิดแสง s ติดอยู่ มีกระจก A ติดอยู่ที่ปลายแขน กระจก A อยู่ห่างจากจุดกำเนิดแสง s เป็นระยะทาง L นาฬิกาอยู่นิ่งเทียบกับจุดกำเนิดแสง s เมื่อ s ปล่อยแสงออกมาวาบหนึ่ง แสงนั้นจะส่องทำให้ผู้สังเกตเห็นเข็มนาฬิกา แสงจะเดินไปสะท้อนที่กระจกแล้วจะกลับมาทำให้หน้าปัดนาฬิกาสว่างอีกครั้งหนึ่ง สมมุติว่าผู้สังเกตการณ์มีเครื่องมือที่มีความไวมาก เขาสามารถสังเกตเห็นและอ่านเวลาทั้งสองครั้งได้ (อาจจะใช้เครื่องอิเล็กโทรนิคช่วย) ช่วงเวลาที่เขาอ่านได้คือเวลาที่แสงใช้เดินทางเป็นความยาว 2L

จากรูปที่ 28 จะเห็นว่าแสงเดินทางเป็นระยะทาง 2L จากสมมุติฐานข้อสองของทฤษฎีสัมพัทธภาพซึ่งจำกัดให้แสงมีความเร็วคงตัวในทุกกรอบเฉื่อย ถ้าหากแสงมีความเร็ว c ดังนั้นเวลาที่แสงเดินทางครบรอบ (ไปกลับ) คือ $\frac{2L}{c}$ ถ้าหากใช้กล้องถ่ายรูปถ่ายเข็มนาฬิกาไว้ ภาพถ่ายจะแสดงให้ผู้สังเกตเห็นว่า เข็มนาฬิกาได้เคลื่อนไปแล้วเป็นเวลา $\frac{2L}{c}$ ในระหว่างที่นาฬิกาได้รับแสงสว่าง 2 ครั้งต่อเนื่องกัน ดังนั้นช่วงเวลาที่ได้นี้จึงเป็นช่วงเวลาซึ่งได้จากนาฬิกาเรือนเดียวกัน อยู่ในเหตุการณ์นั้นตลอดเวลา สัญญาณแสงเริ่มขึ้นที่นาฬิกานี้และกลับมาสิ้นสุดที่นาฬิกาเดียวกันนี้ เวลาชนิดนี้เรียกว่า เวลาเฉพาะ (proper time)



รูปที่ 29 เครื่องมือเดียวกันกับรูปที่ 28 แต่เคลื่อนไปทางขวาด้วยความเร็ว $\vec{v}$

ต่อไปนี้เราจะมาพิจารณาการทดลองเดียวกันนี้ แต่ผู้สังเกตจะมีความเร็ว v ไปทางซ้ายของแขนของการทดลองไมเคิลสัน-มอร์เลย์ ซึ่งเราได้ใช้หาเวลาเฉพาะไปแล้ว ดังนั้นสำหรับผู้สังเกตการณ์คนใหม่นี้เครื่องมือจะเคลื่อนที่ไปทางขวาของเขาด้วยความเร็ว v ดังแสดงในรูปที่ 29 สมมุติว่าที่ตำแหน่ง s_1A_1 ต้นกำเนิดแสงปล่อยแสงออกมาวาบหนึ่ง ทำให้มองเห็นเข็มนาฬิกาซึ่งอยู่ติดกับเครื่องกำเนิดแสง แสงนี้จะเคลื่อนไปที่กระจก จะไปถึงกระจกเมื่อแขนของเครื่องมืออยู่ที่ s_2A_2 แสงจะสะท้อนจากกระจกกลับมาทำให้หน้าปัดนาฬิกาสว่างขึ้นอีกครั้งหนึ่งที่ s_3A_3 ดังนั้นจากผู้สังเกตการณ์ข้างนอกซึ่งเห็นแขนของเครื่องมือเคลื่อนไปจากเขา จะเห็นว่าแสงเดินทางไปตามทาง $s_1A_2s_3$ สมมุติว่าช่วงเวลาของการเดินทางนี้คือ $\Delta t'$ ดังนั้นระยะทาง s_1s_3 คือ $v\Delta t'$ ทำให้ระยะ

$$s_1A_2 = \sqrt{L^2 + \left(\frac{v\Delta t'}{2}\right)^2}$$

และระยะทางทั้งหมด $s_1A_2s_3$ คือ

$$s_1A_2s_3 = 2\sqrt{L^2 + \left(\frac{v\Delta t'}{2}\right)^2} = c\Delta t'$$

$$\therefore \quad \frac{c^2(\Delta t')^2}{4} = L^2 + \frac{v^2(\Delta t')^2}{4}$$

$$\Delta t' = \frac{2L}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.2}$$

เราได้วัดช่วงเวลาระหว่างการออกเดินทางของแสงวาบหนึ่งจาก s_1 และแสงสะท้อนของแสงนั้นกลับมาที่ s_3 เป็นเหตุการณ์เดียวกันกับในกรณีแรก แต่ในคราวนี้ผู้สังเกตการณ์สังเกตเห็นเหตุการณ์นั้นเกิดขึ้นที่จุดต่างกัน ดังนั้นช่วงเวลาจึงไม่อาจจะวัดได้โดยในนาฬิกาเรือนเดียว เวลาที่ใช้ในการนี้จึงมีชื่อเรียกว่า เวลาไม่เฉพาะ (improper time) ช่วงเวลาเฉพาะคือ $\frac{2L}{c}$ สำหรับในกรณีนี้ ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่างช่วงเวลาเฉพาะกับช่วงเวลาไม่เฉพาะคือ

$$\Delta t = \frac{2L}{c} = \Delta t'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{3.3}$$

Δt : ช่วงเวลาเฉพาะ

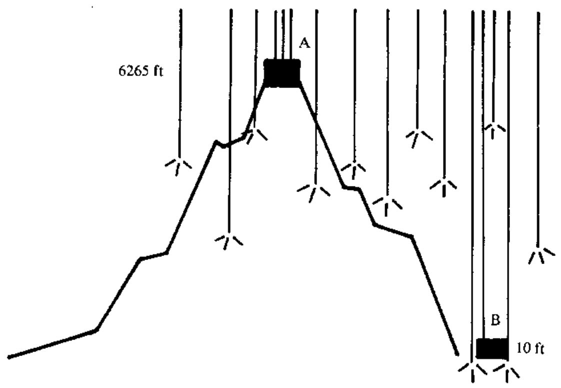
$\Delta t'$: ช่วงเวลาไม่เฉพาะ

ดังนั้น สำหรับผู้สังเกตการณ์สองคน ซึ่งมีความเร็วสัมพัทธ์ v ช่วงเวลาที่เขาสังเกตได้สำหรับเหตุการณ์เดียวกัน จะไม่เท่ากันและจะขึ้นอยู่กับความเร็วสัมพัทธ์นั้น ปรากฏการณ์นี้เรียกว่า การขยายออกของเวลา (time dilation หรือ time dilatation)

ตัวอย่างที่ 3.1[5] การทดลองเรื่องการยืดของเวลา

มิวออน (muon) เป็นอนุภาคซึ่งมีประจุลบ มีมวลประมาณ 200 เท่าของอิเล็กตรอน มันจะสลายตัวกลายเป็นอิเล็กตรอน นิวตริโน (nutrino) และ แอนไต-นิวตริโน (anti-nutrino) ด้วยครึ่งชีวกาล (half life) เท่ากับ 1.53×10^{-6} วินาที แม้ว่าเราจะไม่ทราบแน่นอนว่ามิวออนตัวใดจะสลายตัว แต่เราก็อาจจะทำนายเชิงสถิติที่แม่นยำได้ เป็นต้นว่า ถ้าหากเรามีมิวออนทั้งหมด 1000 ตัว เมื่อเวลา $t = 0$ ดังนั้นเราจะมีมิวออน 500 ตัว เมื่อเวลา $t = 1.53 \times 10^{-6}$ วินาที ซึ่งจะลดลงเป็น 250 ตัว เมื่อเวลา $t = 3.06 \times 10^{-6}$ วินาที และจะเหลือจำนวนมิวออน 125 ตัว เมื่อเวลา $t = 4.59 \times 10^{-6}$ วินาที ฯลฯ ผลเหล่านี้จำเป็นต้องคำนึงถึงการเปลี่ยนแปลงสุ่ม (random fluctuation) เวลาที่กล่าวถึงนี้เป็นเวลาซึ่งมิวออนอยู่นิ่งเทียบกับผู้สังเกตจำนวนมิวออนจึงใช้เป็นเวลาสำหรับวัดระยะสั้น ๆ ได้ โดยวัดครึ่งชีวกาลของมัน

มิวออนมีอยู่มากมายเมื่อเราอยู่สูงขึ้นจากผิวโลกเป็นระยะสอง-สามพันฟุต ส่วนมากจะวิ่งตรงเข้าสู่ผิวโลก (ในแนวดิ่ง) ด้วยความเร็วใกล้กับความเร็วของแสง การทดลองคราวนี้เป็นการวัดเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ของมิวออนโดยใช้นาฬิกามิวออน และนาฬิกาซึ่งติดอยู่กับผิวโลก ระยะที่มิวออนเคลื่อนที่เป็นระยะประมาณสอง-สามพันฟุต



รูปที่ 30 ยอดเขาวอชิงตัน มลรัฐนิวแฮมเชอร์

---

5 Frisch, D.H. and Smith, J.H., Am.J.Phys., 31, 342, 1963

เครื่องนับมิวออน A วางไว้บนยอดเขาวอชิงตัน มลรัฐนิวแฮมเชอร์ ซึ่งมีความสูง 6265 ฟุต เครื่องนี้ปรับให้สามารถนับมิวออนซึ่งมีความเร็วระหว่าง 0.9950c และ 0.9954c (c : ความเร็วของแสง) นับว่าเป็นความเร็วประมาณ 99.52 เปอร์เซ็นต์ของความเร็วแสง พบว่ามีปริมาณมิวออน 563±10 มิวออน ผ่านเครื่องมือนี้ต่อหนึ่งชั่วโมง เมื่อนำเครื่องวัดเดียวกันนี้มาวางไว้บนความสูงประมาณ 10 ฟุตเหนือระดับน้ำทะเล พบว่ามีปริมาณมิวออนผ่านเครื่องมือ 408±9 ตัวต่อหนึ่งชั่วโมง ในขบวนการทดลองจริง ไม่ได้ใช้มิวออนกลุ่มเดียวกัน ที่ความสูงสองระดับ แต่เนื่องจากความเข้มของรังสีคอสมิคไม่มีการแปรเปลี่ยน ในบางช่วงเวลา และในบางสถานที่ โดยเฉพาะช่วงของความสูงที่ต่างกันเพียงหกพันฟุตที่ใช้ในการทดลองนี้ จึงนับได้ว่าผลของการทดลองไม่แตกต่างจากการใช้มิวออนเพียงกลุ่มเดียว

