

## บทที่ 8

# ฟังก์ชันพาร์ทิชัน

### จุดประสงค์การเรียนรู้

1. เขียนฟังก์ชันพาร์ทิชันอย่างน้อย 2 แบบได้
2. แสดงความสัมพันธ์ของการแจกแจงตามหลักสถิติทั้ง 3 แบบ ในรูปของฟังก์ชันพาร์ทิชันได้
3. หาค่าต่าง ๆ ของระบบใด ๆ โดยอาศัยฟังก์ชันพาร์ทิชันได้

### เค้าโครงเรื่อง

1. รูปแบบฟังก์ชันพาร์ทิชัน
  - 1.1 ฟังก์ชันพาร์ทิชัน-ผลรวมของทุกสภาวะ
  - 1.2 ฟังก์ชันการแจกแจงในพจน์ของฟังก์ชันพาร์ทิชัน
  - 1.3 รูปแบบที่แท้จริงของผลรวมของทุกสภาวะ
  - 1.4 ฟังก์ชันพาร์ทิชัน-ค่าคงตัวปรกติ
  - 1.5 มหฟังก์ชันพาร์ทิชัน
2. ความสัมพันธ์ของค่าต่าง ๆ กับฟังก์ชันพาร์ทิชัน
  - 2.1 ความสัมพันธ์สำหรับระบบตามหลักสถิติแผนเดิม
  - 2.2 ความสัมพันธ์สำหรับระบบตามหลักสถิติแมกซ์เวลล์-โบลต์ซมันน์
3. การหาค่าต่าง ๆ สำหรับระบบก๊าซอุดมคติ
  - 3.1 ฟังก์ชันพาร์ทิชันสำหรับก๊าซอุดมคติ
  - 3.2 การหาค่าที่ไม่ขึ้นกับมวล
  - 3.3 การหาค่าที่ขึ้นกับมวล
  - 3.4 การหาความดันบรรยากาศ-กฎของบรรยากาศ

#### 4. การหาความร้อนจำเพาะ

- 4.1 ความร้อนจำเพาะของก๊าซ
- 4.2 จำนวนอนุภาคในระดับพลังงานต่าง ๆ
- 4.3 ทฤษฎีไอน์สไตน์ว่าด้วยความร้อนจำเพาะของของแข็ง
- 4.4 ทฤษฎีเดอบายว่าด้วยความร้อนจำเพาะของของแข็ง
- 4.5 ความจุความร้อนของผลึกพาราแมกเนติก

## รูปแบบฟังก์ชันพาร์ทิชัน

### คำอธิบายศัพท์/สำนวน

1. ฟังก์ชันพาร์ทิชัน คือ ฟังก์ชันซึ่งแสดงถึงผลรวมของการแจกแจงทุกสภาวะ ในกรณี  
ที่พลังงานของสภาวะต่าง ๆ ไม่แตกต่างกันจะแสดงถึงผลรวมของระดับพลังงานทุกระดับ จึง

กำหนดให้ฟังก์ชันพาร์ทิชัน  $Z = \sum_j g_j \exp \frac{-\epsilon_j}{kT}$  หรือ  $\sum_j \exp \frac{-\epsilon_j}{kT}$  โดยอาศัยฟังก์ชันพาร์ทิชัน

จะหาค่าต่าง ๆ สำหรับระบบอุณหพลศาสตร์ได้โดยตรงจากความสัมพันธ์ของค่าทั้งหมด

2. ค่าคงตัวปรกติ คือ ค่าซึ่งทำให้ผลรวมเท่ากับ 1 โดยเมื่อนำการแจกแจงอนุภาค  
โดยเฉลี่ยไปตามสภาวะต่าง ๆ มารวมกัน เช่น ตามหลักสถิติของแมกซ์เวลล์-โบลต์ซมันน์,  $\bar{N}_j =$

$$N \left( \exp \frac{\mu}{kT} \right) g_j \exp \frac{-\epsilon_j}{kT} \text{ และ } Z = \sum_j g_j \exp \frac{-\epsilon_j}{kT} \text{ จะได้ } \sum_j \bar{N}_j = N = N \left( \exp \frac{\mu}{kT} \right) \sum_j g_j \exp \frac{-\epsilon_j}{kT}$$

