

บทที่ 9

การแผ่รังสีความร้อน

การแผ่รังสีความร้อน (Thermal radiation) หมายถึง การส่งถ่ายความร้อนจากที่หนึ่งไปสู่อีกที่หนึ่งโดยไม่ต้องอาศัยตัวกลางถ่ายเทพลังงานซึ่งต่างกับการนำความร้อนหรือการพาความร้อน เมื่อวัตถุใดมีอุณหภูมิสูงกว่าอุณหภูมิสูนย์สัมบูรณ์ วัตถุนั้นจะแผ่รังสีความร้อนออกมานะ กลไกการถ่ายเทพลังงานโดยการแผ่รังสีแยกต่อการอธินาข่ายให้เห็นพฤษติกรรมทางกายภาพได้ จึงต้องอาศัยกฎข้อแม่เหล็กไฟฟ้าของแมกซ์เวลล์ (Maxwell) ในการพิจารณาพฤษติกรรมของกลไกการแผ่รังสี เพื่อใช้กำหนดคุณสมบัติการแผ่รังสีของวัตถุใด ๆ และอาศัยสังกัดปั๊ของแพลนค์ (Max planck) พิจารณาพฤษติกรรมของกลไกการแผ่รังสี ซึ่งเป็นพฤษติกรรมของโฟตอน (Photon) เพื่อกำหนดปริมาณของพลังงานที่ปล่อยออกจากวัตถุที่กำหนดค่าหนึ่ง ซึ่งทั้งสองกฎนี้ดังกล่าวมีดังนี้

1. กฎอีคลินเน็กไซฟ์ของแมกซ์เวลล์ กล่าวว่า

"การแผ่รังสีสามารถพิจารณาให้เป็นการสั่นของคลื่น (Wave Oscillating) ด้วยความถี่ f และความยาวช่วงคลื่น λ โดยกำหนดอัตราเร็วของการแผ่รังสีเป็นผลคูณระหว่างความถี่กับความยาวช่วงคลื่น ดังนี้"

$$C = \lambda f \quad \dots \dots \dots (9.1)$$

โดยที่ C เป็นอัตราเร็วของการแผ่รังสี

2. กฎอีคลินเน็ตของแมกซ์เวลล์ กล่าวว่า

"เมื่อวัตถุได้รับความร้อน อิเลคตรอนอิสระจะมีระดับพลังงานอยู่ในสภาวะการตื่น (excited state) เมื่ออิเลคตรอนเหล่านั้นกลับคืนสู่ระดับพลังงานที่ต่ำกว่า จะปลดปล่อยโฟตอนที่มีพลังงานเท่ากับความแตกต่างของพลังงานระหว่างสภาวะการตื่นกับสภาวะสมดุล ของอิเลคตรอนเหล่านั้น" นั่นคือ

$$E = hf \quad \dots \dots \dots (9.2)$$

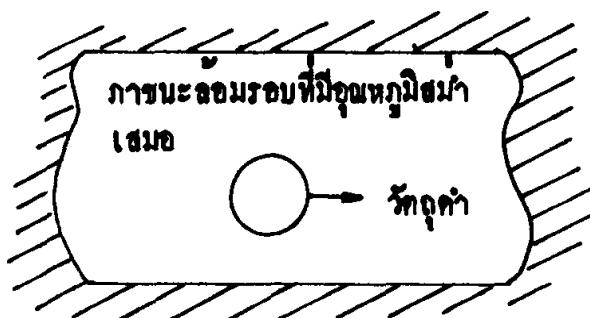
โดยที่ E เป็นพลังงานที่ปลดปล่อยพร้อมกับโฟตอนที่มีอัตราเร็วเท่ากับอัตราเร็วของแสง

h เป็นค่าคงที่ของแพลนค์

f เป็นความถี่ของการแผ่รังสี

9.1 การแผ่รังสีของวัตถุดำ (Black body radiation)

วัตถุดำ (black body) หมายถึง วัตถุที่มีความสามารถดูดกลืนพลังงาน ไว้ได้ทั้งหมดในทุกๆ ทิศทาง และทุกๆ ความยาวคลื่น โดยไม่มีการสะท้อนกลับ หรือการส่งผ่านของพลังงาน วัตถุดำไม่ใช่เป็นวัตถุสีดำที่ตามนิยมสามารถมองเห็นได้ ในช่วงที่ตามมองเห็น (visible range) ของสเปคตรัมเท่านั้น วัตถุดำยังเป็นตัวดูดกลืนรังสีสมบูรณ์ได้ด้วยสารที่มีพฤติกรรมเช่นวัตถุดำได้แก่ คาร์บอนแบล็ค (Carbon black) หรือเขม่า พลาตินัมแบล็ค (platinum black) คาร์บอรันดัม (Carborundum) และโกลด์แบล็ค (Gold black)



รูปที่ 9.1 แสดงวัตถุที่บรรจุอยู่ภายในภาชนะที่มีอุณหภูมิสม่ำเสมอ

พิจารณาวัตถุดำที่มีอุณหภูมิ T บรรจุภายในภาชนะที่มีอุณหภูมิสม่ำเสมอค่าหนึ่ง ดังรูปที่ 9.1 เนื่องจากอุณหภูมิของวัตถุดำกับอุณหภูมิของภาชนะที่ล้อมรอบมีค่าแตกต่างกัน จึงมีการถ่ายเทความร้อนระหว่างกันจนกว่าทั้งระบบ (วัตถุดำกับภาชนะที่บรรจุ) มีภาวะสมดุลย์ทางความร้อนกัน จากกฎของอุณหพลศาสตร์พบว่าที่สภาวะนี้ วัตถุดำจะดูดกลืนและปล่อยพลังงานในอัตราที่เท่ากัน วัตถุดำนอกจากจะเป็นตัวดูดกลืนรังสีสมบูรณ์แล้ว วัตถุดำยังเป็นตัวแผ่รังสีสมบูรณ์อีกด้วย

คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าซึ่งนับเป็นคลื่นตามธรรมชาติ คลื่นที่แผ่ออกไปอาจจะสั่นสะเทือนแบบวงกลมที่หมุนไปทางขวาหรือทางซ้าย จึงแบ่งคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าได้เป็น 2 กลุ่ม โดยที่แต่ละกลุ่มจะอ้างคงมีทิศของการสั่นสะเทือนตั้งกับทิศของการเคลื่อนที่

และตั้งฉากซึ่งกันและกัน ในขณะที่อัตราการเคลื่อนที่ของคลื่นโพลาไรเซชันทั้งสองมีค่าเท่ากัน และเท่ากับอัตราการเคลื่อนที่ของแสงด้วย ดังนั้นจำนวนสภาวะในระดับมหภาคระหว่างความถี่ f กับ $f + \Delta f$ สำหรับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจึงมีค่าเพิ่มขึ้นเป็นกิจคุณของในการผลลัพธ์ทั้งสอง

อาศัยหลักสถิติของโบล ไอ้น์สไตน์ จะได้จำนวนไฟตอบที่มีความถี่ระหว่าง f กับ $f + \Delta f$ ดังต่อไปนี้

$$\Delta N = \frac{8\pi v}{c^3} \frac{f^2}{e^{-hf/kT} - 1} \Delta f \quad \dots \dots \dots (9.3)$$

และจะหาพลังงานของไฟตอบที่อยู่ในช่วงความถี่ตั้งกล่าวต่อปริมาตร V ด้วยที่ไฟตอบหนึ่ง ๆ จะมีพลังงานเป็น hf จะได้ "ความหนาแน่นของพลังงานในสเปกตรัม" คือ

$$\Delta U_f = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{f^3}{e^{-hf/kT} - 1} \Delta f \quad \dots \dots \dots (9.4)$$

ถ้านำความสัมพันธ์จากสมการ (9.4) มาพิจารณาเปรียบเทียบกับผลการทดลองของแพลงค์ที่เรียกว่า "กฎของแพลงค์" (planck's Law) คือ

$$\Delta U_f = \frac{C_1 f^3}{e^{(C_2 f/T)} - 1} \Delta f \quad \dots \dots \dots (9.5)$$

จะได้ค่า C_1 และค่า C_2 ในกฎของแพลงค์ ดังนี้

$$C_1 = \frac{8\pi h}{c^3} \quad \text{และ} \quad C_2 = \frac{h}{k} \quad \dots \dots \dots (9.6)$$

9.2 ความเข้มการแผ่รังสีของวัตถุดำ (radiation intensity of black body)

การแผ่รังสีของพื้นผิวจริง (actual surface) ในทิศทางใด ๆ จะระบุด้วยปริมาณที่เรียกว่า "ความเข้มการแผ่รังสี" (radiation intensity) ความเข้มการแผ่รังสีแบ่งออกเป็นความเข้มการแผ่รังสีเชิงスペกตรัมระบุทิศทาง (directional spectral radiation intensity) และความเข้มการแผ่รังสีทั้งหมดระบุทิศทาง (directional total radiation intensity) ทิศทางของการแผ่รังสีมีความสำคัญต่อการพิจารณาความเข้มการแผ่รังสี ในทางปฏิบัติจะพิจารณาทิศทางของการแผ่รังสีด้วยมุมตัน (Solid angle) ที่แผ่คลุมจากจุดอ้างอิงบนพื้นผิวแผ่รังสีไปยังพื้นผิวอาบรังสี ซึ่งพิจารณาอยู่ในพิกัดของครึ่งทรงกลม (hemispherical)

ความเข้มการแผ่รังสีเชิงスペกตรัมระบุทิศทาง หมายถึง พลังงานการแผ่รังสีโดยพื้นผิวแผ่รังสีต่อหนึ่งหน่วยเวลา ต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ผิวจาย ต่อหนึ่งความยาวคลื่นและต่อหนึ่งหน่วยมุมตัน โดยพิจารณาที่อุณหภูมิผิวค่าหนึ่ง มีหน่วยเป็น $W/m^2 \mu m Sr$

ความเข้มการแผ่รังสีทั้งหมดระบุทิศทาง หมายถึง พลังงานการแผ่รังสีโดยพื้นผิวแผ่รังสีต่อหนึ่งหน่วยเวลา ต่อหนึ่งหน่วยผิวจายและต่อหนึ่งหน่วยมุมตัน โดยพิจารณาที่อุณหภูมิผิวค่าหนึ่งมีหน่วยเป็น $W/m^2 Sr$

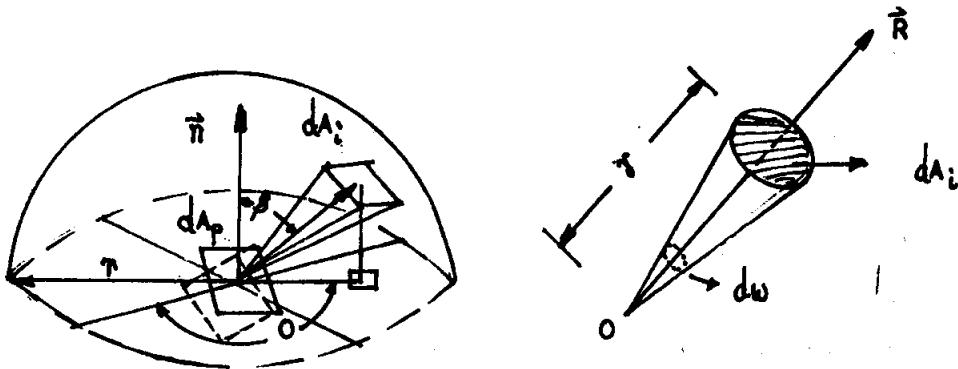
พื้นผิวจริง (actual surface) หรือพื้นผิวแผ่รังสี (radiation surface) หมายถึง พื้นผิวที่ปล่อยพลังงานออกมานៅองจากการแผ่รังสีของพื้นผิวนั้น

