บทที่ 8
ฟังก์ชันพาร์ทิชัน

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. เขียนฟังก์ชันพาร์ทิชันอย่างน้อย 2 แบบได้
2. แสดงความสัมพันธ์ของการแจกแจงตามหลักสถิติทั้ง 3 แบบ ในรูปของฟังก์ชันพาร์ทิชันได้
3. หาค่าต่าง ๆ ของระบบใด ๆ โดยอาศัยฟังก์ชันพาร์ทิชันได้

เค้าโครงเรื่อง

1. **รูปแบบฟังก์ชันพาร์ทิชัน**
   - 1.1 ฟังก์ชันพาร์ทิชัน-ผลรวมของทุกสภาวะ
   - 1.2 ฟังก์ชันการแจกแจงในพจน์ของฟังก์ชันพาร์ทิชัน
   - 1.3 รูปแบบที่แท้จริงของผลรวมของทุกสภาวะ
   - 1.4 ฟังก์ชันพาร์ทิชัน-ค่าคงตัวปรกติ
   - 1.5 มหฟังก์ชันพาร์ทิชัน
2. **ความสัมพันธ์ของค่าต่าง ๆ กับฟังก์ชันพาร์ทิชัน**
   - 2.1 ความสัมพันธ์สำหรับระบบตามหลักสถิติแผนเดิม
   - 2.2 ความสัมพันธ์สำหรับระบบตามหลักสถิติแมกซ์เวลล์-โบลต์ซมันน์
3. **การหาค่าต่าง ๆ สำหรับระบบก๊าซอุดมคติ**
   - 3.1 ฟังก์ชันพาร์ทิชันสำหรับก๊าซอุดมคติ
   - 3.2 การหาค่าที่ไม่ขึ้นกับมวล
   - 3.3 การหาค่าที่ขึ้นกับมวล
   - 3.4 การหาความดันบรรยากาศ-กฎของบรรยากาศ

4. การหาความร้อนจำเพาะ

4.1 ความร้อนจำเพาะของก๊าซ

4.2 จำนวนอนุภาคในระดับพลังงานต่าง ๆ

4.3 ทฤษฎีไอน์สไตน์ว่าด้วยความร้อนจำเพาะของของแข็ง

4.4 ทฤษฎีเดอบ้ายว่าด้วยความร้อนจำเพาะของของแข็ง

4.5 ความจุความร้อนของผลึกพาราแมกเนติก

รูปแบบฟังก์ชันพาร์ทิชัน

คำอธิบายศัพท์/สำนวน

1. ฟังก์ชันพาร์ทิชัน คือ ฟังก์ชันซึ่งแสดงถึงผลรวมของการแจกแจงทุกสภาวะ ในกรณีที่พลังงานของสภาวะต่าง ๆ **ไม่**แตกต่างกันจะแสดงถึงผลรวมของระดับพลังงานทุกระดับ จึงกำหนดให้ฟังก์ชันพาร์ทิชัน $Z \equiv \sum_j g_j \exp \frac{-\epsilon_j}{kT}$ หรือ $\sum_j \exp \frac{-\epsilon_j}{kT}$ โดยอาศัยฟังก์ชันพาร์ทิชันจะหาค่าต่าง ๆ สำหรับระบบอุณหพลศาสตร์ได้โดยตรงจากความสัมพันธ์ของค่าทั้งหมด

2. ค่าคงตัวปรกติ คือ ค่าซึ่งทำให้ผลรวมเท่ากับ 1 โดยเมื่อนำการแจกแจงอนุภาคโดยเฉลี่ยไปตามสภาวะต่าง ๆ มารวมกัน เช่น ตามหลักสถิติของแมกซ์เวลล์-โบลต์ซมันน์, $\bar{N}_j = N(\exp \frac{\mu}{kT}) g_j \exp \frac{-\epsilon_j}{kT}$ และ $Z = \sum_j g_j \exp \frac{-\epsilon_j}{kT}$ จะได้ $\sum_j \bar{N}_j = N = N(\exp \frac{\mu}{kT}) \sum_j g_j \exp \frac{-\epsilon_j}{kT}$ ดังนั้น $\exp \frac{\mu}{kT} = \frac{1}{Z}$ และ Z คือ ค่าคงตัวปรกติตามความหมายข้างต้น

3. มหฟังก์ชันพาร์ทิชัน คือ รูปแบบของฟังก์ชันพาร์ทิชันซึ่งสอดคล้องกับฟังก์ชันการแจกแจงแบบโบส-ไอน์สไตน์ และแบบเฟร์มี-ดิแรก ดังนี้ มหฟังก์ชันพาร์ทิชัน $\mathcal{G} = \sum_{n=0}^{H} \exp \frac{n(\mu - \epsilon)}{kT}$ โดยที่ $H = 1$ สำหรับการแจกแจงแบบเฟร์มี-ดิแรก และ $H = \infty$ สำหรับแบบโบส-ไอน์สไตน์

