

บทที่ 7

หลักสถิติในทางอุณหพลศาสตร์

โดยอาศัยกฎบัญชีจันส์สำหรับกําชื่อุณมติที่กล่าวไว้ในบทที่ 6 แสดงให้เห็นว่า ผลลัพธ์ที่ได้จากการทดลองค่าคงที่วัดได้จากการทดลอง และถ้าระบบกําชีพจารณาแล้วว่า เป็นระบบมหภาค (Macroscopic system) ซึ่งจำเป็นจะต้องอาศัยวิธีการทางสถิติเข้ามาช่วยในการหาค่าที่ควรจะเป็นสำหรับระบบทั้งหมด เช่น ค่าเฉลี่ย และค่าของสมាមิกส่วนใหญ่ โดยไม่ต้องสนใจในรายละเอียดของแต่ละองค์ประกอบมากนัก

ในปัจจุบันการศึกษาด้านหลักการในทางสถิติซึ่งในบางครั้งเรียกว่า "กลศาสตร์เชิงสถิติ" (Statistical mechanics) ที่มีความสัมพันธ์กับวิชาอุณหพลศาสตร์และกฎบัญชีจันส์ของกําชีพช่วยเหลือการของเอนโทรปีได้ หรือ ระบบที่สามารถหาพลังงานของอนุภาคน้ำหนักทั้งหมดที่ประกอบกันขึ้นเป็นระบบได้ จะสามารถหาสมการของสภาวะและสมการพลังงานของระบบนั้นได้โดยอาศัยหลักการทางสถิติเช่นเดียวกัน

นอกจากกฎบัญชีควบตั้มที่เกี่ยวกับอนุภาคน้ำหนักของคลื่นแสงที่เรียกว่า "โฟตอน" (photon) และอนุภาคน้ำหนักของคลื่นที่เกิดจากการถ่ายทอดพลังงานที่ต่อเนื่องกันภายในวัตถุที่เรียกว่า "ไฟฟ่อน" ตลอดจนพลังงานในทุกรูปแบบสามารถนำเอาหลักการทางสถิตามาใช้ในการศึกษาได้ด้วย

7.1 สมมุติฐานเบื้องต้น (Basic assumption)

ในการศึกษาทางกฎบัญชีจันส์ของกําชีพจะต้องอาศัยสมมุติฐานหลายประการ ซึ่งจำต้องระบุคุณสมบัติของอนุภาคน้ำหนักของกําชีพให้เหมือนหนึ่งว่า กําชีพมีอัตราเร็วและทิศทางของการเคลื่อนที่แบบไม่จำกัด และเนื่องจากสมมุติฐานเหล่านี้ได้ช่วยให้กฎบัญชีจันส์สำหรับกําชีพได้ถูกต้อง จึงจำต้องนำมาใช้ในหลักสถิติทางอุณหพลศาสตร์อีกด้วย

พิจารณาระบบมหภาคอิสระใดๆ ก็มีพลังงานของระบบค่าหนึ่ง (E) และมีจำนวนอนุภาคน้ำหนัก N โดยปริมาณทั้งสองนี้จะถือว่าเป็นค่าคงที่ ทั้งนี้ เพราะไม่มี

การแลกเปลี่ยนพลังงานระหว่างระบบกับสิ่งแวดล้อมแล้วถือว่าไม่มีการถ่ายเทมวลเข้าหรือออกจากระบบ ดังนั้น โดยสมมุติฐานนี้จึงมีการกระจายอนุภาคตามขนาดของพลังงาน E ของระบบ และจำนวนอนุภาคทั้งหมด N โดยมีความเป็นไปได้เท่า ๆ กัน

สำหรับการจำแนกระบบมีภาคซึ่งสามารถจำแนกได้เป็น 2 ประเทกคือระบบที่ประกอบด้วยอนุภาคที่เหมือนกันหมด กับระบบที่ประกอบด้วยอนุภาคที่ไม่เหมือนกันเดียว เช่นอนุภาคที่เหมือนกัน N ตัว เมื่อยูร่วมกันจะเรียกว่าเป็น "กลุ่ม" โดยที่อนุภาคหนึ่งอาจหมายถึงอะตอมหนึ่งหรือกลุ่มของอนุภาคที่เหมือนกันชุดหนึ่ง ดังนั้นกลุ่มอนุภาคที่ประกอบด้วยอะตอมซึ่งแยกกันอยู่อย่างโดดเดี่ยว เราอาจเรียกอย่างง่าย ๆ ว่า "กลุ่มหรือระบบ"

ในการศึกษาฟังค์ชันการกระจายความเร็วหรือความพลังงาน ในทางทฤษฎีจะนิส่างหันว่า เห็นได้ว่า การกระจายของอนุภาคขึ้นอยู่กับจำนวนของอนุภาคและพลังงานหรือความเร็วซึ่งสามารถหาค่าต่างๆของระบบได้ เช่น ความกดดัน อุณหภูมิ และความจุความร้อน ดังนั้น การนำเอาหลักการทั่วไปมาใช้ในกระบวนการ การของวิชาอุณหพลศาสตร์จึงถือเป็นการศึกษาถึง "ความน่าจะเป็น" (probability) ของการกระจายของอนุภาคที่เป็นไปตาม "ระดับพลังงาน" (energy level) หรือ "สภาวะ" (state) ที่อาจเป็นไปได้ทั้งหมดของระบบ

การหาความน่าจะเป็นของการกระจายของอนุภาคที่เป็นไปตามระดับพลังงานหรือสภาวะที่เป็นไปได้ทั้งหมดของระบบจะต้องอาศัยการจำแนกระดับหรือสภาวะ พลังงานซึ่งแบ่งออกได้เป็น 2 ประเทก คือ สภาวะแมกโนแคล (macrostate) กับ สภาวะมיקרอแคล (microstate) สภาวะมหภาคนี้สามารถพิจารณาได้จากกลุ่มอนุภาคที่เหมือนกันหรือต่างกันได้ ส่วนสภาวะมูลภาคนั้นใช้สำหรับกลุ่มอนุภาคที่เหมือนกันเท่านั้น โดยการนับรวมจำนวนทั้งหมดของอนุภาคที่อยู่ในแต่ละระดับพลังงานเป็นสภาวะมูลภาค

เนื่องจากสภาวะมูลภาคระบุรายละเอียดของการกระจายอนุภาคมากกว่า สภาวะมหภาค ดังนั้นเราจึงกล่าวถึงสมมติฐานเบื้องต้นของหลักสถิติกางอุณหพลศาสตร์ ที่ชัดเจนอย่างขึ้นอีกดังนี้

"สภาวะมูลภาคที่เป็นไปได้ทั้งหมดของกลุ่มอนุภาคอิสระจะนีการกระจายอนุภาคไปตามสภาวะมูลภาคใด ๆ นั้นได้เท่าเทียมกัน และด้วยความน่าจะเป็นเท่ากัน ทุกสภาวะ"

ความน่าจะเป็นในสภาวะมหภาคหนึ่ง ๆ อาจมีสภาวะชุลภาคร่วมกันหนึ่งที่เป็นไปได้เท่ากันหมด จึงถือได้ว่า จำนวนสภาวะชุลภาคร่วมกันหนึ่งที่เป็นไปได้เท่ากันหมด เป็น "ความน่าจะเป็นในทางอุณหพลศาสตร์ได้"

ถ้าสมมติให้ k เป็นลักษณะของสภาวะมหภาค และ $p(k)$ เป็นความน่าจะเป็นของสภาวะของระบบ ดังนั้น P_k จึงถือได้ว่า เป็นจำนวนนับในทางสถิติของสภาวะทางมหภาค

สำหรับกลุ่มอนุภาคใด ๆ ที่รวมกันอยู่เป็นจำนวนมาก เมื่อศึกษาสภาวะมหภาคหนึ่ง ๆ แล้วนำมารวมกันโดยที่ในสภาวะมหภาคหนึ่งมีสภาวะชุลภาคร่วมกันหนึ่งที่เป็นไปได้เท่ากันหมด ดังนั้น จะได้ จำนวนสภาวะชุลภาคร่วมกันหนึ่งที่เป็นไปได้ทั้งหมดของอนุภาคทั้งกลุ่ม ซึ่งเรียกว่า "ความน่าจะเป็นทางอุณหพลศาสตร์"" นั่นคือ

ถ้าให้ Ω แทนความน่าจะเป็นทางอุณหพลศาสตร์ของกลุ่ม ดังนั้นจะหาความสัมพันธ์ได้ว่า

$$\Omega = \sum_k P_k \quad \dots \dots \dots (7.1)$$

การนำหลักสถิตามาใช้เพื่อหาค่าเฉลี่ยของจำนวนใด ๆ ของกลุ่มอนุภาคที่มีการกระจายตามระดับพลังงานต่าง ๆ จะขึ้นอยู่กับเวลา เช่น การวัดค่าความกดดันของก๊าซในภาชนะก็คือ การหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของโน้ม-men ตั้มที่ผันผวนของภาชนะในหนึ่งตารางฟันที่ต่อเวลา ซึ่งถือว่าเป็นค่าเฉลี่ยตามเวลา การหาจำนวนเฉลี่ยของอนุภาค \bar{N}_i ของระดับพลังงาน i ของระบบหรือกลุ่มอนุภาคที่เป็นไปได้ต้องอาศัยความน่าจะเป็นทางอุณหพลศาสตร์ดังกล่าว

ถ้าให้ N_{ik} เป็นจำนวนอนุภาคของระดับพลังงาน i ในสภาวะมหภาค k ดังนั้นจำนวนเฉลี่ยของกลุ่มอนุภาคระดับ i จะเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\text{ค่าเฉลี่ยตามกลุ่ม} \quad \bar{N}_i = \frac{1}{N} \sum_k N_{ik} \cdot p_k \Delta N \quad \dots \dots \dots (7.2)$$

