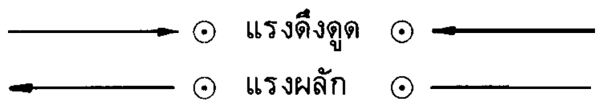
บทที่ 1
บทนำ

วัตถุประสงค์

1. ให้เข้าใจความหมายของทัศนะเชิงกลศาสตร์ พอที่จะวิเคราะห์ความหมายของสมการแมกซ์เวลล์ส่วนที่ไม่เป็นไปตามทัศนะเชิงกลศาสตร์
2. ให้เข้าใจความหมายของสมการแมกซ์เวลล์ พอที่จะทำแบบฝึกหัดข้อ 4 ได้
3. ให้สามารถหาปรากฏการณ์ที่ไม่สอดคล้องกับข้อมูลทางฟิสิกส์เมื่อสมมุติว่ามีอีเทอร์
4. ให้สามารถคำนวณหาคุณสมบัติของคลื่นได้พอที่จะทำแบบฝึกหัดข้อ 10 ได้
5. ให้มีความรู้เกี่ยวกับการแปลงความถี่และความเร็วคลื่น ระหว่างกรอบอ้างอิงสองกรอบซึ่งมีความเร็วต่างกัน

1.1 ทัศนะเชิงกลศาสตร์ (Mechanic View)

เพื่อให้เข้าใจทัศนะเชิงกลศาสตร์ได้ง่าย ขอให้เรามาพิจารณาตัวอย่างง่าย ๆ สักตัวอย่างหนึ่ง สมมุติว่ามีอนุภาค 2 อนุภาค มีแรงกระทำระหว่างอนุภาคทั้งสองแรงชนิดง่าย



รูปที่ 1 แรงชนิดง่ายที่สุดสองชนิด

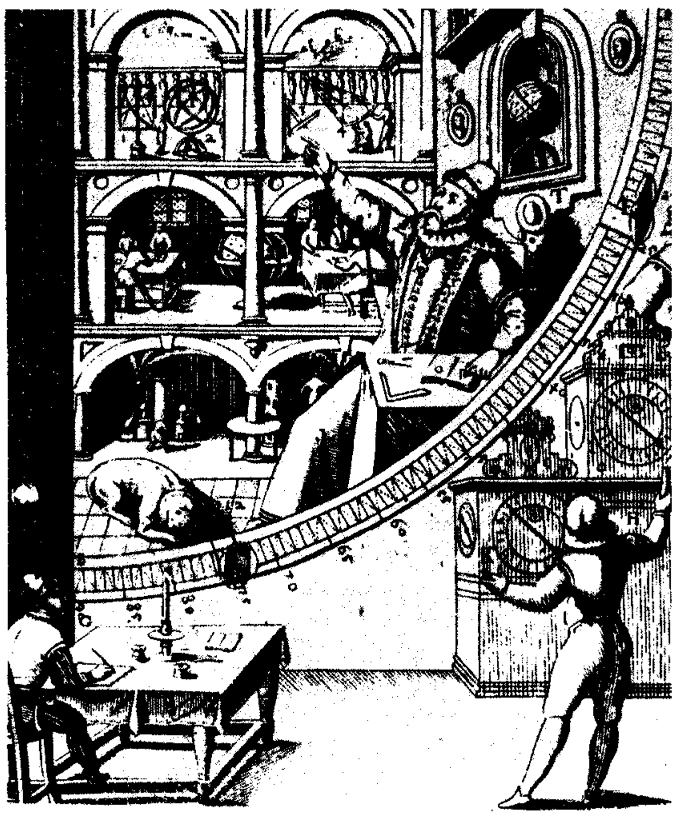
ที่สุดจะเป็นแรงดึงดูดหรือแรงผลักกันระหว่างอนุภาคสองอนุภาคนั้น ในทั้งสองกรณี ถ้าหากแทนแรงด้วยเวกเตอร์ เวกเตอร์แรงจะขนานกับเส้นตรงซึ่งต่อระหว่างอนุภาคทั้งสองและทิศของเวกเตอร์แรงจะเป็นดังในรูปที่ 1 แรงดึงดูดจะทำให้อนุภาคทั้งสองวิ่งเข้าหากันในขณะที่แรงผลักจะทำให้อนุภาควิ่งออกจากกัน

ยังมีอีกปัญหาหนึ่งคือขนาดของเวกเตอร์ ซึ่งแทนขนาดของแรง เราจะพบว่าปัญหาง่าย ๆ ทางฟิสิกส์ เช่น ปัญหาแรงโน้มถ่วง แรงระหว่างอนุภาคทั้งสองขึ้นอยู่กับระยะทางระหว่างอนุภาคนั้น

เมื่อเราทราบทิศและขนาดของแรงแล้ว ปัจจัยอีกอันหนึ่งซึ่งเราต้องทราบในการเขียนทางเดินของอนุภาคตามทัศนะเชิงกลศาสตร์ก็คือ เวลาที่แรงนั้นกระทำ เมื่อทราบปัจจัยทั้งหมดนี้แล้วนักฟิสิกส์ก็จะสามารถเขียนทางเดินของอนุภาคนั้น ๆ ได้

ทัศนะเชิงกลศาสตร์ เป็นผลของการค้นคว้าของนักฟิสิกส์ที่สำคัญสามท่านด้วยกัน คือ ไทโช บราเฮ (Tycho Brahe) นักดาราศาสตร์ในความอุปถัมภ์ของพระเจ้าเฟรดเดอริคที่สองแห่งเดนมาร์ก บราเฮได้ทำแผนที่ตำแหน่งของดวงดาวไว้ถึง 777 ดวง มีความแม่นยำถึง $\frac{1}{2}$-2 ซึ่งนับว่าเป็นจำนวนประมาณ $\frac{2}{3}$ ของดวงดาวที่เห็นได้ด้วยตาเปล่าในประเทศเดนมาร์ก เมื่อนึกถึงความจริงที่ว่า งานของเขาสำเร็จลงเมื่อ 400 ปีมาแล้ว นับว่าเป็นงานที่มีความสำคัญยิ่ง บราเฮได้ทำงานติดต่อกันเป็นเวลาไม่น้อยกว่า 20 ปี ในที่สุดข้อมูลเกี่ยวกับดวงดาวทั้งหมดของเขาก็ไปตกอยู่ในมือของนักฟิสิกส์และนักคณิตศาสตร์ที่สำคัญอีกท่านหนึ่งคือ โจฮานเนส เคพเพลอร์ (Johannes Kepler) ในปี ค.ศ. 1597 บราเฮต้องจากเกาะฮวีน(Hven) ซึ่งเป็นเกาะซึ่งบราเฮได้รับพระราชทานจากพระเจ้าเฟรดเดอริคที่สอง เพื่อสร้างหอดูดาวซึ่งเขาได้ใช้เป็นที่รวบรวมข้อมูลทางดาราศาสตร์ที่สำคัญของเขา เมื่อสิ้นรัชสมัยของพระเจ้าเฟรดเดอริคที่สองแล้ว บราเฮมีข้อพิพาทกับพระราชาองค์ต่อมา ทำให้เขาต้องจากประเทศเดนมาร์ก ไปอยู่ยังเมืองบีนาตีค (Benatek) ใกล้กับกรุงปราก (Praque) และในปี 1601 เขาได้จ้างนักคณิตศาสตร์หนุ่มซึ่งยกย่องกันว่ามีอัจฉริยภาพยอดเยี่ยมที่สุดในยุโรปในสมัยนั้น ซึ่งต่อมาเขาได้เสนอกฎของการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ซึ่งมีชื่อตามตัวของเขาเอง คือ กฎการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ของเคพเพลอร์ (Kepler's laws of planetary motion)

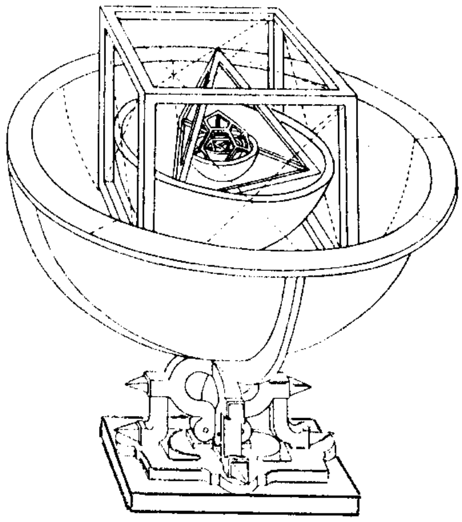
รูปที่ 2 Tycho Brahe (1546-1601) และหอดูดาวของเขา นับเป็นหอดูดาวที่แม่นยำที่สุดในยุคนั้น



แม้ในสมัยซึ่งเขาอยู่ในมหาวิทยาลัย เคพเพลอร์ก็มีความเชื่อถือเกี่ยวกับรูปแบบของสุริยะจักรวาลของโคเปอร์นิคัส ซึ่งเชื่อว่าดวงอาทิตย์เป็นศูนย์กลางของสุริยะจักรวาล เคพเพลอร์ได้เรียนเกี่ยวกับรูปแบบของสุริยะจักรวาลจากอาจารย์มหาวิทยาลัยชื่อ มาเอสตลิน (Maestlin) เมื่อเขาได้รับตำแหน่งเป็นผู้ช่วยของบราเฮนั้น เขาได้แสดงผลงานทางคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียงเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีของดาวเคราะห์และรูปทางเรขาคณิต ในหนังสือชื่อ Mysterium Cosmographicum ก่อนที่บราเฮจะตาย เขาได้ให้เคพเพลอร์ทำการวิเคราะห์ทางเดินของดาวอังคาร และเมื่อเขาตายแล้วเคพเพลอร์ก็ได้ตำแหน่งนักคณิตศาสตร์ประจำราชสำนัก (Imperial Mathematician) ต่อจากบราเฮ

ในตอนแรกเคพเพลอร์ใช้ทางเดินของดาวอังคารเป็นรูปทรงกลม โดยให้ดวงอาทิตย์อยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงกลม แต่ปรากฏว่าทางเดินนี้ให้ตำแหน่งดาวอังคารคลาดเคลื่อนไปถึง 8° ทำให้เคพเพลอร์ต้องตั้งต้นใหม่ เขาได้สมมุติว่าทางเดินของดาวอังคารเป็นรูปทรงเปลือกไข่ (ovoid) แต่ก็ปรากฏว่ายังให้ค่าคลาดเคลื่อนจากข้อมูลของบราเฮถึง 4' (พึงสังเกตว่าการหาข้อมูลที่แม่นยำมีความสำคัญมากในการสร้างทฤษฎีที่ถูกต้องทางฟิสิกส์) มาถึงระยะนี้เคพเพลอร์ได้คิดกฎเกี่ยวกับพื้นที่ของทางเดินของดาวเคราะห์ ซึ่งกล่าวว่า รัศมีเวกเตอร์ (vector radius) ของดาวเคราะห์ควรกวาดพื้นที่ของวงโคจรเป็นขนาดเท่ากันในเวลาที่เท่ากัน ในที่สุดเคพเพลอร์ก็ตัดสินใจมาใช้ทางโคจรของดาวอังคารเป็นรูปเอลลิพส์ (ellipse) โดยมีดวงอาทิตย์อยู่ที่จุดโฟกัสจุดหนึ่งของรูปเอลลิพส์นั้นซึ่งให้คำตอบที่ถูกต้อง

รูปที่ 3 Johannes Kepler (1571-1630)