เนื่องจากแรงเสียดทานของอากาศ ทำให้ความเร็วเฉลี่ยของมิวออนเป็น 0.992c ดังนั้น เวลาซึ่งมิวออนใช้ในการเคลื่อนที่จากยอดเขาวอชิงตัน มาถึงระดับสิบฟุตเหนือระดับน้ำทะเล ก็คือ

$$\Delta t' \text{ (ช่วงเวลาไม่เฉพาะ)} = \frac{(6265-10)}{0.992\times 3\times 10^{8}\times 3.28} \quad \frac{\text{ฟุต-วินาที-เมตร}}{\text{เมตร-ฟุต}}$$

$$= 6.4\times 10^{-6} \text{ วินาที}$$

เหตุการณ์ที่เกิดขึ้นมี 2 เหตุการณ์คือ มิวออนผ่านยอดเขาวอชิงตันเป็นเหตุการณ์ที่หนึ่ง และมิวออนไปถึงระดับน้ำทะเลเป็นเหตุการณ์ที่สอง ทั้งสองเหตุการณ์นี้ นาฬิกามิวออน (จำนวนมิวออน) นับว่าเป็นนาฬิกาที่อยู่ในทั้งสองเหตุการณ์เลย ดังนั้น นาฬิกามิวออนจะวัดเวลาเฉพาะ

ในขบวนการสลายตัวสุ่ม (random decay process) ถ้าหากเราเริ่มต้นด้วยจำนวนอนุภาคทั้งหมด N_0 หลังจากเวลาผ่านไป t เราจะเหลือ N อนุภาค ซึ่งมีความสัมพันธ์กับอนุภาคทั้งหมดดังนี้

$$N = N_0 e^{-t/t_0} \tag{3.4}$$

เมื่อ t_0 คือ มัชฌิมชีวกาล (mean-life) ให้ $t_{1/2}$ เป็นครึ่งชีวกาล

ดังนั้น $N(t = t_{1/2}) = N_0 e^{-t_{1/2}/t_0} = \frac{N_0}{2}$

$$\frac{1}{2} = e^{-t_{1/2}/t_0}$$

$$-\frac{t_{1/2}}{t_0} = \ell n \frac{1}{2}$$

$$t_0 = \frac{t_{1/2}}{\ell n 2} = \frac{1.53}{0.693} \times 10^{-6}$$

$$= 2.21 \times 10^{-6} \text{ วินาที}$$

ดังนั้นเวลาเฉพาะซึ่งใช้ในการเคลื่อนที่จากยอดเขาวอชิงตัน ไปถึงระดับน้ำทะเลหาได้ดังนี้

$$408 = 563 \times e^{-\Delta t/(2.21 \times 10^{-6})}$$

$\therefore \Delta t = 0.715 \times 10^{-6}$ วินาที : เวลาเฉพาะในการเคลื่อนที่ของมิวออน ซึ่งจะใช้เทียบกับการทำนายทางทฤษฎีสัมพัทธภาพได้ดังนี้

จากสมการ (3.3) $\frac{\Delta t}{\Delta t'} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

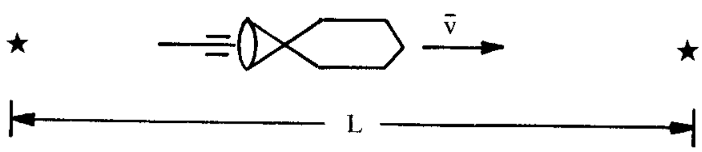
สำหรับกรณีในตัวอย่างนี้ $\frac{\Delta t}{\Delta t'} = \frac{0.715 \times 10^{-6}}{6.4 \times 10^{-6}} \approx \mathbf{0.11}$

และค่า $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - (0.992)^2} = \mathbf{0.13}$

ซึ่งผู้ทดลองได้แสดงให้เห็นว่า ความคลาดเคลื่อนอยู่ภายในความผิดพลาดซึ่งมาจากเครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง การสลายของมิวออนมีเพียงเศษหนึ่งส่วนเก้าของมิวออนซึ่งอยู่นิ่ง แสดงว่านาฬิกาซึ่งเคลื่อนที่เดินช้าลงเก้าเท่าของนาฬิกาที่อยู่นิ่ง ๆ

3.2 การหดของความยาว

3.2.1 การหดของความยาวจากการวิเคราะห์การยืดของเวลา



รูปที่ 31 จรวดผ่านดาวสองดวงด้วยความเร็ว $\bar{v}$

รูปที่ 31 แสดงจรวดลำหนึ่งแล่นผ่านดาวดวงหนึ่งแล้วไปผ่านดาวดวงที่สอง ดาวทั้งสองดวงอยู่ห่างกันเป็นระยะทาง L ในกรอบอ้างอิงของดาวทั้งสอง (ในกรอบเฉื่อยซึ่งดาวทั้งสองอยู่นิ่ง) จรวดวิ่งด้วยความเร็ว v ใช้เวลาผ่านระยะ L เป็นเวลา $\frac{L}{v}$ ระยะเวลานี้จะเป็นช่วงเวลาไม่เฉพาะ เพราะเหตุการณ์ทั้งสองเกิดขึ้น ณ ตำแหน่งที่แตกต่างกัน ทำให้เราต้องอ่านเวลาด้วยนาฬิกาต่างเรือนกัน จากช่วงเวลาไม่เฉพาะ $\frac{L}{v}$ เราอาจจะหาช่วงเวลาเฉพาะได้จากสมการ (3.3) ดังนี้

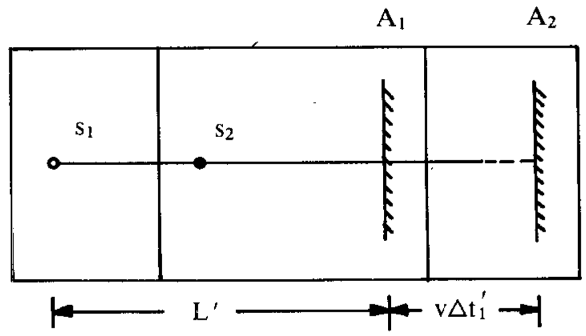
$$\text{ช่วงเวลาเฉพาะในการผ่านดาวสองดวง} = \frac{L}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{3.5}$$

ช่วงเวลาเฉพาะนี้จะเป็นเวลาของผู้ขับจรวด เมื่อจรวจผ่านดาวดวงที่หนึ่งแล้ว เขาจะสังเกตเห็นว่าจรวดผ่านดาวดวงที่สองเมื่อเวลาของเขาผ่านไป $\frac{L}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ ดังนั้นระยะทางที่เขาวัดได้คือ

$$\begin{aligned}
\text{ระยะทาง} &= \text{เวลาที่เขาวัดได้} \times \text{ความเร็วที่เขาผ่านวัตถุ} \\
&= \frac{L}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \times v = \\
&= L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \\
&= L' \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

สรุปได้ว่า ในกรอบอ้างอิงซึ่งผู้สังเกตเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v เขาจะวัดระยะทางหดลงไป $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ เท่าของระยะทางที่เขาจะวัดได้ เมื่อเขาอยู่นิ่งเทียบกับระยะทางนั้น

3.2.2 การหดของความยาวจากการวิเคราะห์การทดลองไมเคิลสัน-มอร์เลย์



รูปที่ 32 แขนของการทดลองไมเคิลสัน-มอร์เลย์ ซึ่งขนานกับทิศการเคลื่อนที่ของเครื่องมือ

รูปที่ 32 เป็นแขนของการทดลองไมเคิลสัน-มอร์เลย์ ซึ่งขนานกับทิศทางการเคลื่อนที่ของเครื่องมือ ในกรอบอ้างอิงซึ่งแขนนี้อยู่นิ่ง สัญญาณแสงจะเคลื่อนจากจุดกำเนิดแสง s ไปกระทบกระจก A แล้วสะท้อนกลับไปที่ s ใช้เวลา $\Delta t = \frac{2L}{c}$ ซึ่งเป็นช่วงเวลาเฉพาะ ในกรอบอ้างอิงซึ่งเครื่องมือเคลื่อนไปทางขวาด้วยความเร็ว v ให้ $\Delta t_1'$ เป็นเวลาซึ่งแสงเดินทางจากจุดกำเนิดไปยังกระจก $\Delta t_2'$ เป็นเวลาซึ่งแสงเดินทางจากกระจก A กลับไปยัง s ให้ความยาวของแขนของเครื่องมือซึ่งวัดได้ในกรอบอ้างอิงนี้เป็น L' ในช่วงเวลา $\Delta t_1'$ แสงจะเดินทางได้เท่ากับความยาว L' บวกกับความยาว $v\Delta t_1'$ ดังนั้น

$$\Delta t_1' = \frac{L' + v\Delta t_1'}{c}$$

$$At; = \frac{L'}{c - v} \tag{3.7}$$

c เป็นความเร็วของแสงซึ่งเป็นค่าคงที่ ในเที่ยวกลับแสงสะท้อนเดินทางใช้เวลา $\Delta t_2'$ ซึ่งเท่ากับ

$$At; = \frac{L'}{c+v} \tag{3.8}$$

จะเห็นว่าในที่สุดแสงจะใช้เวลาเดินทางทั้งหมด

$$\Delta t' = \frac{L'}{c-v} + \frac{L'}{c+v} = \frac{2L'}{c} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

แทนค่า At' ในสมการ (3.3)

$$\Delta t = \frac{2L}{c} = \frac{2L'}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ดังนั้น
$$L' = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{3.6)'$$

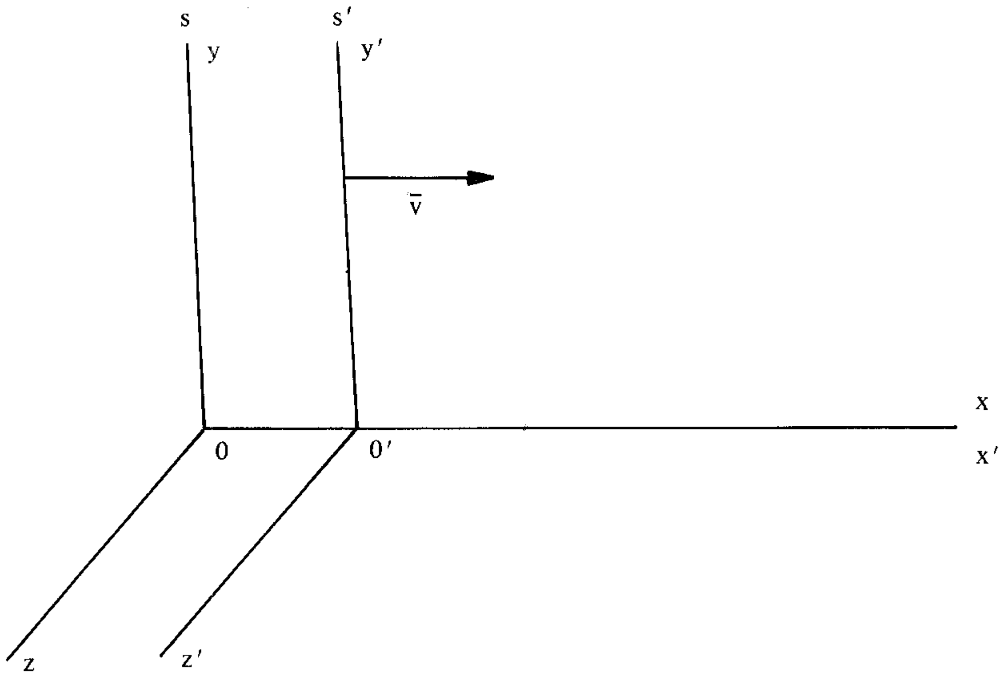
3.3 การแปลงแบบโลเรนตซ์

3.3.1 การแปลงแบบโลเรนตซ์ชนิดพิเศษ

ในกรอบเฉื่อย I เหตุการณ์อันหนึ่งซึ่งเกิดขึ้นที่จุด P เมื่อเวลา t อาจแทนได้ด้วยตัวเลข 4 จำนวน คือ เลขแทนพิกัดในสามมิติ 3 จำนวนกับเวลา t เลขทั้งสี่ตัวนี้เรียกว่า **พิกัดปริภูมิ-**