โดยที่ N เป็นจำนวนระบบที่คล้ายกับระบบที่พิจารณา ซึ่ง

$$N = \sum_k p_k \Delta N \quad \dots \dots \dots (7.3)$$

เมื่อ ΔN เป็นจำนวนระบบที่เก่ากันในทุกสภาวะมหภาค ดังนี้

$$N_1 = \frac{\sum_k N_{1k} P_k}{\sum_k P_k}$$

หรือ $N_1 = \frac{1}{\Omega} \sum_k N_{1k} P_k \dots \dots \dots (7.4)$

ถ้ากำหนดให้ t เป็นช่วงเวลาทั้งหมดที่ระบบอยู่ในสภาวะมหภาคล่าสุด k ดังนี้จะได้

$$t = \sum_k P_k \Delta t \dots \dots \dots (7.5)$$

โดยที่ Δt เป็นช่วงเวลาอันสั้นที่สภาวะมหภาคหนึ่งจะเป็นไปได้ ถ้าพิจารณาในช่วงเวลาที่นานเพียงพอ t โดยที่ช่วงเวลาอันสั้นนี้เก่ากันหมดทุกสภาวะมหภาค ดังนี้

$$\text{ค่าเฉลี่ยตามเวลา } N_1 = \frac{1}{t} \sum_k N_{1k} P_k \Delta t$$

หรือ $N_1 = \frac{1}{\Omega} \sum_k N_{1k} P_k \dots \dots \dots (7.6)$

จะเห็นว่าค่าเฉลี่ยตามกลุ่มสมการ (7.4) และค่าเฉลี่ยตามเวลาสมการ (7.6) ตรงกัน และเป็นไปตามสมมติฐานเบื้องต้นที่ว่า ทุกสภาวะรุ่ลภาคเป็นไปได้นั้นจะเก่ากัน

7.2 หลักสถิติของแมกซ์เวล - โบลต์มาน (Maxwell-Boltzmann statistics)

เราจะนำเอาวิธีการของกลศาสตร์สถิติ (statistical mechanics) มาพิจารณาเกี่ยวกับจำนวนของพลังงานที่จำกัดและกระจัดกระจายอยู่ภายในเหตุการณ์ที่สามารถเปลี่ยนแปลงได้ สภาวะของเหตุการณ์ของอนุภาคมีคุณสมบัติดังนี้

1. อนุภาคที่มีลักษณะเหมือนกัน และมีการหมุนรอบตัวเอง สามารถเคลื่อน

ที่ไปได้อ่าย่างกว้างขวางและเห็นได้ชัด โนเลกุลของก๊าซที่เคลื่อนที่ก็ถือเป็นอนุภาคในลักษณะดังกล่าวนี้

2. อนุภาคที่มีลักษณะเหมือนกันและมีการหมุนรอบตัวเองเป็นศูนย์ หรือมีการหมุนรอบตัวเองที่หักล้างกัน อนุภาคเหล่านี้จะสามารถกระจายไปตามระดับพลังงานได้อย่างไม่จำกัด และไม่ค่อยมีหลักเกณฑ์

3. อนุภาคที่มีลักษณะเหมือนกันและมีการหมุนรอบตัวเองในทิศทางหนึ่งและไม่สามารถสังเกตุเห็นได้ พลังงานในแต่ละสภาวะไม่ซ้ำซ้อนกัน แต่การเคลื่อนที่ของอนุภาคก็เป็นไปตามกฎเกณฑ์

7.2.1 กฎการกระจายของแก๊สเวล-โบลต์มาน

(Maxwell-Boltzmann distribution Law)

พิจารณาเหตุการณ์อย่างรวม ๆ N โนเลกุล ซึ่งมีพลังงานตามลำดับสภาวะทางมหาด k ค่าและพลังงานจะมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ตั้งแต่ 1 จนถึง k ดังนี้ E_1, E_2, \dots, E_k

ถ้าสมมุติให้โนเลกุลตัวที่ n_i มีพลังงาน E_i และพลังงานรวมเป็น E ดังนั้นโอกาสที่จะเป็นไปได้ของการกระจายของโนเลกุลระหว่างพลังงาน k ค่าสามารถแยกได้ใน 2 เงื่อนไข ดังนี้

1. ตามกฎการอนรักษาระบบทองโนเลกุล (Conservation of molecule)

$$\Sigma n_i = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = N \dots \dots \dots (7.7)$$

2. ตามกฎการอนรักษาระบบทองพลังงาน (Conservation of energy)

$$\Sigma n_i E_i = n_1 E_1 + n_2 E_2 + \dots + n_k E_k = E \dots \dots \dots (7.8)$$

ถ้าให้ g เป็นความน่าจะเป็นลำดับก่อน (Priori probability) ที่โนเลกุลจะมีพลังงาน E ซึ่งมีค่าได้ตั้งแต่ 1 จนถึง k ดังนั้นความน่าจะเป็น P(n) ของการกระจายจัดได้ จะกำหนดด้วย

$$P(n) = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_k!} (g_1)^{n_1} (g_2)^{n_2} \dots (g_k)^{n_k} \dots \dots \dots (7.9)$$

ด้วยเหตุนี้ การกระจายของความน่าจะเป็นที่มากที่สุดจะคล้ายกับสมการ

$$-\sum \ln n_i \delta n_i + \sum \ln g_i \delta n_i = 0 \quad \dots \dots \dots (7.10)$$

พิจารณาที่เงื่อนไข δn_i จะเป็นจริงจากสมการ (7.7) และ (7.8) จะได้

$$\sum \delta n_i = \delta n_1 + \delta n_2 + \dots + \delta n_k = 0 \quad \dots \dots \dots (7.11)$$

และ

$$\sum E_i \delta n_i = E_1 \delta n_1 + E_2 \delta n_2 + \dots + E_k \delta n_k = 0 \quad \dots \dots \dots (7.12)$$

ดูสมการ (7.11) ตัวอย่าง $-\alpha$ และสมการ (7.12) ตัวอย่าง $-\beta$ และถือว่า α และ β ไม่เกี่ยวข้องกับค่า n_i จะได้ดังนี้

$$-\alpha \sum \delta n_i = -\alpha \delta n_1 - \alpha \delta n_2 - \dots - \alpha \delta n_k = 0 \quad \dots \dots \dots (7.13)$$

และ

$$-\beta \sum E_i \delta n_i = -\beta E_1 \delta n_1 - \beta E_2 \delta n_2 - \dots - \beta E_k \delta n_k = 0 \quad \dots \dots \dots (7.14)$$

เมื่อรวมสมการ (7.12), (7.13) และ (7.14) จะได้

$$\sum \ln g_i \delta n_i - \sum \ln n_i \delta n_i - \alpha \sum \delta n_i - \beta \sum E_i \delta n_i = 0$$

หรือ

$$\sum \delta n_i (\ln g_i - \ln n_i - \alpha - \beta E_i) = 0$$

จากสมการจะเห็นได้ว่า ถ้า $\sum \delta n_i \neq 0$ แล้ว ปริมาณค่าต่าง ๆ ในวงเล็บจะเท่ากับศูนย์ในทุกค่าของ i ดังนั้นจะได้ว่า

$$\ln g_i - \ln n_i - \alpha - \beta E_i = 0$$

หรือจะได้

$$n_i = g_i \cdot e^{-(\alpha + \beta E_i)} \quad \dots \dots \dots (7.15)$$

สมการ (7.15) เรียกว่า "กฎการกระจายของแมกซ์เวล-โบลต์มัน"

(Maxwell-Boltzmann distribution law) สมการ (7.15) อาจเขียนได้ใหม่ดังนี้

$$n_i = \frac{g_i}{e^{-\beta E_i}} \quad \dots \dots \dots (7.16)$$

หรือ

$$n_i = \frac{g_i}{e^{-E_i/kT}} \quad \dots \dots \dots (7.17)$$

7.2.2 พังค์ชันการกระจายของแมกซ์เวล-โบลต์มัน

(Maxwell-Boltzmann distribution function)

วิธีการพังค์ชันการกระจายตามหลักสถิติของแมกซ์เวล-โบลต์มันสามารถแบ่งเป็นขั้นตอนได้ทั้งสิ้น 5 ขั้นตอน ดังนี้

1. พิจารณาระบบที่คล้ายคลึงกัน 2 ระบบ โดยระบบทั้งสองประกอบด้วยอนุภาคที่มีคุณสมบัติคล้าย ๆ กันในสภาวะเดียวกันหรือต่างสภาวะกัน และจำนวนอนุภาคของทั้งสองระบบแตกต่างกัน ซึ่งจะทำให้พลังงานทั้งหมดของระบบทั้งสองต่างกัน แต่ระบบทั้งสองจะมีสัดส่วนของระดับพลังงานที่คล้ายคลึงกันมาก

2. เปรียบเทียบความน่าจะเป็นทางอุณหพลศาสตร์ระหว่างระบบที่คล้ายกันโดยพิจารณาสภาวะอนุภาค k ใด ๆ ตามหลักแมกซ์เวล-โบลต์มัน ดังนี้

$$\frac{P'_k}{P_k} = \frac{n!}{n'} \cdot \prod_i \frac{g_i n'_{ik}}{g_i n_{ik}} \frac{n_{ik}!}{n'_{ik}!} \quad \dots \dots \dots (7.18)$$

เมื่อ \prod_i แทนสัญลักษณ์ของการคูณกัน

3. หากความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของสภาวะจุลภาคสำหรับระบบทั้งสอง โดยที่ $n'_{ik} = n_{ik}$ ($i \neq r$) และ $n'_{rk} = n_{rk} - 1$ และ $\bar{n}'_r = \bar{n}_r$ จะได้

$$\frac{\Omega'_r}{\Omega_r} = \frac{\bar{n}_r}{n \cdot g_r} \quad \dots \dots \dots (7.19)$$

4. หากความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของสภาวะจุลภาคกับความแตกต่างของเอนโทรปีสำหรับระบบทั้งสอง คือ

$$S = k_B \cdot \ln Q \quad \dots \dots \dots (7.20)$$

และหากความสัมพันธ์ของพลังงานตามกฎข้อที่หนึ่งทางอุณหพลศาสตร์สำหรับระบบที่สภาวะต่างกันเล็กน้อย โดยที่เอนโทรปีและจำนวนอนุภาคต่างกัน คือ

$$\Delta S = \Delta U - \mu \Delta N \quad \dots \dots \dots (7.21)$$

เมื่อ μ เป็นศักย์ทางเคมี (chemical potential) หรือปริมาณตรากองระบบที่คงที่

N เป็นจำนวนของอนุภาค
ตั้งนี้จะได้

$$\frac{\Delta S}{k_B} = \ln \frac{\bar{n}_r}{n \cdot g_r} = \frac{\mu - \epsilon_r}{k_B \cdot T} \quad \dots \dots \dots (7.22)$$

โดยที่ ϵ_r เป็นระดับพลังงานที่มีจำนวนอนุภาคที่ต่างกัน

5. หากการกระจายอนุภาคโดยเฉลี่ยในแต่ละระดับพลังงานจากความสัมพันธ์ของสมการ (7.22) ซึ่งอาจเปลี่ยนอักษรที่พ่วงท้าย (subscripts) จาก r เป็น i ได้ก็จะนี้เพราะระดับ r นี้อาจเป็นระดับใด ๆ ในบรรดาระดับ i ได้ และสามารถคำนวณจำนวนอนุภาคเฉลี่ยต่อจำนวนสภาวะได้

ตั้งนี้จากสมการ (7.22)

$$\ln \frac{\bar{n}_r}{n \cdot g_r} = \frac{\mu - \epsilon_r}{k_B \cdot T}$$

จะได้เป็น

$$\frac{\bar{n}_i}{n \cdot g_i} = e^{\left(\frac{\mu - \epsilon_r}{kT} \right)}$$

หรือ

$$\frac{\bar{n}_i / n}{g_i} = e^{\left(\frac{\mu - \epsilon_r}{kT} \right)} \quad \dots \dots \dots (7.23)$$

สมการ (7.23) เรียกว่า "ฟังก์ชันการกระจายแบบแมกซ์-โบลต์มั่น"

(Maxwell-Boltzmann distribution function)

7.2.3 การกระจายของโนมเลกุลของโบลต์มั่น (Boltzmann distribution)

เราจะหาค่า $e^{-\alpha}$ และ β โดยการพิจารณาการกระจายแบบต่อเนื่องของพลังงานของโนมเลกุล ซึ่งจะได้กลุ่มของพลังงานค่อนข้างจะต่อเนื่อง เช่น E_1, E_2, \dots, E_k ดังนั้นสมการ (7.15) จึงเขียนใหม่ได้

$$n(E)dE = g(E) e^{-\alpha} e^{-\beta E} dE \quad \dots \dots \dots (7.24)$$

เมื่อ $n(E)dE$ เป็นจำนวนโนมเลกุลที่มีพลังงานอยู่ระหว่าง E กับ $E+dE$ และสมการนี้เป็นค่าโดยประมาณสำหรับโนมเลกุลของก๊าซ เมื่อระดับพลังงานไม่สามารถเห็นได้ชัดและจำนวนโนมเลกุลรวมใหญ่มาก ถ้าจัดให้อยู่ในรูปของโนมเลกุลโดย $E = P^2/2m$ จะได้

$$n(p)dp = g(p) e^{-\alpha} e^{-\beta p^2/2m} dp \quad \dots \dots \dots (7.25)$$

ความน่าจะเป็นล้าดับก่อน (priori probability) $g(p)$ ที่โนมเลกุลจะมีโนเมนต์ระหว่าง p กับ $p + dp$ จะมีค่าเท่ากับจำนวนของเซลในช่องว่างระหว่างเฟส (phase space) ซึ่งหันอยู่กับโนมเลกุลของก๊าซ และถ้าแต่ละเซลมีปริมาตรเรลิก ๆ เป็น h^3 ซึ่ง

$$g(p)dp = \frac{\iiint dx dy dz dp_x dp_y dp_z}{h^3} \quad \dots \dots \dots (7.26)$$

และ

$$V = \iiint dx dy dz$$

เมื่อ V เป็นปริมาตรที่บรรจุในลูกกลมของก๊าซในตัวแหน่งของช่องว่าง และ

$$\iiint dp_x \cdot dp_y \cdot dp_z = 4\pi p^2 \cdot dp$$

เมื่อ $4\pi p^2 \cdot dp$ เป็นปริมาตรของทรงกลมที่มีรัศมี p หน่วย dp อุ่นพิเศษของโน้มเน้นต้ม จากสมการ (7.26) จะได้

$$g(p)dp = \frac{4\pi vp^2 \cdot dp}{h^3} \quad \dots \dots \dots (7.27)$$

ดังนั้นสมการ (7.25) จะกลายเป็น

$$n(p)dp = \frac{4\pi vp \cdot e^{-\alpha} \cdot e^{-\beta p^2/2m}}{h^3} \cdot dp \quad \dots \dots \dots (7.28)$$

เราสามารถหาค่า $e^{-\infty}$ ได้โดยการกำหนดให้

$$\int_0^\infty n(p)dp = N$$

ดังนั้น เมื่ออินทิเกรตสมการ (7.22) จะได้ว่า

$$N = \frac{4\pi v e^{-\alpha}}{h^3} \int_0^\infty p^2 e^{-\beta p^2/2m} dp$$

$$N = \frac{e^{-\alpha} v}{h^3} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{หรือ } e^{-\alpha} = \frac{Nh^3}{v} \left(\frac{\beta}{2\pi m} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{ดังนั้นจะได้ } n(p)dp = 4\pi N \left(\frac{\beta}{2\pi m} \right)^{\frac{3}{2}} p^2 e^{-\beta p^2/2m} dp \dots \quad (7.29)$$

การหาค่า β หาได้จากพลังงานรวม E ของโน้มเลกูลที่รวมกันอยู่ ดังนั้น
สมการ (7.29) จะเขียนได้ดังนี้

$$n(E)dE = \frac{2N\beta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty E e^{-\beta E} dE \dots \dots \dots \quad (7.30)$$

พลังงานรวมคือ

$$E = \int_0^\infty E n(E) dp$$

$$E = \frac{2N\beta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty E e^{-\beta E} dE$$

$$E = \frac{3}{2} \cdot \frac{N}{\beta}$$

$$E = \frac{3}{2} N k T \dots \dots \dots \quad (7.31)$$

เมื่ออินทิเกรตแบบไม่จำกัด

$$\int_0^\infty x^{\frac{3}{2}} e^{-ax} dx = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

จะสอดคล้องกับกฎณีจลน์ของก้าช $\beta = \frac{1}{kT}$ ดังนั้นเมื่อนำค่า α และ β แทน

ค่าลงในสมการ(7.29) และ(7.30) จะได้ความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$n(E)dE = \frac{2\pi N}{(\pi kT)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E} e^{-E/kT} dE \quad \dots \dots \dots (7.32)$$

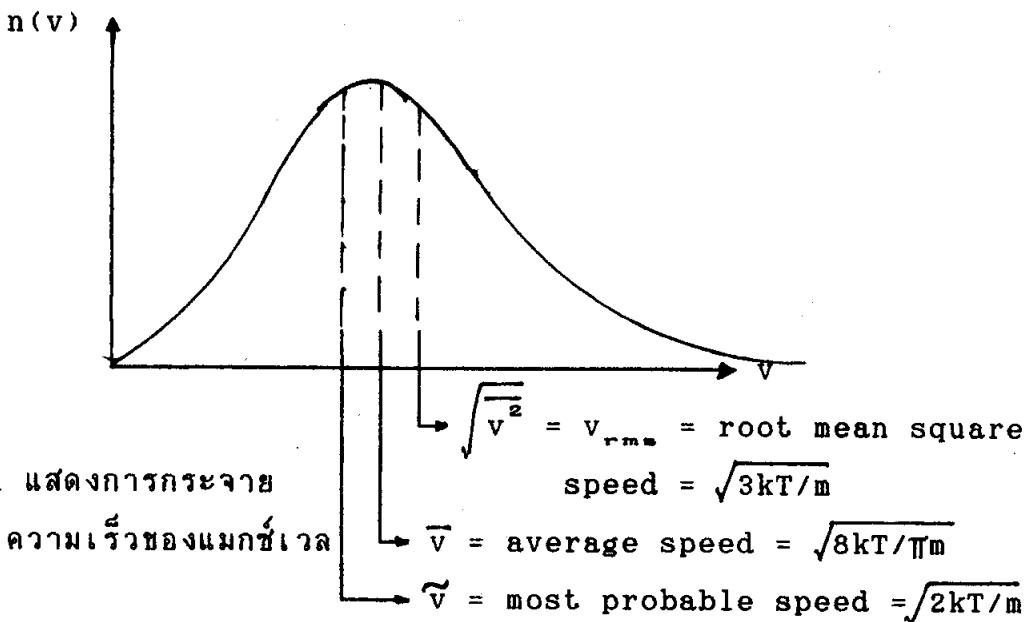
สมการ(7.32) เรียกว่า "การกระจายพลังงานของโบลท์มาน" (Boltzmann distribution of energy) ซึ่งก็คือ จำนวนของโนมเลกุลที่มีพลังงานอยู่ระหว่าง E กับ $E + dE$

$$n(p)dp = \sqrt{2\frac{\pi N}{(mkT)^{\frac{3}{2}}}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} p^2 e^{-p^2/2mkT} dp \quad \dots \dots \dots (7.33)$$

สมการ(7.33) เรียกว่า "การกระจายโนมเมนตัมของโบลท์มาน" (Boltzmann distribution of momenta) ซึ่งก็คือจำนวนโนมเลกุลที่มีโนมเมนตัมอยู่ระหว่าง p กับ $p + dp$

$$n(v)dv = \sqrt{2\frac{\pi N}{(mkT)^{\frac{3}{2}}}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-mv^2/2kT} dv \quad \dots \dots \dots (7.34)$$