รูปที่ 4 รูปตันหลายเหลี่ยมซึ่งเคพเพลอร์ใช้เป็นหุ่นในการสร้างแบบสุริยะจักรวาลตามความคิดของเขา

กฎการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ของเคพเพลอร์สรุปได้ดังนี้

1. ดาวเคราะห์หมุนรอบดวงอาทิตย์ตามทางโคจรรูปเอลลิพส์ โดยมีดวงอาทิตย์อยู่ที่จุดโฟกัสจุดหนึ่ง

2. รัศมีเวกเตอร์จากดวงอาทิตย์ถึงดาวเคราะห์จะกวาดพื้นที่ในวงโคจรในอัตราที่สม่ำเสมอ นั่นคือ พื้นที่จะเท่ากันในเวลาที่เท่ากัน

3. เมื่อเอาคาบเวลาที่ดาวเคราะห์เดินทางครบรอบวงโคจรยกกำลังสอง จะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับแกนยาว (major axis) ของรูปเอลลิพส์ยกกำลังสาม

ประมาณ 20 ปีหลังจากเคพเพลอร์ค้นพบกฎข้อที่สาม ไอแซค นิวตัน ได้ถือกำเนิดขึ้นเมื่อปี ค.ศ. 1643 มีหลักฐานว่าในปี ค.ศ. 1664 นิวตันได้เรียนรู้กฎข้อที่หนึ่งและข้อที่สามของเคพเพลอร์ และในปีนั้นเองเขาได้คิดสมการเกี่ยวกับแรงหนีศูนย์กลางขึ้นดังนี้

รูปที่ 5. Isaac Newton (1642-1727)

$$f \propto \frac{v^2}{r} \tag{1.1}$$

เมื่อ f : แรงหนีศูนย์กลาง

v : ความเร็วตามเส้นรอบวง

r : รัศมีของเส้นรอบวงจากจุดศูนย์กลาง

และจากกฎข้อที่สามของเคพเพลอร์ จะเห็นว่า

$$T \propto r^{3/2} \tag{1.2}$$

เมื่อ T : คาบซึ่งดาวเคราะห์เคลื่อนที่ได้ครบรอบ

r : รัศมีของดาวเคราะห์จากดวงอาทิตย์ ซึ่งเท่ากับ r ในสมการที่ (1.1)

ดังนั้นจะเห็นว่า $v = 2\pi \frac{r}{T}$ สำหรับกรณีของวงกลม ดังนั้น

$$v \ \alpha \ \frac{1}{r^{1/2}} \tag{1.3}$$

แทนค่า (1.3) ใน (1.1) จะได้ผลลัพธ์เป็น

$$f \ \alpha \ \frac{1}{r^2} \tag{1.4}$$

สมการที่ (1.4) แสดงให้เห็นว่า สมการของแรงเพียงสมการเดียวสามารถใช้อธิบายทางเดินของดาวเคราะห์ได้ทุกดวง

จะเห็นได้ว่าตามทัศนะเชิงกลศาสตร์ เส้นทางเดินไปในอนาคตและทางเดินในอดีตของอนุภาคสามารถจะคำนวณหาได้ ถ้าหากเรารู้สถานที่เวลาและแรงที่กระทำต่อมันในปัจจุบัน ดังที่ได้แสดงมาทั้งหมดแล้วว่า ทางโคจรในอนาคตของดาวเคราะห์อาจจะคำนวณขึ้นได้ และแรงก็เป็นแรงโน้มถ่วงของนิวตันซึ่งขึ้นอยู่กับระยะระหว่างดวงอาทิตย์กับดาวเคราะห์เท่านั้น ผลที่ตามมาของทัศนะเชิงกลศาสตร์ก็คือความเชื่อที่ว่า ทัศนะเชิงกลศาสตร์สามารถจะใช้ได้กับฟิสิกส์ทุก ๆ แขนง และปรากฏการณ์ทางฟิสิกส์สามารถจะอธิบายได้โดยใช้แรงดึงดูดหรือแรงผลัก ซึ่งขึ้นอยู่กับระยะระหว่างวัตถุและวัตถุซึ่งมีรูปร่างและขนาดที่แน่นอนเพียงเท่านั้น

1.2 ความหมายของสมการแมกซ์เวลล์

รูปที่ 6 James Clerk Maxwell (1831-1879)

ทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้าก่อนยุคของแมกซ์เวลล์ อาจจะสรุปได้ดังนี้ (ใช้หน่วย SI)

1. กฎของคูลอมบ์ เกี่ยวกับไฟฟ้าสถิตและแม่เหล็กสถิต ในราวปี ค.ศ. 1770-1780

$$\overline{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \quad : \text{ แรงสำหรับไฟฟ้าสถิต} \tag{1.5}$$

$$F = \frac{\mu_0 p_1 p_2}{2\pi r^2}\hat{r} \quad : \text{ แรงสำหรับแม่เหล็กสถิต} \tag{1.6}$$

q_1 และ q_2 เป็นประจุของไฟฟ้าสถิต ซึ่งอยู่ห่างกัน r, p_1 และ p_2 เป็นขั้วของแม่เหล็กสถิต $\hat{r}$ เป็นเวกเตอร์ขนาดหนึ่งหน่วยตามทิศของแรง

2. ศักดาไฟฟ้าและศักดาแม่เหล็กสถิต เสนอโดยปัวซอง (ค.ศ. 1813) ดังนี้

ถ้า V เป็นศักดาไฟฟ้าสถิตแล้ว

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}V + \frac{\partial^2}{\partial y^2}V + \frac{\partial^2}{\partial z^2}V = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \quad (1.7)$$

, ε_0 คือค่าสภาพยอม (permitivity) ในสุญญากาศ

ทำให้สามารถคำนวณหา สนามแม่เหล็กสถิตได้ดังนี้

$$\overline{E} = -\overline{\nabla}V \quad (1.8)$$

ρ_e คือ ความหนาแน่นของประจุไฟฟ้าสถิต

3. เออร์สเตด ได้แสดงให้เห็นว่ากระแสไฟฟ้าทำให้เกิดสนามแม่เหล็กเสมอ (ค.ศ. 1820)

4. กฎของ บีโอ ซาวา (Bio-Savart law) ได้แสดงให้เห็นว่า

$$d\overline{B} = \frac{\mu_0 I d\bar{\ell} \times \hat{r}}{4\pi r^3} \quad (1.9)$$

เมื่อ $d\ell$ เป็นความยาวของขดลวดในทิศของกระแส I, r เป็นระยะระหว่าง $d\bar{\ell}$ ถึงจุดที่วัดสนามแม่เหล็ก $d\overline{B}$

5. ในปี ค.ศ. 1825 แอมแปร์ได้พิมพ์หนังสือเล่มหนึ่ง ซึ่งในหนังสือนั้นเขาได้เสนอกฎของแอมแปร์ดังนี้

$$\int_c \overline{H}.d\bar{\ell} = I_{enclosed} \quad (1.10)$$

เมื่อ $\overline{H}$ เป็นสนามแม่เหล็กเหนี่ยวนำ นอกจากนี้ แอมแปร์ยังได้คำนวณแรงระหว่างกระแสสองเส้นดังนี้

$$d\overline{F}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 d\bar{\ell}_1 \times (d\bar{\ell}_2 \times \hat{r})}{4\pi r^2} \quad (1.11)$$

เมื่อ $d\overline{F}_2$ เป็นแรงซึ่งกระทำบน $d\bar{\ell}_2$ ซึ่งมีกระแสไหลผ่าน I_2 เนื่องมาจาก I_1 ไหลผ่าน $d\bar{\ell}_1$
r เป็นระยะระหว่าง $d\bar{\ell}_1$ ถึง $d\bar{\ell}_2$

6. ไมเคิล ฟาราเดย์ (ค.ศ. 1831) ได้เสนอกฎของการเหนี่ยวนำไว้ว่า แรงเคลื่อนไฟฟ้าซึ่งเกิดขึ้นในขดลวดตัวนำ เป็นสัดส่วนโดยตรงกับอัตราซึ่งเส้นแรงแม่เหล็กถูกตัด

7. กฎของเลนซ์ (ค.ศ. 1834) กล่าวว่า

แรงเคลื่อนไฟฟ้ากระทำในทิศซึ่งต้านการเปลี่ยนของฟลักซ์แม่เหล็ก ในปี ค.ศ. 1845 นอยมานน์ได้เขียนกฎของเลนซ์ในรูปสมการคณิตศาสตร์ดังนี้

$$\text{แรงเคลื่อนไฟฟ้า} : \in = -\frac{d}{dt}\phi \qquad (1.12)$$

เมื่อ ϕ คือฟลักซ์แม่เหล็กทั้งหมดซึ่งผ่านวงจรไฟฟ้านั้น

แมกซ์เวลล์ได้สังเกตเห็นความคล้ายคลึงกันของทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้า และกฎการเคลื่อนที่ของไหลอุดมคติ[1] (incompressible fluid) สมมติว่ามีปริมาตร v ล้อมรอบด้วยพื้นผิว s ดังนั้น มวลซึ่งไหลผ่านพื้นผิว $d\bar{s}$ ต่อหนึ่งหน่วยเวลาก็คือ $\rho\bar{u}\cdot d\bar{s}$ เมื่อ $\bar{u}$ เป็นความเร็วของของไหลนั้น และ ρ เป็นความหนาแน่นของของไหลนั้น จะเห็นว่าฟลักซ์ของมวลทั้งหมดผ่านพื้นผิวก็คือ $\int_s \rho\bar{u}\cdot d\bar{s}$ ซึ่งจะต้องเท่ากับอัตราการสูญเสียมวลของของไหลทั้งหมด ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\int_s \rho\bar{u}\cdot d\bar{s} = -\frac{d}{dt}\int_v \rho dv \qquad (1.13)$$

จากทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์[2]

$$\int_s \rho\bar{u}\cdot d\bar{s} = \int \bar{\nabla}\cdot(\rho\bar{u})dv \qquad (1.14)$$

แทนค่า (1.14) ลงใน (1.13)

$$\int_v \left[\bar{\nabla}\cdot(\rho\bar{u}) + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right] dv = 0 \qquad (1.15)$$

สมการ (1.15) ต้องเป็นจริงสำหรับทุก ๆ ขนาดของปริมาตร ดังนั้น

$$\bar{\nabla}\cdot(\rho\bar{u}) = -\frac{\partial}{\partial t}\rho \qquad (1.16)$$

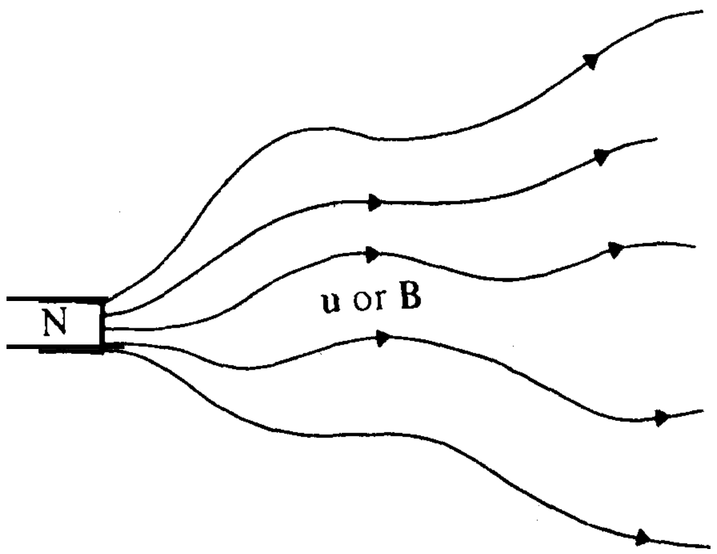
แสดงว่าการไหลออกของมวลทำให้ความหนาแน่นของมวลเปลี่ยนไป แต่เหตุที่ของไหลเป็นของไหลอุดมคติ ความหนาแน่นของมันไม่เปลี่ยนแปลง

$$-\frac{\partial}{\partial t}\rho = 0 = \bar{\nabla}\cdot(\rho\bar{u}) \qquad (1.17)$$