เวลา ของเหตุการณ์นั้น เป็นต้นว่าในพิกัดฉากสำหรับกรอบเฉื่อย I พิกัดปริภูมิ-เวลา คือ (x,y,z,t) เมื่อ $\bar{x} = (x,y,z)$ เป็นพิกัดฉากของจุด P ซึ่งการวัดพิกัดนี้วัดด้วยไม้วัดมาตรฐานซึ่งอยู่นิ่งในกรอบเฉื่อย I และเวลา t เป็นเวลาของนาฬิกามาตรฐานที่จุด P ซึ่งอยู่นิ่งเมื่อเทียบกับกรอบเฉื่อย I

ด้วยวิธีที่กล่าวมานี้ทำให้เราสร้างระบบพิกัด ของพิกัดปริภูมิ-เวลา s ในกรอบเฉื่อย I เมื่อเรากำหนดระบบพิกัด s ได้ ย่อมหมายถึงว่าเรากำหนดกรอบเฉื่อย I ได้ด้วย และในกรอบเฉื่อย I เราอาจจะกำหนดระบบพิกัด s อื่น ๆ ขึ้นอีกก็ได้ เป็นต้นว่า เราอาจจะสร้างพิกัดโพลาร์ขึ้นก็ได้ แต่เพื่อความสะดวกในทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษเรานิยมใช้พิกัดฉาก s ทำให้เราไม่ต้องคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างกรอบเฉื่อย I และกรอบระบบพิกัด s แต่ในวิชาทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปข้อยกเว้นนี้ไม่เป็นความจริง เราจำต้องให้ความแตกต่างระหว่างกรอบอ้างอิงกับระบบพิกัด เมื่อกล่าวถึงเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในระบบพิกัดใด ๆ



รูปที่ 33 ระบบพิกัด s′ เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\bar{v} = (v,0,0)$ เทียบกับระบบพิกัด s

สมมุติว่าเราพิจารณาเหตุการณ์เดียวกันกับเหตุการณ์ในระบบพิกัด s แต่คราวนี้เราพิจารณาเหตุการณ์นั้นในระบบพิกัด s′ พิกัดของเหตุการณ์นั้นคือ (x', y', z', t') ซึ่งการวัดพิกัดฉากนี้วัดด้วยไม้วัดมาตรฐานซึ่งอยู่นิ่งในระบบพิกัด s′ เนื่องจาก s′ เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\bar{v} = (v,0,0)$ เทียบกับ s ดังนั้นเราจึงหวังว่า การเคลื่อนที่เชิงเส้นเทียบกับ s จะเป็นการเคลื่อนที่เชิงเส้นเทียบกับ s′ ด้วย สมมุติว่า ที่เวลา $t = t' = 0$ 0′ ทับ 0 แกน 0′x′, 0′y′ และ 0′z′ ทับแกน 0x, 0y และ 0z ตามลำดับพอดี

สมมุติว่ามีระนาบ ๆ หนึ่งซึ่งเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$y' = a' \quad : \text{ ค่าคงที่ใน } s' \text{ และ} \tag{3.9}$$

$$y = a \quad : \text{ ค่าคงที่ใน } s \tag{3.10}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} = k \tag{3.11}$$

สมมุติว่า ให้ x, z เป็น −x, −z และ x′, z′ เป็น −x′, −z′ ตามลำดับ ดังนั้นในระบบพิกัดชุดใหม่นี้จะปรากฏว่า s กำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\bar{v} = (v,0,0)$ เทียบกับ s′ ไปทางทิศ +x′ ในกรณีนี้

$$\frac{y}{y'} = \frac{a}{a'} = k \tag{3.12}$$

จากสมการ (3.11) และ (3.12) $k^2 = 1$ แต่เนื่องจาก +y และ +y′ ชี้ไปทางทิศเดียวกันทำให้ $k = 1$ เพียงค่าเดียว ดังนั้นในระบบพิกัด s และ s′

$$y = y' \tag{3.13}$$

โดยทำนองเดียวกันอาจจะพิสูจน์ได้ว่า

$$z = z' \tag{3.14}$$

เพื่อจะหาการแปลงระหว่างพิกัดใน s และพิกัดใน s′ เราสมมุติว่า ที่เวลา $t = t' = 0$ สัญญาณแสงจะออกจากจุด 0 และ 0′ ซึ่งทับกันอยู่ในขณะนั้นพอดี เราทราบว่า หน้าคลื่นจะเป็นรูปทรงกลมรอบจุดกำเนิด ในแต่ละระบบพิกัด ดังนั้นใน s

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \tag{3.15}$$

ในขณะเดียวกันใน s′

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2 = 0 \tag{3.16}$$

สมมุติว่า ค่าทางขวามือของสมการ (3.15) และ (3.16) ไม่ใช่ศูนย์ และเราก็เห็นว่าทางซ้ายของสมการ (3.15) และ (3.16) แทนระยะทางยกกำลังสอง เราอาจจะเขียนสมการ (3.15) และ (3.16) เสียใหม่ ดังนี้

$$s^2 = x^2+y^2+z^2-c^2t^2 \tag{3.17}$$

$$s'^2 = x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2 \tag{3.18}$$

เนื่องจาก ความสัมพันธ์ระหว่าง (x,y,z,t) และ (x′,y′,z′,t′) เป็นความสัมพันธ์เชิงเส้น และ $s'^2 = 0 \longleftrightarrow s^2 = 0$ เสมอ ดังนั้นเราอาจจะเขียนความสัมพันธ์ระหว่าง s'^2 และ s^2 ได้ดังนี้

$$s'^2 = k(v)\, s^2 \tag{3.19}$$

ในทางที่กลับกัน $$s^2 = k(v)\, s'^2 \tag{3.20}$$

แสดงว่า $$k(v) = 1 \quad , \quad s'^2 = s^2 \tag{3.21}$$

s^2 เป็นค่าที่ไม่เปลี่ยนแปลงในปริภูมิ-เวลาสี่มิติ จากสมการ (3.13), (3.14), (3.17) และ (3.18)

$$x^2-c^2t^2 = x'^2-c^2t'^2 \tag{3.22}$$

ดังนั้น x, t จึงควรเป็นฟังก์ชันของ x′ และ t′ เราอาจจะสมมุติให้

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha x+\beta t \quad (\text{ก}) \\ t' &= \lambda x+\delta t \quad (\text{ข}) \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

สมมุติว่าผู้สังเกตการณ์อยู่ที่จุดกำเนิดของระบบพิกัด s′ (ที่จุด 0′) x′ = 0 ดังนั้น จากสมการ (3.23 ก)

$$\alpha x+\beta t = 0$$

$$\therefore \quad x = -\frac{\beta t}{\alpha}$$

$$\therefore \quad \beta = -\alpha v \quad , \quad \frac{x}{t} = v \tag{3.24}$$

ที่จุดกำเนิดของระบบพิกัด s (ที่จุด 0) $x = 0$ ดังนั้นจากสมการ (3.23 ก) และ (3.23 ข)

$$x' = \beta t$$

$$t' = \delta t$$

$$\frac{x'}{t'} = -v = \frac{\beta}{\delta} \tag{3.25}$$

$$\therefore \beta = -\delta v \tag{3.26}$$

เทียบ (3.24) และ (3.26) แสดงว่า $\alpha = \delta$ (3.27)

แทนค่ากลับเข้าไปในสมการ (3.23) ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha(x - vt) && (\text{ก}) \\ t' &= \lambda x + \alpha t && (\text{ข}) \end{aligned}\right\} \tag{3.28}$$

แทนค่าจากชุดสมการ (3.28) ลงในสมการ (3.22)

$$\begin{aligned} x^2 - c^2t^2 &= \alpha^2(x - vt)^2 - c^2(\lambda x + \alpha t)^2 \\ &= \alpha^2(x^2 + v^2t^2 - 2vxt) - c^2(\lambda^2x^2 + \alpha^2t^2 + 2\lambda\alpha xt) \\ &= \alpha^2x^2 + \alpha^2v^2t^2 - 2\alpha^2vxt - \lambda^2c^2x^2 - \alpha^2c^2t^2 - 2c^2\lambda\alpha xt \end{aligned}$$

$$x^2 - c^2t^2 = (\alpha^2 - \lambda^2c^2)x^2 - \left(\alpha^2 - \frac{\alpha^2v^2}{c^2}\right)c^2t^2 - 2\alpha(\alpha v + c^2\lambda)xt \tag{3.29}$$

เทียบสัมประสิทธิ์ของ x^2, c^2t^2 และ xt

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.30}$$

$$\lambda = -\frac{\alpha v}{c^2} = -\frac{v}{c^2}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.31}$$

จากสมการ (3.13), (3.14), (3.23), (3.30) และ (3.31)

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, z' = z \tag{3.32}$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.32}$$

ความสัมพันธ์ผกผันอาจจะหาได้จากสมการชุด (3.32) ซึ่งจะได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad , y = y' , z = z' \\ t &= \frac{t + \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}\right\} \tag{3.32)$'$($}$$

เราอาจจะหา (3.32)′ จากสมการชุด (3.32) โดยการเปลี่ยนชุดพิกัด (x',y',z',t') กับชุดพิกัด (x,y,z,t) แล้วเปลี่ยน v เป็น $-v$

การแปลงตามสมการที่ (3.32) และ (3.32)′ เรียกว่าการแปลงแบบของโลเรนตซ์ แต่ความหมายของการแปลงแบบนี้มากระจ่างขึ้นเนื่องจากงานของไอน์สไตน์ ในปี ค.ศ. 1917

3.3.2 การแปลงแบบโลเรนตซ์ชนิดทั่วไป

สำหรับในกรณีทั่วไปของการแปลงแบบโลเรนตซ์ เมื่อความเร็วระหว่าง s' และ s ไม่ขนานกับแกน x แกนระบบพิกัด s' และ s ไม่ขนานกัน การหาการแปลงแบบของโลเรนตซ์ในกรณีนี้ต้องใช้การหมุนแกนในสามมิติเข้าช่วย แต่ระยะทางยกกำลังสอง s^2 ยังคงเป็นค่าไม่เปลี่ยนแปลงอยู่ ในกรณีของการแปลงแบบโลเรนตซ์ชนิดพิเศษ ถ้าเรากำหนดให้ $\bar{x} = (x,y,z)$ และ $\bar{x} = (x',y',z')$ ให้ $\bar{v} = (v,0,0)$ สำหรับเวกเตอร์สเปซสามมิติเชิงนามธรรม (abstract three dimensional vector space) อันหนึ่ง เราอาจจะเขียนการแปลงแบบของโลเรนตซ์ของสมการ (3.32) เสียใหม่ได้ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}' &= \bar{x} + \bar{v}\left[\frac{\bar{x}.\bar{v}}{v^2}\left\{\frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} - 1\right\} - \frac{t}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}\right] \\ t' &= \left\{t - \frac{\bar{v}.\bar{x}}{c^2}\right\}\frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \end{aligned}\right\} \tag{3.33}$$