สมการ(7.34) เรียกว่า "การกระจายความเร็วของโบลท์มาน" (Boltzmann distribution of velocity) ซึ่งก็คือ จำนวนโนมเลกุลที่มีความเร็วอยู่ระหว่าง v กับ $v+dv$ สมการ(7.34) นี้เป็นการค้นพบโดยแมกซ์เวลในปี ค.ศ. 1859 ซึ่งใช้เป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้



รูปที่ 7.1 แสดงการกระจายความเร็วของแมกซ์เวลล์

พิจารณาจากสมการ (7.31) ค่าพลังงานเฉลี่ยต่อหนึ่งโมเลกุลจะเป็น

$$\bar{E} = \frac{E}{N} = \frac{3}{2}kT$$

และที่ 300°K (อุณหภูมิของห้องทดลอง) ค่าพลังงานเฉลี่ย (E) ประมาณ $6.21 \times 10^{-21} \text{ Joule/molecule}$ และเป็นค่าที่เหมือนกันหมดทุกโมเลกุลที่ 300 K โดยไม่คำนึงถึงค่ามวลของมันเลย

7.3 หลักสถิติของโบส-ไอน์สไตน์ (Bose-Einstein statistics)

หลักสถิติของโบส-ไอน์สไตน์ กับแมกซ์เวล-โบลท์มาน มีความแตกต่างกันตรงที่เนื้อประชุมต์อนุภาคที่มีลักษณะเหมือนกันให้เคลื่อนที่จากที่แห่งหนึ่งไปสู่ที่อีกแห่งหนึ่งจะปรากฏอย่างเห็นได้ชัดเจน ในขณะที่อีกันหนึ่งเนื้อประชุมต์อนุภาคที่มีลักษณะเหมือนกันนั้นจะไม่ปรากฏเห็นเด่นชัด คุณสมบัติของระบบที่สอดคล้องกับหลักสถิติของโบส-ไอน์สไตน์นี้มี 3 ประการ ดังนี้

1. อนุภาคทุกตัวของระบบจะต้องเหมือนกันหมด เช่น มวล, ขนาดและส่วนประกอบของแต่ละอนุภาคภายในระบบมีความตรงกันทุกประการ
2. อนุภาคหนึ่ง ๆ หรืออนุภาคจำนวนหนึ่งของระบบจะกระจายไปตามระดับของพลังงานหรือสภาวะพลังงานใด ๆ โดยไม่มีข้อจำกัด ซึ่งเป็นไปตามสมมุติฐานเบื้องต้น
3. สภาวะพลังงานของระบบจะไม่ซ้อนกันในแต่ละสภาวะสามารถระบุสภาวะที่แน่นอนได้

7.3.1 กฏการกระจายของโบส-ไอน์สไตน์

(Bose-Einstein distribution law)

จากหลักสามประการนี้จะทำให้สามารถหาความน่าจะเป็นของอุณหพลศาสตร์สำหรับสภาวะมหภาคลำดับที่ k ตามหลักสถิติของโบส-ไอน์สไตน์ ได้โดยกำหนดให้

n_i เป็นจำนวนอนุภาคของระดับพลังงาน i

g_i เป็นจำนวนสภาวะของพลังงานในระดับ i

ตั้งนั้นอนุภาคหนึ่งอาจจะอยู่ในสภาวะพลังงานใด ๆ ที่มีอยู่ g_i สภาวะได้ และเนื่องจากข้อจำกัดในการกระจายอนุภาคไปตามสภาวะพลังงานต่าง ๆ ของอนุภาคอื่นก็สามารถสลับกันไปมาใน g_i สภาวะได้จำนวน $(g_i + n_i - 1)!$ โดยมีลำดับสภาวะที่เป็นไปได้ระหว่าง $(g_i + n_i - 1)$ และมี $n_i!$ แสดงลำดับของอนุภาคที่เป็นไปได้ระหว่าง n_i และ $(g_i - 1)!$

ความแตกต่างของสิ่งที่สามารถสังเกตเห็นได้กับสิ่งที่ไม่อาจสังเกตได้ถูกจัดไว้เป็นพวง ๆ ตามจำนวนอนุภาค n_i ในสภาวะ g_i ตั้งนั้นถ้าให้ $p(n_i)$ เป็นความน่าจะเป็นของการกระจายทั้งหมดของ n_i อนุภาคจะสามารถเขียนได้ในรูป

$$p(n_i) = \frac{(g_i + n_i - 1)!}{n_i! (g_i - 1)!} \dots \dots \dots (7.35)$$

ระหว่างสภาวะที่มีแต่พลังงาน ถ้าเราสมมติให้

$$(g_i + n_i) \gg 1$$

ดังนั้นค่า $(g_i + n_i - 1)$ สามารถแทนค่าได้ด้วย $(g_i + n_i)$ และจากสมการ (7.35) จะได้

$$p(n) = \frac{(g_i + n_i)!}{n_i! (g_i - 1)!}$$

โดยกำหนดในรูป Logarithms จะได้

$$\ln p(n) = \ln(g_i + n_i)! - \ln n_i! - \ln(g_i - 1)!$$

หรือ

$$\ln p(n) = \Sigma [\ln(g_i + n_i)! - \ln n_i! - \ln(g_i - 1)!]$$

และจาก Sterling's formula ที่ว่า

$$\ln n! = n \ln n - n$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\ln p(n) = \Sigma [(g_i + n_i) \ln(g_i + n_i) - n_i \ln(g_i - 1) - g_i] \dots (7.36)$$

เงื่อนไขที่ทำให้การจัดกระจ่ายน้ำเป็นไปได้มากที่สุดคือ การเปลี่ยนแปลงน้อย ๆ ที่เกิดขึ้นของระบบชั่วคราว เป็นการเปลี่ยนแปลงน้อย ๆ ของ n_i และ $\delta \ln p(n)$ เป็นค่าการเปลี่ยนแปลงน้อย ๆ ของ $\ln p(n)$ ซึ่งจะได้ว่า

$$\delta \ln p(n)_{\max} = 0$$

ดังนั้นจากสมการ (7.36) ถ้า $p(n)$ มีค่ามากที่สุด (maximum) จะได้

$$\delta \ln p(n)_{\max} = \Sigma [\ln(g_i + n_i) - \ln n_i] \delta n_i = 0 \dots \dots (7.37)$$

และจากกฎการอนุรักษ์ของอนุภาค (หรือโนเมเลกุล) ที่ว่า

$$\sum n_i = 0 \dots \dots \dots (7.38)$$

และจากกฎการอนุรักษ์พลังงาน ที่ว่า

$$\sum n_i \alpha = 0 \dots \dots \dots (7.39)$$

จากสมการ (7.38) คุณด้วย $-\alpha$ จะได้

$$-\sum n_i \alpha = 0 \dots \dots \dots (7.40)$$

สมการ (7.40) คูณด้วย $-\beta$ จะได้

$$-\sum E_i \delta n_i \beta = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (7.41)$$

แทนค่าของสมการ (7.40) และ (7.41) ลงในสมการ (7.37) จะได้

$$\sum [\ln(g_i + n_i) - \ln n_i - \alpha - \beta E_i] n_i = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (7.42)$$

ถ้า $\delta n_i \neq 0$ จะได้ปริมาณต่าง ๆ ในวงเล็บเท่ากับ 0 ดังนี้

$$\ln(g_i + n_i) - \ln n_i - \alpha - \beta E_i = 0$$

$$\ln \left(\frac{g_i + n_i}{n_i} \right) = \alpha + \beta E_i$$

$$\frac{g_i + n_i}{n_i} = e^{\alpha + \beta E_i}$$

$$\frac{g_i}{n_i} + 1 = e^{\alpha + \beta E_i}$$

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha + \beta E_i} - 1}$$

หรือ

$$n_i = \frac{g_i}{e^\alpha \cdot e^{\beta E_i} - 1} \quad \dots \dots \dots \quad (7.43)$$

สมการ (7.43) นี้เรียกว่า "กฎการกระจายของโบส-ไอน์สไตน์"

(Bose-Einstein distribution law)

จะเห็นว่าในขณะที่ระดับพลังงานหนึ่งอาจมีรูปแบบของการจัดอนุภาคแบบใดแบบหนึ่งในจำนวนทั้งหมด $p(n)$ รูปแบบ ตามสมการ (7.35) นั้น พลังงานระดับอื่น ๆ ก็อาจมีรูปแบบใด ๆ ในจำนวน $p(n)$ ของระดับพลังงานนั้น ๆ ได้ ดังนั้น การกระจายอนุภาคภายในสภาวะมหภาคหนึ่งซึ่งประกอบด้วยระดับพลังงานต่าง ๆ จึงมีจำนวนรวมกันทั้งสิ้นตามผลคูณของจำนวนรูปแบบในแต่ละระดับดังนี้

$$W_{B-E} = \pi_1 p(n) = \frac{\pi_1 (g_1 + n_1 - 1)!}{n_1! (g_1 - 1)!} \dots\dots\dots (7.44)$$

โดยที่ W_{B-E} เป็นความน่าจะเป็นทางอุณหพลศาสตร์สำหรับสภาวะมหภาค
หนึ่งตามหลักสถิติของโบส-ไอน์สไตน์

π_1 แทนสัดส่วนของความคุณคัน

ตัวอย่าง จงหาความน่าจะเป็นทางอุณหพลศาสตร์ตามหลักโบส-ไอน์สไตน์
สำหรับสภาวะมหภาคหนึ่งที่มีระดับพลังงาน 2 ระดับ โดยที่ $g_1=3, n_1=2$ และ
 $g_2=2, n_2=1$

วิธีทำ จากโจทย์จะได้

ที่ระดับพลังงานที่หนึ่ง

มี $g_1=3$ และ $n_1=2$

ที่ระดับพลังงานที่สอง

มี $g_2=2$ และ $n_2=1$

จากสมการ (7.44) จะได้

$$W_{B-E} = \left(\frac{4!}{2!2!} \right) \cdot \left(\frac{2!}{1!1!} \right)$$

$$= 6 \times 2$$

$$= 12$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นทางอุณหพลศาสตร์ตามหลักโบส-ไอน์สไตน์
เท่ากับ 12