1 ของไหลอุดมคติ คือ ของไหลซึ่งไม่เปลี่ยนปริมาตรเมื่อมีแรงมากระทำ

2 พิสิทฐ์ วรสิงห์ **ฟิสิกส์เชิงคณิตศาสตร์**, พิมพ์ครั้งที่ 2, กทม. : กิ่งจันทร์การพิมพ์, 2530 หน้า 224

สนามแม่เหล็ก $\overline{B}$ ทำให้เกิดฟลักซ์แม่เหล็ก เหมือนกับความเร็วของน้ำทำให้เกิดฟลักซ์น้ำ เช่น เมื่อปริมาณเพิ่มขึ้นเมื่อเส้นแรงแม่เหล็กเท่าเดิม ความเข้มของสนามแม่เหล็กลดลง ซึ่งตรงกับความเร็วในของไหลซึ่งลดลง เมื่อปริมาณของไหลเพิ่มขึ้น แสดงว่าสนามแม่เหล็กควรจะมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้



รูปที่ 7 แสดงความเหมือนกันของเส้นแรงสนามแม่เหล็กกับเส้นแสดงการไหลของของไหลอุดมคติ

$$\overline{\nabla}.\overline{B} = 0 \tag{1.18}$$

พึงสังเกตว่าแมกซ์เวลล์ใช้ $\overline{B}$ แทน $\overline{H}$ ($\overline{H}$: สนามแม่เหล็กเหนี่ยวนำ) ทั้งนี้เพราะ $\overline{B}$ ให้ฟลักซ์ แต่ $\overline{H}$ ให้แรงที่จุดใด ๆ

นอกจากนี้แมกซ์เวลล์ยังได้แสดงให้เห็นว่า แรงเคลื่อนไฟฟ้าคือ

$$\in = \int_c \overline{E}.d\bar{\ell} = -\frac{d}{dt}\phi = -\frac{d}{dt}\int_s \overline{B}.d\bar{s} \tag{1.19}$$

และจากทฤษฎีของสโตก[3]

$$\int_c \overline{E}.d\bar{\ell} = \int_s \overline{\nabla}\times\overline{E}.d\bar{s} \quad (1.20)$$

ซึ่งแสดงว่า
$$\overline{\nabla}\times\overline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\overline{B} \quad (1.21)$$

แมกซ์เวลล์ได้สังเกตเห็นความแตกต่างระหว่าง $\overline{E}$ กับ $\overline{B}$ จากสมการของปัวซอง (1.7) และสมการ (1.8) เขาสรุปว่า

$$\overline{\nabla}.\overline{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \quad (1.22)$$

จากการสังเกตสมการของแอมแปร์ (1.10) แมกซ์เวลล์ได้เปลี่ยนแปลงรูปร่างของสมการเสียเล็กน้อยคือ

$$\int_c \overline{H}.d\bar{\ell} = \int_s \bar{j}.d\bar{s} \quad ; \quad \bar{j} \text{ คือ ความหนาแน่นของกระแสไฟฟ้า} \quad (1.23)$$

และจากทฤษฎีของสโตก
$$\int_c \overline{H}.d\bar{\ell} = \int_s (\overline{\nabla}\times\overline{H}).d\bar{s} \quad (1.24)$$

ทำให้สรุปได้ว่า
$$\overline{\nabla}\times\overline{H} = \bar{j} \quad (1.25)$$

และเนื่องจากศึกษางานของนอยมานน์ เวบเบอร์และเคอร์ชอฟฟ์ ทำให้แมกซ์เวลล์สามารถเขียนสนามแม่เหล็กจากเวกเตอร์โพเทนเชียลได้ดังนี้

$$\overline{B} = \overline{\nabla}\times\overline{A} \quad (1.26)$$

ซึ่งเข้าได้กับสมการที่ (1.18) พอดี เพราะ

$$\overline{\nabla}.\overline{B} = \overline{\nabla}.(\overline{\nabla}\times\overline{A}) \equiv 0$$

แทนสมการ (1.26) เข้าไปในสมการ (1.21)

$$\overline{\nabla}\times\overline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\nabla}\times\overline{A})$$ ได้ความสัมพันธ์

---

3 พิสิทธิ์ วรสิงห์, Ibid. หน้า 232

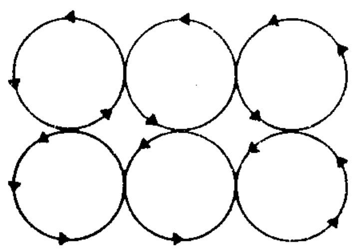
โดยการเปลี่ยนลำดับของอนุพันธ์ข้างขวาของสมการ พบว่า

$$\overline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\overline{A} \qquad (1.27)$$

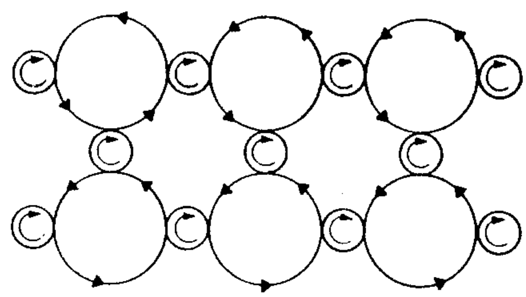
ดังนั้นชุดของสมการของแมกซ์เวลล์ซึ่งยังไม่สมบูรณ์จะเขียนได้ดังนี้

$$\left.\begin{array}{llll} \nabla\times\overline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\overline{B} & & \nabla\times\overline{H} = \overline{j} \\ \nabla.\overline{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} & \text{ในสุญญากาศ} & \nabla.\overline{B} = 0 \end{array}\right\} \qquad (1.28)$$

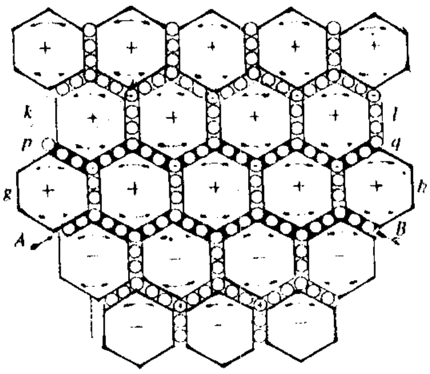
จากการเปรียบเทียบระหว่างความเร็วของของไหลกับสนามแม่เหล็ก ทำให้แมกซ์เวลล์เชื่อว่าสนามแม่เหล็กมีคุณสมบัติของการหมุน (rotation) เขาสังเกตว่า ถ้าเส้นแรงแม่เหล็กอยู่ตามลำพังมันจะกระจายออก เช่นเดียวกับเกลียว (vortex) ของไหล ซึ่งถ้าหากไม่มีแรงเข้าสู่ศูนย์กลางมายึดไว้จะทำให้มันกระจายออก ดังนั้นทุกหนทุกแห่งที่มีสนามแม่เหล็กจะต้องมีเกลียวหมุนซึ่งทำหน้าที่เป็นกรอบแม่เหล็ก เกลียวหมุนเหล่านี้ถ้าหากกระทบกัน จะเกิดการเสียดทาน (ดูรูปที่ 8) ทำให้มีการเสียพลังงานเกิดขึ้น ดังนั้นแมกซ์เวลล์จึงจินตนาการว่าควรจะมีลูกปืน (ball bearings) ธรรมชาติขึ้นชุดหนึ่งทำหน้าที่ขจัดแรงเสียดทาน (ดูรูปที่ 9) ต่อมาเขาก็สามารถระบุลงไปได้ว่าลูกปืนเหล่านี้คือ ประจุไฟฟ้า ซึ่งในตัวนำประจุไฟฟ้าเหล่านี้จะหมุนไปรอบสนามแม่เหล็กตามจินตนาการของแมกซ์เวลล์ แต่ในฉนวนและสุญญากาศประจุไฟฟ้าเหล่านี้จะไม่สามารถเคลื่อนที่ได้ (ดูรูปที่ 10)



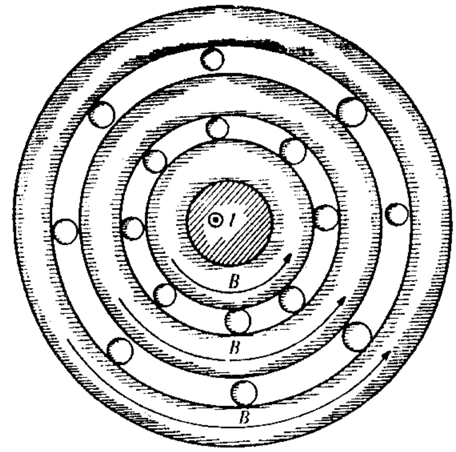
รูปที่ 8 ความคิดเดิมของแมกซ์เวลล์เรื่องเกลียวหมุนซึ่งแทนสนามแม่เหล็ก การขัดสีตรงจุดซึ่งเกลียวชนกัน จะทำให้มีการสูญเสียพลังงานเนื่องจากการหมุน



รูปที่ 9 ความคิดใหม่ของแมกซ์เวลล์ เขาเสนอให้มี "ลูกปืน" เพื่อขจัดการสูญเสียพลังงานเนื่องจากการหมุน ลูกปืนเหล่านี้เป็นอนุภาคซึ่งเมื่อเคลื่อนที่โดยอิสระจะทำหน้าที่นำประจุในตัวนำ



รูปที่ 10 รูปแสดงการทำอันตรกิริยาของเกลียวหมุนของสนามแม่เหล็ก และอนุภาคซึ่งนำกระแส ตามความคิดของแมกซ์เวลล์



รูปที่ 11 สนามแม่เหล็กรูปขนมโดนัทรอบเส้นลวดที่นำกระแสไฟฟ้า

เป็นที่น่าสังเกตว่าแบบจำลองตามจินตนาการของแมกซ์เวลล์สามารถใช้อธิบายปรากฏการณ์ทุกชนิดของแม่เหล็กไฟฟ้าซึ่งเป็นที่ทราบกันอยู่ ตัวอย่างเช่น สนามแม่เหล็กเนื่องจากกระแสไฟฟ้าไหลผ่านเส้นลวด กระแสไฟฟ้าทำให้เกิดเกลียวหมุนเป็นวงกลมโดยมีเส้นลวดที่นำกระแสเป็นจุดศูนย์กลาง จำนวนวงกลมเหล่านี้เป็นอนันต์ ในรูปที่ 11 จะเห็นเกลียวหมุนของเส้นแรงแม่เหล็กเป็นรูปขนมโดนัท มีจุดศูนย์กลางร่วมกัน