พื้นผิวอาบรังสี (irradiation surface) หมายถึง พื้นผิวที่ได้รับพลังงานการแผ่รังสี จากพื้นผิวแผ่รังสี

พื้นผิวฉาย (projected surface) หมายถึง พื้นผิวแผ่นรังสีในทิศทางตั้งฉากกับทิศทางการแผ่รังสี

มุมตัน (Solid angle) หมายถึง มุมที่แผ่คลุมจากจุดอ้างอิงบนพื้นผิวแผ่รังสีไปยังพื้นผิวอาบรังสี มีหน่วยเป็น Sr (สเตอเรเดียล)

พิจารณาพื้นผิวครึ่งทรงกลมของวัตถุดำที่มีรัศมี r ที่มีการแผ่รังสีระหว่างพื้นผิวทั้งสองที่สภาวะสมดุลย์ทางความร้อนสภาวะหนึ่งในช่วงความยาวคลื่น $d\lambda$ บนพื้นผิวทรงกลม dA ดังรูปที่ 9.2



รูปที่ 9.2 แสดงความเข้มการแผ่รังสีเชิงสเปกตรัมโดยผิว dA

พิจารณาจากรูป 9.2 สมมุติให้ \vec{n} เป็นทิศทางตั้งฉากกับพื้นผิวแผ่รังสี \vec{R} เป็นทิศทางการแผ่รังสี θ เป็นมุมเชิงข้าวที่วัดจาก \vec{n} ไปยัง \vec{R} ϕ เป็นมุมของการแผ่รังสีที่วัดบนฐานของครึ่งทรงกลม dA เป็นพื้นผิวการแผ่รังสี dA_p เป็นพื้นผิวฉายของ dA ($dA_p = dA \cos \theta$) dA_i เป็นพื้นผิวนำรังสี และ $d\omega$ เป็นมุนตันที่แผ่คลุมจากจุด O ไปยังพื้นผิวนำรังสี dA_i

ดังนั้นจะได้ $d\omega = \frac{dA_i}{2r} \dots\dots\dots (9.7)$

เมื่อ r เป็นระยะที่วัดจากจุด O ถึงตำแหน่งของ dA_i ในทิศทาง R ถ้ากำหนดให้ $I_{b\lambda}(T)$ เป็นความเข้มการแผ่รังสีของวัตถุค่าที่อุณหภูมิผิวค่าหนึ่ง

และ $I_b(T)$ เป็นความเข้มการแผ่รังสีทั้งหมดของวัตถุค่าดังนั้นจะได้

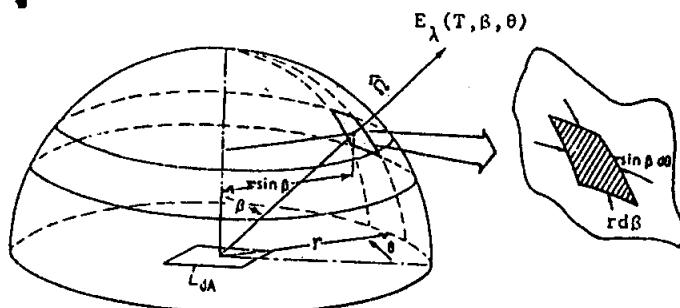
$$I_{b\lambda}(T) = \int_{\lambda=0}^{\infty} I_b(\lambda) T d\lambda \dots\dots\dots (9.8)$$

โดยที่ $I_{\nu\lambda}(T)$ และ $I_{\nu}(T)$ ไม่ขึ้นกับทิศทางในพิกัด (β, θ) และมีหน่วยเป็น $\text{W/m}^2 \text{ Sr}$ (วัตต์/เมตร-สเตอเรเดียล)

9.3 กำลังการแผ่รังสีของวัตถุค่า (Emissive power of black body)

กำลังการแผ่รังสีของวัตถุค่าสามารถแบ่งออกได้หลายชนิด ดังนี้

1. กำลังการแผ่รังสีเชิงสเปคตรัมระบุทิศทาง (directional spectral emissive power) หมายถึง "พลังงานการแผ่รังสีโดยพื้นผิวแผ่รังสีต่อ 1 หน่วยเวลา ต่อ 1 หน่วยพื้นผิวแผ่รังสี ต่อ 1 หน่วยความยาวช่วงคลื่น และต่อ 1 หน่วยมุมตันในพิกัด (β, θ) โดยพิจารณาที่อุณหภูมิผิวค่าหนึ่ง" มีหน่วยเป็น $\text{W/m}^2 \mu\text{m Sr}$ ดังรูปที่ 9.3



รูปที่ 9.3 แสดงกำลังการแผ่รังสีเชิงสเปคตรัมระบุทิศทาง

2. กำลังการแผ่รังสีทั้งหมดระบุทิศทาง (directional total emissive power) หมายถึง "พลังงานการแผ่รังสีโดยพื้นผิวแผ่รังสีต่อ 1 หน่วยเวลา ต่อ 1 หน่วยพื้นผิวแผ่รังสีและต่อ 1 มุมตัน ในพิกัด (β, θ) โดยพิจารณาที่อุณหภูมิผิวค่าหนึ่ง" มีหน่วยเป็น $\text{W/m}^2 \text{ Sr}$

กำลังการแผ่รังสีเชิงสเปคตรัมระบุทิศทาง และกำลังการแผ่รังสีทั้งหมดระบุทิศทางของวัตถุค่าที่อุณหภูมิผิว T ค่าหนึ่งจะระบุทิศทางในพิกัด β เท่านั้น ใช้สัญลักษณ์เป็น $E_{\nu\lambda}(T, \beta)$ และ $E_{\nu}(T, \beta)$ ตามลำดับ ดังนี้

$$E_{\nu}(T, \beta) = \int_0^{\alpha} E_{\nu\lambda} T \beta . d\lambda \quad \dots \dots \dots (9.9)$$

พลังงานการแผ่รังสีโดย dA ต่อ 1 หน่วยเวลา จะเป็น

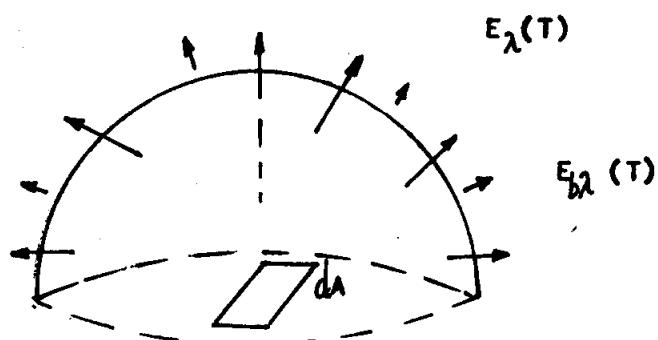
$$\begin{aligned} E_{b\lambda} (T, \beta, \theta) dA d\lambda dw \\ \text{หรือ } I_{b\lambda} (T) dA \cos \beta d\lambda dw \quad \dots \dots \dots (9.10) \\ \text{ดังนั้นจะได้} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{b\lambda} (T, \beta, \theta) = E_{b\lambda} (T, \beta) = \cos \beta \cdot I_{b\lambda} (T) \\ \dots \dots \dots (9.11) \end{aligned}$$

$$\text{และ } E_b (T, \beta, \theta) = E_b (T, \beta) = \cos \beta \cdot I_b (T)$$

สมการ (9.11) เรียกว่า "กฎ cosine ของแอล์เบิร์ต" (Lambert's Cosine Law) และเรียกพื้นผิวแผ่รังสี dA นี้ว่า "พื้นผิวกฎ cosine พื้นผิวแห่งกระดาษ" (Cosine Law surface or diffuse surface)

3. กำลังการแผ่รังสีเชิงสเปคตรัมคลุมครึ่งทรงกลม (hemispherical spectral emissive power) หมายถึง "พลังงานการแผ่รังสีพื้นผิวแผ่รังสีต่อ 1 หน่วยเวลา, ต่อ 1 หน่วยพื้นผิวแผ่รังสีและต่อ 1 หน่วยความยาวคลื่น โดยพิจารณาที่อุณหภูมิผิวค่าหนึ่ง" มีหน่วยเป็น $\text{W/m}^2 \mu\text{m}$ ดังรูปที่ 9.4



รูปที่ 9.4 แสดงกำลังการแผ่รังสีเชิงสเปคตรัมคลุมครึ่งทรงกลม

4. กำลังการแผ่รังสีทั้งหมดคลุมครึ่งทรงกลม (hemispherical total emissive power) หมายถึง "พลังงานการแผ่รังสีตัวผู้แผ่รังสีต่อ 1 หน่วยเวลา และต่อ 1 หน่วยพื้นผิวแผ่รังสี โดยพิจารณาที่อุณหภูมิผิวค่าหนึ่ง" มีหน่วยเป็น W/m^2

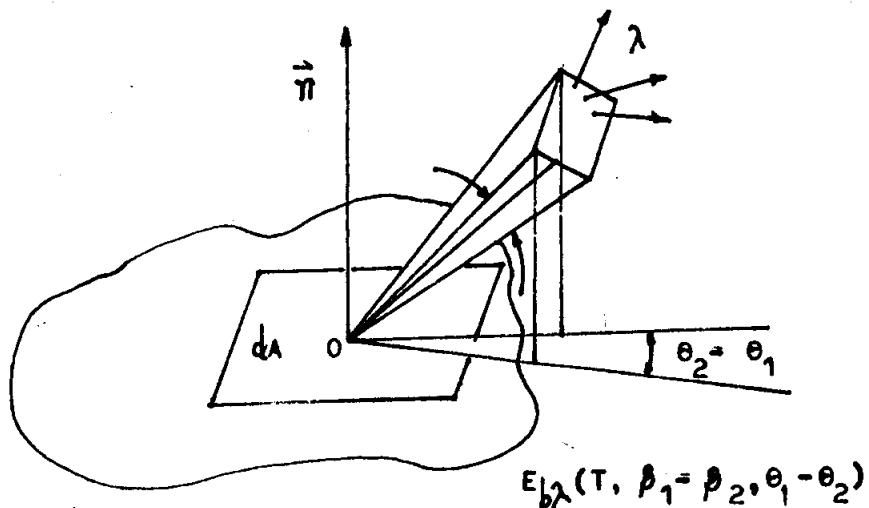
สำหรับวัตถุค่า ถ้ากำหนดให้ $E_{b\lambda}(T)$ เป็นกำลังการแผ่รังสีเชิงสเปกตรัม คลุมครึ่งทรงกลมของวัตถุค่าที่อุณหภูมิ T และ

$E_b(T)$ เป็นกำลังการแผ่รังสีทั้งหมดคลุมครึ่งทรงกลมของวัตถุค่าที่ อุณหภูมิ T

ดังนั้น

$$E_b(T) = \int_0^{\infty} E_{b\lambda} T d\lambda \quad \dots \dots \dots (9.12)$$

5. กำลังการแผ่รังสีเชิงสเปกตรัมคลอดมุมตันค่าหนึ่ง (Finite solid angle Spectral emissive power) เป็นการพิจารณากำลังการแผ่รังสีเชิง สเปกตรัมคลอดมุมตันค่าหนึ่งโดยการพิจารณา $\theta_1 < \theta < \theta_2$ และ $\beta_1 < \beta < \beta_2$ ดังรูปที่ 9.5



รูปที่ 9.5 แสดงกำลังการแผ่รังสีสเปกตรัมคลอดมุมตันค่าหนึ่งของวัตถุค่า

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก } E_{b\lambda}(T, \beta_1 - \beta_2, \theta_1 - \theta_2) &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} E_{b\lambda}(T, \beta) \sin \beta d\beta d\theta \\ &= I_{b\lambda}(T) \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \cos \beta \sin \beta d\beta d\theta \end{aligned}$$