7.3.2 ความหมายของเงื่อนไขรปภในทางสถิติ

จากวิชาฟิสิกส์เชิงสถิติ เรารู้มาแล้วว่า "จำนวนสภาวะจุลภาคที่เป็นไป
ได้ทั้งหมดของระบบมหภาคมีความสัมพันธ์กับค่าในทางอุณหพลศาสตร์ที่สำคัญของระบบ"

เนื่องจากว่า ถ้าระบบมีสภาวะที่เป็นไปได้มากจะมีเอนโทรปีมากขึ้นด้วย และถ้าเราพิจารณา ระบบสมบูรณ์ที่มีสภาวะที่ต่างกัน 2 สภาวะ โดยมีความกดดัน, อุณหภูมิ และศักย์ทางเคมีเหมือนกันทั้ง 2 สภาวะ แต่ไม่พลังงาน, ปริมาตร และจำนวนอนุภาค กับศักย์เคมีมีความสัมพันธ์กันดังต่อไปนี้

$$TdS = dU + pdv - \mu dN \quad \dots \dots \dots \quad (7.45)$$

เมื่อค่า μ เป็นศักย์เคมี (chemical potential)

N เป็นจำนวนของอนุภาค

ในการหาค่าเอนโทรปีซึ่งถือเป็นปริมาณที่ขึ้นกับมวล สำหรับระบบอิสระ 2 ระบบ ที่มีค่าเป็น S_1 และ S_2 เอนโทรปีของระบบรวมจะได้ดังนี้

$$S = S_1 + S_2 \quad \dots \dots \dots \quad (7.46)$$

แต่ถ้ากำหนดให้ Ω_1 และ Ω_2 ความน่าจะเป็นทางอุณหพลศาสตร์ของระบบ 2 ระบบเราจะสามารถหาเอนโทรปีของระบบรวมโดยที่ทั้ง 2 ระบบไม่ขึ้นต่อ กัน (independent) ได้ดังนี้

$$\Omega = \Omega_1 \cdot \Omega_2 \quad \dots \dots \dots \quad (7.47)$$

เมื่อ Ω เป็นความน่าจะเป็นทางอุณหพลศาสตร์ของระบบทั้งสองระบบรวม กันโดยที่ Ω_1 และ Ω_2 ไม่เกี่ยวข้องกันในทางสถิติ (Statistical independent)

สมมุติว่า $S = J(\Omega)$ โดยที่ S เป็นฟังค์ชันของความน่าจะเป็น Ω จาก สมการ (7.46) จะได้ดังนี้

$$J(\Omega_1 \cdot \Omega_2) = J(\Omega_1) + J(\Omega_2) \quad \dots \dots \quad (7.48)$$

โดยที่ $S_1 = J(\Omega_1)$ และ $S_2 = J(\Omega_2)$

ถ้าตีฟเฟอร์เรนทิเอกสมการ (7.48) เทียบกับ Ω_1 หรือ Ω_2 หรือ $\Omega_1 \cdot \Omega_2$ จะได้

$$\frac{\partial J(\Omega_1 \cdot \Omega_2)}{\partial \Omega_1} = \frac{dJ(\Omega_1 \cdot \Omega_2)}{d(\Omega_1 \cdot \Omega_2)} \cdot \frac{\partial (\Omega_1 \cdot \Omega_2)}{\partial \Omega_1} = \Omega_2 J'(\Omega_1 \cdot \Omega_2)$$

และ

$$\frac{\partial J(\Omega_1, \Omega_2)}{\partial \Omega_2} = \frac{dJ(\Omega_1, \Omega_2)}{d(\Omega_1, \Omega_2)} \cdot \frac{\partial (\Omega_1, \Omega_2)}{\partial \Omega_1} = \Omega_1 J'(\Omega_1, \Omega_2)$$

โดยที่

$$\frac{\partial J(\Omega_1)}{\partial \Omega_1} = \frac{dJ(\Omega_1)}{d\Omega_1} \text{ และ } \frac{\partial J(\Omega_2)}{\partial \Omega_1} = 0$$

หรือ $\frac{\partial J(\Omega_2)}{\partial \Omega_2} = \frac{dJ(\Omega_2)}{d\Omega_2} \text{ และ } \frac{\partial J(\Omega_1)}{\partial \Omega_2} = 0$

หรืออาจเขียนใหม่เป็น $\Omega_1 \cdot \frac{dJ(\Omega_1)}{d\Omega_1} = \Omega_2 \cdot \frac{dJ(\Omega_2)}{d\Omega_2} \dots \dots \dots (7.49)$

โดยที่ Ω_1 และ Ω_2 ต่างก็ไม่ขึ้นต่อกัน และสมการ (7.49) จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อพจน์ข้างซ้ายและพจน์ข้างขวามีค่าเท่ากับค่าที่เหมือนกัน ซึ่งอาจจะเขียนเสียงใหม่ได้ดังนี้

$$\Omega \cdot \frac{dJ(\Omega)}{d\Omega} = k_B \dots \dots \dots (7.50)$$

หรือ

$$dJ(\Omega) = k_B \frac{1}{\Omega} d\Omega \dots \dots \dots (7.51)$$

เมื่อ k_B เป็นค่าคงที่ ที่เรียกว่า "ค่าคงที่ของโบลต์มั่น"
(Boltzmann Constant) นั่นคือ

$$J(\Omega) = k_B \ln \Omega$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$S = J(\Omega) = k_B \ln \Omega \dots \dots \dots (7.52)$$

ความสัมพันธ์ของเอนโทรปีกับความน่าจะเป็นทางอุณหพลศาสตร์หรือจำนวนสภาวะที่เป็นไปได้ทั้งหมด จะเป็นไปตามสมการ (7.52)

และจากสมการ (7.52) จะเห็นได้ว่า ถ้า $\Omega = 1$ แสดงว่า
ในกรณี $S = 0$

7.3.3 ฟังค์ชันกรากรายของโบส-ไอน์สไตน์

(Bose-Einstein distribution function)

การหาฟังค์ชันกรากรายตามวิธีการทางสถิติของโบส-ไอน์สไตน์
มีวิธีการตามลำดับดังต่อไปนี้

1. เลือกสุ่มระบบ 2 ระบบที่มีคุณสมบัติตามข้อกำหนดของโบส-ไอน์สไตน์
โดยท่อนุภาคทุกด้วยมีลักษณะเหมือนกันหมด และสามารถกระจายไปตามสภาวะพลังงาน
ได้โดยไม่จำกัด และแต่ละแบบมีระดับพลังงานเหมือนกัน โดยกำหนดค่าต่าง ๆ ของ
ระบบทึ้งสองได้ดังนี้

ให้ N เป็นจำนวนอนุภาคของระบบที่หนึ่ง

N' เป็นจำนวนอนุภาคของระบบที่สอง และมีค่าน้อยกว่า N

E เป็นพลังงานของระบบที่หนึ่ง

E' เป็นพลังงานของระบบที่สอง และมีค่าน้อยกว่า E

n เป็นจำนวนที่ต่างกันของอนุภาคทึ้งสองระบบ และ $n \ll N$

และ ϵ_r เป็นระดับของพลังงานที่มีจำนวนอนุภาคที่ต่างกัน

ดังนั้น ที่ระดับใด ๆ ϵ_r จะมีจำนวนพลังงานที่ต่างกันเท่ากับ $n\epsilon_r$ ซึ่งเขียนเป็นความ
สัมพันธ์ได้ว่า

$$E' = E - n\epsilon_r \quad \dots \dots \dots (7.53)$$

$$\text{และ} \quad N' = N - n \quad \dots \dots \dots (7.54)$$

2. เปรียบเทียบความน่าจะเป็นทางอุณหพลศาสตร์ระหว่างระบบ โดย
พิจารณาจากสภาวะมหากาค k ใด ๆ จะได้ว่า

ส่วนรับระบบที่หนึ่ง

$$p_k = \prod_i \frac{(g_i + N_{ik} - 1)!}{(g_i - 1)! N_{ik}!}$$

ส่าหรับระบบที่สอง

$$P'_{r_k} = \pi_i \frac{(g_i + N'_{ik} - 1)!}{(g_i - 1)! N'_{ik}!}$$

โดยที่ π_i แทนสัญลักษณ์ของการคูณกัน

โดยที่ระบบ r กำหนดให้ออนุภาคต่างกันนั่นคือ $N'_i = N_i$ และ

$$N'_r = N_r - n$$

ซึ่งในการเปรียบเทียบความน่าจะเป็นของสภาวะนหากาดตั้งกล่าวจะต้องไม่นับสภาวะนหากาดของระบบที่สองที่ไม่มีอนุภาคอยู่เลยในระดับ r แต่ถ้าระบบที่หนึ่งไม่มีอนุภาคอยู่เลยในระดับนี้ หรือ $N'_{rk} = 0$ จะได้ $N'_{rk} = 0 - n$ และถ้าให้ $n = 1$ ปรากฏว่าเฉพาะเทอมที่ลำดับที่ r ของ P'_{rk} คือ

$$\frac{(g_r - 2)!}{(g_r - 1)! (-1)!} = \frac{1}{(g_i - 1) (-1)!}$$

ซึ่งจะได้ $P'_{rk} = 0$ เมื่อ $g_r > 1$ และ $(-1)! = \infty$

ดังนั้นเมื่อเปรียบเทียบความน่าจะเป็นของสภาวะนหากาดของทั้งสองระบบดังกล่าวจะได้

$$\frac{P'_{rk}}{P_{rk}} = \pi_i \frac{(g_i + N'_{ik} - 1)! N'_{ik}!}{(g_i + N_{ik} - 1)! N'_{ik}!}$$

3. หากความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของสภาวะจุลภาคส่าหรับระบบทั้งสองจากการเปรียบเทียบค่าของสภาวะนหากาดได้โดยที่ $N'_{ik} = N_{ik}$ ($i \neq r$) และ $N'_{rk} = N_{rk} - 1$ จะได้

$$\frac{P'_{rk}}{P_{rk}} = \frac{N_{rk}}{g_r + N'_{rk}} \quad \dots \dots \dots (7.55)$$

$$\begin{aligned} \text{โดยที่ } N_{rk}! &= (N_{rk} - 1)! = N_{rk} \cdot N'_{rk}! \text{ และ } (g_r + N_{rk} - 1) = (g_r + N'_{rk})! \\ &= (g_r + N'_{rk}) (g_r + N'_{rk} - 1)! \end{aligned}$$

สมการ(7.55) เชื่นใหม่ได้ดังนี้

$$N_{rk} \cdot P_k = (g_r + N'_{rk}) P'_{rk} \quad \dots \dots \dots (7.56)$$

และพิจารณาสภาวะมหภาคทั้งหมดของระบบโดยน่ามารวมกัน สมการ(7.56) จะกลายเป็น

$$\sum_k N_{rk} \cdot P_k = g_r \sum_k P'_{rk} + \sum_k N'_{rk} \cdot P'_{rk}$$

หรือ $\bar{N}_r \cdot \Omega_r = (g_r + \bar{N}'_r) \Omega'_r$

ดังนั้นจะได้

$$\bar{N}'_r = \frac{\Omega'_r}{\Omega} \cdot (g_r + \bar{N}'_r) \quad \dots \dots \dots (7.57)$$

และเนื่องจากจำนวนอนภคามากมายมหาศาลจึงอาจถือว่า $\bar{N}'_r = \bar{N}_r$ ดังนั้น สมการ(7.57) จึงเชื่นใหม่ได้ดังนี้

$$\bar{N}_r = \frac{\Omega'_r}{\Omega} \cdot (g_r + \bar{N}'_r) \quad \dots \dots \dots (7.58)$$

4. หากความสัมพันธ์ระหว่างความนำจะเป็นของสภาวะจุลภาคกับความแตกต่างของเอนโทรปีของระบบทั้งสอง โดยใช้ความหมายของเอนโทรปีในทางสถิติ จาก $S = k_B \cdot \ln \Omega$ ในสมการ(7.52) โดยหากความสัมพันธ์ของสมการ(7.58) ในรูป Logarithm จะได้

$$\ln \left(\frac{\bar{N}_r}{g_r + N_r} \right) = \ln \frac{\Omega'_r}{\Omega} = \ln \Omega'_r - \ln \Omega$$

หรือ

$$\ln \frac{\bar{N}_r}{(g_r + N_r)} = \frac{S' - S}{k_B} = \frac{\Delta S}{k_B} \quad \dots \dots \dots (7.59)$$

5. หากการกระจายอนุภาคโดยเฉลี่ยในระดับพลังงานต่าง ๆ จากกฎข้อที่หนึ่งทางอุณหพลศาสตร์ ซึ่งแสดงถึงการเปลี่ยนแปลงเอนโทรปี ดังนี้

$$T \Delta S = \Delta U - \mu \Delta N \quad \dots \dots \dots (7.60)$$

สำหรับระบบทั้งสองที่มีความคล้ายคลึงกันนั้นอาจเป็นระบบเดียวกันแต่มีการสุ่มพิจารณาในสภาวะที่ต่างกัน โดยที่ $\Delta U = -\epsilon_r$ และ $\Delta N = -1$

จากสมการ (7.59) และ (7.60) จะได้

$$\ln \frac{\bar{N}_r}{g_r + N_r} = \frac{\Delta S}{k_B} = \frac{1}{k_B} \cdot \frac{1}{T} (\Delta U - \mu \Delta N)$$

$$= \frac{1}{k_B \cdot T} (-\epsilon_r + \mu)$$

$$\ln \frac{\bar{N}_r}{g_r + N_r} = \frac{\mu - \epsilon_r}{k_B \cdot T} \quad \dots \dots \dots (7.61)$$

สมการ (7.61) แสดงถึงการกระจายอนุภาคโดยเฉลี่ยในแต่ละระดับพลังงานและเนื่องจากตัวอักษรที่พ่วงท้าย r (subscripts) อาจให้เป็นระดับใด ๆ ในบรรดา rate i ได้ ดังนั้นจะได้

$$\ln \frac{\bar{N}_i}{g_i + N_i} = \frac{\mu - \epsilon_i}{k_B \cdot T}$$

หรือ

$$\frac{\bar{N}_i}{g_i + N_i} = e^{\left(\frac{\mu - \epsilon_i}{k_B T} \right)}$$

$$\frac{g_i}{\bar{N}_i} = e^{\left(\frac{\mu - \epsilon_i}{k_B T} \right)} - 1$$

ดังนั้น

$$\frac{\bar{N}_i}{g_i} = \frac{1}{e^{\left(\frac{\mu - \epsilon_i}{k_B T} \right)} - 1} \quad \dots \dots \dots (7.62)$$

สมการ (7.62) นี้เรียกว่า "ฟังค์ชันการกราดจำแนกโบส-ไอน์สไตน์" (Bose-Einstein distribution function) ซึ่งแสดงถึงจำนวนอนุภาคเฉลี่ยต่อสภาวะของระดับพลังงานใด ๆ i ในเกณฑ์ของศักย์เคมี

7.4 หลักสถิติของเฟอร์นี-ดิ랙 (Fermi-Dirac Statistics)

หลักสถิติของเฟอร์นี-ดิ랙ได้ประยุกต์ใช้กับอนุภาคที่ไม่สามารถสัมภาระกันได้ (indistinguishable) และในการศึกษาหลักสถิติของเฟอร์นี-ดิแรคนี้จะต้องควบคู่ไปกับหลักสถิติของโบส-ไอน์สไตน์ ยกเว้นแต่ว่าในขณะนั้นทุกเชล (หมายถึง สภาวะทางควอนตัม) มีอนุภาคอยู่ทั่วไป คุณสมบัติที่เป็นไปตามหลักสถิติของเฟอร์นี-ดิแรค มีดังต่อไปนี้

1. อนุภาคทุกตัวของระบบจะต้องเหมือนกันหมด เช่น มวล, ขนาดและส่วนประกอบของแต่ละอนุภาคภายในระบบตรงกันทุกประการ
2. อนุภาคในแต่ละสภาวะที่เป็นไปได้ของระบบจะขึ้นอยู่กับหลักการกีดกันของเพาลี (pauli exclusion principle) ซึ่งกล่าวว่า "อิเลคตรอน 2 ตัวจะ อยู่ที่สภาวะเดียวกันไม่ได้"
3. สภาวะพลังงานไม่มีการซ้ำซ้อนในแต่ละสภาวะ

7.4.1 กฎการกราดจำแนกเฟอร์นี-ดิ랙

(Fermi-Dirac distribution law)

ตามหลักสถิติของเฟอร์นี-ดิแรคจะพิจารณาระดับพลังงานใด ๆ i จำนวนอนุภาค n , โดยที่ในระดับพลังงานนั้น ๆ จะมีน้อยกว่าหรือเท่ากับจำนวนสภาวะ g , ดังนั้นในระดับหนึ่งซึ่งมีสภาวะของพลังงานได้หลายสภาวะ ซึ่งอาจได้แก่ สภาวะ $1, 2, 3, \dots$ และอนุภาคได้แก่ อนุภาค a, b, c, \dots โดยท่อนุภาคหนึ่ง เมื่อยู่ในสภาวะ ใดสภาวะหนึ่งในบรรดา g , สภาวะ อนุภาคตัวต่อ ๆ ไปจะอยู่ในสภาวะใดสภาวะหนึ่งใน $(g_i - 1)$ และอนุภาคอื่น ๆ จะอยู่ในสภาวะใดสภาวะหนึ่งในบรรดาจำนวน

ส่วนที่มีการลดลงไปเรื่อย ๆ จนครบทั้งอนุภาคตัวที่ n_1 จะอยู่ในส่วนใดส่วนหนึ่งใน $g_1 \cdot (n-1)$ ส่วน

การกระจายอนุภาคตามหลักการกีดกันของเพาล์ส์หารบอนุภาคแต่ละตัว จึงอาจอยู่ในส่วนใด ๆ ได้ตามลำดับดังนี้ $g_1, (g_1-1), (g_1-2) \dots (g_1-n_1)$ โดยที่อนุภาคตัวหนึ่งอาจอยู่ในส่วนใดส่วนหนึ่งในบรรดา g_1 ส่วนแล้ว อนุภาคตัวอื่น ไปอาจอยู่ในส่วนใดส่วนหนึ่งในบรรดา (g_1-1) และ (g_1-2) และต่อ ๆ ไปได้ จึงทำให้รูปแบบของการกระจายอนุภาคทั้ง n_1 ตัวไปตามส่วนต่าง ๆ g_1 ส่วนนี้ได้ทั้งหมดเท่ากับผลคูณของ $g_1, (g_1-1), (g_1-2) \dots$

รูปแบบของการกระจายอนุภาคทั้งหมด n_1 ตัวในส่วน g_1 ดังกล่าวคือ

$$g_1(g_1-1)g_1-2 \dots (g_1-n_1+1) = \frac{g_1!}{(g_1-n_1)!}$$

โดยที่ $g_1! = g_1(g_1-1)(g_1-2) \dots$

แต่เนื่องจากอนุภาคทุกตัวเหมือนกันหมด ดังนั้น การลับอนุภาคซึ่งกระทำได้ n_1 รูปแบบ จะทำให้รูปแบบการกระจายซ้ำซ้อน ความน่าจะเป็นของจำนวนการกระจายของอนุภาคที่แตกต่างกันทั้งหมดในระดับ i คือ

$$p(n) = \frac{g_1!}{(g_1-n_1)! n_1!} \quad \dots \dots \dots (7.63)$$

หรืออาจจัดสมการ (7.63) ให้อยู่ในรูป logarithms ได้

$$\ln p(n) = \sum \left[\ln g_1! - \ln (g_1-n_1)! - \ln n_1! \right]$$

และจาก Stirling formula

$$\ln n! = n \ln n - n$$

ดังนั้นจะได้สมการใหม่เป็น

$$\ln p(n) = \sum \left[g_1 \ln g_1 - n_1 \ln n_1 - (g_1-n_1) \ln (g_1-n_1) \right] \dots (7.64)$$