$\bar{v}.\bar{x} = v_x x + v_y y + v_z z$ สมการ (3.33) คือสมการ (3.32) ถ้า $\bar{v} = (v,0,0)$ และถ้าให้ $\bar{v}' = (-v,0,0)$ แทนความเร็วของ s เทียบกับความเร็วของ s′ แล้ว เราอาจจะเขียนสมการ (3.32)′ เสียใหม่ได้ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \bar{x}' + \bar{v}'\left[\frac{\bar{x}'.\bar{v}'}{v^2}\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} - 1\right\} - \frac{t'}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}\right] \\ t &= \left\{t' - \frac{\bar{v}'.\bar{x}'}{c^2}\right\}\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \end{aligned}\right\} \quad (3.33)'$$

เป็นข้อตกลงเชิงคณิตศาสตร์ว่าในเวกเตอร์สเปซเชิงนามธรรม แกนของระบบพิกัดจะอยู่นิ่ง ดังนั้นตามข้อตกลงนี้การหมุนระบบพิกัดจะต้องหมายถึงการหมุนเวกเตอร์ไปในทิศทางที่ตรงกันข้าม แต่ในการหมุนนี้ สมมุติว่าเราหมุนระบบพิกัด s ซึ่งหมายถึงการหมุน $\bar{x},\bar{v}$ ไปในทางตรงกันข้ามกับการหมุนพิกัดนั้น ทำให้เวกเตอร์ $\bar{x}',\bar{v}'$ ไม่เปลี่ยนแปลง โดยทำนองเดียวกันการหมุนระบบพิกัด s′ ย่อมหมายถึงการหมุน $\bar{x}',\bar{v}'$ ไปทางตรงกันข้ามกับการหมุนแกนของพิกัด s′ ในกรณีนี้เวกเตอร์ $\bar{x},\bar{v}$ ย่อมไม่เปลี่ยนแปลง ต่อไปนี้ถ้าเรากล่าวถึงการหมุนพิกัดก็หมายถึงเราหมุนเวกเตอร์ในทิศที่กลับกัน

ยังมีการหมุนอีกชนิดหนึ่ง สมมุติว่าเดิมพิกัด s และ s′ มีลักษณะเหมือนในรูปที่ 33 ต่อมาสมมุติว่าแกนของทั้งสองระบบหมุนไปในทำนองเดียวกัน ในกรณีนี้ก็เท่ากับว่าเวกเตอร์ $\bar{x},\bar{v},\bar{x}',\bar{v}'$ หมุนไปด้วยมุมขนาดเดียวกัน ความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์เหล่านี้ไม่เปลี่ยนแปลง เราเรียกการแปลงชนิดนี้ว่า การแปลงของโลเรนตซ์ที่ไม่มีการหมุน

ให้ $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ และ $\bar{v} = (v_x,v_y,v_z)$ สมการ (3.33) อาจจะเขียนได้ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} x' &= \left\{1+\frac{(\gamma-1)v_x^2}{v^2}\right\}x + (\gamma-1)\frac{v_xv_y}{v^2}y + (\gamma-1)\frac{v_xv_z}{v^2}z - v_x\gamma t \\ y' &= (\gamma-1)\frac{v_yv_x}{v^2}x + \left\{1+(\gamma-1)\frac{v_y^2}{v^2}\right\}y + (\gamma-1)\frac{v_yv_z}{v^2}z - v_y\gamma t \\ z' &= (\gamma-1)\frac{v_zv_x}{v^2}x + (\gamma-1)\frac{v_zv_y}{v^2}y + \left\{1+(\gamma-1)\frac{v_z^2}{v^2}\right\}z - v_z\gamma t \\ t' &= -\gamma\frac{v_xx}{c^2} - \gamma\frac{v_yy}{c^2} - \gamma\frac{v_zz}{c^2} + \gamma t \end{aligned}\right\} \quad (3.34)$$

สมการชุด (3.34) คือ การแปลงของโลเรนตซ์ซึ่งไม่มีการหมุน เราอาจจะหาความสัมพันธ์ผกผันได้เช่นเดียวกันโดย แลกตัวแปร (x,y,z,t) กับตัวแปร (x',y',z',t') และแทน (v_x,v_y,v_z) ด้วย $(-v_x,-v_y,-v_z)$

ในกรณีที่แกนของระบบพิกัด s และ s′ ไม่ขนานกัน เราจำเป็นต้องหมุนแกนของระบบพิกัดชุดใดชุดหนึ่งให้ขนานกับระบบพิกัดที่คงไว้ จากสมการชุด (3.33) จะเห็นว่า เราอาจจะหมุนเวกเตอร์ $\bar{x}'$ โดยที่สมการของเวลา t' ไม่เปลี่ยนแปลงเลยดังนี้

$$D\bar{x}' = \bar{x}+\bar{v}\left\{(\gamma-1)\frac{(\bar{x}.\bar{v})}{v^2} - \gamma t\right\} \tag{3.35}$$

D เป็นตัวดำเนินการของการหมุน ทำให้แกนของ s′ ขนานกับแกนของ s ดังนั้น D^{-1} จึงเป็นตัวดำเนินการผกผันของตัวดำเนินการ D จะเห็นว่า

$$D\bar{v}' = -\bar{v} \tag{3.36}$$

$\bar{v}'$ เป็นความเร็วของ s มองจาก s′ สำหรับกรณีซึ่งแกนของ s และ s′ ไม่ขนานกันนี้ ถ้าหากเอาตัวดำเนินการ D กระทำบน (3.35) การแปลงแบบโลเรนตซ์ในกรณีแกนของ s และ s′ ไม่ขนานกันดังนี้

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}' &= D^{-1}\bar{x}-\bar{v}'\left\{(\gamma-1)\frac{(\bar{x}.\bar{v})}{v^2} - \gamma t\right\} \\ t' &= \gamma\left\{t-\frac{\bar{v}.\bar{x}}{c^2}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{3.37}$$

ตัวดำเนินการ D จึงอาจจะตีความหมายได้ว่าเป็นตัวดำเนินการซึ่งกระทำต่อแกนของ s ทำให้แกนของ s ขนานกับแกนของ s′ ความสัมพันธ์ผกผันของสมการชุด (3.37) จึงอาจจะเขียนได้ว่า

$$\bar{x}' = D^{-1}\bar{x}+(D^{-1}\bar{v})\left\{(\gamma-1)\frac{\bar{x}.\bar{v}}{v^2} - \gamma t\right\} \tag{3.38}$$

ขณะนี้แกนของ s ขนานกับแกนของ s′ ดังนั้นถ้าเราเปลี่ยน $\bar{x}\rightarrow\bar{x}'$, $t\rightarrow t'$ และ $\bar{v}\rightarrow-\bar{v}'$ D^{-1} จะเป็น D

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= D\bar{x}'-\bar{v}\left\{(\gamma-1)\frac{\bar{x}'.\bar{v}'}{v^2} - \gamma t'\right\} \\ t &= \gamma\left\{t' - \frac{\bar{v}'.\bar{x}'}{c^2}\right\}, \quad v' = |\bar{v}'| = |\bar{v}| = v \end{aligned}\right\} \tag{3.39}$$

จะเห็นว่า

$$\bar{x}'.\bar{x}' - c^2t'^2 = s'^2 = s^2 = \bar{x}.\bar{x} - c^2t^2 \tag{3.40}$$

และถ้าหาก $c \to \infty$ แล้ว สมการชุด (3.39) จะกลายเป็นการแปลงแบบของกาลิเลโอ

การแปลงแบบของโลเรนตซ์เท่าที่ผ่านมาทั้งหมด เราได้กำหนดให้ จุดกำเนิด $0'$ ทับจุด 0 เมื่อเวลา $t = t' = 0$ ทำให้เราได้การแปลงแบบเอกพันธุ์ ต่อจากนี้ไปเราจะยกเลิกข้อกำหนดนี้ โดยเราจะแทน (x', y', z', t') ด้วย $(x' - x_0', y' - y_0', z' - z_0', t' - t_0')$ โดยที่ x_0', y_0', z_0', t_0' เป็นค่าคงที่ ทำให้เราได้การแปลงไม่เป็นเอกพันธุ์ของโลเรนตซ์ สเกลาร์ s^2 จะไม่เป็นค่าที่ไม่เปลี่ยนแปลงอีกต่อไป แต่ถ้าหากเราให้

$$\Delta x = x_1 - x_2, \quad \Delta y = y_1 - y_2, \ldots$$ ทำให้เราได้ความสัมพันธ์

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2 \tag{3.41}$$

เป็นค่าไม่เปลี่ยนแปลง

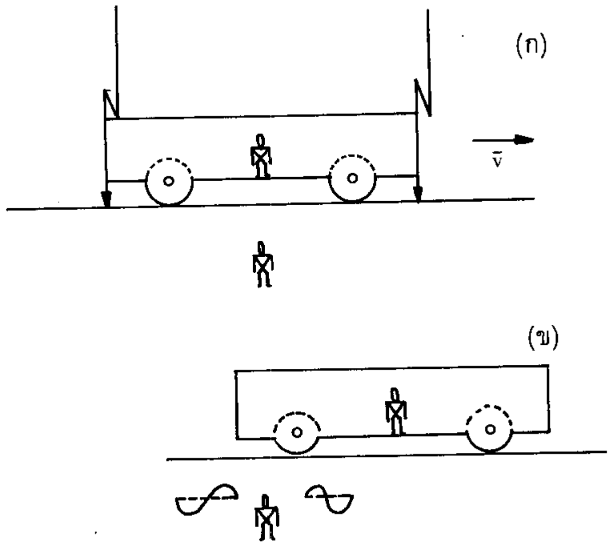
เป็นความเชื่อในหลักของทฤษฎีสัมพัทธภาพว่า ปรากฏการณ์ทางฟิสิกส์มีวิวัฒนาการเป็นอย่างเดียวกันในทุกกรอบเฉื่อย ดังนั้นจึงมีข้อจำกัดว่าปรากฏการณ์ทางฟิสิกส์ใด ๆ จะมีลักษณะอย่างเดียวกันในทุก ๆ กรอบเฉื่อย การเขียนสมการมูลฐานของวิชาฟิสิกส์จำเป็นต้องมีรูปร่างอย่างเดียวกันในทุก ๆ กรอบเฉื่อย สมการเหล่านี้จะมีรูปร่างที่ไม่เปลี่ยนแปลง (form-invariant หรือ covariant) ในการแปลงแบบของโลเรนตซ์ ข้อบังคับนี้เป็นแบบแผนของหลักสัมพัทธภาพ