สำหรับในฉนวนนั้น แมกซ์เวลล์เห็นว่า พลังงานไฟฟ้าควรจะถูกเก็บอยู่ในฉนวนได้ เขาได้ให้สมมุติฐานว่าฉนวนควรมีสภาพยืดหยุ่นได้ทำให้ประจุไฟฟ้าสามารถจะเคลื่อนไปมารอบจุดสมดุล ดังนั้นพลังงานไฟฟ้าสถิตในฉนวนควรจะเนื่องมาจากพลังงานศักย์ของความหยุ่นตัวได้ จากสมมุติฐานอันนี้ทำให้เกิดความคาดหวังขึ้นสองประการคือ ประการแรก เมื่อมีการเปลี่ยนขนาดของกระแสในเส้นลวด ทำให้ประจุไฟฟ้าในฉนวนรอบ ๆ เส้นลวดเคลื่อนที่เล็กน้อย ทำให้มีกระแสไฟฟ้าเกิดขึ้นเนื่องจากการเคลื่อนของประจุภายใต้อำนาจความหยุ่นของฉนวนนั้น กระแสที่เกิดนี้จึงมีชื่อเรียกว่า กระแสขจัด (displacement current) ของประจุ ประการที่สอง เนื่องจากตัวกลางเป็นฉนวน ทำให้สามารถคำนวณหาความเร็วของการเคลื่อนที่ของสัญญาณอันเนื่องมาจากการขยับตัวของประจุนั้นไปในฉนวนได้ (หรือในกรณีของสุญญากาศก็สามารถหาความเร็วของสัญญาณนั้นในสุญญากาศได้)

ให้ $\bar{r}$ เป็นปริมาณขจัดในสุญญากาศ ดังนั้น เราอาจจะเขียนความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณขจัดนี้กับสนามไฟฟ้าได้ดังนี้

$$\bar{r} = \alpha \bar{E} \tag{1.29}$$

เมื่อ α เป็นค่าคงที่สำหรับการแปรผันโดยตรงนี้ ถ้า N_q เป็นความหนาแน่นของจำนวนประจุและขนาดของประจุแต่ละตัวคือ q เราอาจจะหาความหนาแน่นของกระแสขจัดได้ดังนี้

$$\bar{j}_d = qN_a\dot{\bar{r}} = qN_q\alpha\dot{\bar{E}} = \beta\dot{\bar{E}} \tag{1.30}$$

$\bar{j}_d$: ความหนาแน่นของกระแสขจัด

ซึ่งความหนาแน่นของกระแสขจัดนี้ควรจะปรากฏในสมการชุด (1.28) ดังนี้

$$\bar{\nabla}\times\bar{H} = \bar{j}+\bar{j}_d = \bar{j}+\beta\dot{\bar{E}} \tag{1.31}$$

ค่าคงที่ α และ β อาจจะหาได้จากคุณสมบัติทางไฟฟ้าอื่นของตัวกลาง ในตอนนี้เราสามารถจะหาความเร็วของสัญญาณไฟฟ้าในตัวกลางได้ดังนี้ สมมุติว่า $\bar{j} = 0$

$$\left.\begin{aligned} \bar{\nabla}\times\bar{H} &= \beta\dot{\bar{E}} \\ \nabla\times E &= -\dot{\bar{B}} \end{aligned}\right\} \tag{1.32}$$

สมการชุด (1.32) อาจจะสมมุติผลเฉลยในรูป

$$\left.\begin{aligned} \bar{H} &= \bar{H}_0 e^{i(\bar{k}.\bar{r}-wt)} \\ \bar{E} &= \bar{E}_0 e^{i(\bar{k}.\bar{r}-wt)} \end{aligned}\right\} \tag{1.33}$$

ผลเฉลยในรูปสมการ (1.33) ทำให้เกิดความสัมพันธ์ดังนี้ (แทน (1.33) ลงใน (1.32))

$$\left.\begin{aligned} i(\bar{k}\times\bar{H}) &= -iw\beta\bar{E} \\ i(\bar{k}\times\bar{E}) &= iw\bar{B} \end{aligned}\right\} \tag{1.34}$$

กำจัด $\bar{E}$ จากสมการชุด (1.34)

$$\bar{k}\times(\bar{k}\times\bar{H}) = -w^2\beta\mu\mu_0\bar{H} \tag{1.35}$$

เมื่อ μ_0 เป็นค่าคงที่ความซึมได้ของแม่เหล็กในสุญญากาศ (magnetic permeability) ส่วน μ คือค่าความซึมได้สัมพัทธ์ของสนามแม่เหล็ก (magnetic relative permeability) ใช้การคูณแบบเวกเตอร์ $\bar{A}\times(\bar{B}\times\bar{C}) = \bar{B}(\bar{A}\cdot\bar{C})-\bar{C}(\bar{A}\cdot\bar{B})$ แทนค่าทางด้านซ้ายมือของสมการ (1.35)

$$\bar{k}(\bar{k}.\bar{H})-\bar{H}(\bar{k}.\bar{k}) = -w^2\beta\mu\mu_0\bar{H} \qquad (1.36)$$

ทางด้านซ้ายของสมการที่ (1.36) แสดงว่า ถ้า $\bar{k}||\bar{H}$ ค่าของ $\bar{H}$ เป็นศูนย์ แสดงว่า ผลเฉลยไม่มีสนามแม่เหล็กเหนี่ยวนำ ซึ่งเป็นคลื่นตามยาว (longitudinal waves) ถ้าหากว่า $\bar{k}.\bar{H} = 0$ มีผลเฉลยสำหรับสนามแม่เหล็กเหนี่ยวนำซึ่งเป็นคลื่นตามขวาง (transverse wave) สนามแม่เหล็กเหนี่ยวนำตั้งฉากกับสนามไฟฟ้า ทั้งสนามแม่เหล็กเหนี่ยวนำและสนามไฟฟ้าตั้งฉากกับทิศทางของการเคลื่อนที่ของคลื่น

จากสมการที่ (1.36) ให้ $\bar{k}.\bar{H} = 0$

$$k^2 = w^2\beta\mu\mu_0 \qquad (1.37)$$

ความสัมพันธ์ที่ (1.37) เรียกว่า ความสัมพันธ์การกระจาย (dispersion relation) ของคลื่น และเนื่องจากว่า ความเร็วของการกระจายของคลื่นคือ

$$c = \frac{w}{k} \qquad (1.38)$$

ดังนั้น

$$c^2 = \frac{1}{\beta\mu\mu_0} \qquad (1.39)$$

เพื่อหาค่าของ β แมกซ์เวลล์ได้สังเกตเห็นว่า พลังงานที่เก็บอยู่ในวิชชุมัชฌิม (dielectric) จะมีค่าเท่ากับงานซึ่งกระทำต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร ในการผลักประจุไฟฟ้าไปเป็นระยะทาง $\bar{r}$

ดังนั้น งาน $= \int \bar{F}.d\bar{r} = \int N_q q\bar{E}.d\bar{r}$

แต่เนื่องจากว่า $\bar{r} = \alpha\bar{E}$

$d\bar{r} = \alpha d\bar{E}$

$\therefore$ งาน $= \int_0^E N_q q\alpha E dE = \frac{1}{2}\alpha N_q q E^2$

$$= \frac{1}{2}\beta E^2 \qquad (1.40)$$

แต่เนื่องจากว่าเป็นที่ทราบกันแล้วว่า ความหนาแน่นพลังงานไฟฟ้าสถิตในวิชชุมัชฌิมก็คือ $\frac{1}{2}\overline{D}.\overline{E} = \frac{1}{2}\ \varepsilon\varepsilon_0 E^2$ เมื่อ ε_0 คือค่าสภาพยอม (permitivity) ในสุญญากาศ ส่วน ε คือค่าสภาพยอมสัมพัทธ์ (relative permitivity) ของตัวกลาง จะเห็นว่า $\beta = \varepsilon\varepsilon_0$ แทนค่าลงไปใน (1.39)

$$c = \frac{1}{(\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0)^{1/2}} \tag{1.41}$$

ในสุญญากาศ $\mu = \varepsilon = 1$ แมกซ์เวลล์ได้ใช้ค่า μ_0 และ ε_0 ซึ่งทราบกันอยู่ในขณะนั้นพบว่าความเร็วของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเป็นความเร็วของคลื่นแสง

ในที่สุด สมการของแมกซ์เวลล์ก็เขียนได้ว่า

$$\left.\begin{aligned} \overline{\nabla}\times\overline{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}\overline{B} & \qquad \overline{\nabla}\times\overline{H} &= \overline{j}+\frac{\partial}{\partial t}\overline{D} \\ \nabla.D &= \rho_e & \qquad \nabla.B &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.42}$$

โปรดสังเกตว่า $\overline{\nabla}.(\overline{\nabla}\times\overline{H}) = \overline{\nabla}.\overline{j} + \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\nabla}.\overline{D}) = 0$ (1.43)

เนื่องจากว่า $\nabla.D = \rho_e$ แทนค่าลงใน (1.43)

$$\overline{\nabla}.\overline{j} + \frac{\partial}{\partial t}\rho_e = 0$$: สมการความต่อเนื่อง (continuity equation)

1.3 คลื่นและคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

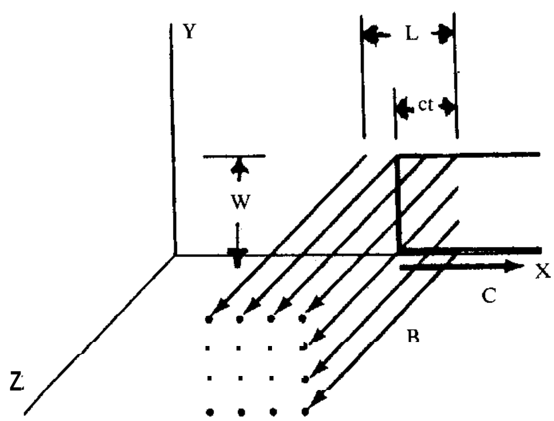
ทุกคนคงจะเคยโยนก้อนกรวดลงบนผิวน้ำที่เรียบ เมื่อกรวดกระทบน้ำจะมีคลื่นวิ่งออกจากจุดตกกระทบเป็นวงกลม นับเป็นการเคลื่อนที่ของคลื่นชนิดหนึ่ง การเกิดคลื่นตามปกติแล้วจะต้องมีตัวกลางเป็นตัวนำคลื่น โดยปกติตัวกลางนี้จะอยู่นิ่ง ๆ เมื่อตัวกลางนั้นถูกกระทบส่วนที่ถูกกระทบนั้นจะได้รับแรงอัด และแรงอัดนี้จะถูกถ่ายทอดไปยังตัวกลางที่อยู่ติดกัน ทำให้การอัดตัวค่อย ๆ ขยายออกจากจุดที่มีการกระทบ ในลักษณะของคลื่นแผ่กระจายไปทั่วตัวกลางนั้น คลื่นจะนำพลังงานติดไปกับคลื่นด้วย ในตัวอย่างของเราก้อนกรวดจะส่งถ่ายพลังงานให้กับน้ำ ดังนั้นวัตถุซึ่งลอยน้ำอยู่ในบริเวณใกล้เคียง จะได้รับการถ่ายทอดพลังงานจากน้ำในไม่ช้า พลังงานที่ถ่ายทอดนี้จะเกิดขึ้นได้หลังจากมีการให้พลังงานแก่น้ำ ในตัวอย่างของเราก็คือการโยนก้อนกรวดลงไปในน้ำ การที่เกิดการถ่ายทอดพลังงานนี้ขึ้นภายหลังแสดงว่าคลื่นต้องใช้เวลาในการเคลื่อนที่ คลื่นมีอัตราเร็วเพราะการเคลื่อนที่ของคลื่นเกิดจากการอัดตัวและขยายตัวภายใน

ตัวกลางเป็นทอด ๆ กันไป อัตราเร็วนี้ต้องพึ่งคุณสมบัติของตัวกลาง ดังนั้นเมื่อคลื่นหรือสัญญาณคลื่นเคลื่อนตัวออกจากจุดกำเนิดของมันแล้ว อัตราเร็วของมันจะไม่ขึ้นกับลักษณะการอัดตัวหรือความเร็วของต้นกำเนิดสัญญาณคลื่นแต่อย่างใด