ถ้าพิจารณาในกรณีที่การกระจายมากที่สุด (maximum) จะได้

$$\left. \ln p(n) \right|_{\max} = \sum \left[-n_1 + \ln (g_1-n_1) \right] \delta n_1 = 0 \dots (7.65)$$

จากกฎการอนุรักษ์ของอนุภาคหรือโนมเลกุลและกฎการอนุรักษ์ของพลังงาน
สมการ (7.38) และ (7.39) คูณด้วย $-\alpha$ และ $-\beta$ จะได้

$$-\alpha \sum n_i = 0$$

และ $-\beta \sum E_i \delta n_i = 0$

และจากสมการ (7.65) ในที่สุดจะได้

$$\sum \left[-\ln n_i + \ln(g_i - n_i) - \alpha - \beta E_i \right] \delta n_i = 0 \quad \dots \dots \quad (7.66)$$

สมการ (7.66) ถ้า $\delta n_i \neq 0$ จะได้ว่า

$$-\ln n_i + \ln(g_i - n_i) - \alpha - \beta E_i = 0$$

$$\ln \left(\frac{g_i - n_i}{n_i} \right) = \alpha + \beta E_i$$

หรือ $\frac{g_i}{n_i} = e^{\alpha + \beta E_i + 1}$

ดังนั้นจะได้ $n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha + \beta E_i} + 1} \quad \dots \dots \quad (7.67)$

สมการ (7.67) นี้เรียกว่า "กฎการกระจายของเฟอร์นี-ดิราค"

(Fermi-Dirac distribution law)

ตัวอย่าง จงหารูปแบบการกระจายของอนุภาคที่เนื่องกันหมดตามหลัก
การกัดกันของเพาล์ โคยสมมุติให้ระดับพลังงาน i มีจำนวน $g_i = 3$ และ $n_i = 2$

วิธีทำ จากโจทย์เมื่อ

$$g_i = 3 \text{ จะมี } n_i = 2$$

จากสมการ (7.63)

$$p(n) = \frac{g_i!}{(g_i - n_i)! n_i!}$$

แทนค่าจะได้

$$p(n) = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 1}$$

$$= 3$$

ดังนั้น รูปแบบของการกระจายของอนุภาคนั้นจึงเท่ากับ 3

ถ้าพิจารณาสภาวะมหภาคได้ ที่ประกอบด้วยพลังงานต่าง ๆ โดยที่แต่ละระดับมีการกระจายแบบใดแบบหนึ่งในบรรดา $p(n)$ รูปแบบที่ระดับอื่น ๆ ของสภาวะมหภาคนี้ก็อาจมีรูปแบบใดรูปแบบหนึ่งตามความสัมพันธ์ของสมการ (7.62) ได้ เช่นกัน ดังนั้นการกระจายอนุภาคน้ำในสภาวะมหภาคหนึ่ง ๆ จึงมีจำนวนรูปแบบทั้งหมดตามผลคูณของจำนวนรูปแบบในแต่ละระดับซึ่งจะเป็นความน่าจะเป็นของสภาวะมหภาค ดังนี้

$$W_{r-n} = p_n = \prod_i p(n_i) = \prod_i \frac{g_i!}{(g_i - n_i)! n_i!} \quad \dots \dots \dots (7.68)$$

โดยที่ W_{r-n} เป็นความน่าจะเป็นของสภาวะมหภาคตามหลักเฟอร์มี-ดิ랙 π_i แทนสัญลักษณ์ของการคูณกัน

7.4.2 พิจารณาการกระจายของเฟอร์มี-ดิ랙

(Fermi-Dirac distribution function)

วิธีการหาพิจารณาการกระจายตามแบบเฟอร์มี-ดิ랙 สามารถใช้ขั้นตอนที่เหมือนกับของโนส-ไออน์ไซต์ ได้ ดังต่อไปนี้

1. พิจารณาระบบสองระบบที่คล้ายกันหรือต่างสภาวะกันในระบบเดียวกัน โดยที่แต่ละระบบมีระดับพลังงานเป็นชุด ๆ ที่เหมือนกัน แต่จำนวนอนุภาคน้ำอาจแตกต่างกันเล็กน้อยในระดับหนึ่งก็ได้ ให้พลังงานทั้งหมดของระบบทั้งสองต่างกัน ความสัมพันธ์ระหว่างอนุภาคน้ำทั้งหมดของระบบทั้งสองและพลังงานทั้งหมดของระบบทั้งสองจึงเป็นดังนี้

$$n' = n - 1$$

$$\text{และ} \quad U' = U - e_r \quad \dots \dots \dots (7.69)$$

2. เปรียบเทียบความน่าจะเป็นทางอุณหพลศาสตร์ระหว่างระบบที่คล้ายกันโดยพิจารณาสภาวะมหภาค k ได้ ฯ ตามหลักสถิติของเพอร์มี-ดิแรค จะได้

$$\frac{p'_k}{p_k} = \frac{(g_i - n'_{ik})! n'_{ik}!}{(g_i - n'_{ik})! n'_{ik}!} \dots \dots \dots (7.70)$$

3. หากความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของสภาวะจุลภาคสำหรับระบบทึ้งสองคือ Ω และ Ω' โดยที่ $n'_{ik} = n_{ik}$ ($i \neq r$) และ $n'_{rk} = n_{rk} - 1$ และ $\bar{n}'_r = n_r$ จะได้

$$\frac{\Omega'}{\Omega} = \frac{\bar{n}_r}{g_r + n_r} \dots \dots \dots (7.71)$$

4. หากความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของสภาวะจุลภาคกับความแตกต่างของเอนโทรปีสำหรับระบบทึ้งสอง

$$\text{จากสมการ (7.52)} \quad S = k_B \cdot \ln \Omega$$

และจากกฎข้อที่หนึ่งทางอุณหพลศาสตร์ของสมการ (7.21)

$$T\Delta S = \Delta U - \mu \Delta N$$

ดังนั้นจะได้

$$\frac{\Delta S}{k_B} = \ln \frac{\bar{n}_r}{g_r + \bar{n}_r} - \frac{(\mu - \epsilon_r)}{T} \dots \dots \dots (7.72)$$

5. หากการกระจายอนุภาคโดยเฉลี่ยในแต่ละระดับพลังงาน จากความสัมพันธ์ของสมการ (7.72) ซึ่งอาจเปลี่ยนอักษรพ่วงท้าช (subscripts) จาก r เป็น i เสียใหม่ เนื่องจากระดับ r อาจเป็นระดับใด ๆ ในบรรดาระดับ i ได้ และคิดจำนวนอนุภาคเฉลี่ยต่อจำนวนสภาวะจะได้ ดังนี้

$$\frac{\bar{n}_i}{g_i} = \frac{1}{\left[\frac{(\epsilon_i - \mu)/k_B}{e^{\epsilon_i/k_B} + 1} \right]} \dots \dots \dots (7.73)$$

สมการ (7.73) นี้เรียกว่า "ฟังค์ชันการกระจายแบบเฟอร์มี-ดิ랙"

(Fermi-Dirac distribution of particle)

จะเห็นว่าฟังค์ชันการกระจายแบบเฟอร์มี-ดิ랙 และตามแบบโนนส-ไอน์ไซต์จะตรงกันในกรณีที่ $n_i \ll g_i$, ซึ่งจะกล่าวเป็น "ฟังค์ชันการกระจายแบบดั้งเดิม" ดังนี้

$$\frac{\bar{n}_i}{g_i} = e^{\left(\frac{\mu - \epsilon_i}{kT}\right)} \quad \dots \dots \dots (7.74)$$

และฟังค์ชันการกระจายทั้ง 3 แบบของสมการ (7.62), (7.73) และ (7.74) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบเดียวกันได้ดังนี้

$$\frac{\bar{n}_i}{g_i} = \frac{1}{[(\epsilon_i - \mu)/k_b T]} \quad \dots \dots \dots (7.75)$$

$$e + a$$

เมื่อ a เป็นค่าที่มีได้ดังแต่ $-1, 0$ หรือ $+1$ ก็ได้

ดังนั้น ฟังค์ชันการกระจายตามหลักสถิติดังกล่าวสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

ทั่วไป

$$\frac{\bar{n}_i}{g_i} = \frac{1}{[(\epsilon_i - \mu)/k_b T]} \quad \dots \dots \dots (7.76)$$

$$e + a$$

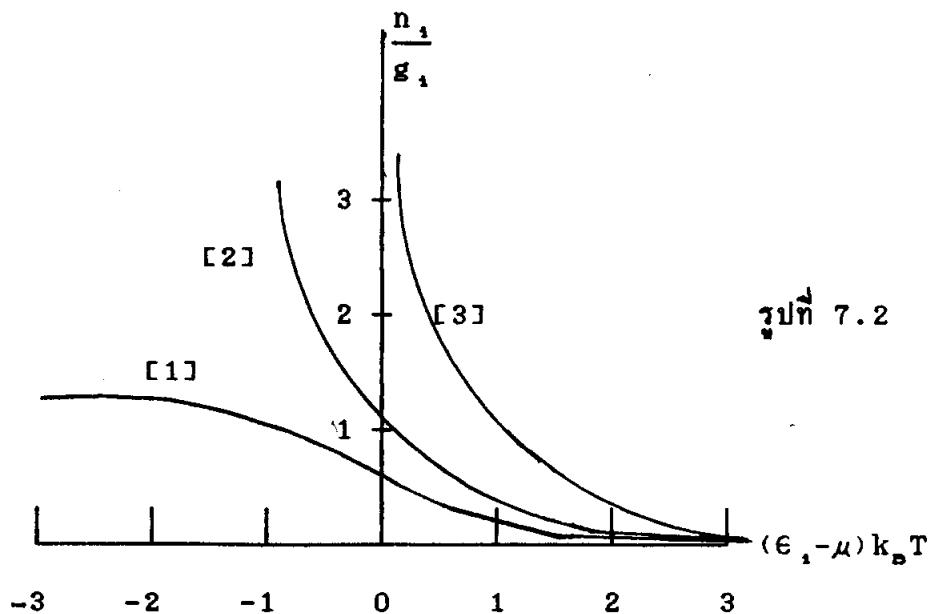
โดยที่ เมื่อ $a = -1$ ก็คือฟังค์ชันการกระจายแบบโนนส-ไอน์ไซต์ สมการ (7.62)