3.4 ความพร้อมกันเชิงสัมพัทธภาพ

ไอน์สไตน์ได้เริ่มวิชาจลนศาสตร์สัมพัทธภาพด้วยการถกปัญหาความพร้อมกัน (simultaneity) โดยได้พิจารณาการทดลองทางความคิดซึ่งรู้จักกันดีในนามของรถไฟของไอน์สไตน์ ตามการทดลองของไอน์สไตน์ ๆ ได้ตั้งสมมุติฐานว่า ความเร็วของแสงในสุญญากาศเป็นไอโซโทรปิก มีขนาดคงที่ c ตามสมมุติฐานนี้ เหตุการณ์สองเหตุการณ์จะเกิดขึ้นพร้อมกันได้ เมื่อ สัญญาณแสงจากเหตุการณ์ทั้งสองนั้นมาถึงจุดกึ่งกลางระหว่างเหตุการณ์ทั้งสองพร้อมกันพอดี

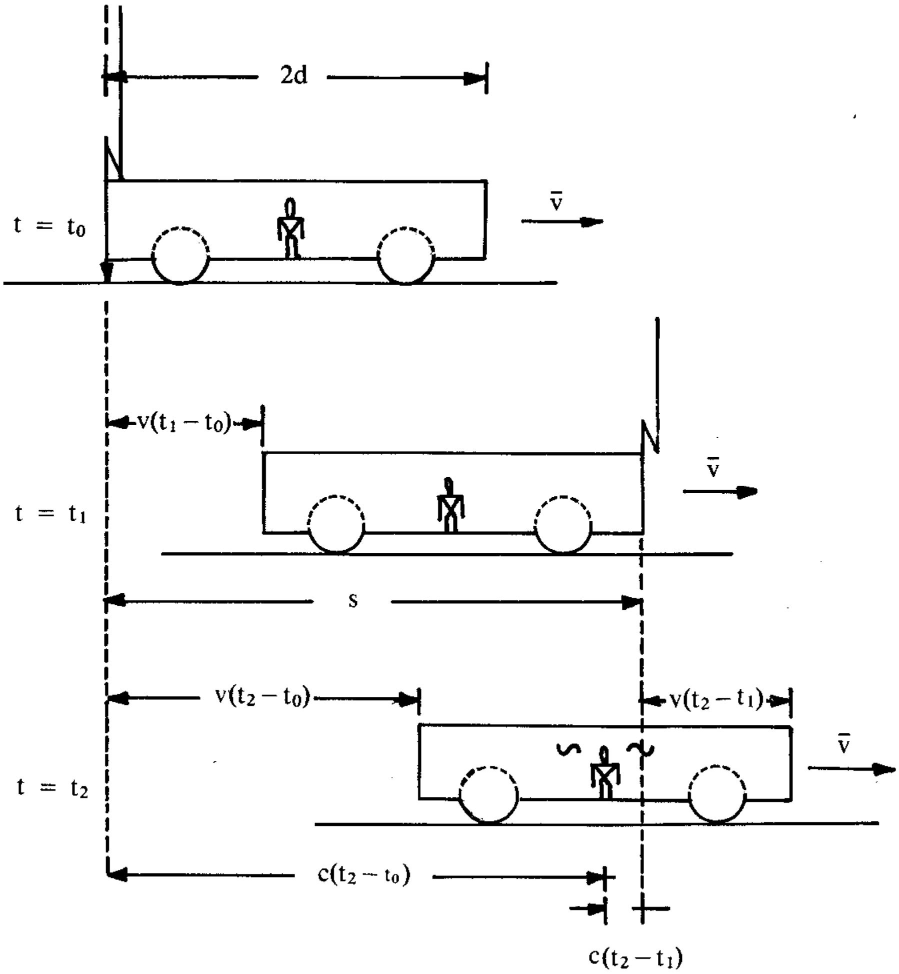
เมื่อได้นิยามความพร้อมกันตามนัยที่กล่าวมาแล้ว ปัญหาที่นิยมถามกันเกี่ยวกับความพร้อมกันก็คือ ถ้าเหตุการณ์สองเหตุการณ์มีความพร้อมกันในกรอบเฉื่อยอันหนึ่ง สมมุติว่าเป็นกรอบเฉื่อย A ถ้าหากมีกรอบเฉื่อยอีกอันหนึ่งคือกรอบเฉื่อย B เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v เทียบกับ A ในทิศซึ่งขนานกับเส้นซึ่งเชื่อมโยงเหตุการณ์ทั้งสอง ถามว่าเหตุการณ์ทั้งสองจะยังคงพร้อมกันใน B หรือ ? ถ้าหากเหตุการณ์ทั้งสองไม่พร้อมกันใน B ช่วงเวลาระหว่างเหตุการณ์ทั้งสองจะเป็นเท่าไรใน B ? และเหตุการณ์ใดจะเกิดขึ้นก่อน ?

เราจะเริ่มต้นกันที่เรื่องรถไฟของไอน์สไตน์ สมมุติว่ารถไฟขบวนหนึ่งเคลื่อนที่ไปด้วยความเร็ว v เมื่อเทียบกับพื้นดิน ให้ทั้งพื้นดินและรถไฟเป็นกรอบเฉื่อย สมมุติว่ามีฟ้าผ่ารถไฟที่หัวรถและที่ท้ายรถ รอยที่ฟ้าผ่าปรากฏทั้งบนรถไฟและบนพื้นดิน ทำให้เห็นร่องรอยของฟ้าผ่าชัดเจน ในที่นี้เราจะสมมุติว่าระยะระหว่างรถไฟกับพื้นดินสั้นมากจนอาจจะละไว้เสียได้ เราจะถือว่าเมื่อฟ้าผ่าตำแหน่งบนรถ กับรอยบนพื้นดินของฟ้าผ่าเป็นรอยเดียวกัน ให้ผู้สังเกตการณ์ซึ่งอยู่ในแต่ละกรอบอ้างอิงอยู่ที่จุดกึ่งกลางระหว่างรอยฟ้าผ่า ให้กรอบอ้างอิงที่ผิวโลกเป็นกรอบอ้างอิงฟ้าผ่าเกิดขึ้นพร้อมกัน (ดูรูปที่ 34 ก) สัญญาณแสงอันเกิดจากฟ้าผ่าทั้งสองครั้งจะปรากฏแก่ผู้สังเกตบนพื้นดินพร้อมกัน แต่ในช่วงเวลาที่แสงเดินทางจากรอยฟ้าผ่าไปยังผู้สังเกตการณ์ รถไฟได้เคลื่อนที่ไปได้เป็นระยะทางช่วงหนึ่ง (ดูรูปที่ 34 ข) ในเวลาที่ปรากฏเป็นรูปที่ 34 ข แสงจากทางหน้ารถไฟได้ผ่านผู้สังเกตการณ์บนรถไฟไปแล้ว แต่แสงจากทางด้านหลังของรถไฟจะยังไม่ถึงผู้สังเกตการณ์บนรถไฟเลย ดังนั้นสำหรับกรณีนี้ สัญญาณแสงจากด้านหน้ารถไฟจะถึงผู้สังเกตการณ์บนรถไฟก่อน



รูปที่ 34 ฟ้าผ่าพร้อม ๆ กันที่หัวและท้ายรถไฟ (สำหรับผู้สังเกตการณ์ที่อยู่บนพื้นดิน) ทั้งบนพื้นดินและในรถไฟ ผู้สังเกตการณ์อยู่ตรงกึ่งกลางของฟ้าผ่าในภาพ (ก) ในภาพ (ข) สัญญาณแสงจากฟ้าผ่าไปถึงผู้สังเกตการณ์บนพื้นดิน

ในตอนต่อไปเราจะพิจารณาในกรณีที่ผู้สังเกตการณ์บนรถไฟได้รับสัญญาณ ฟ้าผ่าพร้อมกันบ้าง จะปรากฏว่าผู้สังเกตการณ์บนพื้นดินจะเห็นว่าฟ้าผ่าที่ท้ายรถไฟก่อน เหตุการณ์เหล่านี้ได้แสดงไว้ในรูปที่ 35 ท้ายรถไฟถูกฟ้าผ่าเมื่อเวลา t_0 ในกรอบอ้างอิงของผู้สังเกตการณ์บนพื้นดิน ต่อมาท่อนหัวของรถไฟจะมีฟ้าผ่าเมื่อเวลา t_1 และเมื่อเวลา t_2



(ก) ฟ้าผ่าที่ท้ายรถไฟเมื่อเวลา $t = t_0$ ความยาวของรถไฟคือ 2d
(ข) ฟ้าผ่าที่หัวรถไฟเมื่อเวลา $t = t_1$ ระยะที่ฟ้าผ่าทั้งสองครั้งปรากฏเป็นระยะ s บนพื้นดิน
(ค) สัญญาณที่ฟ้าผ่าทั้งสองครั้งถึงผู้สังเกตการณ์บนรถไฟพร้อมกันพอดี

รูปที่ 35 ฟ้าผ่าพร้อมกันสำหรับผู้สังเกตการณ์ที่อยู่ตรงกึ่งกลางบนรถไฟ

สัญญาณแสงจากหัวท้ายรถไฟจะถึงกึ่งกลางรถไฟพอดี ทำให้ผู้สังเกตการณ์ที่อยู่นิ่งที่ตรงจุดกึ่งกลางรถไฟสังเกตเห็นแสงพร้อมกัน ถ้าหากความยาวของรถไฟเมื่ออยู่นิ่งเทียบกับพื้นดินเป็น 2d ดังนั้น สัญญาณจากการที่ฟ้าผ่าท้ายรถไฟเคลื่อนที่เป็นระยะทาง (รูปที่ 35 ค)

$$c(t_2 - t_0) = d + v(t_2 - t_0) \tag{3.41}$$

ในขณะเดียวกัน สัญญาณจากการที่ฟ้าผ่าหัวรถไฟก็จะเคลื่อนที่เป็นระยะทาง

$$c(t_2 - t_1) = d - v(t_2 - t_1) \tag{3.42}$$

จากสมการ (3.41) $\quad t_2 - t_0 = \frac{d}{c-v}$

จากสมการ (3.42) $\quad t_2 - t_1 = \frac{d}{c+v}$

กำจัด t_2 $\quad t_1 - t_0 = \frac{2dv}{c^2 - v^2}$ (3.43)

จากรูปที่ 35 (ข) จะเห็นว่าระยะระหว่างตำแหน่งที่ฟ้าผ่าทั้งสองตำแหน่งสำหรับผู้สังเกตซึ่งยืนอยู่บนพื้นดิน คือ

$$s = 2d + v(t_1 - t_0) \tag{3.44}$$

กำจัด d จากสมการ (3.43) และ (3.44) ได้

$$t_1 - t_0 = \Delta t = \frac{sv}{c^2} \tag{3.45}$$

แสดงว่า เหตุการณ์ซึ่งพร้อมกันในกรอบอ้างอิง A (ในรถไฟ) จะไม่พร้อมกันในกรอบอ้างอิง B (บนพื้นดิน) ผู้สังเกตใน B จะเห็นว่า ฟ้าผ่าที่ท้ายรถไฟเป็นเวลา $\frac{sv}{c^2}$ วินาทีก่อนฟ้าผ่าที่หัวรถไฟ