ในที่สุดจะได้

$$E_{b\lambda}(T, \beta_1 - \beta_2, \theta_1 - \theta_2) = I_{b\lambda}(T) \cdot \frac{\sin \beta_2 - \sin \beta_1}{2} \cdot (\theta_2 - \theta_1) \quad \dots \dots \dots (9.13)$$

ถ้ากำหนดให้

$E_{b\lambda}(T, \beta_1 - \beta_2, \theta_1 - \theta_2)$ เป็นกำลังการแผ่รังสีเชิงスペกตรัมตลอดมุมตันค่าหนึ่งของวัตถุค่าที่อุณหภูมิ T มีหน่วยเป็น $\text{W/m}^2 \text{ m}$ และให้

$E_b(T, \beta_1 - \beta_2, \theta_1 - \theta_2)$ เป็นกำลังการแผ่รังสีทั้งหมดตลอดมุมตันค่าหนึ่งของวัตถุค่าที่อุณหภูมิ T มีหน่วยเป็น W/m^2

พิจารณาในทำนองเดียวกันกับสมการ (9.9) จะได้

$$E_b(T, \beta_1 - \beta_2, \theta_1 - \theta_2) = \int_0^\alpha E_{b\lambda}(T, \beta_1 - \beta_2, \theta_1 - \theta_2) \cdot d\lambda$$

ดังนี้จะได้

$$E_b(T, \beta_1 - \beta_2, \theta_1 - \theta_2) = I_b(T) \cdot \frac{\sin^2 \beta_2 - \sin^2 \beta_1}{2} \cdot (\theta_2 - \theta_1) \quad \dots \dots \dots (9.14)$$

ในปี ค.ศ. 1900 แมกซ์ แพลนค์ ได้อาศัยกฤษฎีความต้มและผลของการทดลองของเขามาเพื่อกำหนดการกระจายกำลังการแผ่รังสีเชิงスペกตรัมคลุมครึ่งทรงกลมของวัตถุค่าภายในสัญญาการและพบว่า

$$E_{b\lambda}(T) = \pi I_{b\lambda}(T) = \frac{2\pi C_1 \lambda^{-5}}{e^{(C_2/\lambda T)} - 1} \quad \dots \dots \dots (9.15)$$

สมการ (9.15) เรียกว่า "การกระจายกำลังการแผ่รังสีเชิงスペคตรัมของแพลงค์"

$$\text{โดยที่ } C_1 = hC_0^2$$

$$C_2 = hC_0/k$$

h เป็นค่าคงที่ของแพลงค์ (Max planck)

มีค่า 6.6256×10^{-34} J.S.

k เป็นค่าคงที่ของ Boltzmann

มีค่า 1.38054×10^{-23} J/K

C เป็นความเร็วของแสงในสูญญากาศ

มีค่า 2.9979×10^8 m/s

จัดรูปสมการ (9.15) เสียใหม่จะได้ดังนี้

$$\frac{E_{\nu\lambda}(T)}{T^5} = \frac{\pi I_{\nu\lambda}(T)}{T^5} = \frac{2\pi C_1}{(\lambda T)^5 \left[e^{(C_2/\lambda T)} - 1 \right]} \quad \dots \dots \dots (9.16)$$

กำหนดตัวแปรใหม่ โดยให้ $x = C_2/T\lambda$ ดังนั้น

$$E_{\nu}(T) = 2\pi \int_0^{\infty} \left(\frac{C_1}{\lambda T} \right)^5 \left(\frac{T}{C_2} \right)^5 \left(\frac{C_1}{e^{x} - 1} \right) \left(\frac{\lambda T}{C_2} \right)^2 \left(-\frac{C_2}{T} \right) dx \left(\frac{C_2}{\lambda T} \right)$$

$$= \frac{2\pi C_1 T^4}{C_2^4} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

$$= \frac{2\pi C_1 T^4}{C_2^4} \left(\frac{\pi^4}{15} \right)$$

$$E_b(T) = \left(\frac{2C_1\pi^5}{15 C_2} \right)^{\frac{5}{4}} T^4$$

ดังนี้จะได้

$$E_b(T) = \sigma T^4 \quad \dots \dots \dots (9.17)$$

$$\text{หรือ} \quad I_b(T) = \frac{\sigma}{\pi} T^4 \quad \dots \dots \dots (9.18)$$

สมการ (9.17) เรียกว่า "กฏของสเตฟาน" (Stefan-Boltzmann Law) โดยมีค่าคงที่ของสเตฟาน ดังนี้

$$\sigma = \frac{2C_1\pi^5}{15 C_2}$$

และมีค่าเท่ากับ $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$

หรือ $\sigma = 7.561 \times 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4}$

ถ้านำสมการ (9.15) เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $E_{b\lambda}(T)$ กับ λ ที่อุณหภูมิสัมบูรณ์ค่าต่าง ๆ จะได้ดังรูปที่ 9.6

และจากกราฟจะเห็นว่าพุ่มพิกรรมกรายจักษณ์ $E_{b\lambda}(T)$ จะได้

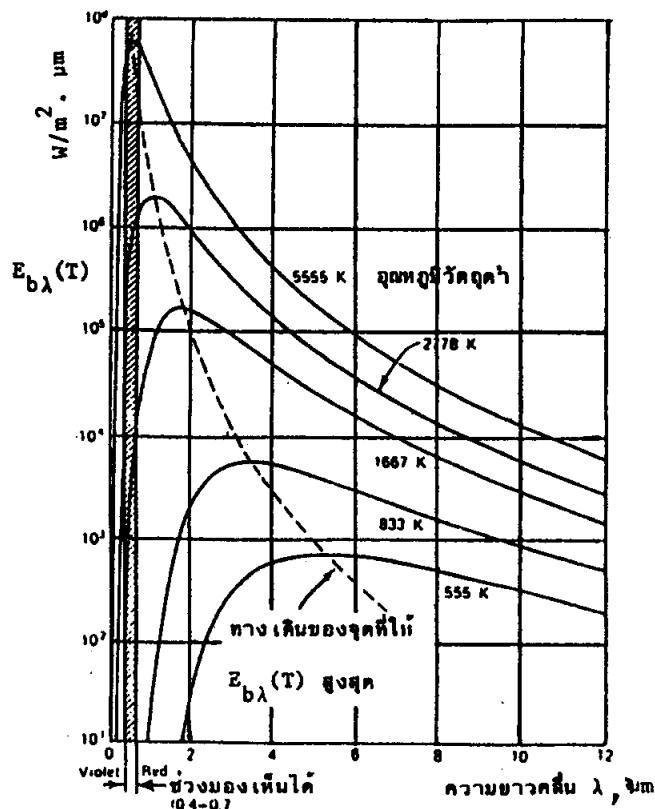
1. ก้าลังการผั่รังสีทั้งหมดคลุมครองกรุงกลมของวัตถุค่า $E_b(T)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่ออุณหภูมิสูงขึ้น (ดูรูปที่ 9.6)

2. การผั่รังสีของวัตถุค่าที่อุณหภูมิค่าหนึ่งจะให้ $E_{b\lambda}(T)$ สูงสุดที่ความยาวช่วงคลื่นสั้นๆ เส้นทางการเดินของจุดที่ทำให้ $E_{b\lambda}(T)$ มีค่าสูงสุดนั้น จะมีพุ่มพิกรรมตามกฎการจัดของเวียน (Wien's Displacement Law)

ดังนั้น

$$T \cdot \lambda_{max} = 2897.6 \text{ } \mu\text{m} \text{ } ^\circ\text{K} \quad \dots \dots \dots (9.19)$$

เมื่อ λ_{max} เป็นความยาวช่วงคลื่นที่จุดสีง่ามที่สูงสุดในสัญญาการค้า



รูปที่ 9.6 การกระจายของ $E_b\lambda(T)$ กับ λ ที่อุณหภูมิสัมบูรณ์ต่าง ๆ

6. กำลังการแผ่รังสีแบบแยกของวัตถุค่า

เมื่อกล่าวถึงกำลังการแผ่รังสีทั้งหมด ค่าว่า "ทั้งหมด" นั้นเป็นการพิจารณาปริมาณโดยการอินทิเกรตเทียบกับ λ ซึ่งมีค่าตั้งแต่ $\lambda = 0$ ถึง $\lambda = \infty$ แต่ค่าว่า "แยก" นั้นเป็นการพิจารณาปริมาณโดยอินทิเกรตเทียบกับ λ ซึ่งมีค่าตั้งแต่ $\lambda = \lambda_1$ ถึง $\lambda = \lambda_2$ หรือตั้งแต่ $\lambda = 0$ ถึง $\lambda = \lambda_1$ องค์ประกอบที่มีบทบาทในการพิจารณาคือ "เศษส่วนของกำลังการแผ่รังสีทั้งหมด" (fraction of total emissive power) ดังนี้

$$\left(\text{เศษส่วนของกำลัง} \right) = \frac{\text{กำลังการแผ่รังสีในแอน } \lambda_1 < \lambda < \lambda_2 \text{ หรือ } 0 < \lambda < \lambda_2}{\text{กำลังการแผ่รังสีทั้งหมด}} \dots (9.20)$$

ถ้าก่าหนดให้ $F_{\infty-\lambda}$ เป็นเศษส่วนของกำลังการแผ่รังสีทั้งหมดในแถบ $0 < \lambda < \lambda_1$ ที่อุณหภูมิ T

และ $F_{\lambda_1-\lambda_2}$ เป็นเศษส่วนของกำลังการแผ่รังสีทั้งหมดในแถบ $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ ดังนั้นจะได้

$$F_{\infty-\lambda}(T) = \frac{\int_0^{\lambda} E_{b\lambda}(T) d\lambda}{\int_0^{\infty} E_{b\lambda}(T) d\lambda} \quad \dots \dots \dots (9.21)$$

หรือ

$$F_{\infty-\lambda}(T) = \frac{\int_0^{\lambda} E_{b\lambda}(T) d\lambda}{T^4} \quad \dots \dots \dots (9.22)$$

และถ้าพิจารณาในแถบ $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ จะได้

$$F_{\lambda_1-\lambda_2}(T) = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_{b\lambda}(T) d\lambda}{T^4}$$

$$F_{\lambda_1-\lambda_2}(T) = \frac{\int_0^{\lambda_2} E_{b\lambda}(T) d\lambda - \int_0^{\lambda_1} E_{b\lambda}(T) d\lambda}{T^4}$$

$$F_{\lambda_1-\lambda_2}(T) = F_{\infty-\lambda_2}(T) - F_{\infty-\lambda_1}(T) \dots (9.23)$$

โดยที่ $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_{b\lambda}(T) d\lambda$ เป็นกำลังการแผ่รังสีแบบคลุมครองกลมของ

วัตถุค่า มีหน่วย W/m^2

7. กำลังการแผ่รังสีของวัตถุค่าในบริเวณอันนอกจากสูญญากาศ

การกระจายกำลังการแผ่รังสีเชิงスペคตรัมของแพลงค์ (Max planck) ในบริเวณอันนอกจากสูญญากาศ ค่าคงที่ C_1 และ C_2 ในสมการ (9.15) จะเปลี่ยนเป็น

$$C'_{\lambda m} = hC$$

$$C'_{\lambda m} = \frac{hC}{k}$$

เมื่อ C เป็นความเร็วของแสงในบริเวณที่พิจารณา

ถ้าพิจารณากำลังการแผ่รังสีในบริเวณอัน โดยกำหนดให้

λ_m เป็นความยาวช่วงคลื่นในบริเวณที่พิจารณา ฯ (ไม่ใช่สูญญากาศ)