ดังนั้น  $\exp \frac{\mu}{kT} = \frac{1}{Z}$  และ  $Z$  คือ ค่าคงตัวปรกติตามความหมายข้างต้น

3. มหฟังก์ชันพาร์ทิชัน คือ รูปแบบของฟังก์ชันพาร์ทิชันซึ่งสอดคล้องกับฟังก์ชันการ

แจกแจงแบบโบส-ไอน์สไตน์ และแบบเฟอร์มี-ดิแรก ดังนี้ มหฟังก์ชันพาร์ทิชัน  $G =$

$$\sum_{n=0}^H \exp \frac{n(\mu - \epsilon)}{kT} \text{ โดยที่ } H = 1 \text{ สำหรับการแจกแจงแบบเฟอร์มี-ดิแรก และ } H = \infty$$

สำหรับแบบโบส-ไอน์สไตน์

### สรุปประเด็นสำคัญ

การกำหนดฟังก์ชันพาร์ทิชันจะช่วยให้ฟังก์ชันการแจกแจงตามหลักสถิติทางอุณห-  
พลศาสตร์มีรูปแบบที่ง่ายและชัดเจนขึ้น โดยที่สามารถเขียนฟังก์ชันการแจกแจงแบบต่าง ๆ  
ในพจน์ของฟังก์ชันพาร์ทิชันได้

#### กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1

1. ทบทวนเนื้อหาหัวข้อที่ 1 จากตำราเรียนด้วยตนเองแบบโปรแกรมสำหรับ  
กระบวนวิชานี้ (รหัสการพิมพ์ 29241) หน้า 419-424 หรือฟังคำบรรยายสรุปจากแถบคำ

บรรยายสรุปสำหรับกระบวนวิชานี้ ครั้งที่ 10 (ดูบันทึกท้ายเล่ม) ประกอบด้วยภาพไปรษณีย์  
แผ่นที่ 59-60 (ดูต้นแบบท้ายเล่มนี้)

2. แสดงฟังก์ชันการแจกแจงแบบต่าง ๆ ตามหลักสถิติทางอุณหพลศาสตร์ในพจน์  
ของฟังก์ชันพาร์ทิชัน

3. อธิบายความหมายของการแจกแจงแต่ละแบบในกิจกรรมข้อ 2 ข้างต้น

(หน้า 424-430)

## ความสัมพันธ์ของค่าต่าง ๆ กับฟังก์ชันพาร์ทิชัน

### คำอธิบายศัพท์/สำนวน

ความสัมพันธ์ของค่าต่าง ๆ คือ รูปแบบของสมการสำหรับค่าทางอุณหพลศาสตร์หนึ่ง ๆ  
ซึ่งสามารถเขียนเป็นฟังก์ชันของค่าอื่น ๆ อย่างน้อย 2 ค่าได้ หรืออาจแสดงความสัมพันธ์ในรูป  
ของอนุพันธ์ที่แน่นอนได้

### สรุปประเด็นสำคัญ

โดยความสัมพันธ์ของค่าต่าง ๆ ทางอุณหพลศาสตร์กับศักย์ทางเคมี จะหาค่าทั้งหมดได้  
โดยอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างศักย์ทางเคมีกับฟังก์ชันพาร์ทิชัน ซึ่งอาจพิจารณาแยกเป็น 2  
กรณี คือ ค่าที่ไม่ขึ้นกับมวล และค่าที่ขึ้นกับมวล

### กิจกรรมการเรียนรู้ 2

1. ทบทวนเนื้อหาหัวข้อที่ 2 จากตำราเรียนด้วยตนเองแบบโปรแกรมสำหรับ  
กระบวนวิชานี้ (รหัสการพิมพ์ 29241) หน้า 424-430 หรือฟังก์ชันบรรยายสรุปจากแถบคำ  
บรรยายสรุปสำหรับกระบวนวิชานี้ ครั้งที่ 10 (ดูบันทึกท้ายเล่ม) ประกอบด้วยภาพไปรษณีย์  
แผ่นที่ 59 (ดูต้นแบบท้ายเล่มนี้)

2. แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าทางอุณหพลศาสตร์กับฟังก์ชันพาร์ทิชัน

3. เปรียบเทียบความสัมพันธ์ของค่าต่าง ๆ สำหรับระบบตามหลักสถิติแบบ  
แผนเดิมกับในกรณีที่ระบบเป็นไปตามหลักสถิติแบบแมกซ์เวลล์-โบลต์ซมันน์

## การหาค่าต่าง ๆ สำหรับระบบก๊าซอุดมคติ

### คำอธิบายศัพท์/สำนวน

1. ฟังก์ชันพาร์ทิชันสำหรับก๊าซอุดมคติ คือ การพิจารณารูปแบบที่แน่นอนของฟังก์ชันพาร์ทิชัน สำหรับระบบก๊าซอุดมคติ ซึ่งประกอบด้วยอนุภาคเหมือนกันทุกประการ โดยแต่ละอนุภาคแยกกันอยู่เป็นอนุภาคเดี่ยวไปตามสภาวะที่เป็นไปได้ทั้งหมด ซึ่งมีจำนวนอนุภาคโดยเฉลี่ยน้อยกว่าจำนวนสภาวะหลายเท่า จึงเป็นระบบตามหลักสถิติแบบแผนเดิม เมื่อเคลื่อนที่ใน 3 มิติ โดยไม่มีปฏิกริยาใด ๆ ต่อกัน อนุภาคหนึ่งอาจมีพลังงานได้หลายระดับตามหลักกลศาสตร์ควอนตัม

คือ  $\epsilon_i = \frac{n_i^2 h^2 V^{-2/3}}{8m}$  และจำนวนสภาวะที่เป็นไปได้ทั้งหมดในระดับพลังงานต่ำสุดถึง

$\epsilon_i$  คือ  $G_i = \frac{\pi}{6} n_i^3$  โดยที่  $n_i^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$  เมื่อ  $n_x, n_y, n_z$  เป็นเลขจำนวนเต็ม

ส่วน  $h$  คือ ค่าคงตัวของพลังค์  $V$  คือ ปริมาตรของระบบ และ  $m$  คือมวลของอนุภาคหนึ่ง จะได้ว่าฟังก์ชันพาร์ทิชันสำหรับก๊าซอุดมคติ คือ  $Z = V \left( \frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2}$

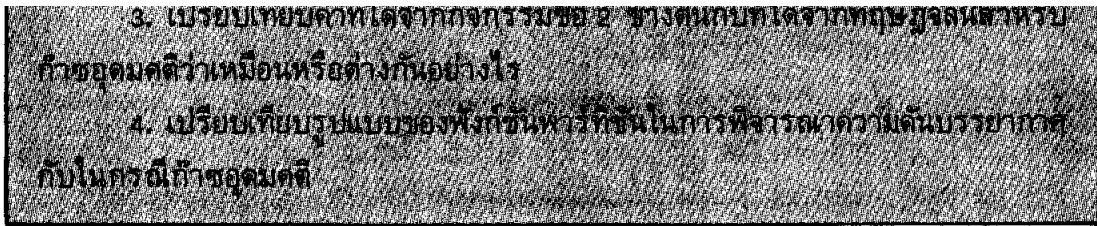
2. กฎของบรรยากาศ หรือสมการแบรอมเมตริก คือ สูตรสำหรับหาความดันบรรยากาศที่ระดับความสูงต่าง ๆ เหนือระดับพื้นดิน ซึ่งจะลดลงตามระดับความสูงแบบเอกซ์โพเนนเชียล ดังนี้  $P_y = P_0 \exp\left(\frac{-mgy}{kT}\right)$  เมื่อ  $y$  คือระดับความสูงจากพื้นดิน

### สรุปประเด็นสำคัญ

ในการหาค่าต่าง ๆ สำหรับระบบก๊าซอุดมคติจะต้องทราบว่าระบบเป็นไปตามหลักสถิติใดทางอุณหพลศาสตร์ เพื่อจะได้หาฟังก์ชันพาร์ทิชันที่แน่นอนของระบบ และอาศัยความสัมพันธ์ของค่าต่าง ๆ กับฟังก์ชันพาร์ทิชัน โดยการแทนค่าฟังก์ชันพาร์ทิชันลงในแต่ละความสัมพันธ์นั้น

### กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 3

1. ทบทวนเนื้อหาหัวข้อที่ 3 จากตำราเรียนด้วยตนเองแบบโปรแกรมสำหรับกระบวนวิชานี้ (รหัสการพิมพ์ 29241) หน้า 430-440 หรือฟังคำบรรยายสรุปจากแถบคำบรรยายสรุปสำหรับกระบวนวิชานี้ ครั้งที่ 10 (ดูบันทึกท้ายเล่ม) ประกอบแผนภาพโปร่งใสแผ่นที่ 60-61 (ดูต้นแบบท้ายเล่มนี้)



(หน้า 440-475)

### การหาความร้อนจำเพาะ

#### คำอธิบายศัพท์/สำนวน

1. อุณหภูมิเฉพาะของกลุ่ม คือ เมื่ออุณหภูมิตรงกับความสัมพันธ์  $kT = hf$  ซึ่งจะเขียน  $T$  แทนด้วย  $\theta$  โดยที่  $hf/kT = \theta/T$  ดังนั้น  $\theta = hf/k$  จึงเรียกว่า “อุณหภูมิเฉพาะของกลุ่ม” ถ้าอุณหภูมินี้มีค่ามากขึ้น แสดงความถี่ประจำกลุ่ม  $f$  มีค่าสูงขึ้น เช่น อนุภาคซึ่งประกอบด้วยอะตอมคู่จึงมีทั้งการหมุนรอบแกนและการสั่น อุณหภูมิเฉพาะของกลุ่มจะสัมพันธ์กับการหมุนส่วนหนึ่งและกับการสั่นอีกส่วนหนึ่งมากน้อยต่างกันตามระดับอุณหภูมิต่าง ๆ

2. อุณหภูมิไอน์สไตน์ คือ อุณหภูมิเฉพาะของกลุ่มตามทฤษฎีไอน์สไตน์ว่าด้วยความร้อนจำเพาะของของแข็ง ซึ่งโดยทฤษฎีไอน์สไตน์จะหาค่าความร้อนจำเพาะของของแข็งที่อุณหภูมิปานกลางและที่อุณหภูมิสูงได้อย่างถูกต้อง

3. อุณหภูมิเดอบาย คือ อุณหภูมิเฉพาะของกลุ่มตามทฤษฎีเดอบาย ว่าด้วยความร้อนจำเพาะของของแข็ง ซึ่งโดยทฤษฎีเดอบายจะหาค่าความร้อนจำเพาะของของแข็งที่อุณหภูมิต่ำได้อย่างถูกต้อง ส่วนที่อุณหภูมิปานกลางและรวมทั้งอุณหภูมิต่ำค่าความร้อนจำเพาะจะแปรโดยตรงกับกำลังสามของอุณหภูมิจึงเรียกว่า “กฎอุณหภูมิกำลังสามของเดอบาย”

4. ผลึกพาราแมกเนติก คือ ผลึกของสารบางชนิดซึ่งแสดงสภาวะแม่เหล็กอย่างอ่อนได้ เนื่องจากการสปีนของอิเล็กตรอนของไอออนที่อยู่ในโครงสร้างแลตทิซของผลึกทำให้เกิดโมเมนต์แม่เหล็ก และมีทิศสนามแม่เหล็กในแนวเดียวกับสนามแม่เหล็กภายนอก โดยเฉพาะที่อุณหภูมิต่ำมาก ๆ จะแสดงคุณลักษณะดังกล่าวอย่างเด่นชัด ในกระบวนการลบล้างสภาพแม่เหล็กแบบแอดเดียแบติกจะทำให้ผลึกมีอุณหภูมิลดลงได้มาก แต่ที่อุณหภูมิสูงภายใต้สนามแม่เหล็กอ่อนมาก ( $H$ ) โมเมนต์แม่เหล็กของผลึกจะแปรโดยตรงกับ  $H/T$  ตามกฎของคูรี