ตัวกลางจะไม่เคลื่อนที่ไปกับสัญญาณคลื่น อนุภาคที่ถูกอัดครั้งแรกที่เราโยนกรวดลงในน้ำ ไม่ได้วิ่งไปที่ฝั่งพร้อมกับสัญญาณคลื่น อนุภาคของตัวกลางจะเคลื่อนที่อยู่ในบริเวณเดิมของมันในขณะที่คลื่นผ่านไป สัญญาณคลื่น หรือพลังงานคลื่นเท่านั้นที่เคลื่อนตัวออกจากจุดกำเนิด

ยังมีตัวอย่างของคลื่นชนิดอื่น ๆ อีกนอกเหนือไปจากคลื่นน้ำ เสียงเป็นคลื่นซึ่งเกิดจากโมเลกุลของอากาศถูกอัดตัวจากแหล่งกำเนิดสัญญาณคลื่น การอัดตัวนี้จะถูกถ่ายทอดเป็นทอด ๆ จนกระทั่งมาถึงโมเลกุลของอากาศที่หูของผู้ฟังทำให้แก้วหูเกิดสั่นสะเทือนเราจึงได้ยินเสียง เส้นเชือกหรือสปริงอาจจะถูกยืดหยุ่นจนทำให้คลื่นผ่านมันไปได้ การวิ่งผลัดอาจจะนับว่าเป็นการเคลื่อนที่ของคลื่นได้เพราะนักวิ่งไม่ได้วิ่งคนเดียวแต่ได้เป็นผู้ส่งต่อไม้ถือ จากจุดเริ่มต้นไปจนถึงเส้นชัย

การเคลื่อนที่ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้ายังมีคุณสมบัติเพิ่มเติมจากการเคลื่อนที่ของคลื่นธรรมดา



รูปที่ 12 สนามแม่เหล็กสม่ำเสมอชี้ไปทางทิศ $+z$ สนาม $\overline{B}$ มีความหนา L เคลื่อนไปด้วยความเร็ว c ทางทิศ $+x$

จากสมการชุด (1.42) ของแมกซ์เวลล์ เราอาจจะดัดแปลงให้อยู่ในรูปการอินทีเกรตเพื่อสะดวกในการวิเคราะห์คลื่นดังนี้ (สมมุติว่า $\rho_e = \bar{j} = 0$)

$$\bar{\nabla}\times\bar{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\bar{B} \quad : \quad \oint \bar{E}.d\bar{\ell} = -\frac{d}{dt}\phi_B \qquad (1.44\ ก)$$

$$\nabla\times B = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\bar{E} \quad : \quad \oint \bar{B}.d\bar{\ell} = \varepsilon_0\mu_0\frac{d}{dt}\phi_E. \qquad (1.44\ ข)$$

$$\bar{\nabla}.\bar{E} = 0 \quad : \quad \oint \bar{E}.d\bar{s} = 0 \qquad (1.44\ ค)$$

$$V.B = 0 \quad : \quad \oint \bar{B}.d\bar{s} = 0 \qquad (1.44\ ง)$$

สมมุติว่ามีกลุ่มสนามแม่เหล็กรูปกล่อง (ดูรูปที่ 12) มีขนาด $\bar{B}$ ชี้ไปทางทิศ $+z$ เคลื่อนไปในอวกาศตามทิศทาง $+x$ ด้วยความเร็ว c (การสร้างสนามชนิดนี้ขึ้นมาได้อย่างไร เราจะไม่คำนึงถึงในขณะนี้ แต่จะสังเกตปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้น) ความหนาของกล่องสนามนี้ สมมุติให้เป็น L ในทางทิศ $+y$ และในทางทิศ $+z$ เราสมมุติให้บริเวณที่มีสนามเป็นอนันต์ นอกบริเวณนี้แล้ว $\bar{B} = 0$

พิจารณารูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า (ซึ่งเราจินตนาการขึ้น) ซึ่งอยู่ในระนาบ xy รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้านี้มีความกว้าง w ทางแนวแกน y แต่มีความยาวเป็นอนันต์ไปตามแนวแกน x สมมุติว่าด้านหน้าของกล่องสนามแม่เหล็กมากระทบกับด้านซ้ายของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเมื่อเวลา $t = 0$ สนามแม่เหล็กที่ด้านซ้ายจะเปลี่ยนจากศูนย์เป็น $\bar{B}$ ทันที ทำให้มีสนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำขึ้น ตามสมการที่ (1.44 ก) เมื่อเวลาผ่านไป t ฟลักซ์แม่เหล็กที่เข้ามาในสี่เหลี่ยมผืนผ้าคือ

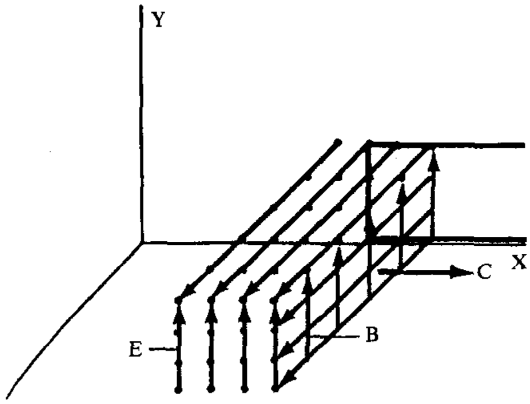
$$\begin{aligned} \phi_B &= |\bar{B}| \times \text{พื้นที่} \\ &= Bwct \end{aligned} \qquad (1.45)$$

ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนของฟลักซ์คือ

$$\frac{d}{dt}\phi_B = Bwc \qquad (1.46)$$

หลังจากเวลาผ่านไป $t = \frac{L}{c}$ กล่องสนามแม่เหล็กจะเข้าไปอยู่ในพื้นที่สี่เหลี่ยมทั้งหมด ดังนั้นจะไม่มีการเปลี่ยนแปลงฟลักซ์หลังจากนี้อีก จากสมการ (1.34) ทิศของสนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำจะชี้ไปทางทิศ $+y$ และค่า $\oint \bar{E}.d\bar{\ell}$ จะมาจากด้านซ้ายสุดของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

แห่งเดียว เพราะความยาวของสนามแม่เหล็กมีขนาด L ตามแนวแกน x แต่สี่เหลี่ยมผืนผ้ามีความยาวเป็นอนันต์ ดังนั้น



รูปที่ 13 สนามแม่เหล็กในรูปที่ 12 ทำให้เกิดสนามไฟฟ้า ในทิศ $+y$

$$\oint \bar{E}.d\bar{\ell} \quad = \quad -Ew \tag{1.47}$$

เครื่องหมายต้องสอดคล้องกับการเคลื่อนที่ของสนาม จากสมการ (1.44 ก)

$$\oint \bar{E}.d\bar{\ell} \quad = \quad -\frac{d}{dt}\phi_B \quad = \quad -Bwc$$

จึงสรุปได้ว่า

$$Ew \quad = \quad Bwc$$

$$B \quad = \quad \frac{E}{c} \tag{1.48}$$

สนามแม่เหล็กเล็กกว่าสนามไฟฟ้าอยู่ c เท่า ทั้ง $\bar{B}$ และ $\bar{E}$ ตั้งฉากกับทิศของการเคลื่อนที่สนาม $\bar{E}$ จะมีอยู่ตลอดเวลาที่ฟลักซ์ของ $\bar{B}$ เปลี่ยนแปลง และในการเคลื่อนที่ของสนามแม่เหล็กจำเป็นต้องมีสนามไฟฟ้าอยู่ในบริเวณนั้นด้วย

ถ้าหากเราเคลื่อนสนามไฟฟ้าแล้วทำการวิเคราะห์โดยทำนองเดียวกันจะพบว่า จะต้องมีสนามแม่เหล็กเกิดขึ้นในบริเวณที่มีสนามไฟฟ้าเคลื่อนที่ด้วย คุณสมบัติเหล่านี้เป็นคุณสมบัติเพิ่มเติมของการเคลื่อนที่ของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า

1.4 อีเทอร์และกรอบอีเทอร์

เนื่องจากคลื่นแสงเป็นคลื่นตามขวาง คลื่นแสงจึงควรจะมีคุณสมบัติคล้ายคลึงกับคลื่นตามขวางอื่น ๆ เช่น คลื่นในเส้นเชือก จากการวิเคราะห์สมการคลื่นในหนึ่งมิติพบว่า[4]

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) \qquad (1.49)$$

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (1.50)$$

เมื่อ T ความตึง และ μ เป็นความหนาแน่น ซึ่งความตึงสำหรับวัตถุในสามมิติก็คือ คุณสมบัติของสภาพยืดหยุ่น (elasticity) ส่วนความหนาแน่นเป็นคุณสมบัติเนื่องกับความเฉื่อย (inertia) คลื่นทุกชนิดมีตัวกลางให้คลื่นเคลื่อนผ่าน ดังนั้น คลื่นแสงจึงควรจะมีตัวกลางด้วย แต่ไม่มีผู้ใดทราบว่าตัวกลางซึ่งนำคลื่นแสงคืออะไร จึงมีผู้ให้ชื่อ อีเทอร์ (luminiferous ether)