ดังนี้จะได้

$$E_{\lambda m}(T) d\lambda_m = \frac{2\pi C'_{\lambda m}}{\lambda_m^5 [e^{(c_2/h\lambda_m T)} - 1]} d\lambda_m \quad \dots \dots \dots (9.24)$$

สำหรับบริเวณใดอีเลคทริก (dielectric) ซึ่ง

$$C = \frac{C_0}{n}$$

เมื่อ C_0 เป็นความเร็วของแสงในสูญญากาศ

n เป็นดัชนีการหักเหในบริเวณที่พิจารณา

ดังนี้จะได้

$$E_{\lambda m}(T) d\lambda_m = \frac{2\pi C^2 h}{\lambda_m^5 [e^{(ch/k\lambda_m T)} - 1]} d\lambda_m$$

$$= \frac{2\pi C_0 h}{n^2 \lambda_m^5 [e^{(c_0 h/nk\lambda_m T)} - 1]} d\lambda_m$$

$$E_b(T) d\lambda_m = \frac{2\pi C_1}{n^2 \lambda_m^5 [e^{(c_2/n\lambda_m T)} - 1]} d\lambda_m \quad \dots \dots \dots (9.25)$$

ถ้า n ไม่ขึ้นอยู่กับความยาวช่วงคลื่น

$$d\lambda_m = d(\lambda/n) = \frac{1}{n} d\lambda$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$E_{b,m}(T) d\lambda_m = \frac{2\pi C_1 n^2}{\lambda^5 [e^{(c_2/\lambda T)} - 1]} d\lambda \quad \dots \dots \dots (9.26)$$

อันที่แสดงในสมการ (9.26) ในช่วง $0 < \lambda <$ จะได้

$$E_{b,m}(T) = n^2 G T^4 \quad \dots \dots \dots (9.27)$$

สมการ (9.27) เรียกว่า "กฎของสเตฟาน-บล็อกมัน" (Stefan-Boltzmann Law) สำหรับกำลังการแผ่รังสีทั้งหมดคือรวมของวัตถุค่าในบริเวณที่มีดัชนีการหักเห n

และ

$$T \lambda_{max} = Tn \lambda_{max,m} = 2897.6 \mu m ^0 K \quad \dots \dots \dots (9.28)$$

สมการ (9.28) เรียกว่า "กฎการยังจัดของไว恩" (Wien displacement's Law) สำหรับการแผ่รังสีในบริเวณที่มีดัชนีการหักเห n

$$\text{โดยที่ } \lambda = n \cdot \lambda_m$$

$$\lambda_{max} = n \cdot \lambda_{max,m}$$

λ_{max} เป็นการพิจารณาในสูญญากาศ

$\lambda_{max,m}$ เป็นการพิจารณาในบริเวณที่มีดัชนีการหักเห n

ตัวอธิบาย กำหนดกำลังการแผ่รังสีเชิงスペคตรัมคลุมครึ่งทรงกลมของพื้นผิวแพร์กราจาย (diffuse surface) มีหน่วย $\text{W/m}^2 \mu\text{m}$ มีค่าดังนี้

$$E_{b\lambda}(T) = \begin{cases} 0 & \text{สำหรับ } \lambda < 3 \mu\text{m} \\ 150 & \text{สำหรับ } 3 < \lambda < 12 \mu\text{m} \\ 300 & \text{สำหรับ } 12 < \lambda < 25 \mu\text{m} \\ 0 & \text{สำหรับ } \lambda > 25 \mu\text{m} \end{cases}$$

ก). จงคำนวณหากำลังการแผ่รังสีทั้งหมดคลุมครึ่งทรงกลมของพื้นผิววัตถุค่า $E_b(T)$

ข). จงหาความเข้มการแผ่รังสีทั้งหมดของพื้นผิววัตถุค่า $I_b(T)$

วิธีทำ

ก. จากสมการ (9.12) จะได้

$$\begin{aligned} E_b(T) &= \int_{\lambda=0}^{\infty} E_{b\lambda}(T) d\lambda \\ &= \int_0^3 E_{b\lambda}(T) d\lambda + \int_3^{12} E_{b\lambda}(T) d\lambda + \int_{12}^{25} E_{b\lambda}(T) d\lambda + \int_{25}^{\infty} E_{b\lambda}(T) d\lambda \\ &= \int_3^{12} E_{b\lambda}(T) d\lambda + \int_{12}^{25} E_{b\lambda}(T) d\lambda \\ &= 150(12-3) + 300(25-12) \\ &= 1350 + 3900 \\ &= 5250 \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$

นั่นคือ กำลังการแผ่รังสีทั้งหมดคลุมครึ่งทรงกลมของพื้นที่วัตถุค่าเท่ากับ 5250 W/m^2

ข. จากสมการ (9.15)

$$E_{b\lambda}(T) = \pi I_{b\lambda}(T)$$

ทรรศ

$$I_b(T) = \frac{1}{\pi} 5250 \\ = 1671.13 \text{ W/m}^2 \cdot \text{Sr}$$

นี่คือ ความเข้มการแผ่รังสีทั้งหมดของพื้นผิววัตถุค่าเท่ากัน $1671.13 \text{ W/m}^2 \text{ Sr}$

9.4 การหาค่าต่าง ๆ ของระบบการแผ่รังสี

9.4.1 ความกดดันของการแผ่รังสี

$$\text{จากนิยามของความกดดัน } p = - \left(\frac{\partial E_i}{\partial v} \right)$$

ดังนั้น ความกดดันเฉลี่ยของไฟฟอนทั้งหมด จะเป็น

$$\bar{p} = \sum_i N_i - \left(\frac{\partial E_i}{\partial v} \right) \dots \dots \dots (9.29)$$

สำหรับค่าของ $- \left(\frac{\partial E_i}{\partial v} \right)$ สามารถพิจารณาโดยสมมุติให้ภาชนะที่ล้อมรอบ

อากาศเท่ากับปริมาตร V และมีด้านเท่ากับหนดทุกด้านหรือมีรูปสี่เหลี่ยมลูกบาศก์ โดยมีขนาดตามแกนต่าง ๆ ใน 3 มิติ คือ

$$L_x = L_y = L_z = L$$

ดังนั้น จะได้

$$V = L^3$$

และจากความสัมพันธ์ระหว่างเวคเตอร์ของคลื่น (Wave Vector)

$$K^2 = (K_x^2 + K_y^2 + K_z^2)$$

โดยมี

$$K_x = \frac{n_x}{L_x} \pi \quad K_y = \frac{n_y}{L_y} \pi \quad K_z = \frac{n_z}{L_z} \pi$$

ดังนั้น ที่สภาวะ i พลังงาน E_i จะหาได้ดังนี้

$$E_i = \hbar c k$$

$$E_i = \hbar c K_x^2 + K_y^2 + K_z^2$$

$$E_i = \hbar c \left(\frac{2\pi}{L} \right) (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad \dots \dots \dots (9.30)$$

$$\text{หรือ } E_i = \frac{C}{L} = C V^{-\left(\frac{1}{3}\right)} \quad \dots \dots \dots (9.31)$$

เมื่อ C เป็นค่าคงที่

ดังนั้น

$$-\frac{\partial E_i}{\partial v} = \frac{1}{3} C V^{-\left(\frac{4}{3}\right)} = \frac{E_i}{3v}$$

แทนค่าลงในสมการ (9.29) จะได้

$$\overline{p} = \sum \tilde{N}_i \left(\frac{1}{3} \frac{E_i}{v} \right) = \frac{1}{3v} \sum \tilde{N}_i E_i = \frac{1}{3v} \overline{E}$$

$$\overline{p} = \frac{1}{3} \overline{U}_e = \frac{1}{3} \int T^4 \quad \dots \dots \dots (9.32)$$

แสดงว่า ความกดดันของการแผ่รังสีขึ้นโดยตรงกับความหนาแน่นของพลังงานการแผ่รังสี

9.4.2 พลังงานทั้งหมดของระบบการแผ่รังสี

พลังงานทั้งหมดของระบบไฟฟ่อนที่มีขนาดความถี่ต่าง ๆ กันนาได้ตามกฎของแพลงค์ตามความสัมพันธ์ของสมการ (9.17) โดยที่พลังงานดังกล่าวของไฟฟ่อนอยู่ในช่วงความถี่ f กับ $f + \Delta f$ ตอบริมิตาตร V คือ

$$U_x = E_b(T) = 6T^4$$

ดังนั้น พลังงานทั้งหมดของระบบไฟฟ่อน ภายในปริมาตร V คือ

$$U = U_x V = 6VT^4 \quad \dots \dots \dots (9.33)$$

9.4.3 ความจุความร้อนของระบบการแผ่รังสี

จากนิยามของจุความร้อน

$$C_x = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_X$$

ดังนั้น

$$C_{P,V} = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{P,V}$$

แทนค่า u จากสมการ (9.33) จะได้

$$C_{P,V} = 46VT^3 \quad \dots \dots \dots (9.34)$$

9.4.4 การเปลี่ยนแปลงเอนโทรปีของระบบการแผ่รังสี

อัศัยความสัมพันธ์ของเอนโทรปีของระบบหนึ่ง

$$dS = \int \frac{f}{T} dQ_i$$

และความสัมพันธ์ของปริมาณความร้อน dQ กับความจุความร้อน ที่ว่า

$$dQ = C_v dT$$

ดังนั้น ถ้าพิจารณาจากจุดเริ่มต้นที่ $T_1 = 0$ ถึง $T_2 = T$ จะเป็นอุณหภูมิของกําชันจะที่
ล้อมระบบ น้อยๆ จะได้

$$dS = \int_{0}^{T} \frac{C_v dT}{T}$$

$$S = \int \frac{4/6 VT^3}{T} dT = \frac{4}{3} \int VT^3 \quad \dots \dots \quad (9.35)$$

$$\text{หรือ } S_b - S_u = \frac{4}{3} \int VT^3 \quad \dots \dots \quad (9.36)$$

9.4.5 พิจารณาฟังค์ชันเสมายล์ของระบบการผึ้งสี

พิจารณาฟังค์ชันเสมายล์จากความสัมพันธ์ของแมกซ์เวล ดังนี้

$$A = U - TS$$

จากสมการ (9.33) และ (9.35) จะได้

$$A = \int VT^4 - \frac{4}{3} \int VT^4$$

$$A = - \frac{1}{3} \int VT^4 \quad \dots \dots \quad (9.37)$$

9.4.6 พิจารณาฟังค์ชันกิบส์ของระบบการผึ้งสี

จากความสัมพันธ์ของแมกซ์เวล ดังนี้

$$G = A + PV$$

จากสมการ (9.32) และ (9.37) จะได้

$$G = -\frac{1}{3} \int VT^4 + \frac{1}{3} \int VT^4$$

$$G = 0$$

จะเห็นว่าฟังค์ชันกิบส์มีค่าเป็นศูนย์

ความสัมพันธ์ระหว่างศักย์ทางเคมีกับฟังค์ชันกิบส์จะเกิดขึ้นต่อมาหลังรือล้วนประกอบของระบบเปลี่ยนแปลง ซึ่งพิจารณาได้เป็น 2 กรณีคือ เข้าหรือออกจากระบบ และสับเปลี่ยนกันของภายในระบบ

สำหรับก้าวสมมติความสัมพันธ์ในระหว่างค่าทั้งสอง ดังนี้

$$\mu = g + RT \ln X \quad \dots \dots \dots (9.38)$$

เมื่อ X เป็นสัดส่วนของก้าวแต่ละชนิดต่อโมล

ดังนั้น ระบบที่เป็นเนื้อเดียวกันตลอดหรือมีส่วนประกอบเพียงชนิดเดียวจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างค่าทั้งสองคือ

$$\mu = g \quad \dots \dots \dots (9.39)$$

เมื่อสัดส่วนของก้าวแต่ละชนิดต่อโมล ($X = 1$)