สรุปประเด็นสำคัญ

การกำหนดฟังก์ชันพาร์ทิชันจะช่วยให้ฟังก์ชันการแจกแจงตามหลักสถิติทางอุณหพลศาสตร์มีรูปแบบที่ง่ายและชัดเจนขึ้น โดยที่สามารถเขียนฟังก์ชันการแจกแจงแบบต่าง ๆ ในพจน์ของฟังก์ชันพาร์ทิชันได้

กิจกรรมการเรียนที่ 1

1. ทบทวนเนื้อหาหัวข้อที่ 1 จากตำราเรียนด้วยตนเองแบบโปรแกรมสำหรับกระบวนวิชานี้ (รหัสการพิมพ์ 29241) หน้า 419-424 หรือฟังคำบรรยายสรุปจากแถบคำ

บรรยายสรุปสำหรับกระบวนวิชานี้ ครั้งที่ 10 (ดูบันทึกท้ายเล่ม) ประกอบแผ่นภาพโปร่งใส แผ่นที่ 59-60 (ดูต้นแบบท้ายเล่มนี้)

2. แสดงฟังก์ชันการแจกแจงแบบต่าง ๆ ตามหลักสถิติทางอุณหพลศาสตร์ในพจน์ของฟังก์ชันพาร์ทิชัน

3. อธิบายความหมายของการแจกแจงแต่ละแบบในกิจกรรมข้อ 2 ข้างต้น

(หน้า 424-430)

ความสัมพันธ์ของค่าต่าง ๆ กับฟังก์ชันพาร์ทิชัน

คำอธิบายศัพท์/สำนวน

ความสัมพันธ์ของค่าต่าง ๆ คือ รูปแบบของสมการสำหรับค่าทางอุณหพลศาสตร์หนึ่ง ๆ ซึ่งสามารถเขียนเป็นฟังก์ชันของค่าอื่น ๆ อย่างน้อย 2 ค่าได้ หรืออาจแสดงความสัมพันธ์ในรูปของอนุพันธ์ที่แน่นอนได้

สรุปประเด็นสำคัญ

โดยความสัมพันธ์ของค่าต่าง ๆ ทางอุณหพลศาสตร์กับศักย์ทางเคมี จะหาค่าทั้งหมดได้โดยอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างศักย์ทางเคมีกับฟังก์ชันพาร์ทิชัน ซึ่งอาจพิจารณาแยกเป็น 2 กรณี คือ ค่าที่**ไม่ขึ้น**กับมวล และค่าที่**ขึ้น**กับมวล

กิจกรรมการเรียนที่ 2

1. ทบทวนเนื้อหาหัวข้อที่ 2 จากตำราเรียนด้วยตนเองแบบโปรแกรมสำหรับกระบวนวิชานี้ (รหัสการพิมพ์ 29241) หน้า 424-430 หรือฟังคำบรรยายสรุปจากแถบคำบรรยายสรุปสำหรับกระบวนวิชานี้ ครั้งที่ 10 (ดูบันทึกท้ายเล่มนี้) ประกอบแผ่นภาพโปร่งใส แผ่นที่ 59 (ดูต้นแบบท้ายเล่มนี้)

2. แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าทางอุณหพลศาสตร์กับฟังก์ชันพาร์ทิชัน

3. เปรียบเทียบความสัมพันธ์ของค่าต่าง ๆ สำหรับระบบตามหลักสถิติแบบแผนเดิมกับในกรณีที่ระบบเป็นไปตามหลักสถิติแบบแมกซ์เวลล์-โบลต์ซมันน์

การหาค่าต่าง ๆ สำหรับระบบก๊าซอุดมคติ

คำอธิบายศัพท์/สำนวน

1. ฟังก์ชันพาร์ทิชันสำหรับก๊าซอุดมคติ คือ การพิจารณารูปแบบที่แน่นอนของฟังก์ชันพาร์ทิชัน สำหรับระบบก๊าซอุดมคติ ซึ่งประกอบด้วยอนุภาคเหมือนกันทุกประการ โดยแต่ละอนุภาคแยกกันอยู่เป็นอนุภาคเดี่ยวไปตามสภาวะที่เป็นไปได้ทั้งหมด ซึ่งมีจำนวนอนุภาคโดยเฉลี่ยน้อยกว่าจำนวนสภาวะหลายเท่า จึงเป็นระบบตามหลักสถิติแบบแผนเดิม เมื่อเคลื่อนที่ใน 3 มิติ โดย**ไม่**มีปฏิกิริยาใด ๆ ต่อกัน อนุภาคหนึ่งอาจมีพลังงานได้หลายระดับตามหลักกลศาสตร์ควอนตัม คือ $\epsilon_i = \frac{n_i^2 h^2 V^{-2/3}}{8m}$ และจำนวนสภาวะที่เป็นไปได้ทั้งหมดในระดับพลังงานต่ำสุดถึง ϵ_i คือ $G_i = \frac{\pi}{6} n_i^3$ โดยที่ $n_i^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$ เมื่อ n_x, n_y, n_z เป็นเลขจำนวนเต็ม ส่วน h คือ ค่าคงตัวของพลังค์ V คือ ปริมาตรของระบบ และ m คือมวลของอนุภาคหนึ่ง จะได้ว่าฟังก์ชันพาร์ทิชันสำหรับก๊าซอุดมคติ คือ $Z = V(\frac{2\pi mkT}{h^2})^{3/2}$