$a = +1$ ก็คือฟังค์ชันการกระจายแบบเฟอร์มี-ดิ랙 สมการ (7.73)

และ $a = 0$ ก็คือฟังค์ชันการกระจายแบบดั้งเดิม สมการ (7.74)

ฟังค์ชันการกระจายอนุภาคตามหลักสถิติทั้งสามสามารถเขียนกราฟแสดง

ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนอนุภาคโดยเฉลี่ยต่อสภาวะ (\bar{n}_1/g_1) กับอุณหภูมิหนึ่งกับปริมาณพลังงานในระดับต่าง ๆ $(\epsilon_1 - \mu)/k_B T$ ได้ดังรูปที่ 7.2



ตามลักษณะของการกระจายอนุภาคในแต่ละหลักสถิติตั้งกล่าวของสมการ (7.76) จะพบว่าที่ระดับพลังงานสูงจะมีอนุภาคโดยเฉลี่ยต่อสภาวะน้อย และที่ระดับพลังงานต่ำจะมีอนุภาคโดยเฉลี่ยต่อสภาวะมาก

$$\text{และเมื่อ } \epsilon_1 = \mu \text{ หรือ } \left(\frac{\epsilon_1 - \mu}{k_B T} \right) = 0 \text{ จะได้}$$

$$\left(\frac{\epsilon_1 - \mu}{k_B T} \right)$$

ก็คือ

$$e^{-1} = 1$$

$$\text{ถ้า } a = -1 \text{ จะได้ } \frac{\bar{n}_1}{g_1} = \infty$$

$$\text{ถ้า } a = +1 \text{ จะได้ } \frac{\bar{n}_1}{g_1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ถ้า } a = 0 \text{ จะได้ } \frac{\bar{n}_1}{g_1} = 1$$

และเมื่อ $\epsilon_1 \ll \mu$ หรือ $\left(\frac{\epsilon_1 - \mu}{k_B T}\right) \ll 0$ จะได้

$$\left(\frac{\epsilon_1 - \mu}{k_B T}\right)$$

$$e = 0$$

ดังนั้น

$$\text{ถ้า } a = +1 \text{ จะได้ } \frac{\bar{n}_1}{g_1} = 1$$

$$\text{และถ้า } a = 0 \text{ จะได้ } \frac{\bar{n}_1}{g_1} = \infty$$

$$\text{และถ้า } a = -1 \text{ จะได้ } \frac{\bar{n}_1}{g_1} = -1$$

และเมื่อพิจารณาจากรูปที่ 7.2 จะเห็นว่าเส้นกราฟที่ 1 สำหรับกรณีของ การกระจายแบบเฟอร์มิ-ดิ랙 และเส้นกราฟที่ 2 สำหรับกรณีของการกระจายแบบ ตั้งเดิม ส่วนเส้นกราฟที่ 3 นั้น สำหรับกรณีการกระจายแบบไบส-ไอน์สไตน์ และการ กระจายอนุภาค 1 ตัวต่อ 1 สภาวะจะทำให้ระบบมีความเป็นระเบียบมากที่สุด

บทสรุปและค่าจำากัดความที่ควรรู้

1. กฏการกระจายของแมกซ์เวล-โบลต์มาน

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha} \cdot e^{E_i/k_B T}}$$

2. พังค์ชั้นการกระจายอนุภาคของแมกซ์เวล-โบลต์มาน

$$\frac{\bar{n}_i / n}{g_i} = e^{(\mu - E_i) / k_B T}$$

3. การกระจายความเร็วของโบลต์มาน (Boltzmann distribution of velocity)

$$-\left(\frac{mv}{2kT} \right)^2$$

$$n(v) = \frac{\sqrt{2\pi N} (m)^{\frac{3}{2}}}{(\pi kT)^{\frac{3}{2}}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$$

4. การหาจำนวนเฉลี่ยของอนุภาคตามหลักสถิติของแมกซ์เวล-โบลต์มาน

$$\bar{n}_i = \frac{1}{\Omega} \sum_k n_{ik} p_k$$

5. กฏข้อที่หนึ่งทางอุณหพลศาสตร์ที่เกี่ยวข้องศึกษาเคมี

$$T\Delta S = \Delta U - \mu \Delta N$$

6. กฏการกระจายของโบส-ไอน์สไตน์

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\infty} \cdot e^{\beta E_i} - 1}$$

7. พังค์ชั้นการกระจายของโบส-ไอน์สไตน์

$$\frac{\bar{n}_i}{g_i} = \frac{1}{e^{(E_i - \mu) / k_B T} - 1}$$

8. กฎการกระจายของเฟอร์มี-ดิ랙

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\frac{\mu + \beta E_i}{k_B T}} + 1}$$

9. พึงค์ชั้นการกระจายของเฟอร์มี-ดิ랙

$$\frac{n_i}{g_i} = \frac{1}{e^{\frac{(E_i - \mu)/k_B T}{+ 1}}}$$

10. Thermodynamics probability of the macrostate (Ω) ความน่าจะเป็น

ทางอุณหพลศาสตร์ของสภาวะมหภาค

10.1 ตามแบบแมกซ์เวล-โบลท์มาน

$$\Omega = \sum_k p_k$$

และ

$$\Omega_{M-B} = W_{M-B} = N! \cdot \prod_i \frac{g_i^{(n_i)}}{n_i!}$$

$$\text{โดยที่ } p_k = \frac{N!}{\prod_i n_i!} \cdot \prod_i g_i$$

π_i แทนสัดส่วนของจำนวนกัน

10.2 ตามแบบของโบส-ไอน์สไตน์

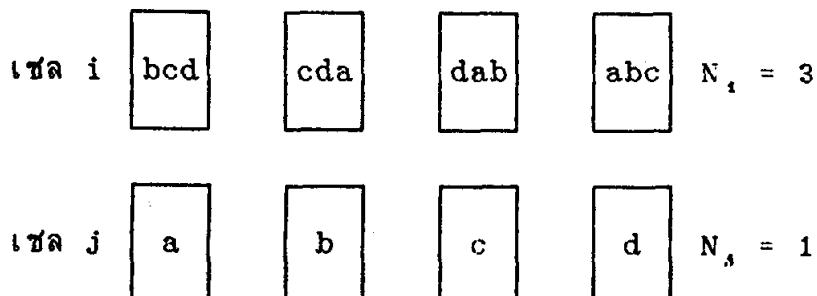
$$n_{B-E} = W_{B-E} = \prod_i \frac{(g_i + n_i - 1)!}{(g_i - 1)! n_i!}$$

10.3 ตามแบบของเฟอร์มี-ดิ랙

$$n_{F-D} = W_{F-D} = \prod_i \frac{g_i!}{(g_i - n_i)! n_i!}$$

แบบฝึกหัดบทที่ 7

1. พิจารณาเชล 2 เชลในช่องระหว่างเฟส (phase space) คือ เชล i และ เชล j และมีจุด 4 จุดในเฟสดังกล่าวซึ่งแทนด้วยอักษร a, b, c, d ติดมี n_i และ n_j แทน จำนวนจุดในเฟสในเชลดังกล่าว และถ้า $n_i = 3$ อ่าย์ในเชล i และ $n_j = 1$ อ่าย์ในเชล j จะได้สภาวะบุลภาณ 4 แบบดังรูป



คงค่านวณหาค่าน่าจะเป็นทางอุณหพลศาสตร์ (Thermodynamics probability) ด

- ก. ตามหลักสหิพ้องแมกซ์เวล-บูลท์มาน
 - ข. ตามหลักสหิพ้องโบส-ไอ้น์สไตน์
 - ค. ตามหลักสหิพ้องเฟอร์นี-ดิ랙

2. พิจารณาระบบหนึ่งมีอนุภาคที่เคลื่อนกัน 6 ตัว กระจายอยู่ในระดับพลังงานดังนี้ $E_0 = 0$, $E_1 = \epsilon$, $E_2 = 2\epsilon$ โดยแต่ละระดับมีส่วน率พลังงานอยู่ $g_i = 3$ และมีจำนวนส่วน率 Ω มากเท่ากับ 11 ตาราง 7.1

จงคำนวณหา

ก. W_{B-E} สำหรับสภาวะมหภาค $k = 1$ ที่ระดับพลังงาน E_o และ E_e

ข. η ตามหลักสถิติแบบโบส-ไอน์สไตน์

ค. N_i ตามหลักสถิติแบบโบส-ไอน์สไตน์

3. พิจารณาการจัดอนุภาคจำนวน 6 ตัว ดังตาราง 7.2

$k =$	1	2	3	4	5
$\epsilon_1/\epsilon = 4$	•				
3		•	•		
2		•		•	•
1	•	•	•		
0	•	•	•	•	•

จงหา W_{B-E} เมื่อ $k = 1$ และ $k = 5$ เมื่อ $g_s = 3$ และหา η ตามหลักสถิติแบบเฟอร์มี-ดิ랙

4. จากตาราง 7.2 ข้อ 3 จงหา N_i ตามหลักสถิติแบบเฟอร์มี-ดิ랙

เฉลยค่าตอบแบบฝึกหัดบทที่ 7

1. ก. สภាធະชาติลาก 4 แบบ, สภាធະນහກາດ 1 แบบ
ข. สภាធະชาติลาก 20 แบบ, สภាធະນහກາດ 4 แบบ
สภាធະຮວມ 80 แบบ
ค. สภាធະชาติลาก 4 แบบ, สภាធະນහກາດ 4 แบบ
สภាធະຮວມ 16 แบบ
 2. ก. 63
ข. 1532
ค. 378
 3. 9 และ 1
 4. 2.5
-