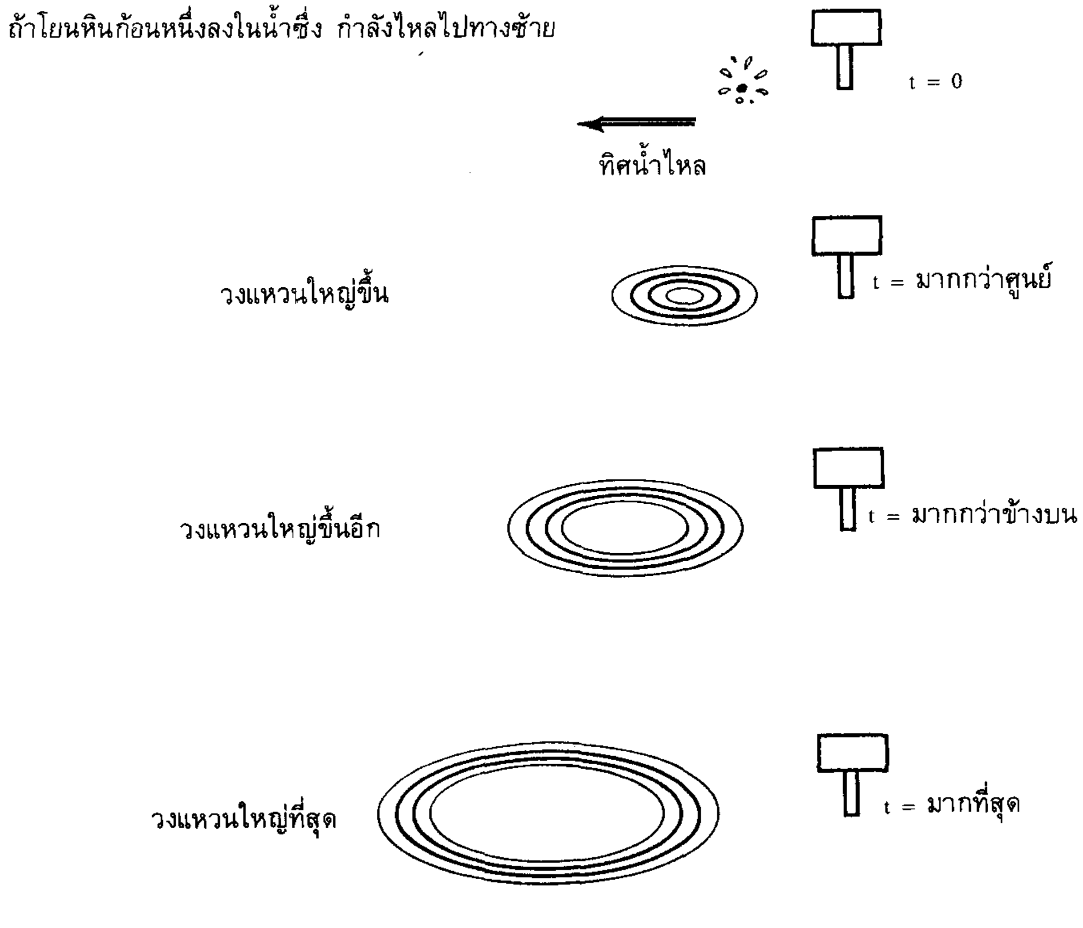
แสงวิ่งผ่านตัวกลางหลายชนิด มันผ่านตัวกลางที่หนักเช่นแก้ว หรือวิ่งผ่านสุญญากาศระหว่างโลกกับดวงดาวและดวงอาทิตย์ ดังนั้นอีเทอร์จะต้องมีอยู่ทุกหนทุกแห่งในอวกาศ ลักษณะที่เป็นคลื่นตามขวาง แสดงว่า อีเทอร์จะต้องเป็นของแข็ง เพราะคลื่นตามขวางเกิดขึ้นได้ในของแข็งเท่านั้น สภาพความหยุ่นในของไหลบางชนิด เช่นอากาศไม่พอที่จะทำให้เกิดคลื่นตามขวาง เนื่องจากความเร็วอันมากมายของแสงทำให้เห็นว่าสภาพของตัวนำจะต้องเป็นวัตถุเกร็ง (rigid solid) แข็งยิ่งกว่าเหล็กกล้าเพราะคลื่นจะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วขนาดนี้จะต้องมี เชียร์มอดดุลัส (shear modulus) สูงมาก ทำให้เกิดความขัดแย้งกับสภาพความเป็นจริง เพราะทุก ๆ คนย่อมเห็นว่าอวกาศเป็นที่ว่างไม่มีวัตถุเกร็งใดอยู่ในอวกาศ

การมีตัวกลางให้คลื่นแสงวิ่งผ่านทำให้เกิดปัญหาอื่นอีก สมมุติว่าโยนก้อนกรวดลงในลำธารซึ่งกำลังไหลอย่างเงียบสงบ จะเกิดคลื่นเคลื่อนออกเป็นวงกลมมีความเร็วขนาดหนึ่ง แต่ถ้าหากว่ากระแสน้ำเกิดมีความเร็วมากกว่าความเร็วของคลื่น ๆ จะไม่สามารถเคลื่อนทวนน้ำได้เลย (ดูรูปที่ 14)

---

4 **พิสิทฐ์ วรสิงห์,** op.cit. หน้า 376

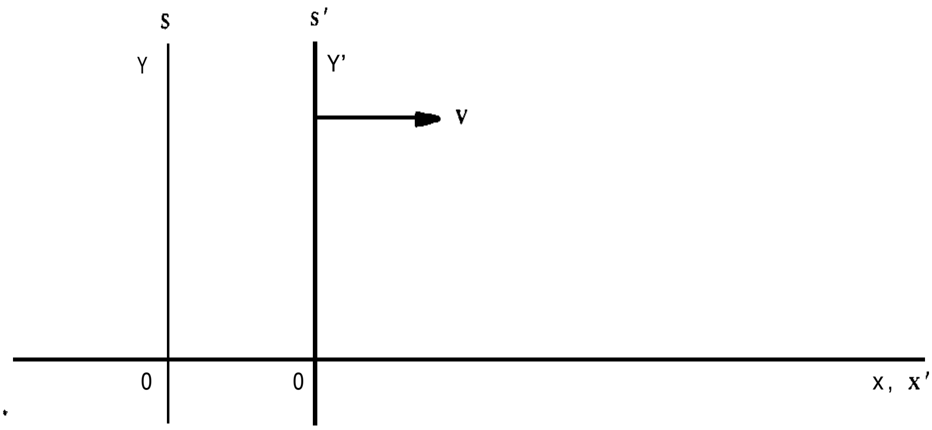
การที่เราจะพิจารณาว่าตัวกลางกำลังเคลื่อนที่ไปทางซ้าย หรือต้นกำเนิดคลื่นไปทางขวา มีผลลัพธ์เหมือนกัน ถ้าหากเราถือว่าอีเทอร์เป็นตัวกลางทางกลศาสตร์ (mechanical medium) ชนิดหนึ่ง ในรูปที่ 14 จะเห็นว่าไม่มีคลื่นเคลื่อนทวนกระแสน้ำ หรือสำหรับในกรณีของคลื่นแสงก็เช่นเดียวกัน คลื่นแสงย่อมไม่เคลื่อนย้อนกระแสอีเทอร์ ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าเราคงไม่เคลื่อนผ่านอีเทอร์ไปเร็วกว่าความเร็วของแสง เพราะถ้าหากว่าเราเกิดเคลื่อนที่เร็วกว่าความเร็วของแสงในอีเทอร์ เมื่อเราเปิดไฟฟ้าในห้อง แสงไฟย่อมไม่สามารถไปถึงอีกด้านหนึ่งของห้องซึ่งเป็นด้านซึ่งเคลื่อนออกไปจากจุดกำเนิดแสง ดังนั้นจะเห็นว่าโดยหลักการแล้ว เครื่องมือในวิชาแสงจะสามารถวัดกระแสอีเทอร์ได้ ปัญหาจะมีอยู่ก็เนื่องจากความเร็วอันมากมายของแสงจะทำให้เครื่องมือนั้นต้องมีความละเอียดละออเป็นพิเศษ



รูปที่ 14 ถ้าความเร็วของกระแสน้ำมากกว่าความเร็วของคลื่น คลื่นนั้นจะไม่เคลื่อนย้อนขึ้นไปทางต้นน้ำได้

1.5 ความไม่เปลี่ยนแปลงเฟสของคลื่นระนาบ

สมมุติว่าระนาบพิกัดฉาก $s':(x',y',z',t')$ เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v ไปทางทิศ +x ของระบบพิกัดฉาก $s:(x,y,z,t)$ (รูปที่ 15) ดังนั้น



รูปที่ 15 ระบบพิกัด s' เคลื่อนที่ไปทาง +x ด้วยความเร็ว v เทียบกับระบบพิกัด s

การแปลงแบบกาลิเลโอของจุด (x',y',z',t') ในระบบ s' ไปสู่ระบบ s จะเป็นดังนี้

$$
\begin{aligned}
x' &= x - vt \\
y' &= y \\
z' &= z \\
t' &= t
\end{aligned}
\qquad (1.51)
$$

ตามความคิดของแมกซ์เวลล์ เขาเชื่อว่าสมการของแมกซ์เวลล์จะเป็นจริงสำหรับกรอบอ้างอิงเดียว คือ กรอบอ้างอิงซึ่งอยู่นิ่งเมื่อเทียบกับอีเทอร์ ในกรอบอ้างอิงนี้ ผู้สังเกตในกรอบอ้างอิงจะไม่เห็น "ลมอีเทอร์" เลย ดังนั้นกรอบอ้างอิงนี้จะเป็นกรอบอ้างอิงที่สมบูรณ์ (absolute system of reference) ซึ่งตรงตามที่นิวตันอ้างไว้ในความเชื่อของเขาว่า มีปริภูมิที่สมบูรณ์ (absolute space) บัดนี้เราจะได้มาวิเคราะห์ดูว่า กฎทางฟิสิกส์ในเรื่องแสง จะมีการเปลี่ยนแปลงอย่างไร เมื่อผู้สังเกตอยู่ในกรอบ s และ s' ตามลำดับ

ถ้า s เป็นระบบพิกัดซึ่งอยู่นิ่งเมื่อเทียบกับอีเทอร์ สมมุติว่ามีแสงซึ่งมีความถี่เดียว เป็นคลื่นระนาบ (plane monochromatic light) เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $c = 3 \times 10^8$ เมตรต่อวินาที เมื่อเทียบกับ s คลื่นชนิดนี้จะมีคุณสมบัติที่เด่นชัดสามประการคือ ความเร็วเฟส (phase velocity) ความถี่ของคลื่น (frequency) และทิศของการเคลื่อนที่ (direction of propagation) เราจะหาการแปลงของคุณสมบัติทั้งสามประการนี้ ระหว่างระบบพิกัด s กับ s′

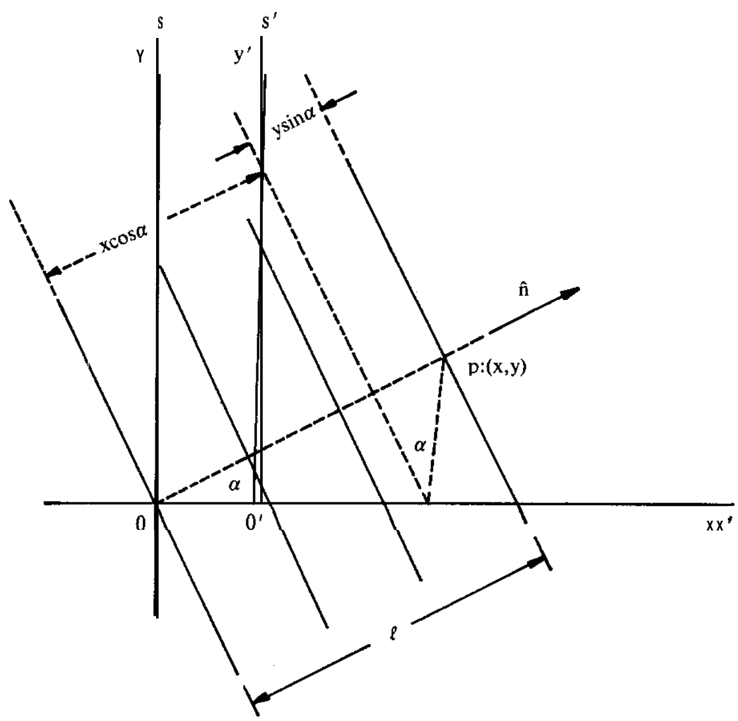
เพื่อให้ง่ายขึ้นเราจะสมมุติว่าทิศตั้งฉากกับคลื่นอยู่ในระนาบ xy คลื่นในระบบพิกัด s ให้ได้ด้วยสมการ

$$\Psi = A \cos 2\pi\nu \left(t - \frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{c} \right) \tag{1.52}$$

โดยที่

$$\nu\left(t - \frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{c}\right) = \nu\left(t \quad \frac{\ell}{c}\right) = F \tag{1.53}$$

เมื่อ ν เป็นความถี่ของคลื่น α เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ขนาดหนึ่งหน่วยในทิศตั้งฉากกับคลื่นกับแกน x, $\ell = x\cos\alpha + y\sin\alpha$ เป็นระยะจากจุดกำเนิดไปถึงคลื่นซึ่งมีจุด p(x,y) อยู่บนสันคลื่น