2. กฎของบรรยากาศ หรือสมการแบรอเมตริก คือ สูตรสำหรับหาความดันบรรยากาศที่ระดับความสูงต่าง ๆ เหนือระดับพื้นดิน ซึ่งจะลดลงตามระดับความสูงแบบเอกซ์โพเนนเชียลดังนี้ $P_y = P_0 \exp(\frac{-mgy}{kT})$ เมื่อ y คือระดับความสูงจากพื้นดิน

สรุปประเด็นสำคัญ

ในการหาค่าต่าง ๆ สำหรับระบบก๊าซอุดมคติจะต้องทราบว่าระบบเป็นไปตามหลักสถิติใดทางอุณหพลศาสตร์ เพื่อจะได้หาฟังก์ชันพาร์ทิชันที่แน่นอนของระบบ และอาศัยความสัมพันธ์ของค่าต่าง ๆ กับฟังก์ชันพาร์ทิชัน โดยการแทนค่าฟังก์ชันพาร์ทิชันลงในแต่ละความสัมพันธ์นั้น

กิจกรรมการเรียนที่ 3

1. ทบทวนเนื้อหาหัวข้อที่ 3 จากตำราเรียนด้วยตนเองแบบโปรแกรมสำหรับกระบวนวิชานี้ (รหัสการพิมพ์ 29241) หน้า 430-440 หรือฟังคำบรรยายสรุปจากแถบคำบรรยายสรุปสำหรับกระบวนวิชานี้ ครั้งที่ 10 (ดูบันทึกท้ายเล่ม) ประกอบแผ่นภาพโปร่งใส แผ่นที่ 60-61 (ดูต้นแบบท้ายเล่มนี้)

2. แสดงความสัมพันธ์ของค่าความดัน พลังงานภายในและความร้อนจำเพาะกับฟังก์ชันพาร์ทิชันสำหรับก๊าซอุดมคติ และหาค่าทั้งสามจากความสัมพันธ์นั้น

3. เปรียบเทียบค่าที่ได้จากกิจกรรมข้อ 2 ข้างต้นกับที่ได้จากทฤษฎีจลน์สำหรับก๊าซอุดมคติว่าเหมือนหรือต่างกันอย่างไร

4. เปรียบเทียบรูปแบบของฟังก์ชันพาร์ทิชันในการพิจารณาความดันบรรยากาศกับในกรณีก๊าซอุดมคติ

(หน้า 440-475)

การหาความร้อนจำเพาะ

คำอธิบายศัพท์/สำนวน

1. อุณหภูมิเฉพาะของกลุ่ม คือ เมื่ออุณหภูมิตรงกับความสัมพันธ์ $kT = hf$ ซึ่งจะเขียน T แทนด้วย θ โดยที่ $hf/kT = \theta/T$ ดังนั้น $\theta = hf/k$ จึงเรียกว่า "อุณหภูมิเฉพาะของกลุ่ม" ถ้าอุณหภูมินี้มีค่ามากขึ้น แสดงความถี่ประจำกลุ่ม f มีค่าสูงขึ้น เช่น อนุภาคซึ่งประกอบด้วยอะตอมคู่จึงมีทั้งการหมุนรอบแกนและการสั่น อุณหภูมิเฉพาะของกลุ่มจะสัมพันธ์กับการหมุนส่วนหนึ่งและกับการสั่นอีกส่วนหนึ่งมากน้อยต่างกันตามระดับอุณหภูมิต่าง ๆ

2. อุณหภูมิไอน์สไตน์ คือ อุณหภูมิเฉพาะของกลุ่มตามทฤษฎีไอน์สไตน์ว่าด้วยความร้อนจำเพาะของของแข็ง ซึ่งโดยทฤษฎีไอน์สไตน์จะหาค่าความร้อนจำเพาะของของแข็งที่อุณหภูมิปานกลางและที่อุณหภูมิสูงได้อย่างถูกต้อง