3.5 การเรียงลำดับและการเป็นเหตุผลกันของเหตุการณ์

ไอน์สไตน์ได้คำนึงถึงความจริงที่ว่า เมื่อแสงไม่ได้มีความเร็วเป็นอนันต์แล้ว ความพร้อมกันของเหตุการณ์จะเป็นเหตุการณ์ที่ไม่เปลี่ยนแปลงไม่ได้ โดยเฉพาะความพร้อมกันของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นไกลจากผู้สังเกตการณ์ ความไม่พร้อมกันทำให้มีปัญหาขึ้นว่า เหตุการณ์ที่

เกิดก่อนสำหรับผู้สังเกตคนหนึ่งอาจจะเป็นเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นหลังสำหรับผู้สังเกตอีกคนหนึ่ง แต่เชื่อกันว่าลำดับก่อนหลังของเหตุการณ์จะต้องไม่ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงทางกายภาพ เช่น ลูกย่อมไม่เกิดก่อนพ่อแม่

เหตุผลที่นำมาสู่การเรียงลำดับของเหตุการณ์ ก็คือ การที่เหตุการณ์เป็นเหตุผลกันได้เนื่องมาจากสัญญาณจากเหตุการณ์ต้น ทำให้เกิดเหตุการณ์ถัดไป และสัญญาณที่เร็วที่สุดที่นักวิทยาศาสตร์รู้จักคือ ความเร็วแสง ดังนั้น เหตุการณ์เป็นเหตุผลกันเช่น ลูกเกิดจากพ่อแม่ จึงไม่มีโอกาสเปลี่ยนลำดับได้ เพราะก่อนที่ลูกจะเกิด พ่อแม่ต้องเกิดก่อนแล้ว สัญญาณแสงของการเกิดของพ่อแม่ผ่านบริเวณที่ลูกเกิดไปเป็นเวลานาน กว่าพ่อแม่จะเจริญเติบโตและมีลูกเกิดขึ้นได้ เหตุการณ์อย่างนี้ ไม่เปลี่ยนลำดับเนื่องจากผลของสัมพัทธภาพ

แต่เหตุการณ์เช่นฟ้าผ่าหัวและท้ายของรถไฟ หาได้เป็นเหตุการณ์ซึ่งเป็นเหตุเป็นผลของกันและกันไม่ ฟ้าผ่าแต่ละครั้งเป็นอิสระต่อกัน ดังนั้นสำหรับผู้สังเกตที่ต่างกัน อาจจะเห็นฟ้าผ่าก่อนหลังสลับเวลากันได้

3.6 สรุป

3.6.1 ความจำเป็นของเวลาเฉพาะ

เวลาเฉพาะ (proper time) คือ เวลาของนาฬิกาที่อยู่นิ่งเทียบกับผู้สังเกตการณ์

เวลาไม่เฉพาะ (improper time) คือ เวลาของนาฬิกาที่เคลื่อนที่เทียบกับผู้สังเกตการณ์

ถ้า Δt : ช่วงเวลาเฉพาะ ในระบบพิกัด s

$\Delta t'$: ช่วงเวลาไม่เฉพาะ ในระบบพิกัด s'

พิกัด s' เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\bar{v} = (v,0,0)$ เทียบกับ s

$$\Delta t = \mathbf{At'} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \qquad (3.5)$$

3.6.2 การหดของความยาว

ให้ L เป็นความยาวซึ่งอยู่นิ่งเทียบกับผู้สังเกตการณ์ใน s ต่อมาให้ความยาวนั้นเคลื่อนที่ไปกับระบบพิกัด s' ซึ่งเคลื่อนที่ไปด้วยความเร็ว $\bar{v} = (v,0,0)$ เทียบกับ s ผู้สังเกตการณ์ใน s' วัดระยะให้ของความยาวนั้น สมมุติว่าได้ L' ดังนั้น

$$L' = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (3.6)$$

3.6.3 การแปลงแบบโลเรนตซ์

3.6.3.1 การแปลงแบบโลเรนตซ์ชนิดพิเศษ

ให้เหตุการณ์อันหนึ่งเกิดขึ้นที่จุด P สำหรับระบบพิกัด s (ซึ่งเป็นกรอบเฉื่อยอันหนึ่ง) เหตุการณ์นี้เกิดขึ้นที่เวลา t ที่ตำแหน่ง $\bar{x} = (x,y,z)$ ให้ระบบพิกัด s′ (ซึ่งเป็นกรอบเฉื่อยอีกอันหนึ่ง) เหตุการณ์นี้เกิดขึ้นที่เวลา t′ ที่ตำแหน่ง $\bar{x}' = (x',y',z')$ สมมุติว่าเมื่อเวลา $t = t' = 0$ จุด 0′ ทับจุด 0 แกน 0′x′, 0′y′ และ 0′z′ ทับแกน 0x, 0y และ 0z ตามลำดับ ระบบพิกัด s′ เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\bar{v} = (v,0,0)$ เทียบกับ s ดังนั้น

$$\left.\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned}\right\} \tag{3.32}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned}\right\} \tag{3.32$'$}$$

การแปลงตามสมการ (3.32) และ (3.32)′ เรียกว่าการแปลงแบบของโลเรนตซ์

3.6.3.2 การแปลงแบบโลเรนตซ์ชนิดทั่วไป

ถ้าหากแกนของระบบพิกัด s′ ไม่ขนานกับแกนของระบบพิกัด s ความเร็วของ s′ เทียบกับ s คือ $\bar{v} = (v_x,v_y,v_z)$ ให้ D เป็นตัวดำเนินการที่หมุนแกนของ s′ ให้ขนานกับแกนของ s ดังนั้น

$$\left.\begin{aligned} D\bar{x}' &= \bar{x} + \bar{v}\left\{(\gamma-1)\frac{(\bar{x}.\bar{v})}{v^2} - \gamma t\right\} \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{\bar{v}.\bar{x}}{c^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{3.35}$$

$$\bar{x} = D\bar{x}' - v\left\{(\gamma - 1)\frac{\bar{x}'.\bar{v}'}{v^2} - \gamma t'\right\} \quad (3.39)$$
$$t = \gamma\left(t' - \frac{\bar{v}'.\bar{x}'}{c^2}\right)$$

โดยที่ $$s'^2 = \bar{x}'.\bar{x}' - c^2t'^2 = \bar{x}.\bar{x} - c^2t^2 = s^2 \quad (3.40)$$

ถ้าหากการแปลงไม่ใช่การแปลงแบบเอกพันธุ์ ซึ่งหมายถึงจุด P แทนด้วย $(x' - x_0', y' - y_0', z' - z_0', t' - t_0')$ โดยที่ x_0', y_0', z_0', t' เป็นค่าคงที่แล้ว ให้ $\Delta x = x_1 - x_2$, $\Delta y = y_1 - y_2$, ...

ดังนั้น $$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2 \quad : \text{ ค่าที่ไม่เปลี่ยนแปลง} \quad (3.41)$$

3.6.4 ความพร้อมกันเชิงสัมพัทธภาพ

ในกรอบเฉื่อยสองกรอบเฉื่อย ซึ่งมีความเร็วต่างกัน ความพร้อมกันของเหตุการณ์สองเหตุการณ์ในกรอบเฉื่อยหนึ่ง ไม่จำเป็นต้องพร้อมกันในอีกกรอบเฉื่อยหนึ่ง ในการทดลองทางความคิด เรื่องรถไฟของไอน์สไตน์พบว่า ถ้ารถไฟมีความเร็ว $\bar{v}$ เทียบกับพื้นดิน ฟ้าผ่าที่หัวท้ายของรถไฟซึ่งเกิดขึ้นพร้อมกันสำหรับผู้สังเกตซึ่งอยู่นิ่งที่กึ่งกลางรถไฟ จะปรากฏว่าฟ้าผ่าทั้งสองครั้งเกิดขึ้นห่างกันเป็นเวลา

$$\Delta t = \frac{sv}{c^2} \quad (3.45)$$

สำหรับผู้สังเกตซึ่งยืนนิ่ง ๆ บนพื้นดิน โดยที่ s เป็นระยะความห่างของรอยฟ้าผ่าบนพื้นดิน c เป็นความเร็วของแสง ผู้สังเกตบนพื้นดินยืนอยู่ริมทางรถไฟ

3.6.5 การเรียงลำดับและการเป็นเหตุผลกันของเหตุการณ์

เหตุการณ์สองเหตุการณ์จะเรียงลำดับกันได้ เมื่อเหตุการณ์ที่หนึ่งเกิดขึ้นแล้วสัญญาณแสงของเหตุการณ์นั้น ได้ผ่านหรืออย่างน้อยที่สุดก็ไปถึงตำแหน่งซึ่งเหตุการณ์ที่สองเกิดขึ้น ถ้าเหตุการณ์ที่สองเกิดขึ้นก่อนที่แสงจากเหตุการณ์ที่หนึ่งจะไปถึงบริเวณที่เหตุการณ์ที่สองลำดับของการเกิดเหตุการณ์ทั้งสองอาจกลับกันสำหรับผู้สังเกตุการณ์ทีมีความเร็วต่างกัน

3.7 คำถามท้ายบท

จงเติมคำในช่องว่างให้ได้ความสมบูรณ์

3.7.1 ชายคนหนึ่งขับรถยนต์ผ่านนาฬิกาเรือนหนึ่งเมื่อเวลา 11.00 น. รถของเขามีความเร็ว $\bar{v} = (v,0,0)$ ต่อมาเขาขับรถโค้งเป็นวงกลม มาผ่านนาฬิกาเรือนเดิมที่เวลา 12.00 น. ช่วงเวลาที่เขาอ่านได้เป็น..........

ตอบ : ไม่เฉพาะ

3.7.2 ชายคนหนึ่งแพทย์ตรวจกระดูกสันหลังของเขาพบว่า เซลล์กระดูกสันหลังของเขาเป็นเซลล์ชุดที่สาม ร่างกายจะเปลี่ยนเซลล์ใหม่ประมาณ 7 ปีต่อครั้ง ดังนั้น อายุของเขาจึงแก่กว่า 14 ปี ช่วงเวลาที่คำนวณได้นี้เป็น..........

ตอบ : เวลาเฉพาะ

3.7.3 ให้กรอบเฉื่อย s' มีความเร็ว $\bar{v} = (v,0,0)$ เทียบกับกรอบเฉื่อย s เวลาผู้สังเกตการณ์ใน s เห็นช่วงเวลาของนาฬิกาข้อมือของเขาเป็น Δt แต่สังเกตเห็นว่าช่วงเวลาเดียวกันของนาฬิกาใน s' เป็น $\Delta t'$ ความสัมพันธ์ระหว่าง Δt และ $\Delta t'$ คือ..........

ตอบ : $\Delta t \;=\; \Delta t' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

3.7.4 ในกรอบอ้างอิงที่ผู้สังเกตการณ์เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v เขาจะวัดระยะทางหดลงไปเป็น..........เท่าของระยะทางที่เขาจะวัดได้เมื่อเขาอยู่นิ่งเทียบกับระยะทางนั้น

ตอบ : $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

3.7.5 ในการแปลงแบบโลเรนตซ์ชนิดพิเศษเอกพันธุ์ ให้ s' เป็นกรอบเฉื่อยซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\bar{v} = (v,0,0)$ เทียบกับกรอบเฉื่อย s เมื่อเวลา $t = t' = 0$ จุด $0'$ ต้องทับ..........