รูปที่ 16 คลื่นระนาบ

F เป็นเฟสของคลื่นซึ่งมีความหมายดังนี้ สมมุติว่าสันคลื่นสันหนึ่งผ่านจุดกำเนิด (0) ที่เวลา $t = 0$ เมื่อสันคลื่นสันนั้นไปถึงจุด p ก็มีผู้สังเกตการณ์คนหนึ่งสังเกตเห็นสันคลื่นนั้นและเริ่มนับคลื่นที่ผ่านจุด p โดยเริ่มจากคลื่นซึ่งผ่าน 0 เมื่อเวลา $t = 0$ จำนวนคลื่นที่เขานับได้เมื่อเวลาผ่านไป t คือ เฟส F เนื่องจาก 1 วินาทีจะมีคลื่นผ่านเขา ν ลูก เวลาที่ผ่านไปทั้งหมดคือ $\left(t - \frac{\ell}{c}\right)$ ดังนั้นคลื่นจึงมี $\nu\left(t - \frac{\ell}{c}\right) = F$ ลูก

สมมุติว่า เมื่อเวลา $t = 0$ จุดกำเนิด (0′) ของ s′ ทับจุดกำเนิด (0) ของ s ขณะเดียวกันคลื่นที่เรากล่าวถึงในตอนที่แล้วก็ผ่าน 0 และ 0′ พร้อมกัน p′ เป็นจุดในระบบ s′ ซึ่งทับจุด p พอดีเมื่อเวลา $t = t'$ ดังนั้นจำนวนคลื่นที่ผ่านจุด p′ จากเวลาที่คลื่นลูกแรกที่กล่าวถึงมาถึง p′ จนกระทั่งหมดเวลา t′ ก็คือ F เช่นเดียวกัน แต่ผู้สังเกตการณ์ซึ่งอยู่ใน s′ เขาจะสังเกตเห็นเหตุการณ์เหมือนที่ผู้สังเกตการณ์ที่อยู่ใน s สังเกตเห็นคือ

$$F = \nu'\left(t' - \frac{\ell'}{c'}\right) = \nu'\left(t' - \frac{x'\cos\alpha' + y'\sin\alpha'}{c'}\right) \qquad (1.54)$$

ในขณะเดียวกัน $F = \nu\left(t - \frac{\ell}{c}\right) = \nu\left(t - \frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{c}\right)$

ดังนั้นเฟสจึงเป็นปริมาณที่ไม่เปลี่ยนแปลงไปตามระบบพิกัด

จากสมการที่ (1.51), (1.53) และ (1.54)

$$\nu\left(t' - \frac{(x' + vt')\cos\alpha + y'\sin\alpha}{c}\right) = \nu'\left(t' - \frac{x'\cos\alpha' + y'\sin\alpha'}{c'}\right) \qquad (1.55)$$

เทียบสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตามลำดับดังนี้

$$t' \;:\; \nu' = \nu\left(1 - \frac{v}{c}\cos\alpha\right) \qquad (1.56)$$

$$y' \;:\; \frac{\nu'\sin a'}{c'} = \frac{\nu\sin a}{c} \qquad (1.57)$$

$$x' \;:\; \frac{\nu'\cos\alpha'}{c'} = \frac{\nu\cos a}{c} \qquad (1.58)$$

สมการที่ (1.57) หารด้วยสมการ (1.58) ได้ $\tan a' = \tan\alpha$ หรือ

$$a' = a \qquad (1.59)$$

กำลังสองของสมการ (1.57) บวกกำลังสองของสมการ (1.58) ได้ความสัมพันธ์

$$\frac{\nu'^2}{c'^2} = \frac{\nu^2}{c^2} \qquad (1.60)$$

ดังนั้น

$$c' = \frac{\nu'}{\nu}c = c(1-\frac{v}{c}\cos\alpha) \qquad (1.61)$$

สมการที่ (1.56) ให้ความถี่ในพิกัดซึ่งเคลื่อนที่เมื่อเทียบกับอีเทอร์ สมการที่ (1.61) ให้ความเร็วของแสง ในพิกัดที่เคลื่อนที่ซึ่งต่างจากความเร็วของแสงเมื่อพิกัดอยู่นิ่งเทียบกับอีเทอร์ ความสัมพันธ์เหล่านี้ควรจะบอกลักษณะการเคลื่อนที่ของพิกัดเทียบกับอีเทอร์ได้

1.6 สรุป

1.6.1 ทัศนะเชิงกลศาสตร์ เชื่อว่าแรงจะอยู่ในทิศทางระหว่างอนุภาคทั้งสองซึ่งมีอันตรกิริยาต่อกันและกัน ขนาดของแรงขึ้นอยู่กับรูปร่างของอนุภาค ทัศนะเชิงกลศาสตร์เป็นผลงานของนักฟิสิกส์ที่สำคัญสามท่านคือ ไทโช บราเฮ โจฮานเนส เคพเพลอร์ และ เซอร์ไอแซค นิวตัน เคยเชื่อกันว่าทัศนะเชิงกลศาสตร์จะสามารถใช้ได้กับฟิสิกส์ทุกแขนง

1.6.2 ความหมายของสมการแมกซ์เวลล์

$$\overline{\nabla}\times\overline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\overline{B} \qquad (1.42a)$$

$$\overline{\nabla}\times\overline{H} = \bar{j}+\frac{\partial}{\partial t}\overline{D} \qquad (1.42b)$$

$$\nabla.D = \rho_e \qquad (1.43c)$$

$$\bar{\nabla}.\bar{B} = \mathbf{0} \qquad (1.42d)$$

แมกซ์เวลล์เชื่อว่า ในฉนวนจะมีกระแสอีกชนิดหนึ่ง คือ $\overline{j_d} = \frac{\partial}{\partial t}\overline{D}$ = กระแสขจัด ซึ่งกระแสขจัดนี้จะทำให้มีสัญญาณเคลื่อนผ่านฉนวนไปด้วยความเร็วเท่าความเร็วของแสง คลื่นที่นำสัญญาณนี้จะเป็นคลื่นตามขวาง

1.6.3 คลื่นและคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

คลื่นจะเคลื่อนที่ไปโดยอาศัยการส่งถ่ายพลังงานผ่านตัวนำของคลื่น อนุภาคของตัวนำคลื่นจะไม่เคลื่อนไปกับคลื่นด้วย การเคลื่อนที่ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้ามีลักษณะพิเศษคือ ทิศของสนามแม่เหล็กจะตั้งได้ฉากกับทิศของสนามไฟฟ้า และทั้งทิศของสนามแม่เหล็กและทิศของสนามไฟฟ้าจะตั้งฉากกับทิศที่คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเคลื่อนที่ไป การเคลื่อนที่ของสนามแม่เหล็กจะทำให้เกิดสนามไฟฟ้า และการเคลื่อนที่ของสนามไฟฟ้าจะทำให้เกิดสนามแม่เหล็ก

1.6.4 อีเทอร์และกรอบอีเทอร์

การที่คลื่นแสงเป็นคลื่นตามขวางแสดงว่าตัวนำจะต้องเป็นวัตถุเกร็ง แต่เนื่องจากไม่มีวัตถุเกร็งในอวกาศในขณะที่คลื่นแสงสามารถเคลื่อนผ่านอวกาศได้ นักวิทยาศาสตร์จึงให้ชื่อตัวกลางซึ่งสมมุติว่าแสงวิ่งผ่านนี้ว่าอีเทอร์ มาจากคำว่า luminiferous ether ซึ่งแปรว่าตัวกลางซึ่งแสงวิ่งผ่าน

1.6.5 ความไม่เปลี่ยนแปลงเฟสของคลื่นระนาบ

ถ้าระบบพิกัด $s':(x',y',z',t)$ เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v ไปทางทิศ $+x$ ของระบบพิกัดฉาก $s:(x,y,z,t)$ ดังนั้น การแปลงแบบกาลิเลโอ คือ

$$
\begin{aligned}
x' &= x-vt \\
y' &= Y \qquad\qquad (1.51)\\
z' &= z \\
t' &= t'
\end{aligned}
$$

และถ้าคลื่นในระบบพิกัด s คือ

$$\Psi = A \cos 2\pi\nu\left(t - \frac{x\cos\alpha + ys)n\alpha}{c}\right) \qquad (1.52)$$

จะทำให้

$$\nu' = \nu(1 - \frac{v}{c}\cos\alpha) \qquad (1.56)$$

$$a' = a \qquad (1.59)$$

$$c' = c(1 - \frac{v}{c}\cos\alpha) \qquad (1.61)$$

1.7 คำถามท้ายบท

จงเติมคำในช่องว่างให้ได้ความสมบูรณ์

1.7.1 ทัศนะเชิงกลศาสตร์เชื่อว่าแรงระหว่างอนุภาคสองอนุภาคจะมีทิศอยู่ในทิศ

ตอบ : ขนานกับเส้นตรงซึ่งต่อระหว่างอนุภาคทั้งสอง

1.7.2 กฎการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ของเคพเพลอร์สรุปได้ดังนี้

ก. ....

ข. ....

ค. ....

ตอบ : ก. ดาวเคราะห์หมุนรอบดวงอาทิตย์ตามทางโคจรรูปเอลลิพส์ โดยมีดวงอาทิตย์อยู่ที่จุดโฟกัสจุดหนึ่ง

ข. รัศมีเวกเตอร์จากดวงอาทิตย์ถึงดาวเคราะห์จะกวาดพื้นที่ในวงโคจรในอัตราที่สม่ำเสมอ

ค. คาบเวลาที่ดาวเคราะห์เดินรอบดวงอาทิตย์ยกกำลังสองเป็นสัดส่วนโดยตรงกับแกนยาวของรูปเอลลิพส์ยกกำลังสาม

1.7.3 สมการเกี่ยวกับแรงหนีศูนย์กลางของนิวตันคือ..........

ตอบ : $f \propto \frac{1}{r^2}$

1.7.4 สมการของของไหลอุดมคติคือ $\overline{\nabla}.\rho\bar{u} = -\frac{\partial}{\partial t}\rho = 0$ แสดงว่า

$\overline{\nabla}.\overline{B}$ = ...

ตอบ : 0 (ศูนย์)

1.7.5 "ลูกปืน" ซึ่งทำหน้าที่ขจัดแรงเสียดทานของเกลียวหมุนกรอบแม่เหล็กคือ..........

ตอบ : ประจุไฟฟ้า

1.7.6 ในกรณีของไฟฟ้าสถิตในฉนวน เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงของกระแสในเส้นลวด ทำให้ประจุในฉนวนรอบ ๆ เส้นลวดเคลื่อนที่เล็กน้อย ทำให้มีกระแสเกิดขึ้นเรียกว่า

....

ตอบ : กระแสขจัด

1.7.7 ถ้าหาก $\overline{\nabla}\times\overline{H} = \beta\dot{\overline{E}}$, $\overline{\nabla}\times\overline{E} = -\dot{\overline{B}}$

$$\overline{H} = H_0\, e^{i(\bar{k}.\bar{r}-wt)} , \quad \overline{E} = \overline{E}_0\, e^{i(\bar{k}.\bar{r}-wt)}$$

แสดงว่า.................. $= -iw\beta\overline{E}$ .... $= iw\overline{B}$

ตอบ : $i(\bar{k}\times\overline{H})$, $i(\bar{k}\times\overline{E})$

1.7.8 การวิ่งผลัดถือว่าเป็นการเคลื่อนที่ของ..

ตอบ : คลื่น

7.9 ถ้าหากสนามแม่เหล็กเคลื่อนที่จะทำให้เกิดสนามไฟฟ้า ตรงกับสมการของแมกซ์เวลล์ว่า..

ตอบ : $\overline{\nabla}\times\overline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\overline{B}$

1.7.10 $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

T คือ ความตึงของเส้นเชือกเป็นคุณสมบัติของ..