9.5 การกระจายของอิเลคตรอนอิสระ

คุณสมบัติการเป็นตัวนำไฟฟ้าและตัวนำความร้อนที่ดีของโลหะสามารถอธิบายโดยอาศัยอิเลคตรอนที่สามารถเคลื่อนที่อย่างอิสระตามหลักกลศาสตร์ควบคุมและตามหลักการกีดกันของเพาล์กัล่าวว่า "อิเลคตรอนเกินกว่าหนึ่งตัวจะอยู่ในสภาวะไถลภาวะหนึ่งไม่ได้" เมื่อพิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาคภายในกล่อง 3 มิติ ด้วยความเร็วระหว่าง V กับ $V + \Delta V$ จึงมีจำนวนสภาวะที่เป็นไปได้สำหรับอิเลคตรอนอิสระตามสมการ (8.54) ดังนี้

$$\Delta G_v = \frac{4\pi m^{3/2}}{3} V^2 \Delta V$$

เนื่องจากอีเลคตรอนอาจหมุนคงรอบตัวเองจนท่าให้มีศักยภาพการหมุนแบบออกได้เป็น 2 ประเกต คือ ทิศทางขึ้นและทิศทางลง จึงทำให้จำนวนสภาวะที่เป็นไปได้สำหรับอีเลคตรอนอิสระเพิ่มขึ้นเป็น 2 เท่า ของจำนวนในระดับหน่วยการระหว่างช่วงความเร็ว v กับ $v + \Delta v$ นั่นคือ

$$\Delta G_v = \frac{\frac{8\pi m}{h} v^3}{3} \quad v^2 \Delta v \quad \dots \dots \dots (9.40)$$

เนื่องจาก $E = \frac{1}{2} mv^2$

หรือ $v^2 = \frac{2E}{m}$ และ $v = \left(\frac{2E}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$

จะได้ $\Delta v = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{1}{2}} E^{-\frac{1}{2}} \Delta E$

ดังนั้น $\Delta G_E = 4\pi V \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} E^{-\frac{1}{2}} \Delta E \quad \dots \dots \dots (9.41)$

หลักสถิติกางอุณหพลศาสตร์ที่จะนำมาใช้กับระบบของอีเลคตรอนอิสระในโลหะคือ หลักสถิติของเพอร์มี-ดิแรค ซึ่งมีรูปแบบของฟังค์ชันการกระจายดังนี้

$$\Delta N = \frac{\Delta G_E}{[e^{(E-\mu)/kT}] + 1}$$

เมื่อแทนค่า ΔG_E จากสมการ (9.41) จะได้

$$\Delta N = A \frac{\frac{1}{2} E}{[e^{(E-\mu)/kT}] + 1} \Delta E \quad \dots \dots \dots (9.42)$$

$$\text{เมื่อ } A = 4\pi V \left(\frac{2m}{h} \right)^{\frac{3}{2}}$$

พิจารณาเฉพาะที่เป็นฟังก์ชันของพลังงาน E ดังกำหนดให้

$$F(E) = \frac{1}{[e^{(E-\mu)/kT}] - 1} \quad \dots \dots \dots (9.43)$$

สมการ (9.43) เรียกว่า "ฟังก์ชันเพอร์มี" ซึ่งจะมีค่าต่าง ๆ กันตามพลังงาน E ที่มีค่าตั้งแต่ต่ำสุดคือ 0 โดยอาจมีการพิจารณาเป็นล่าดับดังนี้

1. เมื่อ μ มีค่าน้อยจนประมาณว่า $\mu/kT \ll 0$ จะได้ว่า

$$e^{(E-\mu)/kT} \gg 1$$

จะทำให้ $F(E)$ มีรูปแบบตรงกับฟังก์ชันของแมกซ์เวล-โบลทซ์曼
ดังนี้

$$F(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/kT}} \quad \dots \dots \dots (9.44)$$

2. เมื่อ μ มีค่ามากจนทำให้ $\mu/kT \gg 1$ และค่า $F(E)$ พิจารณาได้
ตามพลังงาน ดังต่อไปนี้

ถ้า $E \ll \mu$ จะได้ $(E-\mu)/kT \ll 0$
ดังนั้น

$$F(E) = 1 \quad \dots \dots \dots (9.45)$$

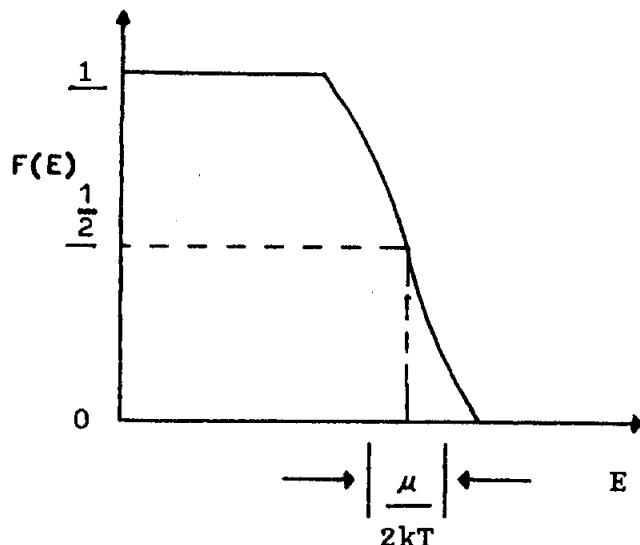
ถ้า $E \gg \mu$ จะได้ $(E-\mu)/kT \gg 0$
ดังนั้น

$$F(E) = e^{(\mu-E)/kT} \quad \dots \dots \dots (9.46)$$

ถ้า $E = \mu$ จะได้ $(E-\mu)/kT = 0$
ดังนั้น

$$F(E) = \frac{1}{2} \quad \dots \dots \dots (9.47)$$

ค่า $F(E)$ ที่ได้พิจารณาแล้วจะเห็นว่า $F(E)$ จะมีค่ามากที่สุดเป็น 1 และจะลดลงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลจนมีค่าเป็น 0 ตั้งแต่ด้วยการความสัมพันธ์ระหว่าง $F(E)$ กับ E ส่วนรับระบบอิเลคตรอนอิสระที่ T ได้ ๆ ต่อไปนี้



รูปที่ 9.7 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $F(E)$ กับ E ที่ระดับ T ได้ ๆ

ในการนี้ที่อุณหภูมิต่ำมากจน $T \rightarrow 0^{\circ}\text{K}$ หรือ $\frac{1}{kT} \rightarrow 0$ ดังนั้น

ช่วงที่ฟังค์ชันเพอร์มี $F(E)$ จะลดลงจาก 1 ไปเป็น 0 ส่วนรับระบบอิเลคตรอนอิสระจะได้

$$F(E) = 1 \text{ เมื่อ } E < \mu$$

$$\text{และ } F(E) = 0 \text{ เมื่อ } E > \mu$$

การใช้หลักสถิติของเพอร์มี-ดิแรคกับก้าช้อร์กอิเลคตรอนนับว่าเหมาะสมอย่างยิ่ง และตรงกับหลักการกีดกันของเพาล์ 狄ยกเฉพาะเมื่อพิจารณาที่อุณหภูมิต่ำสุด ถึงสูงของสาสัมบูรณ์ จะทำให้ระบบอยู่ในระดับพลังงานต่ำสุดที่เรียกว่า "สภาวะพื้นฐาน" (Ground state) แต่เนื่องจากจะมีอนุภาคเกินกว่าหนึ่งตัวในสภาวะส่วนรับอนุภาคหนึ่ง ๆ ไม่ได้ ดังนั้น พลังงานที่ต่ำสุดของระบบจึงมีอิเลคตรอนทั้งหมดอยู่ในสภาวะต่าง ๆ ที่ว่างอยู่ทุกสภาวะจนถึงต่ำสุดท้าย ซึ่งจะมีพลังงานเท่ากับ μ มีค่าค่อนข้างสูง เพราะว่าสภาวะพลังงานต่ำดลงไปมีอิเลคตรอนอยู่จนเต็มแล้ว นั่นคือระบบนี้จะมีพลังงานโดยเฉลี่ยไม่เป็นสูงที่อุณหภูมิสูงสัมบูรณ์

อิเลคตรอนอิสระในโลหะ

ปรากฏการณ์ในการพิจารณาหัวลักษณะเชิงอุณหพลศาสตร์มาใช้โดยการเปรียบเทียบระบบมหากาศด้วย ได้กับระบบกําชื่อคุณคติ ซึ่งไม่มีปฏิกริยาของห่วงอนุภาคที่เป็นส่วนประกอบของห้อง ทั้งหลายของระบบ หรืออาจเรียกระบบทองการสิ่งสະเกื้อนภายในของแข็งว่าเป็น "กําชื่อฟอน" และการแพร่รังสีของวัตถุค่าว่าเป็น "กําชื่อฟอน" สําหรับปรากฏการณ์การนำไฟฟ้าและการนำความร้อนได้ดีของโลหะนั้น เนื่องมาจากอิเลคตรอนอิสระในโลหะสามารถเคลื่อนที่ออกจากวงนอกสุดของอะตอมในผลิกได้โดยง่ายจึงกระเจาของญี่บุริเวสนิวโลหะ เมื่อเทียบกับระบบกําชื่อคุณคติอาจจะเรียกอิเลคตรอนอิสระเหล่านี้รวมกันว่า "กําชื่ออิเลคตรอน" โดยไม่คิดแรงกระทำระหว่างอิเลคตรอนเนื่องจากสนามไฟฟ้าของแต่ละอิเลคตรอน

เมื่อเทียบกําชื่ออิเลคตรอนกับกําชื่อเมื่อยที่ความกดดันต่ำจนถือได้ว่ามีคุณสมบัติ เช่นเดียวกับกําชื่อคุณคติได้ โดยอาศัยหลักแห่งความไม่แน่นอนของไฮเซนเบิร์ก (Heisenberg uncertainty principle) พิจารณาเงื่อนไขดังนี้

$$\text{เมื่ออุณหภูมิ } T = 300^\circ\text{K}$$

$$\text{จะได้ } kT = 4 \times 10^{-14} \text{ ergs}$$

(เมื่อ k เป็นค่าคงที่ของ Boltzmann = $1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$)

$$\text{มีความกดดัน } P = 10^6 \text{ dyne/cm}^2$$

$$\text{และกําชื่อเมื่อมโนเลกุล มีมวล } m = \frac{4}{6 \times 10^{23}} \text{ กรัม}$$

จากสมการสภาวะของกําชื่อคุณคติ

$$PV = NkT$$

$$\text{หรือ } \frac{N}{V} = \frac{P}{kT}$$

นั่นคือ ความหนาแน่นของกําชื่อคิดเป็นจำนวนโนเมเลกุลต่อปริมาตรจะได้

$$\frac{N}{V} = \frac{10^6}{(1.38 \times 10^{-23}) (300)} = 2.5 \times 10^{19} \frac{\text{โนเมเลกุล}}{\text{ปริมาตร}}$$

9.7 การหาค่าของ μ

การหาค่าของ μ ที่มีความสัมพันธ์กับพลังงาน E ตามฟังค์ชันเพอร์มีสามารถหาได้จากฟังค์ชันการกระจายตามสมการ (9.42) โดยที่ทราบจำนวนอิเลคโทรนอิสระทั้งหมดของระบบ ตั้งนั้นถ้าพิจารณาการกระจายรวมกันจะได้ $\Sigma \Delta N = N$ หรือถ้าหากจะพิจารณาได้ว่าระดับพลังงานของอนุภาคทั้งหลายอยู่ห่างกันไม่นักนักจะใช้วิธีการรวมกันแบบอินทิเกรชันได้ ดังนี้

$$N = A \int_0^{\infty} \frac{E}{[e^{E-\mu/kT}] - 1} dE \quad \dots \dots \dots (9.48)$$