ตอบ : จุด 0

3.7.6 ถ้า $s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ แล้วค่า s^2 เป็นค่า..........

ตอบ : ที่ไม่เปลี่ยนแปลงในกรอบเฉื่อยใด ๆ

3.7.7 ถ้าหาก s′ เป็นกรอบเฉื่อยซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\bar{v} = (v,0,0)$ เทียบกับกรอบเฉื่อย s ถ้า จุดกำเนิด 0′ ของ s′ ทับจุดกำเนิด 0 ของ s ที่เวลา $t = t' = 0$ แล้ว

x' = ...

t' = ...

ตอบ : $x' = \gamma(x - vt)$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

3.7.8 ถ้า $\bar{v} = (v,0,0)$ แล้ว $t' = \gamma\left(t - \frac{\bar{v}.\bar{x}}{c^2}\right)$ ถ้าหาก $\bar{v} = (0,v,0)$ แล้ว t' = ...

ตอบ : $t' = \gamma\left(t - \frac{\bar{v}.\bar{x}}{c^2}\right)$

3.7.9 ในเวกเตอร์สเปซเชิงนามธรรม แกนของระบบพิกัด..

ตอบ : จะอยู่นิ่ง

3.7.10 ถ้าแกนของระบบพิกัด s และ s′ หมุนไปเป็นมุมเท่ากัน การแปลงแบบโลเรนตซ์ของทั้งสองระบบพิกัดเรียกว่า..

ตอบ : การแปลงแบบโลเรนตซ์ที่ไม่มีการหมุน

3.7.11 ถ้า $\bar{v}'$ เป็นความเร็วของกรอบเฉื่อย s ซึ่งผู้สังเกตในกรอบเฉื่อย s′ สังเกตเห็น D′ เป็นตัวดำเนินการ ซึ่งหมุนให้แกนของ s′ ขนานกับ s ดังนั้น $D\bar{v}'$ = ...

ตอบ : $-\bar{v}$

3.7.12 ถ้า $D\bar{x}' = \bar{x} + \bar{v}\left\{(\gamma - 1)\frac{(\bar{x}.\bar{v})}{v^2} - \gamma t\right\}$ แล้ว

$\bar{x}$ = ...

ตอบ : $\bar{x} = D\bar{x}' - \bar{v}\left\{(\gamma - 1)\frac{\bar{x}'\cdot\bar{v}'}{v^2} - \gamma t'\right\}$

3.7.13 ในการแปลงแบบโลเรนตซ์ที่ไม่เป็นเอกพันธุ์ $(\Delta s)^2$ = ...

ตอบ : $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2$

3.7.14 รถไฟของไอน์สไตน์ เป็นการทดลองทางความคิดเรื่อง..

ตอบ : ความพร้อมกันเชิงสัมพัทธภาพ

3.7.15 ถ้าหากเหตุการณ์สองเหตุการณ์เกิดขึ้นในเวลาใกล้เคียงกัน จนแสงจากเหตุการณ์ที่หนึ่งไม่อาจจะไปถึงตำแหน่งของเหตุการณ์ที่สองได้ ไม่ว่าจะมองจากกรอบเฉื่อยใด ๆ ลำดับของเหตุการณ์ทั้งสองนั้น..

ตอบ : อาจจะกลับกันสำหรับผู้สังเกตการณ์ที่มีความเร็วต่างกัน

แบบฝึกหัดบทที่ 3

1. ถ้าหาก $D\bar{x}' = \bar{x} + \bar{v}\left\{(\gamma - 1)\frac{(\bar{x}.\bar{v})}{v^2} - \gamma t\right\}$

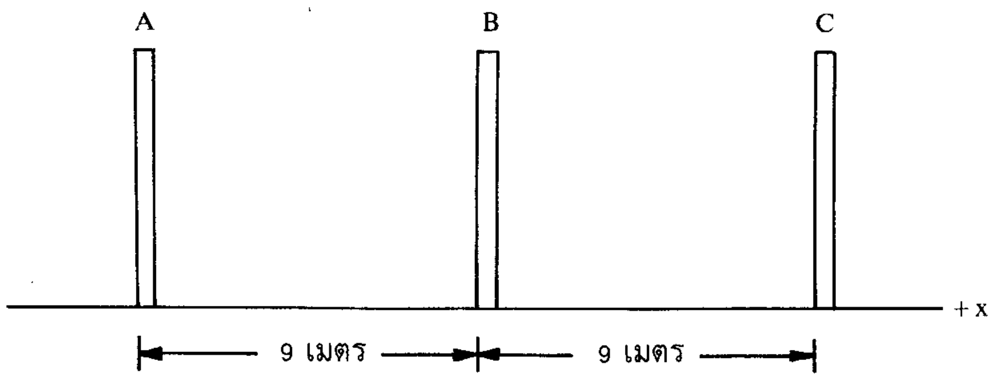
$$t' = \gamma\left\{t - \frac{\bar{v}.\bar{x}}{c^2}\right\}$$

จงแสดงว่า $\bar{x}'.\bar{x}' - c^2t'^2 = \bar{x}.\bar{x} - c^2t^2$: ค่าไม่เปลี่ยนแปลง

คำแนะนำ : ให้ $D\bar{x}' = \bar{y}'$ จะเห็นว่า $(D\bar{x}').(D\bar{x}') = \bar{x}'.\bar{x}' = \bar{y}'.\bar{y}'$

แล้วให้ $\bar{v} = (v,0,0)$ แทนค่าลงไป

2. เครื่องนับ (counter) 3 อัน วางตั้งฉากกับแกน x ระยะระหว่างเครื่องนับแต่ละคู่มีขนาด 9 เมตร K^+ เมซอน วิ่งผ่านเครื่องนับจากด้านหนึ่งไปยังอีกด้านหนึ่ง



รูปที่ 36 เครื่องนับ K^+ เมซอน

(ก) ถ้าหากมี K^+ เมซอน 1000 ตัวที่ A พอมันถึง B เหลือ 250 ตัว จงหาจำนวนเมซอนโดยประมาณเมื่อมันไปถึง C

(ข) ถ้าหากความเร็วของเมซอนเป็น 86.6% ของความเร็วแสง จงหาครึ่งชีวกาลของมันในกรอบเฉื่อยที่มันอยู่นิ่ง

คำแนะนำ : หามัชฌิมชีวกาลในกรอบอ้างอิงซึ่งอนุภาคมีความเร็ว 86.6% ของแสงเทียบกับผู้สังเกตการณ์ซึ่งอยู่นิ่ง โดยใช้สมการ $N = N_0 e^{-t/t_0}$ ค่า t ในสมการนี้เท่ากับ $\frac{9}{0.866c}$ วินาที เปลี่ยนมัชฌิมชีวกาลจากกรอบอ้างอิงที่เคลื่อนที่เป็นมัชฌิมชีวกาลของกรอบอ้างอิงซึ่งอยู่นิ่ง โดยใช้สมการ $\Delta t = \Delta t' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ แล้วหาครึ่งชีวกาลของมัน

ตอบ : (ก) 62.5

(ข) $t_{1/2} = \frac{2.6}{c}$ วินาที

3. π° เมซอน เป็นเมซอนที่ไม่มีประจุซึ่งสลายเป็นโฟตอน 2 ตัว มีครึ่งชีวกาลประมาณ 2×10^{-16} วินาที ถ้า π° เกิดที่นิวเคลียสของอะตอมซึ่งมีรัศมีประมาณ 10^{-10} เมตร มันต้องมีความเร็วเท่าใดจึงจะเคลื่อนออกจากอะตอมโดยมีปริมาณเหลืออยู่ครึ่งหนึ่ง

คำแนะนำ : $t_{1/2}\,(\text{เฉพาะ}) = t_{1/2}\,(\text{ไม่เฉพาะ}) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, $v \cong \frac{2 \times 10^{-10}}{t_{1/2}\,(\text{ไม่เฉพาะ})}$

$$t_{1/2}\,(\text{เฉพาะ}) = 2 \times 10^{-16}$$

$$= t_{1/2}\,(\text{ไม่เฉพาะ}) \sqrt{1 - \frac{4 \times 10^{-20}}{(t_{1/2}\,(\text{ไม่เฉพาะ})\, c)^2}}$$

$$= \frac{1}{c} \sqrt{(t_{1/2}\,(\text{ไม่เฉพาะ})\, c)^2 - 4 \times 10^{-20}}$$

ตอบ : $v \approx 3.3 \times 10^3 c$

4. สมมุติว่าดาวเทียมหมุนรอบโลก มีรัศมีจากจุดใจกลางโลกประมาณ 4,000 กม. ดาวเทียมดวงนั้นหมุนรอบโลกใช้เวลา 100 นาที ถ้าหากผลบนนาฬิกาของดาวเทียมขึ้นอยู่เฉพาะกับผลทางทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ นาฬิกาบนดาวเทียมจะเดินช้าลงประมาณวันละกี่วินาที

คำแนะนำ : $\Delta t\,(\text{เฉพาะ}) = \Delta t\,(\text{ไม่เฉพาะ}) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

$$\approx \Delta t\,(\text{ไม่เฉพาะ}) \left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)$$

ตอบ : $\approx 8.208 \times 10^{-8}$ วินาที

5. ดาวแอลฟ่า เซนทัวรี (Alpha Centauri) อยู่ห่างออกไปประมาณ 4 ปีแสง ถ้าจรวดลำหนึ่งจะแล่นด้วยความเร็วคงที่ขนาดหนึ่ง ทำให้ดูเหมือนว่าจรวดนั้นแล่นเพียงชั่วโมงเดียวก็ถึงดาวดวงนี้สำหรับผู้โดยสารบนจรวดนั้น จรวดนั้นจะต้องแล่นด้วยความเร็วเท่าใด

คำแนะนำ : ระยะทางของดาวแอลฟ่า เซนทัวรี คือ $4 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60 \times c$ ถ้าจรวดแล่นด้วยความเร็ว v เวลาไม่เฉพาะของจรวดคือ

$$\frac{4 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60 \times c}{v} = \Delta t'$$ แล้วหาเวลาเฉพาะ

$$\Delta t = \Delta t' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

ตอบ : $\approx$ (0.98) c

6. จรวดลำหนึ่งเคลื่อนออกจากโลกด้วยอัตราเร็ว $\frac{3}{5}c$ เมื่อเวลาบนจรวดอ่านว่าหนึ่งชั่วโมงได้ผ่านไป เจ้าหน้าที่ได้ส่งสัญญาณกลับมายังโลก

(ก) จากนาฬิกาบนผิวโลก จรวดส่งสัญญาณเมื่อไร?

(ข) เมื่อสัญญาณจากจรวดถึงผิวโลก เวลาของนาฬิกาบนผิวโลกบอกเวลาเท่าไร?

(ค) จากนาฬิกาซึ่งอยู่บนจรวด สัญญาณจากจรวดถึงโลกเมื่อเวลาเท่าไร?

(ง) นาฬิกาเรือนไหนเดินช้า

(จ) จงหาคำตอบในข้อ ข และข้อ ค ทั้งสองกรอบเฉื่อยคือในกรอบเฉื่อยของโลกและกรอบเฉื่อยของจรวด

ตอบ : (ก) $\frac{5}{4}$ ชม.