μ คือ ความหนาแน่นของเส้นเชือกเป็นคุณสมบัติของ... ....

ตอบ : สภาพยืดหยุ่น, ความเฉื่อย

1.7.11. ถ้าความเร็วของกระแสอีเทอร์มากกว่าความเร็วของแสง คลื่นแสงย่อมไม่

ตอบ : เคลื่อนไปในทิศซึ่งย้อนความเร็วของอีเทอร์

1.7.12 สำหรับการแปลงแบบกาลิเลโอ จาก s′:(x′,y′,z′,t′) ไปสู่ s:(x,y,z,t)

ค่าของเวลาย่อม...

ตอบ : ไม่เปลี่ยนแปลงเลย

1.7.13 แสงที่เคลื่อนที่ในอีเทอร์จะมีคุณสมบัติเด่นชัดอยู่สามประการคือ

ก...

ข...

ค...

ตอบ : ก. ความเร็วเฟส

ข. ความถี่ของคลื่น

ค. ทิศของการเคลื่อนที่

1.7.14 สมมุติว่า s′ เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v เทียบกับ s เฟสของคลื่นแสงจะ............................ เนื่องจากการเคลื่อนที่เลย

ตอบ : ไม่เปลี่ยนแปลง

1.7.15 ถ้า s′ เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v ในทิศ +x เทียบกับ s แล้ว

ก) ν' = ...

ข) α' = ...

ค) c' = ...

ตอบ : ก) $\nu' = \nu\,(1 - \frac{v}{c}\cos\alpha)$

ข) $\alpha' = \alpha$

ค) $c' = c\,(1 - \frac{v}{c}\cos\alpha)$

1.7.16 ถ้า s′ เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v นทิศ +x เทียบกับ s แล้ว มีทิศใดบ้างซึ่งจะทำให้ $\nu' = \nu$, $\alpha' = \alpha$ และ $c' = c$

ตอบ : $\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

แบบฝึกหัดบทที่ 1

1. จงพิสูจน์ว่า ในขณะที่ดาวเคราะห์เคลื่อนไปรอบดวงอาทิตย์ รัศมีเวกเตอร์ของมันจะกวาดพื้นที่ภายในวงโคจรในอัตราที่คงที่ $\frac{d}{dt}A = \frac{L}{2m}$ เมื่อ A คือพื้นที่ L คือ โมเมนตัมเชิงมุมของดาวเคราะห์ในวงโคจร m คือมวลของดาวเคราะห์นั้น

คำแนะนำ : $\bar{L} = \bar{r} \times m\bar{v}$ เมื่อ $\bar{r}$ คือรัศมีเวกเตอร์ $\bar{v}$ คือ ความเร็วของดาวเคราะห์

2. สมมุติว่าดาวเคราะห์เดินรอบดวงอาทิตย์มีวงโคจรเป็นวงกลม จงพิสูจน์ว่า คาบเวลาที่ดาวเคราะห์เดินทางครบรอบยกกำลังสอง จะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับรัศมียกกำลังสาม

คำแนะนำ : $\bar{F} = m\bar{a}$, $\bar{a} = -w^2\bar{r} = -\frac{4\pi^2}{T^2}\bar{r}$

$$\bar{F} = \frac{GmM}{r^2}\hat{r}$$

3. จากชุดของสมการแมกซ์เวลล์

$$\bar{\nabla}\times\bar{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\bar{B} \quad , \quad \bar{\nabla}\times\bar{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\bar{E}$$

$$\bar{\nabla}.\bar{E} = 0 \quad , \quad \bar{\nabla}.\bar{B} = 0$$

จงแสดงว่า

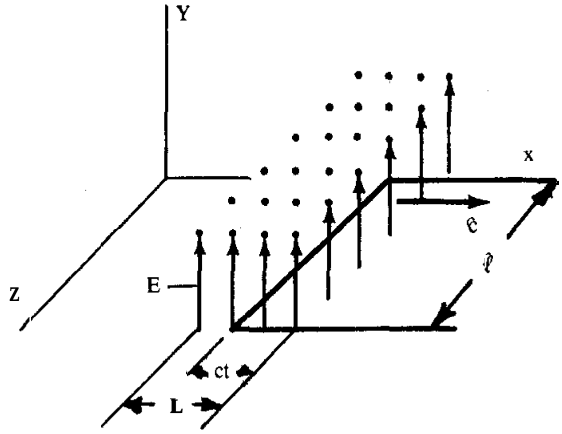
$$\oint\bar{E}.d\bar{\ell} = -\frac{d}{dt}\phi_B \quad , \quad \oint\bar{B}.d\bar{\ell} = \varepsilon_0\mu_0\frac{d}{dt}\phi_E$$

$$\oint\bar{E}.d\bar{s} = 0 \quad , \quad \oint\bar{B}.d\bar{s} = 0$$

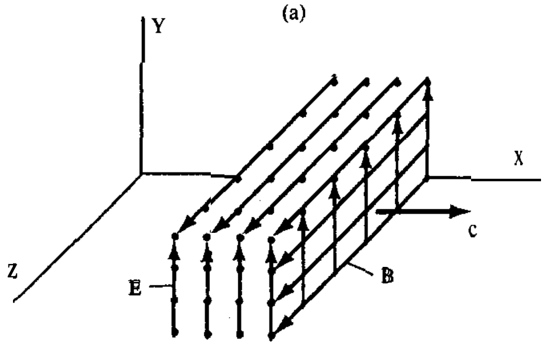
คำแนะนำ : ใช้ทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์ และทฤษฎีของสโตก

4. สมมุติว่าสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ ชี้ไปทาง +y เคลื่อนไปทาง +x ด้วยความเร็ว c ขนาดของสนาม $\bar{E}$ ทางแนวแกน +z คือ ℓ ระยะระหว่างขอบหน้าสนาม (ระยะแนวทางแกน x ของสนาม) ถึงขอบหลังของสนามคือ L จงแสดงว่า $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$

คำแนะนำ :



(a)



(b)

รูปที่ 17 สนามไฟฟ้าที่เคลื่อนที่

$$\phi_E = EA = E(\ell ct)$$

$$\frac{d}{dt}\phi_E = E\ell c$$

ฟลักซ์จะเปลี่ยนตลอดเวลาที่ขอบด้านหลังของสนาม $\overline{E}$ อยู่นอกกรอบ เมื่อขอบด้านหลังเข้าสู่กรอบแล้ว ϕ_E จะคงที่ จากสมการที่ (1.34) ทิศของ $\overline{B}$ จะไปทาง $+z$ ดังนั้น

$$\oint \overline{B}.d\ell = B\ell = \varepsilon_0\mu_0 \frac{d}{dt}\phi_E$$ แทนค่า ϕ_E แล้วใช้สมการ (1.48)

5. สมมุติว่าขดลวดสม่ำเสมอยาวเป็นอนันต์ มีรัศมี R มีกระแสไหลผ่าน I ทำให้เกิดสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอภายในขดลวด แต่เปลี่ยนไปช้า ๆ ตามเวลา จงหาสนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำทั้งภายในและภายนอกขดลวด

คำแนะนำ : $\oint \overline{E}.d\bar{\ell} = -\frac{d}{dt}\phi_B$

ตอบ : $r > R \qquad E = -\left(\frac{1}{2\pi r}\right)\left(\frac{d}{dt}\phi_B\right)_R$

$r < R \qquad E = -\frac{r}{2\pi R^2}\left(\frac{d}{dt}\phi_B\right)_R$

6. ประจุ q วางห่างจากลวดเส้นหนึ่งเป็นระยะ a เส้นลวดมีความยาวเป็นอนันต์มีความหนาแน่นประจุต่อหนึ่งหน่วยความยาว ρ ประจุและเส้นลวดอยู่ในระบบพิกัด s ซึ่งอยู่นิ่ง ๆ ดังนั้น แรงไฟฟ้าสถิตซึ่งสังเกตได้ที่ q คือ $\frac{q\rho}{2\pi\varepsilon_0 a}$ จงแสดงว่า ผู้สังเกตการณ์ซึ่งอยู่ในระบบพิกัด s' ซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็วสม่ำเสมอ v ไปตามเส้นลวดทางขวาของ s จะพบว่าแรงที่เขาสังเกตได้บน q คือ $\frac{q\rho}{2\pi\varepsilon_0 a} - \frac{q\mu_0\rho v^2}{2\pi a}$

คำแนะนำ : $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} = \frac{\mu_0 \rho v}{2\pi a}$, $\overline{F} = q(\overline{E} + \overline{v} \times \overline{B})$

7. จงแสดงว่า $\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t)$

a. ความถี่ต่ำสุดและความถี่สูงสุดที่หูคนโดยปกติจะฟังได้ คือ 20 Hz และ 20 kHz ที่อุณหภูมิปกติ ความเร็วของคลื่นเสียงประมาณ 344 เมตรต่อวินาที จงหาความยาวคลื่นของคลื่นเสียงที่ความถี่ต่ำสุดและความถี่สูงสุดนั้น

ตอบ 17.2 เมตร 1.7 เซนติเมตร

9. ลวดสปริงอันหนึ่งมีความยาว 2 เมตร มีมวล 49 กรัม ปลายบนของลวดแขวนไว้ส่วนปลายล่างของลวดมีมวล 5.0 กก. แขวนอยู่ ถ้ามีแรงมากระทำที่ปลายล่างตามแนวนอนต้องใช้เวลานานเท่าไรสัญญาณนั้นจึงจะไปถึงปลายบน?

คำแนะนำ : $T = Mg = 5g \qquad c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$

$\rho = \frac{m}{\ell} = \frac{.049}{2}$

$t = \frac{2}{c}$

ตอบ : 0.045 วินาที

10. เชือกเส้นหนึ่งมีความหนาแน่นตามยาว 70 กรัมต่อหนึ่งเมตร มีความตึง 10 นิวตัน ที่จุด $x = 0$ เครื่องกำเนิดคลื่นได้ทำคลื่นมีแอมพลิจูด 2 ซม.

(ก) จงหาอัตราเร็วของคลื่นในเส้นเชือก

(ข) จงหาความยาวคลื่นในเส้นเชือก

(ค) ถ้าเมื่อ $t = 0$ เครื่องกำเนิดคลื่นมีแอมพลิจูดสูงสุด จงเขียนสมการคลื่นในรูป sin หรือ cos

(ง) จงหาค่าสูงสุดของโมเมนตัมตามขวางบนความยาวของเชือก 1 มม.

(จ) จงหาแรงลัพธ์ที่สูงที่สุดบนความยาวของเชือก 1 มม.

คำแนะนำ : (ก) $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$

(ข) $\lambda = \frac{c}{f}$

(ค) $y(x,t) = \mathbf{A} \sin\left[k(x - ct) - \phi\right]$

$y = A, \quad t = 0$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$

(ง) p_{max} : โมเมนตัมสูงสุดตามขวาง , m : มวลของเชือกยาว 1 มม.

$= m \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{max}$

(จ) $(F_y)_{max} = m \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_{max}$

ตอบ : (ก) 12 เมตรต่อวินาที

(ข) 3 เมตร

(ค) $y(x,t) = (2.0 \times 10^{-2}) \cos \frac{2\pi}{3} (x - 12t)$

(ง) $\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{max} = kcA$

$p_{max} = 3.5 \times 10^{-5} \frac{\text{กก.-เมตร}}{\text{วินาที}}$

(จ) $(F_y)_{max} = 9.1 \times 10^{-4}$ นิวตัน