โดยที่

$$\Delta N = A \frac{(E)^{\frac{1}{2}}}{[e^{E-\mu/kT}] - 1} dE \quad \text{และ } 0 \leq E \leq \infty$$

เขียนรูปแบบของอินทิเกรชันเสียใหม่ จะได้

$$\int_0^{\infty} F(E) \chi(E) dE$$

โดยที่ $F(E)$ คือฟังค์ชันเพอร์มี

และ $\chi(E)$ คือฟังค์ชันธรรมชาติของ E

ดังนั้น การหาค่าอินทิเกรชันแบบแยกส่วนจะได้

$$\int_0^{\infty} F(E) \chi(E) dE = \left[F(E) \chi(E) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} F'(E) \chi(E) dE \quad \dots \dots \dots (9.49)$$

$$\text{โดยที่ } F'(E) = \frac{dF}{dE}$$

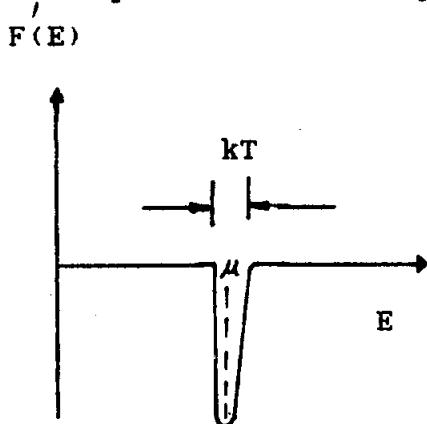
$$\text{และ } \chi(E) = \int_0^E (E') dE'$$

ถ้าพิจารณาสมการ (9.49) แบบแยกส่วน $[F(E) \chi(E)]_0^\infty$ โดยแทนค่า $E = \infty$ จะได้

$$F(\infty) = 0 \text{ และ } E = 0 \text{ จะได้ } \chi(0) = 0$$

$$\text{ส่วนพจน์หลังประกอบไปด้วย } F'(E) = \frac{dF}{dE} \text{ โดยที่ } T \text{ มีค่าสูงสุดเป็น } 1$$

และจะลดลงเป็น 0 อายุร่วมเร็วในช่วงที่ใกล้กับค่าที่ $E = \mu$ ดังนั้น ความซันของกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง F กับ E จะเป็นสูนย์ทุกแหล่ง ยกเว้นในช่วง kT ที่ใกล้กับเมื่อ $E = \mu$ ซึ่งจะมีความซันสูงและมีค่าเป็นลบ ดังรูปที่ 9.8



รูปที่ 9.8 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $F'(E)$ กับ E

ดังนั้นสมการ (9.49) พจน์แรกจึงถือว่าไม่มีความหมาย ซึ่งจะได้

$$\int_0^\infty F(E) \chi(E) dE = - \int_0^\infty F'(E) \chi(E) dE \quad \dots \dots \dots (9.50)$$

จะเห็นว่าค่าของ $F'(E)$ จะอยู่ในช่วง kT ที่ $E = \mu$ เท่านั้น และจำกัดค่าการหาอินทิกรัลในช่วงนี้ได้ ส่วนค่าของ $\chi(E)$ จะสามารถถูกจ่ายตามแบบอนุกรมรอบจุดที่ $E = \mu$ ได้ดังนี้

$$\chi(E) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{d^m \chi}{dE^m} \right)_{\mu} (E-\mu)^m \quad \dots \dots \dots (9.51)$$

แทนค่าลงในสมการ (9.51)

$$\int_0^{\infty} F(E) \chi(E) dE = - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{d^m \chi}{dE^m} \right)_{\mu} \int_0^{\infty} F(E) (E-\mu)^m dE$$

ถ้ากำหนดรูปของ $x = (E-\mu)/kT$ ดังนี้

$$\int_0^{\infty} F'(E) (E-\mu)^m dE = -(kT)^m \int_0^{\infty} \frac{e^x}{(e+1)^2} x^m dx - \frac{\mu}{kT}$$

สำหรับเม็ดจำกัดล่าง (Lower Limit) $-\frac{\mu}{kT}$ ซึ่งมากกว่า $\frac{\mu}{kT} \gg 1$ ถือว่าเม็ดจำกัดล่างมีค่าเป็น $-\infty$ ได้

พิจารณาจากความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\int_0^{\infty} \frac{e^x}{(e+1)^2} x^m dx = I_m$$

สามารถแยกพิจารณาได้ว่า

$$\text{ถ้า } m = \text{จำนวนคี่ จะได้ } I_m = 0$$

$$\text{เมื่อ } m = 0 \text{ จะได้ } I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x}}{(e+1)^2} dx = 1$$

$$\text{และเมื่อ } m = 2 \text{ จะได้ } I_2 = \frac{\pi^2}{3}$$

ดังนั้นในที่สุดจะได้

$$\int_0^{\infty} F(E) \chi(E) dE = \sum_{m=0}^{\infty} I_m \frac{(kT)^m}{m!} \left(\frac{d^m \chi}{dm^m} \right)_{\mu} \dots \dots \dots \quad (9.52)$$

$$\text{หรือ } \int_0^{\infty} F(E) \chi(E) dE = 4(\mu) + I_2 \frac{(kT)^2}{2!} \left(\frac{d^2 \chi}{dE^2} \right)_{\mu} + \dots \dots \dots$$

ที่อุณหภูมิ $T \rightarrow 0$ จะได้

$$\int_0^{\infty} F(E) \chi(E) dE = \int_0^{\mu} \chi(E) dE \dots \dots \dots \quad (9.53)$$

และที่อุณหภูมิ T อื่น ๆ ที่สูงขึ้นกว่าศูนย์องศาสัมบูรณ์จะต้องพิจารณาพลาน์ต่อ ๆ ไปด้วย
เพร率นีช่วง kT ในขณะที่ F ลดลงจาก 1 จนเป็น 0

ถ้ากำหนดให้ E_F เป็นพลังงานที่เนื่อง $T = 0$ ซึ่งกำหนดให้ $\mu_0 = E_F$ เรียกว่า^{*}
"พลังงานเฟอร์นี" จะหาค่าของ μ ได้ดังนี้

$$\mu = E_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \frac{kT}{E_F} + \frac{\pi^4}{80} \frac{kT}{E_F}^2 + \dots \dots \right]$$

และจะหาค่าของ E_F ได้จาก

$$N = A \int_0^{E_F} \frac{1}{E^2} dE = \frac{3}{2} A \frac{E_F^3}{2}$$

เมื่อแทนค่าคงที่ A

$$A = 4\pi V \frac{2m}{h^2}^{(3/2)}$$

ดังนั้นจะได้

$$E_F = \frac{h^2}{8m} \frac{3N}{\pi V}^{(2/3)} \quad \dots \dots \quad (9.54)$$

สมการ (9.54) เป็นพลังงานของอิเลคตรอนอิสระที่ศูนย์สัมบูรณ์ที่ขึ้นอยู่กับ
จำนวนอิเลคตรอนอิสระต่อปริมาตร

ตัวอย่าง จงหาพลังงานเพอร์มิส่าหรับโลหะเงิน ความหนาแน่น 10.5×10^3 ก.ก./ม.³, น้ำหนักอุ่ดอมเท่ากับ 107, ปริมาตร 1 ลบ. เมตร และมีมวล 9.11×10^{-31} ก.ก.

วิธีทำ จากการหาจำนวนอีเลคตรอนอิสระใน 1 ลบ. เมตร

$$\frac{N}{V} = \frac{\text{ความหนาแน่น} \times \text{ตัวเลขของวากาโดร}}{\text{n้ำหนักอุ่ดอม}}$$

$$= \frac{(10.5 \times 10^3) (6.02 \times 10^{26})}{107}$$

$$= 5.86 \times 10^{28}$$

จากสมการ (9.54)

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{h^2}{8\pi} \left(\frac{3N}{\pi V} \right)^{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{(6.62 \times 10^{-34})}{(8 \cdot 9.11 \times 10^{-31})} \left(\frac{21}{22} \right)^{\frac{2}{3}} (5.86 \times 10^{28})^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

= 9.1×10^{-10} วูล หรือ 5.6 อีเลคตรอนโวอลต์

นั่นคือ พลังงานเพอร์มิส่าหรับโลหะเงิน 9.1×10^{-10} วูล หรือ 5.6 อีเลคตรอนโวอลต์

พลังงานเพอร์เมต์ (E_r) เป็นส่วนหนึ่งของพิมค์ชั้นการกระจายของอีเลคตรอน อิสระที่อุณหภูมิศูนย์สัมบูรณ์ ดังนี้

$$\Delta N_0 = \frac{\Delta G_E}{[e^{E-E_r} - e^{-kT}]} \quad \dots \dots \dots (9.55)$$

เมื่อ $E < E_r$ จะได้ $E - E_r$ เป็นค่าลบ

ดังนั้น เมื่อ $T = 0$, จะได้ $(E - E_f)/kT = -\infty$
นั่นคือ

$$\Delta N_0 = \Delta G_E = A \cdot E \cdot \frac{1}{2} \Delta E \quad \dots \dots \dots (9.56)$$

จากความสัมพันธ์แสดงว่า จำนวนอีเลคตรอนคงเดิมในระดับมหภาค
เท่ากับจำนวนส่วนที่เป็นไปได้ในระดับนั้น นั่นคือ ระดับพลังงานทั้งหลายที่มีพลังงาน
ต่ำกว่า E_f ลงไประจะมีอีเลคตรอนกระจายอยู่

และจากสมการ (9.55) จะเห็นว่า

ถ้า $E > E_f$ จะได้ $E - E_f$ เป็นค่าบวก

ดังนั้น ที่ $T = 0, (E - E_f)/kT = +\infty$

นั่นคือ

$$\Delta N_0 = 0 \quad \dots \dots \dots (9.57)$$

ในเมื่อที่ $T = 0$ จะพิจารณาได้ว่าจะไม่มีอีเลคตรอนที่ระดับพลังงานสูงกว่า
พลังงานเฟอร์เมิต์ดังนี้ เราจึงอาจให้ความหมายของพลังงานเฟอร์นี้ได้ว่า คือ พลังงาน
สูงสุดของอีเลคตรอนอิสระที่ศูนย์สัมบูรณ์และระดับพลังงานที่ตรงกับพลังงานเฟอร์นี้ก็อาจ
เรียก "ระดับเฟอร์เม" ได้

ทฤษฎี T ใด ๆ ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนอีเลคตรอนอิสระกับพลังงาน
ตามฟังค์ชันการกระจาย ซึ่งเป็นฟังค์ชันของ $E_f^{(1)}$ ที่ระดับพลังงานต่ำกว่า E_f จะ
สามารถหาได้แต่ในช่วง kT ใกล้กับ E_f ตรงบริเวณ $E = E_f$ จะเป็นฟังค์ชันแบบ
เอิกซ์โพเนนเชียล ค่าที่ได้จะลดลงจากค่าสูงสุดไปเป็นค่าต่ำสุดอย่างรวดเร็วแบบ
เอิกซ์โพเนนเชียล

9.8 การหาพลังงานทั้งหมดของอิเลคตรอนอิสระ

การหาพลังงานทั้งหมดของระบบสามารถหาได้จากความสัมพันธ์

$$U = \sum E \Delta N$$

หรือ

$$U = A \int_0^{\infty} \frac{\frac{3}{2}E}{[e^{(E-\mu)/kT}] + 1} dE \quad \dots \dots \dots (9.58)$$

จากการใช้วิธีอินทิเกรชัน โดยจะได้ว่า

$$\int_0^{\infty} F(E) \gamma(E) dE = \int_0^{\mu} \gamma(E) dE + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \left(\frac{d\gamma}{dE} \right)_{\mu} + \dots$$