(ข) 2 ชม.

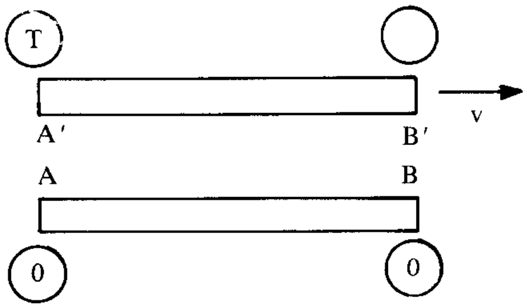
(ค) $1\frac{3}{5}$ ชม.

(ง) นาฬิกาบนจรวด

7. จรวดลำหนึ่งเคลื่อนออกจากโลกด้วยอัตราเร็ว $\frac{12}{13}c$ ผู้ขับจรวดรายงานกลับมายังโลกทุก ๆ ชั่วโมง จงหาช่วงเวลาที่ได้รับรายงานบนโลก เมื่อกลับจรวด แล้ววิ่งเข้าสู่โลกด้วยความเร็วเดียวกัน จงหาช่วงเวลาที่ได้รับรายงานบนโลก

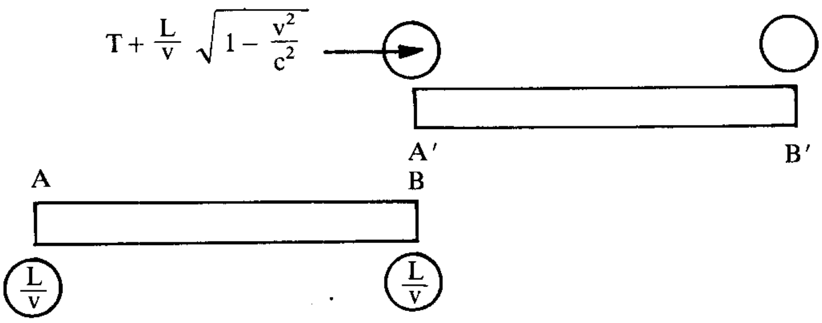
ตอบ : $\frac{13}{5}$ ชม. ทั้งสองทิศทาง

8. ไม้เมตร A′B′ กำลังเคลื่อนผ่านไม้เมตร AB ซึ่งวางอยู่ในห้องทดลอง เมื่อเวลาให้ห้องทดลอง $t = 0$ $A'B' \| AB$ เมื่อ A′ ผ่าน A นาฬิกาบน A′ ผ่าน T จงหานาฬิกาที่ B′ ว่าอ่านเท่าไร? (จุด A′, B′, A และ B มีนาฬิกาวางอยู่)



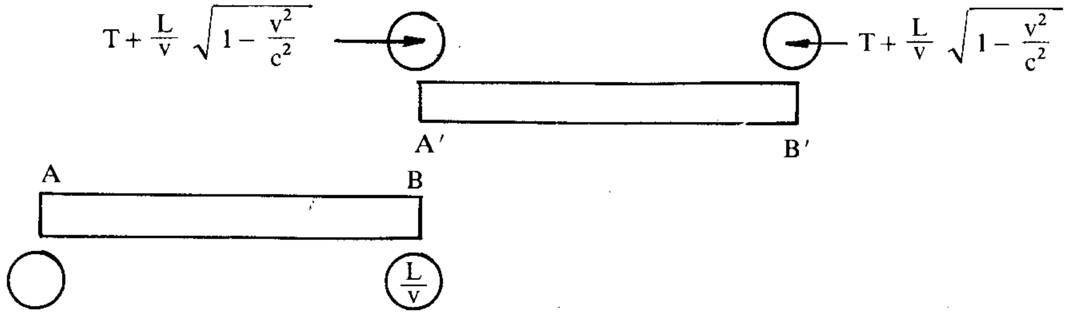
รูปที่ 37 (ก) รูปในกรอบอ้างอิงของห้องทดลอง $AB = L, A'B' = L'$

คำแนะนำ : 1. ต่อมาเมื่อ A′ ผ่าน B ผู้สังเกตการณ์ในห้องทดลองจะวัดเวลาไม่เฉพาะได้ $\frac{L}{v}$ นาฬิกาที่ให้เวลาเฉพาะคือ นาฬิกาที่ A′ ซึ่งจะอ่านเวลา $T + \frac{L}{v}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$



รูปที่ 37 (ข) รูปซึ่งผู้สังเกตการณ์ในห้องทดลองสังเกตเห็น

2. ผู้สังเกตการณ์ในกรอบอ้างอิงซึ่งกำลังเคลื่อนที่ (A′,B′) จะสังเกตเห็นว่านาฬิกาที่ A′ และ B′ เท่ากันคือ เท่ากับ $T + \frac{L}{v}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ (รูปที่ 37 (ค)) ผู้สังเกตการณ์ต้องอยู่กึ่งกลางระหว่าง A′, B′

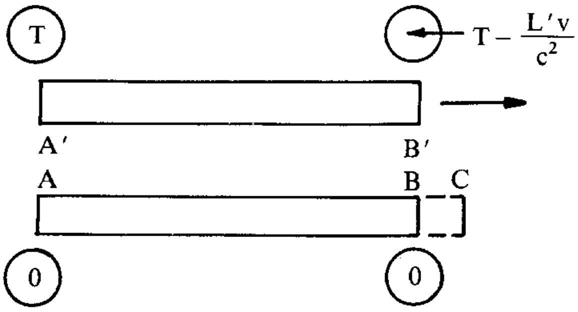


รูปที่ 37 (ค) รูปซึ่งผู้สังเกตการณ์ไปกับ(A′,B′) สังเกตเห็น

3. พิจารณา นาฬิกาที่ B เมื่อ A ทับ A′ และ B′ ทับ B′ เวลาที่ B เป็น $t = 0$ เมื่อ A′ ทับ B เวลาที่ B เป็น $t = \frac{L}{v}$ ดังนั้นนาฬิกาของจุด B เป็นเวลาเฉพาะ เป็นช่วงเวลาที่นาฬิกา B เรือนเดียววัดได้ ดังนั้นเวลาไม่เฉพาะที่วัดได้ด้วยนาฬิกา B′ สำหรับช่วงเวลานี้คือ $\frac{L}{v} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ และเวลานี้คือเวลาที่ผ่านไปของเวลาที่นาฬิกา B′

ตอบ : นาฬิกาที่ B′ อ่าน $T-\frac{L'v}{c^2} = T+\frac{L}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{L}{v}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

9. รูป 37 (ก) อาจจะเขียนเสียใหม่ได้ดังนี้ (ปัญหาข้อ 8)



รูปที่ 38 AB = L, A′B′ = L′

รูปที่ 38 แสดงว่าผู้สังเกตการณ์ที่จุด B′ วัดเวลาก่อนเวลาที่ A′ ผ่าน A ถ้าหากเขารอต่อมาอีก $\frac{L'v}{c^2}$ วินาที B′ จะอยู่ตรงข้ามกับ C นาฬิกาที่ B′ จะอ่าน T จงหาระยะ BC และหาความสัมพันธ์ AC กับ A′B′

คำแนะนำ : สำหรับผู้สังเกตการณ์ที่ B′

$$BC = \frac{L'v}{c^2} \times v = \frac{L'v^2}{c^2}$$

$AC = L$ ดังนั้นเวลาไม่เฉพาะของผู้สังเกตที่ B′ คือ $\frac{L}{v}$

$\therefore$ เวลาเฉพาะของผู้สังเกตที่ B′ คือ $\frac{L}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

$\therefore$ ระยะ A′B′ คือ เวลาเฉพาะ × ความเร็ว $= \frac{L}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \times v = L'$

$A'B' = L'$, $AC = L$

10. ระบบอ้างอิง s′ เคลื่อนที่ไปทางทิศ +x ของระบบ s ด้วยความเร็ว $\bar{v}$ เมื่อเวลา $t = t' = 0$ จุด 0′ ทับจุด 0 พอดี แต่ปรากฏว่า แกน 0x′ และ 0′y′ ทำมุม θ กับแกน 0x และ 0y จงเขียนการแปลงโลเรนตซ์ของการเคลื่อนที่นี้

คำแนะนำ : ในที่นี้ $D = \begin{vmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) & 0 \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$D\bar{x}' = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta x' - \sin\theta y' \\ \sin\theta x' + \cos\theta y' \\ z' \end{vmatrix}$$

ใช้สมการที่ (3.35)

11. ถ้าหาก $x' = \gamma(x - vt)$, $y' = y$, $z' = z$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

จงแสดงโดยการแก้สมการที่กำหนดให้เหล่านี้ว่า

$$x = \gamma(x' + vt') \quad , \quad t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)$$

12. ถ้าหาก L^3 เป็นปริมาตรของลูกบาศก์ลูกหนึ่งซึ่งอยู่นิ่ง จงแสดงให้เห็นว่า ชายคนหนึ่งเคลื่อนที่ไปทางทิศขนานกับด้านลูกบาศก์ด้านหนึ่งด้วยความเร็ว v จะวัดปริมาตรของลูกบาศก์นี้ได้เป็น $L^3\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

13. ปรากฏการณ์ดอปเพลอร์ในทิศตามยาว (Longitudinal Doppler effect) สมมุติว่าคลื่นสองคลื่น จากจุดกำเนิดคลื่นที่ $t = 0$ และ $t = \tau$ จุดกำเนิดคลื่นวางอยู่ที่จุดกำเนิดของกรอบเฉื่อย s กรอบเฉื่อย s′ เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\bar{v} = v\hat{i}$ สัมพัทธ์กับ s จุดกำเนิดของ s′ ทับจุดกำเนิดของ s เมื่อเวลา $t = t' = 0$ ดังนั้นคลื่น ๆ แรกจะปรากฏกับผู้สังเกตการณ์ซึ่งอยู่นิ่งเทียบกับ 0′ ที่ $x' = 0, t' = 0$ จงหา

(ก) ช่วงเวลาที่ผู้สังเกตการณ์ที่ 0′ จะเห็นคลื่นที่สอง

(ข) ความถี่ที่ผู้สังเกตการณ์ที่ 0′ จะสังเกตเห็น ถ้าความถี่ใน s เป็น ν

(ค) ความยาวคลื่นที่ผู้สังเกตการณ์ที่ 0′ จะสังเกตเห็น

คำแนะนำ : Kittel, C., and Others, **Mechanics**, Berkeley physics course volume 1, New York : Mc-GrawHill, 1965 p. 361

ตอบ : (ก) $\tau\sqrt{\dfrac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}$

(ข) $\nu' = \nu\sqrt{\dfrac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}$

(ค) $\lambda' = \lambda\sqrt{\dfrac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}$

14. ถ้ากรอบเฉื่อย s′ เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\bar{v} = v\hat{i}$ เทียบกับกรอบเฉื่อย s เหตุการณ์สองเหตุการณ์ เกิดขึ้นพร้อมกันใน s ที่เวลา t ที่ตำแหน่ง x_1 และ x_2 $x_1 \neq x_2$ จงแสดงว่าโดยทั่วไปแล้ว เหตุการณ์ทั้งสองนี้ไม่จำเป็นต้องเกิดขึ้นพร้อมกันใน s′