3. อุณหภูมิเดอบาย คือ อุณหภูมิเฉพาะของกลุ่มตามทฤษฎีเดอบาย ว่าด้วยความร้อนจำเพาะของของแข็ง ซึ่งโดยทฤษฎีเดอบายจะหาค่าความร้อนจำเพาะของของแข็งที่อุณหภูมิต่ำได้อย่างถูกต้อง ส่วนที่อุณหภูมิปานกลางและรวมทั้งอุณหภูมิต่ำค่าความร้อนจำเพาะจะแปรโดยตรงกับกำลังสามของอุณหภูมิซึ่งเรียกว่า "กฎอุณหภูมิยกกำลังสามของเดอบาย"

4. ผลึกพาราแมกนิติก คือ ผลึกของสารบางชนิดซึ่งแสดงสภาวะแม่เหล็กอย่างอ่อนได้ เนื่องจากการสปินของอิเล็กตรอนของไอออนที่อยู่ในโครงสร้างแลตทิซของผลึกทำให้เกิดโมเมนต์แม่เหล็ก และมีทิศสนามแม่เหล็กในแนวเดียวกับสนามแม่เหล็กภายนอก โดยเฉพาะที่อุณหภูมิสัมบูรณ์ต่ำมาก ๆ จะแสดงคุณลักษณะดังกล่าวนี้อย่างเด่นชัด ในกระบวนการลบล้างสภาพแม่เหล็กแบบแอเดียแบติกจะทำให้ผลึกมีอุณหภูมิลดลงได้มาก แต่ที่อุณหภูมิสูงภายใต้สนามแม่เหล็กอ่อนมาก (H) โมเมนต์แม่เหล็กของผลึกจะแปรโดยตรงกับ H/T ตาม**กฎของคูรี**

สรุปประเด็นสำคัญ

การหาความร้อนจำเพาะสามารถเปรียบเทียบความถูกต้องทางทฤษฎีกับผลการทดลองได้โดยการพิจารณาพลังงานของอนุภาคตามกลศาสตร์ควอนตัม เพื่อหาฟังก์ชันพาร์ทิชันที่แน่นอนของระบบและแทนค่าลงในความสัมพันธ์ของพลังงานภายในกับฟังก์ชันพาร์ทิชัน จะหาค่าความจุความร้อนและความร้อนจำเพาะของระบบต่าง ๆ ได้ สำหรับก๊าซซึ่งเกาะกันเป็นโมเลกุลเคลื่อนที่ด้วยระดับขั้นความเสรีต่าง ๆ ปรากฏว่าความจุความร้อนต่อโมล $C_v = fR/2$ เมื่อ f คือ จำนวนระดับขั้นความเสรี ในกรณีของแข็งตามทฤษฎีของดูลองและเปอตีตจะหาค่าได้ถูกต้องที่อุณหภูมิสูง นอกจากนี้ตามทฤษฎีไอน์สไตน์ซึ่งพิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุญาตของแข็งในระดับพลังงานใด ๆ มีความถี่เท่ากัน และสั่นเชื่อมโยงกันได้ทั้ง 3 มิติจะหาค่าได้ถูกต้องที่อุณหภูมิสูงและปานกลาง ส่วนทฤษฎีเดอบายพิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาคซึ่งไม่อิสระ แต่มีความถี่โดยเฉพาะชุดหนึ่งซึ่งต่อเนื่อง จะหาค่าได้ถูกต้องที่อุณหภูมิต่ำ

กิจกรรมการเรียนที่ 4

1. ทบทวนเนื้อหาหัวข้อที่ 4 จากตำราเรียนด้วยตนเองแบบโปรแกรมสำหรับกระบวนวิชานี้ (รหัสการพิมพ์ 29241) หน้า 440-475

2. เปรียบเทียบความสัมพันธ์ของพลังงานภายในกับอุณหภูมิเฉพาะของกลุ่มในกรณีของก๊าซกับของแข็งตามทฤษฎีไอน์สไตน์และทฤษฎีเดอบาย

3. แสดงการหาความจุความร้อนจากพลังงานภายในที่ได้จากกิจกรรมข้อ 2 ข้างต้น

4. อธิบายกระบวนการลบล้างสภาพแม่เหล็กแบบแอเดียแบติกจะทำให้อุณหภูมิของสารชนิดใดเปลี่ยนแปลงไปได้อย่างไร

การประเมินผลท้ายบทที่ 8

1. จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องจากคำถามต่อไปนี้

(ดูคำถามใน **ทดสอบ 8** กรอบที่ 8-124 ถึง 8-127 ในหน้า 484-486 ในตำรารหัสการพิมพ์ 29241)

2. จงทำ**แบบฝึกหัด 8** ในกรอบที่ 8-128 ถึง 8-133 ในหน้า 486-490 ในตำรารหัสการพิมพ์ 29241