เมื่อนำมาใช้หาพลังงานทั้งหมดตามสมการ (9.58) จะได้

$$U = 2 \int_0^{\mu} \frac{\mu}{E} p(E) dE + \frac{\pi^2}{3} (kT)^2 \left(\frac{dp}{dE} \right)_{\mu} \dots \dots \dots (9.59)$$

โดยที่ $p(E) dE$ คือจำนวนส่วน率ในช่วง dE

ในการหาค่าของ $\mu - E_F$ อาจพิจารณาได้จากความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$2 \int_0^{\mu} \frac{p(E)}{[e^{(E-\mu)/kT}] + 1} dE = N$$

จะได้ดังนี้

$$2 \int_0^{\mu} p(E) dE + \frac{\pi^2}{3} (kT)^2 p'(\mu) = N \quad \dots \dots \dots (9.60)$$

โดยที่ค่าต่าง ๆ อาจหาได้เมื่อพิจารณา $\mu = E_F$ ดังนี้

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\mu} p(E) dE &= 2 \int_0^{E_F} p(E) dE + 2 \int_0^{\mu} p(E) dE \\ &= N + 2p(E_F)(\mu - E_F) \end{aligned}$$

แทนค่าลงในสมการ (9.60) จะได้

$$2p(E_F)(\mu - E_F) + \frac{\pi^2}{3} (kT)^2 p'(E_F) = 0$$

นั่นคือ

$$\mu - E_F = - \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \frac{p'(E_F)}{p(E_F)} \quad \dots \dots \dots (9.61)$$

เมื่อรู้ค่า $\mu - E_F$ ในที่สุดจะหาค่าพลังงานทั้งหมดของระบบอิเลคตรอน อิสระจากสมการ (9.59) ได้ และถ้าพิจารณาพจน์แรกของสมการ (9.59) จะได้

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\mu} E p(E) dE &= 2 \int_0^{E_F} E p(E) dE + 2 \int_0^{\mu} E p(E) dE \\ &= U_o + 2E_F p(E_F)(\mu - E_F) \end{aligned}$$

และสำหรับพจน์ที่สองของสมการ (9.59) ถ้าสมมุติให้ $p' = \frac{dp}{dE}$ ในที่สุด

จะได้พลังงานทั้งหมดของอิเลคตรอนอิสระ

$$U = U_o + \frac{\pi^2}{3} (kT)^2 p(E_F) \quad \dots \dots \dots (9.62)$$

สำหรับ U_0 คือพลังงานทั้งหมดของอิเลคตรอนอิสระที่ $T = 0$ ซึ่งหาได้จาก

$$2 \int_0^{E_F} E p(E) dE \quad \text{โดยจะต้องทราบค่าของ } p(E) \text{ ซึ่งเป็นจำนวนส่วน率ในช่วงพลังงาน}$$

ระหว่าง E กับ $E + dE$

โดยที่

$$E = \frac{p^2}{2m} = \hbar^2 \frac{K^2}{2m}$$

ซึ่งจะเห็นว่า E ขึ้นอยู่กับ $K = \sqrt{K}$ เท่านั้น ดังนั้น

$$\left| p_E \cdot dE \right| = \left| p_K \cdot dK \right| = p_K \left| \frac{dK}{dE} \right| dE$$

นั่นคือ

$$p(E_F) dE = \frac{V}{(2\pi)^3} \left(4\pi K^2 \frac{dK}{dE} dE \right) = \frac{V}{4\pi^2} \frac{(2m)^{\frac{3}{2}}}{\hbar^2} E^{\frac{1}{2}} dE$$

และจะได้

$$p(E_F) = V \frac{m}{2\pi^2 \hbar^2} \left(3\pi \frac{2N}{V} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4} \frac{N}{E_F} \dots * \dots \quad (9.63)$$

$$U_0 = 2 \int_0^{E_F} E p(E) dE \dots \dots \dots \quad (9.64)$$

แทนค่า $p(E_F)$ จากสมการ (9.63) ลงในสมการ (9.64) จะได้

$$U_o = \frac{3}{5} NE_F \quad \dots \dots \dots (9.65)$$

และจากสมการ (9.62) จะได้

$$U = \frac{3}{5} NE_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{2} \left(\frac{kT}{E_F} \right)^2 - \frac{\pi^4}{16} \left(\frac{kT}{E_F} \right)^4 + \dots \right] \dots \dots (9.66)$$

สำหรับค่าพลังงานเฉลี่ยที่ศูนย์สัมบูรณ์ จะหาได้ดังนี้

$$\bar{E}_o = \frac{U_o}{N} = \frac{3}{5} E_F \quad \dots \dots \dots (9.67)$$

ตัวอย่าง จงหาพลังงานเฉลี่ยของอิเลคตรอนอิสระที่ศูนย์สัมบูรณ์ของโลหะเงิน

วิธีทำ เนื่องจากพลังงานเพอร์เม็กซ์ของโลหะเงินมีค่า 9.1×10^{-19} จูล

จากสมการ (9.67)

$$\bar{E}_o = \frac{3}{5} E_F$$

$$= \frac{3}{5} 9.1 \times 10^{-19}$$

$$= 5.4 \times 10^{-19}$$

นั่นคือ พลังงานเฉลี่ยของอิเลคตรอนอิสระที่ศูนย์สัมบูรณ์ของโลหะเงินเท่ากับ

$$5.4 \times 10^{-19}$$

9.9 การหาค่าความร้อนจำเพาะของอีเลคตรอนอิสระ

เนื่องจากความจุความร้อนสัมพันธ์โดยตรงกับพลังงานทึบหมุด และถ้าพิจารณาพลังงานทึบหมุดของระบบว่าเป็นพลังงานภายในของระบบ ดังนั้นการหาค่าความจุความร้อนหรือความร้อนจำเพาะจึงอาศัยกฎข้อที่หนึ่งทางอุณหพลศาสตร์ได้ เช่นกัน

แต่ความสัมพันธ์

$$C_x = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_x$$

และจากสมการ (9.66) ดังนี้จะได้

$$C_v = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{kT}{E_r} \right) Nk \left[1 - \frac{3\pi^2}{10} \left(\frac{kT}{E_r} \right)^2 + \dots \right]$$

หรือความร้อนจำเพาะต่อโมล จะได้

$$C_v = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{kT}{E_r} \right) R \quad \dots \dots \dots \quad (9.68)$$

ตัวอย่าง จงหาความร้อนจำเพาะของอีเลคตรอนอิสระในโลหะเงินที่อุณหภูมิห้อง
ทดลอง

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ดังนี้

$$\text{อุณหภูมิของห้องทดลอง } (27^\circ C) = 300^\circ K$$

$$\text{ค่าคงที่ของโบลท์ซmann } (k) = 1.38 \times 10^{-23} \text{ จูล/ไอนเลกูล-องศา}$$

$$\text{พลังงานทึบหมุด } (E_r) = 9.1 \times 10^{-19} \text{ จูล}$$

และจากสมการ (9.68)

$$C_v = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{kT}{E_r} \right) R$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{22}{7} \right)^2 \frac{(1.38 \times 10^{-23})(300)}{(9.1 \times 10^{-19})} \quad (8.31)$$

$$= 2.25 \times 10^{-2} \text{ จูล/โอมแคลอร์-องศาเคลวิน}$$

นั่นคือ ความร้อนจำเพาะของอิเลคตรอนอิสระในโลหะเงินเมื่อปริมาตรคงที่เท่ากับ 2.25×10^{-2} จูล/โอม-องศาเคลวิน

9.10 การหาเน昂โกรปีของอิเลคตรอนอิสระ

ความสัมพันธ์สำหรับการหาค่าเน昂โกรปีที่เปลี่ยนไปของระบบในทาง

อุณหพลศาสตร์แบบดังเดิมคือ $dS = \frac{dQ}{T}$ และจากกฎข้อที่ 3 ทางอุณหพลศาสตร์

ที่ว่า $S = 0$ ที่ศูนย์สัมบูรณ์ ตั้งนี้หมายความว่าในระบบที่อุณหภูมิ $T = 0$ จะสามารถพิจารณาได้จากความจุความร้อนของระบบดังต่อไปนี้

$$S = \int_0^T \frac{dQ}{T}$$

$$da \quad S = \int_0^T \frac{C_v dT}{T}$$

$$\text{และจาก } C_v = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{kT}{E_r} \right) Nk \left[1 - \frac{3\pi^2}{2} \left(\frac{kT}{E_r} \right)^2 + \dots \right]$$

ตั้งนี้จะได้

$$S = Nk \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{kT}{E_r} \right) \left[1 - \frac{\pi^2}{10} \left(\frac{kT}{E_r} \right)^2 + \dots \right] \dots \dots \dots \quad (9.69)$$

จะเห็นว่าที่อุณหภูมิสัมบูรณ์ ค่าของเอนโทรปีสำหรับอีเลคตรอนอิสระในโลหะเป็นคุณสมบัติที่สามารถอธิบายได้โดยอาศัยหลักสถิติความน่าจะเป็นของเอนโทรปีในทางสถิติ นั่นคือ $S = k \ln Q$ และจากที่เคยรู้มาแล้วว่าที่ $T = 0$ จะมีอีเลคตรอนอิสระในระบบหกภาคอยู่อย่างเต็มที่เป็นจำนวนหนึ่งตัวต่อหนึ่งส่วนวัว ซึ่งแสดงว่าอีเลคตรอนอิสระในโลหะโดยเฉลี่ยเท่ากับจำนวนส่วนวัวในระบบนั้น

9.11 การหาพัจล์ชั้นเฉลี่ยของอีเลคตรอนอิสระ

จากความสัมพันธ์ของแมกซ์เวลล์

$$A = U - TS$$

โดยการแทนค่า U และ S จากสมการ (9.66) และ (9.69) จะได้

$$A = \frac{3}{5} N E_F \left[1 - \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{E_F} \right)^2 + \dots \right] \quad \dots \dots \dots \quad (9.70)$$

9.12 การหาความกดดันของกําชีอีเลคตรอน

ความกดดันของระบบอีเลคตรอนอิสระซึ่งเรียกว่าเป็นกําชีอีเลคตรอนสามารถหาได้ในรูปพาร์เซย์ลติวีทีฟ ดังนี้

$$p = - \left(\frac{\partial A}{\partial V} \right)$$

$$\text{จากสมการ (9.70) และแทนค่า } E_F = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{3N}{V} \right)^{\frac{2}{3}}$$

ดังนี้จะได้

$$p = \frac{2}{5} \frac{NE_F}{V} \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{E_F} \right)^2 + \dots \right]$$

หรือเขียนให้อยู่ในรูปความสัมพันธ์กับพลังงานทั้งหมด U เสียใหม่ได้ดังนี้

$$p = \frac{2}{3} \frac{U}{V} \quad \dots \dots \dots (9.71)$$

ทั้งนี้โดย $pV = NkT$ และ $U = \frac{3}{2} NkT$ นั่นเอง

บทสรุปและค่าจำากัดความที่ควรรู้

1. Black body (วัตถุต่าง) หมายถึงวัตถุที่สามารถดูดกลืนพลังงานจากกระบวนการรังสีได้ทั้งหมดในทุก ๆ ทิศทางและทุก ๆ ความยาวช่วงคลื่นโดยไม่มีการสะท้อนกลับและการส่งผ่านพลังงาน
2. ความเข้มการแผ่รังสีเชิงスペคตรัมระบุทิศทาง หมายถึง พลังงานการแผ่รังสีโดยพื้นผิวแผ่รังสีต่อ 1 หน่วยมุมตัน โดยพิจารณาที่อุณหภูมิพื้นผิวค่าหนึ่ง
3. ความเข้มการแผ่รังสีทั้งหมดระบุทิศทาง หมายถึง พลังงานการแผ่รังสีโดยพื้นผิวแผ่รังสีต่อ 1 หน่วยเวลา ต่อ 1 หน่วยพื้นผิวจาย และต่อ 1 มุมตัน โดยพิจารณาที่อุณหภูมิพื้นผิวค่าหนึ่ง
4. พื้นผิวแผ่รังสีหรือพื้นผิวนิริจ หมายถึง พื้นผิวที่ปล่อยพลังงานออกมานៅองจากการแผ่รังสีของพื้นผิวนั้น
5. พื้นผิวอาบรังสี หมายถึง พื้นผิวที่ได้รับพลังงานการแผ่รังสีจากพื้นผิวแผ่รังสี
6. พื้นผิวจาย หมายถึง พื้นผิวแผ่รังสีในทิศทางตั้งฉากกับทิศทางการแผ่รังสี
7. Solid angle (มุมตัน) หมายถึง มุมที่แผ่คลุมจากจุดอ้างอิงบนพื้นผิวแผ่รังสีไปยังพื้นผิวอาบรังสี มีหน่วยเป็น steradian หรือ

$$d\omega = \frac{dA_1}{r^2}$$

เมื่อ dA_1 เป็นพื้นผิวอาบรังสี
 r เป็นรัศมีของทรงกลม

8. Spectral (เชิงスペคตรัม) หมายถึง ปริมาณที่ขึ้นอยู่กับความยาวช่วงคลื่น
9. Directional Spectral (เชิงスペคตรัมระบุทิศทาง) หมายถึง ปริมาณที่ขึ้นอยู่กับความยาวช่วงคลื่นและทิศทางการแผ่รังสี
10. Directional total (ทั้งหมดระบุทิศทาง) หมายถึง ปริมาณที่ไม่ขึ้นอยู่กับความยาวช่วงคลื่นแต่ขึ้นอยู่กับทิศทางการแผ่รังสี

11. กําลังการแผ่รังสีเชิงスペคตรัมระบุทิศทาง หมายถึง พลังงานการแผ่รังสีโดยพื้นผิวแผ่รังสีต่อ 1 หน่วยเวลา ต่อ 1 หน่วยพื้นผิวแผ่รังสี(พื้นผิวนิริง)ต่อ 1 หน่วยความยาวช่วงคลื่นและต่อ 1 หน่วยมุนตันโดยพิจารณาที่อุณหภูมิผิวค่าหนึ่ง
12. กําลังการแผ่รังสีทั้งหมดระบุทิศทาง หมายถึง พลังงานการแผ่รังสีโดยพื้นผิวแผ่รังสีต่อ 1 หน่วยเวลา ต่อ 1 หน่วยพื้นผิวแผ่รังสี และต่อ 1 หน่วยมุนตันโดยพิจารณาที่อุณหภูมิค่าหนึ่ง
13. การกระจายกําลังการแผ่รังสีเชิงスペคตรัมของแพลงค์

$$E_{\nu\lambda}(T) = \pi I_{\nu\lambda}(T)$$

14. Stefan-Boltzmann law (กฎของสเตฟาน-โบลท์ซมาน)

$$E_{\nu}(T) = U_e = \sigma T^4$$

และกฎของสเตฟาน-โบลท์ซมานเกี่ยวกับดัชนีการหักเห

$$E_{\nu,m}(T) = n \frac{2}{6} T^4$$

15. Wien displacement law (กฎการจัดของเวียน)

$$T \cdot \lambda_{max} = 2897.6 \text{ } \mu\text{m.}^{\circ}\text{K}$$

และกฎของเวียนเกี่ยวกับดัชนีการหักเห

$$T \lambda_{max} = n T \lambda_{max} = 2897.6$$

16. ความสัมพันธ์ระหว่างศักย์เคมีและฟังค์ชันกิบส์

สําหรับกําช屁สม

$$\mu = g + RT \ln X$$

เมื่อ X เป็นอัตราส่วนของส่วนประกอบใด ๆ ของระบบ

สําหรับระบบที่มีส่วนประกอบเป็นชนิดเดียวกัน

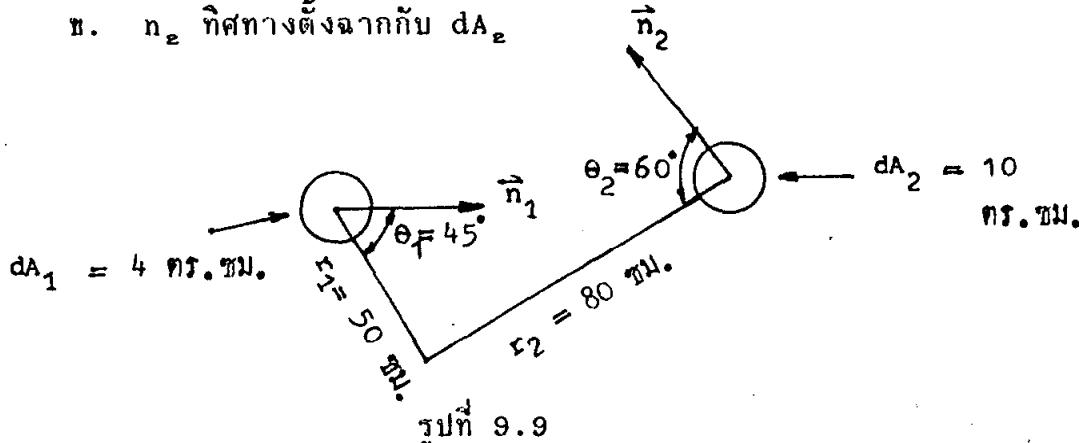
$$\mu = g$$

แบบฝึกหัดบทที่ 5

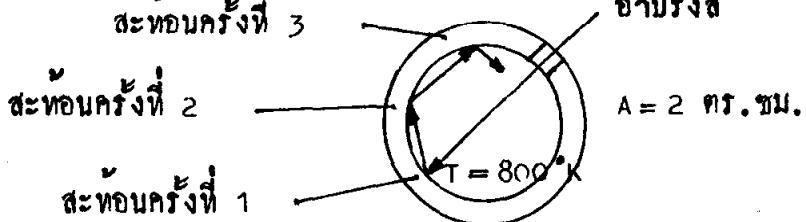
1. จงคำนวณหาค่ามุมตันที่แผ่คลุมจากจุดอ้างอิง 0 ไปยังพื้นผิว dA_1 และ dA_2 โดยกำหนดรายละเอียดดังรูปที่ 9.9 เมื่อ

ก. n_1 ก็ศทางตั้งฉากกับ dA_1 ,

ข. n_2 ก็ศทางตั้งฉากกับ dA_2



2. พิจารณาการส่องสว่างของรังสีตามรูปที่ 9.10 ต่อไปนี้
จะเห็นครั้งที่ 3 ของรังสี



เมื่อรังสีตกกระทบผ่านรูเปิดเข้าไปในพองจะส่องสว่างทั่วทุกภายนอกภายในพอง
ครั้งจนนับครั้งไม่ถ้วน แต่ละครั้งที่ส่องสว่าง พองจะดูดกลืนพลังงานเอาไว้ทุก
ครั้ง ในทางปฏิบัติถือว่าพองดูดกลืนพลังงานไว้ได้หมด ซึ่งเป็นลักษณะของ
วัตถุดำ จงคำนวณหา

ก. พลังงานการแผ่รังสีทั้งหมดโดยคลุมครั้งทรงกลมของรูเปิดต่อ 1 หน่วยเวลา

เวลา

ข. พลังงานการแผ่รังสีทั้งหมดโดยระบุทิศทาง $\beta = 60^\circ$ ต่อ 1 หน่วยเวลา

เวลา

3. กำหนดให้พื้นผิวแผ่นรังสีของวัตถุค่ามอุณหภูมิ $T = 100^{\circ}\text{K}$ จะคำนวณหา
- จำนวนเศษส่วนของกำลังการแผ่นรังสีทั้งหมดที่ $\lambda < 5 \mu\text{m}$
 - ถ้าพลังงานการแผ่นรังสีในช่วงความยาวช่วงคลื่นค่าหนึ่งเป็น 10.5% ของพลังงานการแผ่นรังสีทั้งหมดที่มอุณหภูมิ $T = 1000^{\circ}\text{K}$ และ ความยาวช่วงคลื่นนั้นคือเท่าใด
 - ความยาวช่วงคลื่นของกฎการจัดของเวียนที่มอุณหภูมิ $T = 1000^{\circ}\text{K}$
4. ความร้อนที่เกิดจากการบินนิวเคลียร์แบบพิชชันทำให้มอุณหภูมิสูงถึง 10° เคลวิน ถ้าเหตุการณ์นี้เกิดขึ้นภายในทรงกลมรัศมี 5 ซม. จงหาพลังงานการแผ่นคลื่นไฟฟ้าแม่เหล็กทั้งหมดจากผิวทรงกลม
5. อุณหภูมิที่ผิวของดวงอาทิตย์ $T_0 = 5500$ เคลวิน รัศมีของดวงอาทิตย์ $R = 7 \times 10^{10}$ ซม. ส่วนรัศมีของโลก $r = 6.37 \times 10^6$ ซม. ระยะห่างจากโลกถึงดวงอาทิตย์โดยเฉลี่ย $L = 1.5 \times 10^{13}$ ซม. โดยสมมติว่า ทั้งโลกและดวงอาทิตย์สามารถดูดกลืนไฟฟ้าแม่เหล็กที่ تمامข้างดาวทั้งสองได้หมดและ ภายใต้สภาวะคงตัวโลกจะมีอุณหภูมิเฉลี่ย T คงที่ จงหาอุณหภูมิ T
6. กำหนดให้ความหนาแน่นของโลหะอะลูминัม $= 2.7 \times 10^3 \text{ กก./ม}^3$. และ น้ำหนักของอะลูминัม $= 26.98$ จงหาค่า E , สำหรับโลหะอะลูминัมนี้
7. จากข้อ 6 จงหาว่าอีเลคตรอนอิสระในโลหะอะลูминัมจะเพิ่มค่าความจุความร้อนจำเพาะต่ออนุโลดให้แก่โลหะอะลูминัมทั้งแท่งเท่าใดที่อุณหภูมิห้อง โดยเทียบ กับค่า $3R$ ที่ควรจะเป็นค่าความจุความร้อนจำเพาะของโลหะที่ไวปีกอุณหภูมิห้อง
8. กำหนดให้โลหะทองแดงที่ความหนาแน่น $= 8.96 \times 10^3 \text{ กก./ม}^3$. และน้ำหนักของอะลูมิเนียม $= 63.54$ จงหาความกดดัน (โดยประมาณ) ของก๊าซอีเลคตรอน ในโลหะทองแดงในหน่วยของนิวตันต่อตารางเมตรที่ 0 องศาเคลวิน
9. จงหาเอนโรกรปีของก๊าซอีเลคตรอนในโลหะที่เปลี่ยนไป ถ้าอุณหภูมิสูงขึ้นจาก

เฉลยค่าตอบแบบฝึกหัดบทที่ 9

1. n. 1.13×10^{-3} สเตอเรเดียม
 ๙. 0.78×10^{-3} สเตอเรเดียม
 2. t.l. 4.64 W
 ๙. 0.74 W
 3. ก. 0.6337 หรือ 63.37%
 ๙. 2.222 μm
 - R. i. 8976 μm
 4. 3.78×10^4 วูล
 5. 270°K
 6. 18.7×10^{-10} วูล
 7. 1.09×10^{-2} R
 8. 39.4×10^9 นิวตัน/ ม^2 . หรือ 394,000 บาร์ยากราศ
 9. 2 เท่า
-